



**Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο**  
**Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών**  
**Τομέας Ρευστών**  
**Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών**  
**Μονάδα Παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής**  
**& Βελτιστοποίησης**

**ΕΝΤΟΠΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΜΕΤΩΠΟΥ PARETO ΣΤΗΝ**  
**ΠΟΛΥΚΡΙΤΗΡΙΑΚΗ ΑΕΡΟΔΥΝΑΜΙΚΗ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΜΕ**  
**ΜΕΘΟΔΟ NEWTON ΜΕ ΑΠΟΚΟΠΗ**

Διπλωματική Εργασία

**Μάριος Καψής**

Επιβλέπων: Κυριάκος Χ. Γιαννάκογλου , Καθηγητής ΕΜΠ

Αθήνα, 2014





ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ  
ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ  
ΤΟΜΕΑΣ ΡΕΥΣΤΩΝ  
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΘΕΡΜΙΚΩΝ ΣΤΡΟΒΙΛΟΜΗΧΑΝΩΝ  
ΜΟΝΑΔΑ ΠΑΡΑΛΛΗΛΗΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ  
ΡΕΥΣΤΟΔΥΝΑΜΙΚΗΣ & ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ

## **ΕΝΤΟΠΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΜΕΤΩΠΟΥ PARETO ΣΤΗΝ ΠΟΛΥΚΡΙΤΗΡΙΑΚΗ ΑΕΡΟΔΥΝΑΜΙΚΗ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΜΕ ΜΕΘΟΔΟ NEWTON ΜΕ ΑΠΟΚΟΠΗ**

**Μάριος Καψής**

**Επιβλέπων: Κυριάκος Χ. Γιαννάκογλου, Καθηγητής ΕΜΠ**

**Αθήνα, Ιούλιος 2014**

### **Περίληψη**

Η παρούσα διπλωματική εργασία αφορά τον εντοπισμό των βέλτιστων λύσεων ενός προβλήματος βελτιστοποίησης πολλών στόχων χρησιμοποιώντας αιτιοκρατικές μεθόδους, δηλαδή μεθόδους που χρησιμοποιούν την κλίση της συνάρτησης στόχου. Συγκεκριμένα, η εργασία στηρίχτηκε στην εργασία [1], στην οποία αποδεικνύεται ότι από βέλτιστη λύση υπάρχει η δυνατότητα να προβλεφθεί η θέση μιας γειτονικής λύσης στο μέτωπο κατά Pareto. Αυτό πραγματοποιείται με την επίλυση ενός συστήματος, το οποίο περιλαμβάνει τις πρώτες και τις δεύτερες παραγώγους των συναρτήσεων-στόχων και περιορισμών του προβλήματος. Σε μια προσπάθεια περιορισμού του υψηλού κόστους των μητρώων δεύτερων παραγώγων, στη παρούσα εργασία συνδυάστηκε η επίλυση του συστήματος με τη χρήση της μεθόδου συζυγών κλίσεων και τη μέθοδο Newton με αποκοπή. Στην εργασία αυτή μελετήθηκαν προβλήματα με περιορισμούς που εισάγονται από φραγμένα πεδία ορισμού των μεταβλητών σχεδιασμού.

Αρχικά γίνεται μια μικρή αναφορά στον τρόπο με τον οποίο δημιουργείται ένα μέτωπο βέλτιστων λύσεων, γνωστό ως μέτωπο κατά Pareto. Έπειτα, παρουσιάζεται ένας εναλλακτικός αιτιοκρατικός τρόπος εύρεσης του μετώπου, ο οποίος αποτελεί το κεντρικό θέμα της εργασίας. Αφού αναλυθεί από μαθηματική σκοπιά, ακολουθεί η σκιαγράφηση του αλγορίθμου αριθμητικής επίλυσης με τη μέθοδο Newton με αποκοπή που προαναφέρθηκε.

Στη συνέχεια, πραγματοποιούνται κάποιες προκαταρκτικές εφαρμογές σε απλά μαθηματικά προβλήματα βελτιστοποίησης δύο στόχων. Για την ακρίβεια, η προτεινόμενη μέθοδος εφαρμόζεται σε δύο κυρτά μαθηματικά προβλήματα και σε ένα μη κυρτό. Τα αποτελέσματα της μεθόδου συγκρίνονται με τα αντίστοιχα αποτελέσματα ενός εξελικτικού αλγορίθμου, ο οποίος έχει αναπτυχθεί από τη ΜΠΥΡ&Β ΕΜΠ, και όπου είναι δυνατό με την αναλυτική λύση του μετώπου βέλτιστων λύσεων.

Η επόμενη φάση περιλαμβάνει την εφαρμογή σε προβλήματα αεροδυναμικής βελ-

τιστοποίησης δύο στόχων. Συγκεκριμένα, επιλύθηκαν δύο προβλήματα ροής γύρω από αεροτομή. Στο πρώτο, οι δύο στόχοι ήταν η μεγιστοποίηση του συντελεστή άνωσης και η ελαχιστοποίηση της απόκλισης του εμβαδού της αεροτομής από μια συγκεκριμένη τιμή. Στο δεύτερο, ο ένας στόχος πάλι ήταν η μεγιστοποίηση του συντελεστή άνωσης ενώ ο δεύτερος ήταν η ελαχιστοποίηση του συντελεστή οπισθέλκουσας. Και στα δύο προβλήματα έγινε χρήση της μεθόδου Newton με αποκοπή και διερευνήθηκε το υπολογιστικό κόστος της προτεινόμενης μεθόδου.

Ο αλγόριθμος που αναπτύχθηκε συμπεριλαμβάνει και την επίλυση προβλημάτων περισσότερων των δύο στόχων. Μάλιστα, πραγματοποιήθηκαν δοκιμές για μαθηματικά προβλήματα τριών στόχων, χωρίς όμως να γίνει σε βάθος διερεύνηση. Με άλλα λόγια, με αυτή την εργασία έχουν θεμελιωθεί οι βάσεις για την επέκταση του αλγορίθμου για προβλήματα με επιπλέον περιορισμούς, καθώς και για τη μελέτη προβλημάτων τριών ή περισσότερων στόχων.



NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY OF ATHENS  
SCHOOL OF MECHANICAL ENGINEERING  
FLUIDS DEPARTMENT  
LABORATORY OF THERMAL TURBOMACHINES  
PARALLEL CFD & OPTIMIZATION UNIT

## **TRACING THE PARETO FRONT IN MULTI-OBJECTIVE OPTIMIZATION USING THE TRUNCATED NEWTON METHOD**

**Marios Kapsis**

Advisor: Kyriakos C. Giannakoglou, Professor NTUA

Athens, July 2014

### Abstract

This diploma thesis investigates the tracing of the Pareto front using deterministic (gradient-based) optimization methods. It was based on the work [1], in which it was proven that it is plausible, using the information of a known optimized solution, to predict the position of another optimized solution on the Pareto front. This can be achieved by solving a system which consists of the first and second order derivatives of the objective and constrain functions. The adjoint differentiation method was preferred when calculating the first-order derivatives, while the truncated Newton method was used in order to reduce the excessive computational cost of the hessian matrix. The examined optimization problems included only constraints which are introduced by the design variable boundaries.

Firstly, there is a brief introduction in optimization methods and the creation of a Pareto front in deterministic optimization. Then, the theory on which this thesis is based is presented.

Secondly, some preliminary applications on mathematical two-objective optimization problems take place. Two of them are convex problems and one of them is concave. The results of the proposed method are compared with those of an evolutionary algorithm created by the PCopt/NTUA and with the analytical solutions, wherever it was feasible.

After the preliminary runs, two CFD problems were examined. In both problems, the target was the optimal shape of an airfoil according to two objectives. In the first problem, the first objective was the lift coefficient maximization while the second one was the minimization of the airfoil's surface's divergence from a target-value. In the second problem, the first objective was again the maximization of the lift coefficient and the second objective was the minimization of the drag coefficient. In both cases, the truncated Newton method was applied.

The developed algorithm can also handle optimization problems with more than

two objectives. There were some trials done for three-objectives problems, without attempting an in depth investigation. In other words, in this thesis, the bases of extending the algorithm in order to be capable of handling constrained problems with additional constraints and problems with more than two objectives have been set.

## **Ευχαριστίες**

Η παράδοση της διπλωματικής μου εργασίας σηματοδοτεί την ολοκλήρωση ενός σημαντικού κεφάλαιου της ζωής μου που δεν είναι άλλο από την πενταετή προπτυχιακή φοίτησή μου στο τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών ΕΜΠ. Αισθάνομαι ιδιαίτερη ικανοποίηση βλέποντας τις προσπάθειές μου να ανταμείβονται, όμως, πιστεύω, δεν θα τα είχα καταφέρει χωρίς το πλήθος ατόμων που με στήριξε όλα αυτά τα χρόνια.

Αρχικά, οφείλω να ευχαριστήσω τους γονείς μου, οι οποίοι κατά τη διάρκεια των σπουδών μου παρείχαν τα απαραίτητα εφόδια, πνευματικά και υλικά, που συνέβαλαν στην επιτυχία μου. Φυσικά, κοντινοί συγγενείς και φίλοι συνέβαλαν τα μέγιστα, ο καθένας με τον τρόπο του, ώστε να ανταποκριθώ με επιτυχία στις υποχρεώσεις μου.

Σαφώς, βασικός συντελεστής όλης αυτής της προσπάθειας είναι ο καθηγητής Κ. Χ. Γιαννάκογλου. Τον ευχαριστώ για την ευκαρία που μου έδωσε να εργαστώ πάνω σε ένα σύγχρονο θέμα και να γίνω μέλος μιας ομάδας με διεθνή αναγνώριση. Μέσα από αυτή τη διαδικασία αποκόμισα πολύτιμες γνώσεις και εμπειρίες για τη συνέχεια και ανέπτυξα χρήσιμες για έναν ερευνητή ικανότητες. Επίσης, πέρα από συνεργάσιμος επιβλέπων καθηγητής της εργασίας, όλα αυτά τα χρόνια αποτέλεσε καθοδηγητής, πρόθυμος να βοηθήσει και να συμβουλέψει για θέματα που αφορούν τις σπουδές και τη σταδιοδρομία μου.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω τη Διδάκτορα Ασούτη Βαρβάρα, τον Διδάκτορα Παπαδημητρίου Δημήτριο, τον Υποψήφιο Διδάκτορα Σαμούχο Κωνσταντίνο και τον συμφοιτητή μου Καψούλη Δημήτριο, καθώς και όλα τα υπόλοιπα μέλη της ΜΠΥΡ&Β/ΕΜΠ, για την άμεση και χρησιμότερη βοήθειά τους όποτε την είχα ανάγκη.





## Ακρωνύμια

ΕΜΠ	Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
ΕΘΣ	Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών
ΜΠΥΡ&Β	Μονάδα Παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής & Βελτιστοποίησης
ΥΡΔ	Υπολογιστική Ρευστοδυναμική
<hr/>	
ALM	Augmented Lagrange Method
CFD	Computational Fluid Dynamics
CG	Conjugate Gradient
CP	Control Point
KKT	Karush Kuhn Tucker
LTT	Lab. of Thermal Turbomachinery
NTUA	National Technical University of Athens
PCopt	Parallel CFD & Optimization unit
SD	Steepest Descent
TN	Truncated Newton



# Περιεχόμενα

<b>Περιεχόμενα</b>	<b>i</b>
<b>1 Εισαγωγή</b>	<b>1</b>
1.1 Σκοπός της Διπλωματικής Εργασίας . . . . .	1
1.2 Δομή της Διπλωματικής Εργασίας . . . . .	2
<b>2 Εισαγωγή στη Βελτιστοποίηση</b>	<b>3</b>
2.1 Η Έννοια της Βελτιστοποίησης . . . . .	3
2.2 Οι Δύο Βασικές Κατηγορίες των Μεθόδων Βελτιστοποίησης . . . . .	4
<b>3 Εντοπισμός του Μετώπου Pareto στην Αιτιοκρατική Βελτιστοποίηση</b>	<b>7</b>
3.1 Η Βασική Ιδέα . . . . .	7
3.2 Μαθηματική Υλοποίηση . . . . .	9
3.3 Αλγόριθμος Αριθμητικής Επίλυσης . . . . .	17
3.4 Εναλλακτική Προσέγγιση της Μεθόδου Πρόβλεψης-Διόρθωσης . . . . .	22
<b>4 Διερευνητικές Εφαρμογές της Μεθόδου σε Απλά Μαθηματικά Προβλήματα Δύο Στόχων</b>	<b>25</b>
4.1 Μαθηματικό Πρόβλημα Α . . . . .	26
4.2 Μαθηματικό Πρόβλημα Β . . . . .	38
4.3 Μαθηματικό Πρόβλημα Γ . . . . .	44
<b>5 Εφαρμογές σε Προβλήματα Ρευστομηχανικής Δύο Στόχων</b>	<b>51</b>
5.1 Ρευστομηχανικό Πρόβλημα Α . . . . .	51
5.1.1 Υπολογισμός Πρώτου Στόχου και των Παραγώγων του . . . . .	53
5.1.2 Υπολογισμός Δεύτερου Στόχου και των Παραγώγων του . . . . .	54

5.1.3 Εφαρμογή της Προτεινόμενης Μεθόδου . . . . .	55
5.2 Ρευστομηχανικό Πρόβλημα Β . . . . .	65
5.2.1 Εφαρμογή της Προτεινόμενης Μεθόδου . . . . .	65
<b>6 Συμπεράσματα και Προτάσεις Περαιτέρω Έρευνας</b>	<b>73</b>
<b>Α' Ορισμοί και Βασικές Μέθοδοι Βελτιστοποίησης</b>	<b>77</b>
Α'.1 Η Έννοια της Κυριαρχίας στο Μέτωπο κατά Pareto . . . . .	77
Α'.2 Η μέθοδος των Βαρών σε Μη-Κυρτά Προβλήματα . . . . .	79
Α'.3 Μέθοδοι Ανίχνευσης κατά Γραμμή . . . . .	81
Α'.3.1 Μέθοδος Απότομης Καθόδου . . . . .	81
Α'.3.2 Μέθοδος των Συζυγών Κλίσεων για Γραμμικά προβλήματα . . . . .	82
Α'.4 Βελτιστοποίηση με Περιορισμούς . . . . .	84
Α'.4.1 Η Επαυξημένη Συνάρτηση Lagrange . . . . .	84
Α'.4.2 Οι Συνθήκες Karush-Kuhn-Tucker (KKT) . . . . .	85
Α'.4.3 Επαυξημένη Μέθοδος με Πολλαπλασιαστές Lagrange (ALM) για Περιορισμούς Ισότητας . . . . .	87
<b>Β' Οδηγίες για την Επιλογή Παραμέτρων στην ALM</b>	<b>91</b>
Β'.1 Επιλογή των Παραμέτρων της ALM . . . . .	91
Β'.2 Επιλογή Κριτηρίων Σύγκλισης της ALM . . . . .	94
<b>Γ' Μαθηματικά Εργαλεία</b>	<b>97</b>
Γ.1 Βασικό Θεώρημα Πεπλεγμένων Συναρτήσεων . . . . .	97
Γ.1.1 Εφαρμογή . . . . .	98
Γ.2 Καμπύλες μέσω Πολυωνύμων Bezier-Bernstein . . . . .	100
Γ.2.1 Παράγωγοι ως προς τις Συντεταγμένες των Σημείων Ελέγχου . . . . .	101
<b>Βιβλιογραφία</b>	<b>103</b>

# Κεφάλαιο 1

## Εισαγωγή

### 1.1 Σκοπός της Διπλωματικής Εργασίας

Τις τελευταίες δεκαετίες, η βελτιστοποίηση προϊόντων με χρήση ηλεκτρονικών υπολογιστών έχει εμφανίσει ιδιαίτερη άνοδο καθώς η αυξανόμενη υπολογιστική ισχύς τους δίνει τη δυνατότητα επίλυσης ολοένα και πολυπλοκότερων προβλημάτων. Ωστόσο, δεν παύει η μείωση του χρόνου εκτέλεσης της διαδικασίας επίλυσης να αποτελεί μείζον θέμα, ειδικά σε προβλήματα υπολογιστικής ρευστομηχανικής.

Στη παρούσα εργασία γίνεται προσπάθεια ανάπτυξης αλγορίθμου ικανού να εντοπίσει το μέγιστο βέλτιστων λύσεων πραγματοποιώντας βήματα πρόβλεψης και διόρθωσης, βασισμένο στη μελέτη που πραγματοποίησαν οι Stephan Schmidt και Volker Schulz. Για την υλοποίησή του χρησιμοποιούνται πρώτης και δεύτερης τάξης παράγωγοι, γεγονός που επιβαρύνει σημαντικά τη μέθοδο από άποψης υπολογιστικού κόστους. Για αυτόν τον λόγο, ο αλγόριθμος αυτός συνοδεύεται από τη χρήση της μεθόδου Newton με αποκοπή σε συνδυασμό με τη μέθοδο συζυγών κλίσεων, σε μια προσπάθεια περιορισμού του υψηλού κόστους υπολογισμού του εσσιανού μητρώου.

Μελετώνται προβλήματα που δεν υπόκεινται σε περιορισμούς ισότητας και ανισότητας, παρά μόνο σε όσους υπεισέρχονται εξαιτίας φραγμένου πεδίου ορισμού των μεταβλητών σχεδιασμού. Δοκιμάζεται η ικανότητα της προτεινόμενης μεθόδου στην επίλυση κυρτών και μη-κυρτών προβλημάτων βελτιστοποίησης σε μαθηματικά προβλήματα και πραγματοποιείται εκτενής διερεύνηση του κόστους σε προβλήματα αεροδυναμικής. Φυσικά, τα αποτελέσματα επαληθεύονται με αυτά πιστοποιημένου λογισμικού, το οποίο έχει αναπτυχθεί στη ΜΠΥΡ&Β/ΕΜΠ, ονομαζόμενο EASY. Παρόλο που στην εργασία αυτή μελετήθηκαν κυρίως προβλήματα βελτιστοποίησης δύο στόχων, το λογισμικό που αναπτύχθηκε μπορεί να εφαρμοστεί και σε προβλήματα περισσότερων στόχων. Η εργασία περιλαμβάνει και ένα μικρό δείγμα εφαρμογής της αναπτυχθείσας μεθόδου σε προβλήματα με τρεις στόχους.

## 1.2 Δομή της Διπλωματικής Εργασίας

- Πρώτο κεφάλαιο: Το παρόν κεφάλαιο, όπου παρουσιάζεται συνοπτικά το αντικείμενο της εργασίας.
- Δεύτερο κεφάλαιο: Εδώ παρουσιάζονται βασικές έννοιες της βελτιστοποίησης, οι ουσιώδεις διαφορές μεταξύ αιτιοκρατικών και στοχαστικών μεθόδων, καθώς και το πρόβλημα προσέγγισης του μετώπου βέλτιστων λύσεων με αιτιοκρατική μέθοδο χρησιμοποιώντας συντελεστές βαρύτητας.
- Τρίτο κεφάλαιο: Γίνεται η περιγραφή της βασικής ιδέας εντοπισμού του μετώπου βέλτιστων λύσεων με μεθόδους πρόβλεψης-διόρθωσης. Στη συνέχεια, παρουσιάζεται η θεωρία η οποία αναπτύχθηκε από τους Stephan Schmidt και Volker Schulz και που αποτελεί τη βάση της εργασίας. Τέλος, αναλύεται ο αλγόριθμος της αριθμητικής επίλυσης της παραπάνω θεωρίας και γίνεται μια επισκόπηση μιας διαφορετικής προσέγγισης της διαδικασίας πρόβλεψης-διόρθωσης.
- Τέταρτο κεφάλαιο: Πλέον πραγματοποιούνται εφαρμογές του αλγορίθμου για μαθηματικά προβλήματα δύο στόχων και μελετάται η ικανότητα του να προσεγγίσει το μέτωπο κατά Pareto συγκρίνοντάς το με τα αντίστοιχα αποτελέσματα εξελικτικού αλγορίθμου. Τα προκύπτοντα συμπεράσματα αποσκοπούν στην καλύτερη διαχείριση ρευστομηχανικών προβλημάτων τα οποία είναι πιο απαιτητικά σε χρόνο από τα απλά μαθηματικά προβλήματα.
- Πέμπτο κεφάλαιο: Παρουσιάζονται δύο προβλήματα ρευστομηχανικής βελτιστοποίησης δύο στόχων στα οποία μελετάται η μεταβολή της γεωμετρίας της αεροτομής κατά μήκος του μετώπου βέλτιστων λύσεων. Εδώ εφαρμόζεται η μέθοδος Newton με αποκοπή και μελετάται εκτενώς το κόστος της προτεινόμενης μεθόδου. Όπως και στο προηγούμενο κεφάλαιο τα αποτελέσματα επαληθεύονται με τα αποτελέσματα εξελικτικού αλγορίθμου.
- Έκτο κεφάλαιο: Εκτιμώνται τα αποτελέσματα που προηγήθηκαν και παρουσιάζονται προτάσεις προς βελτίωση και ιδέες προς διερεύνηση.
- Παράρτημα Α: Γίνεται αναφορά σε βασικά θεωρήματα και μεθόδους της βελτιστοποίησης τα οποία χρησιμοποιούνται στη διπλωματική εργασία.
- Παράρτημα Β: Παρουσιάζονται συνοπτικές συμβουλές σχετικά με τον τρόπο ρύθμισης του βήματος διόρθωσης, έχοντας ως περίπτωση αναφοράς το πρώτο ρευστομηχανικό πρόβλημα που μελετάται στο πέμπτο κεφάλαιο.
- Παράρτημα Γ: Στο τελευταίο παράρτημα αναφέρονται δύο βασικά μαθηματικά εργαλεία. Το πρώτο είναι ένα βασικό θεώρημα της ανάλυσης πεπλεγμένων συναρτήσεων ενώ το δεύτερο περιγράφει την προσέγγιση μιας καμπύλης μέσω πολυωνύμων Bezier.

## Κεφάλαιο 2

# Εισαγωγή στη Βελτιστοποίηση

### 2.1 Η Έννοια της Βελτιστοποίησης

Βελτιστοποίηση είναι η διαδικασία μεταβολής των παραμέτρων ενός προϊόντος, με σκοπό την τροποποίηση ενός ή περισσότερων χαρακτηριστικών του. Οι μεταβαλλόμενες παράμετροι ονομάζονται **μεταβλητές σχεδιασμού** (design variables) και τα χαρακτηριστικά προς τροποποίηση **στόχοι** (targets). Για παράδειγμα, για μια πτέρυγα αεροπλάνου οι μεταβλητές σχεδιασμού μπορούν να είναι τα σημεία που ορίζουν τη γεωμετρία της επιφάνειας της ενώ ως στόχος μπορεί να τεθεί η μεγιστοποίηση της άνωσης ή η ελαχιστοποίηση της οπισθέλκουσας.

Ωστόσο, συνήθως σε προβλήματα βελτιστοποίησης δεν υπάρχει ένας και μοναδικός στόχος. Σε βιομηχανικές εφαρμογές, υπάρχει η ανάγκη καθορισμού περισσότερων του ενός χαρακτηριστικών. Μάλιστα, οι επιπρόσθετοι στόχοι πολλές φορές είναι αντικρουόμενοι, δηλαδή η σύγκλιση προς έναν στόχο επιφέρει την απόκλιση από κάποιον άλλον. Επίσης, εκτός από την πολυπλοκότητα των στόχων, σε πραγματικές εφαρμογές υφίστανται **περιορισμοί** (constraints) οι οποίοι αυξάνουν περισσότερο τη δυσκολία του προβλήματος.

Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα που συναντάται σε βιομηχανικές εφαρμογές είναι το εξής: Έστω πτερύγιο ενός αεροπλάνου, του οποίου είναι επιθυμητή η βελτίωση των δύο βασικών αεροδυναμικών χαρακτηριστικών, δηλαδή η αύξηση του συντελεστή άνωσης και η μείωση του συντελεστή οπισθέλκουσας (δύο στόχοι). Υπό σταθερές συνθήκες ροής, δηλαδή σταθερό διάνυσμα της επί άπειρο ταχύτητας του αέρα, αυτό που θα μεταβληθεί είναι η γεωμετρία της πτέρυγας (η οποία καθορίζει τις μεταβλητές σχεδιασμού), λαμβάνοντας παράλληλα υπόψη και την αντοχή της πτέρυγας, δηλαδή να μην είναι υπερβολικά λεπτή (υπεισέρχεται ως περιορισμός). Φυσικά, τα προβλήματα βελτιστοποίησης δεν είναι μόνο αεροδυναμικής φύσεως, αλλά αναφέρονται ακόμα και σε προβλήματα βελτίωσης βαθμού απόδοσης ενός εργοστασίου

ηλεκτροπαραγωγής, μείωση του χρόνου σε μια γραμμή παραγωγής κ.α..

## 2.2 Οι Δύο Βασικές Κατηγορίες των Μεθόδων Βελτιστοποίησης

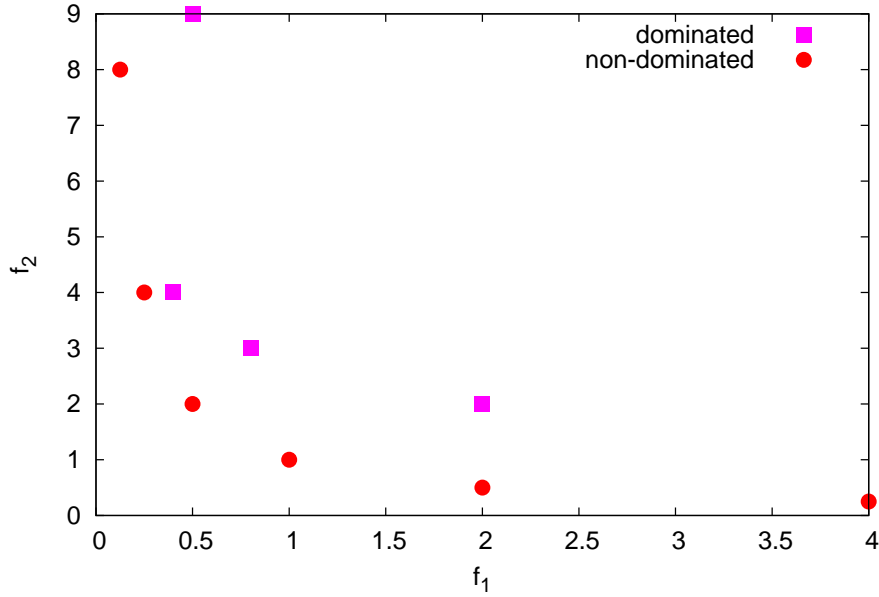
Το κάθε χαρακτηριστικό προς βελτίωση ενός προβλήματος βελτιστοποίησης διατυπώνεται με τη βοήθεια μαθηματικής έκφρασης, η οποία αποτελεί τη **συνάρτηση στόχου** (objective function) ή **συνάρτηση κόστους** (cost function) για προβλήματα ελαχιστοποίησης ή **συνάρτηση καταλληλότητας** (fitness function) για προβλήματα μεγιστοποίησης. Οι τιμές των συναρτήσεων-στόχων αποτελούν το κριτήριο σύμφωνα με το οποίο αναζητείται η βέλτιστη λύση. Οι μέθοδοι βελτιστοποίησης χωρίζονται σε δύο βασικές κατηγορίες, όσον αφορά τον τρόπο εύρεσης βέλτιστων λύσεων: τις στοχαστικές (stochastic) και τις αιτιοκρατικές (deterministic). Οι στοχαστικές μέθοδοι χρησιμοποιούν τεχνικές τυχαϊκής αναζήτησης της βέλτιστης λύσης ενώ οι αιτιοκρατικές υπολογίζουν την παράγωγο της συνάρτησης-στόχου ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού [2] και τη χρησιμοποιούν ώστε να βελτιώσουν την τρέχουσα λύση.

Μια σημαντική διαφορά μεταξύ των δύο μεθόδων είναι ο τύπος του αποτελέσματος το οποίο παράγουν σε προβλήματα πολλών στόχων. Κυρίως οι πληθυσμιακές εκπρόσωποι των στοχαστικών μεθόδων βρίσκουν ένα πλήθος βέλτιστων λύσεων, το οποίο στον χώρο των λύσεων λαμβάνει συνήθως τη μορφή ενός μετώπου, γνωστού ως μετώπου **Pareto**. Αν υποθέσουμε ότι έχουμε ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης δύο στόχων, τότε το μέτωπο Pareto το οποίο προκύπτει διαγράφει μια καμπύλη (σχήμα 2.1). Το μέτωπο δεν είναι μια συνεχής γραμμή, αλλά ένα πλήθος σημείων, τα οποία συνήθως φαίνονται ότι είναι κατανεμημένα πάνω σε μια νοητή καμπύλη, με ενδεχόμενα κενά κατά το μήκος της.

Από την άλλη, οι αιτιοκρατικές μέθοδοι μεταβάλλουν τις μεταβλητές σχεδιασμού λαμβάνοντας υπόψη την τιμή της παραγώγου της συνάρτησης-στόχου. Από τη στιγμή που οι στόχοι είναι αντικρουόμενοι, για κάθε στόχο που εξετάζεται μεμονωμένα προκύπτουν διαφορετικά σύνολα τιμών των μεταβλητών σχεδιασμού για τις αντίστοιχες βέλτιστες λύσεις. Για τον λόγο αυτόν, σε τέτοια προβλήματα συχνά προστίθενται οι συναρτήσεις κόστους πολλαπλασιασμένες με συντελεστές βαρύτητας, συνθέτοντας ένα πρόβλημα ενός στόχου. Δηλαδή, το εξής πρόβλημα:

$$\min \begin{cases} f_1(\vec{b}) \\ \vdots \\ f_M(\vec{b}) \end{cases} \quad (2.1)$$





Σχήμα 2.1: Μέτωπο Pareto σε πρόβλημα δύο στόχων (κυκλικά σημεία). Τα τετραγωνικά σημεία αποτελούν κυριαρχούμενες λύσεις από τα μέλη του μετώπου βέλτιστων λύσεων (παράρτημα Α.1).

μετατρέπεται στο εξής πρόβλημα ελαχιστοποίησης:

$$\min F(\vec{b}) = \sum_{i=1}^M \omega_i f_i(\vec{b}) \quad (2.2)$$

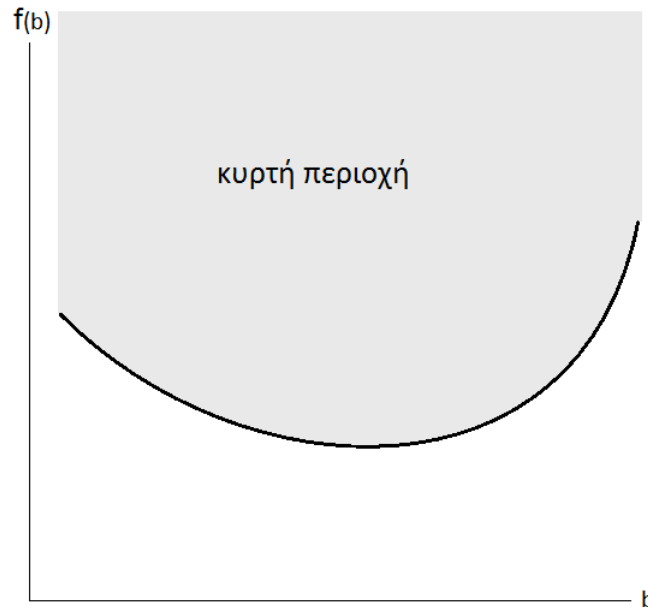
όπου  $M$  το πλήθος των στόχων,  $f_{i,\dots,M}$  οι συναρτήσεις-στόχων,  $\omega_{i,\dots,M}$  οι συντελεστές βαρύτητας και  $\vec{b}$  το διάνυσμα των μεταβλητών σχεδιασμού.

Ωστόσο, βασική προϋπόθεση ώστε μια αιτιοκρατική μέθοδος να εντοπίσει ενδιάμεσα σημεία, και όχι μόνο τα άκρα, του μετώπου Pareto είναι το πρόβλημα να είναι **κυρτό** (convex)[2, 3], δηλαδή, οι συναρτήσεις-στόχοι να είναι κυρτές. Σε προβλήματα ελαχιστοποίησης μια κυρτή εξίσωση ορίζεται ως εξής:

$$f(t\vec{b}_1 + (1-t)\vec{b}_2) \leq tf(\vec{b}_1) + (1-t)f(\vec{b}_2) \forall \vec{b}_1, \vec{b}_2 \in \vec{B} \subset \mathbf{R}^N, \forall t \in [0, 1] \quad (2.3)$$

Πρακτικά, σε βαθμωτή συνάρτηση μιας μεταβλητής, αυτό σημαίνει ότι η περιοχή πάνω από τη συνάρτηση είναι κυρτή (σχήμα 2.2). Σε προβλήματα με περιορισμούς, πρέπει να ισχύει το ίδιο και για τις συναρτήσεις των περιορισμών [3]. Αποδεικνύεται ότι σε μη-κυρτά προβλήματα δύο στόχων η ελαχιστοποίηση της συνάρτησης 2.2 παράγει ως βέλτιστη λύση ένα εκ των δύο ακραίων σημείων του ενιαίου μετώπου βέλτιστων λύσεων (παράρτημα Α.2). Σε προβλήματα περισσότερων στόχων, η αι-

τιοκρατική μέθοδος παράγει λύσεις που ανήκουν στα ακραία όρια του μετώπου βέλτιστων λύσεων.



Σχήμα 2.2: Παράδειγμα κυρτής βαθμωτής συνάρτησης μιας μεταβλητής σε πρόβλημα ελαχιστοποίησης. Σε μια κυρτή περιοχή, το ευθύγραμμο τμήμα το οποίο έχει άκρα δύο οποιαδήποτε σημεία της δεν τέμνει το σύνορο της.

Από τη φύση τους, οι αιτιοκρατικοί αλγόριθμοι δεν μπορούν να παράξουν μέτωπα βέλτιστων λύσεων. Στο ίδιο πρόβλημα βελτιστοποίησης, μια αιτιοκρατική μέθοδος θα υπολογίσει μια βέλτιστη λύση, η οποία θα ανήκει στην καμπύλη που διαγράφει το μέτωπο Pareto. Αν το πρόβλημα είναι κυρτό, μεταβάλλοντας τα βάρη  $\omega_i$  γίνεται εφικτή η εύρεση άλλων σημείων που ανήκουν στο μέτωπο βέλτιστων λύσεων, δηλαδή είναι δυνατή η εύρεση του μετώπου με χρήση αιτιοκρατικών αλγορίθμων.

Απαίτηση της βιομηχανίας δεν είναι μόνον η εύρεση των βέλτιστων λύσεων, αλλά και η επίτευξη της βελτιστοποίησης σε περιορισμένο χρόνο και υπολογιστικό κόστος. Η εύρεση του μετώπου βέλτιστων λύσεων απαιτεί μεγάλο πλήθος επιλύσεων των εξισώσεων κατάστασης που διέπουν τη μηχανική του προϊόντος, όπως επίσης και η εύρεση των παραγώγων. Για αυτόν τον λόγο, είναι ιδιαίτερα ασύμφορη η εύρεση του μετώπου βέλτιστων λύσεων χρησιμοποιώντας αιτιοκρατικές μεθόδους μεταβάλλοντας τους συντελεστές βαρύτητας και επαναλαμβάνοντας τα τρεξίματα πολλές φορές, ειδικά όταν οι στοχαστικοί αλγόριθμοι μπορούν να εντοπίσουν το μέτωπο κατά Pareto με ένα τρέξιμο. Άλλωστε, έχει παρατηρηθεί ότι τα αποτελέσματα που προκύπτουν δεν παρουσιάζουν πάντα ομοιόμορφη κατανομή, παράγοντας κακής ποιότητας μέτωπο [1]. Ο τρόπος με τον οποίο είναι πραγματοποιήσιμος ο εντοπισμός του μετώπου αιτιοκρατικά δίχως να χρησιμοποιούνται βάρη αποτελεί το κύριο αντικείμενο της παρούσας διπλωματικής εργασίας.

## Κεφάλαιο 3

# Εντοπισμός του Μετώπου Pareto στην Αιτιοκρατική Βελτιστοποίηση

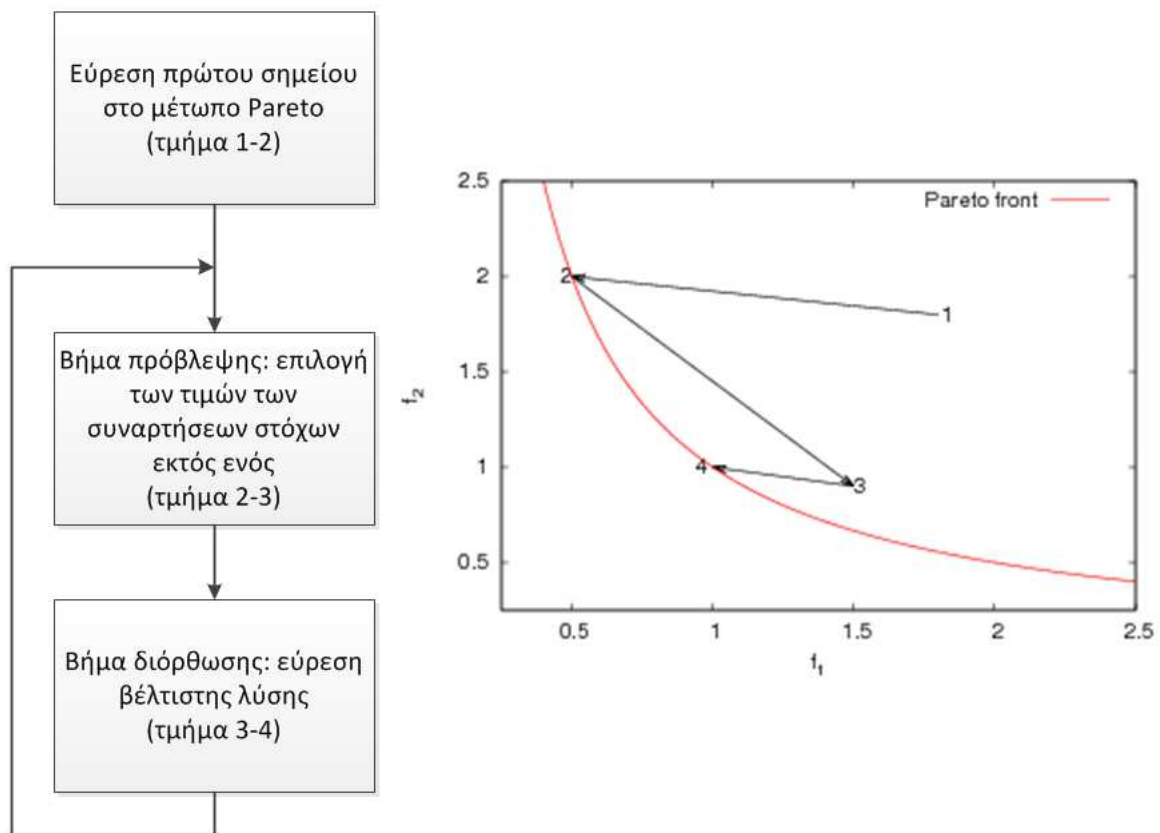
### 3.1 Η Βασική Ιδέα

Στο προηγούμενο κεφάλαιο (2) αναφέρθηκε ότι, σε κυρτά προβλήματα, η εύρεση του μετώπου βέλτιστων λύσεων μπορεί να γίνει χρησιμοποιώντας αιτιοκρατικές μεθόδους μεταβάλλοντας τα βάρη  $\omega_k, \forall k \in [1, M]$  της συνάρτησης 2.2. Ωστόσο, αυτή η μέθοδος είναι ιδιαίτερα χρονοβόρα και δαπανηρή. Μια διαφορετική προσέγγιση θα ήταν η κίνηση επί του μετώπου επιλέγοντας τις τιμές των συναρτήσεων στόχων. Συγκεκριμένα, επιλέγονται οι τιμές για όλους τους στόχους εκτός ενός, για τον οποίο πρέπει να βρεθεί η πρόποσα τιμή ώστε το νέο σημείο να ανήκει στο μέτωπο βέλτιστων λύσεων.

Για να υλοποιηθεί η παραπάνω ιδέα οι συναρτήσεις-στόχοι που λαμβάνουν συγκεκριμένη τιμή υποβαθμίζονται σε συναρτήσεις περιορισμών ισότητας. Ως αποτέλεσμα, ένας τρόπος διαχείρισης του προβλήματος βελτιστοποίησης που προκύπτει είναι με χρήση μεθόδων Σειριακής Ελαχιστοποίησης Χωρίς Περιορισμούς (Sequential Unconstrained Minimization Techniques-SUMT) (παράρτημα Α'4.3). Ουσιαστικά, οι συναρτήσεις περιορισμών εντάσσονται μαζί με τη συνάρτηση του στόχου ελαχιστοποίησης σε μια ενιαία συνάρτηση κόστους, η οποία απαρτίζεται από τη συνάρτηση-στόχο επαυξημένη κατά έναν όρο ποινής. Ο όρος ποινής εκπροσωπεί τους περιορισμούς ισότητας και μηδενίζεται όταν αυτοί ικανοποιούνται. Μια παραλλαγή των μεθόδων SUMT είναι η επαυξημένη μέθοδος με πολλαπλασιαστές Lagrange (ALM), η οποία θυμίζει την επαυξημένη συνάρτηση Lagrange (παράρτημα Α'4.1) επαυξημένη κατά έναν όρο ποινής [3, 2].

Από την άλλη, αντί να γίνεται απευθείας εύρεση του επόμενου σημείου επί του με-

τώπου βέλτιστων λύσεων, μπορεί να πραγματοποιείται μία πρόβλεψη, η οποία θα ακολουθείται από μια διόρθωση (σχήμα 3.1). Οι παραπάνω μέθοδοι χρησιμοποιούνται μόνο στο βήμα διόρθωσης, στοχεύοντας με τον τρόπο αυτόν στην περιορισμένη χρήση τους. Στην παρούσα εργασία, πραγματοποιείται η μελέτη της μεθόδου πρόβλεψης-διόρθωσης και διερευνάται η αποδοτικότητά της.



Σχήμα 3.1: Διαδικασία πρόβλεψης-διόρθωσης για τον εντοπισμό του μετώπου βέλτιστων λύσεων. Η εύρεση της πρώτης βέλτιστης λύσης (σημείο 2) μπορεί να παραλείπεται, με την έννοια ότι μπορεί να είναι ήδη γνωστή και αναζητείται η εύρεση και άλλων σημείων του μετώπου. Το σημείο 3, όπως παρουσιάζεται και στο σχήμα, δεν είναι απαραίτητο να αποτελεί βέλτιστη λύση. Όπως θα δειχθεί παρακάτω, για το βήμα πρόβλεψης γίνεται μια πρώτης τάξης προσέγγιση των συνθηκών ΚΚΤ (παράρτημα Α.4.2), με αποτέλεσμα να μη λαμβάνεται υπόψη η καμπυλότητα του μετώπου Pareto.

## 3.2 Μαθηματική Υλοποίηση

Έστω το εξής κυρτό πρόβλημα βελτιστοποίησης πολλών στόχων  $M$  και περιορισμών ισότητας  $M_c$  και ανισο-ισότητας  $M_g$ :

$$\begin{aligned} \min \quad & \begin{cases} f_1(\vec{b}) \\ \vdots \\ f_M(\vec{b}) \end{cases} \\ \text{s.t.}^1 \quad & c_j(\vec{b}) = 0, \forall j \in [1, M_c] \\ & g_j(\vec{b}) \geq 0, \forall j \in [1, M_g] \end{aligned} \quad (3.1)$$

Για να μπορεί να επιλυθεί με μέθοδο αιτιοκρατικής βελτιστοποίησης, πρέπει, καταρχήν, να διαμορφωθεί ως ένα πρόβλημα ενός στόχου. Στο κεφάλαιο που προηγήθηκε, όλες οι συναρτήσεις κόστους αθροίζονταν σε μία. Εδώ ακολουθείται μια διαφορετική προσέγγιση. Συγκεκριμένα, το παραπάνω πρόβλημα (πρόβλημα 3.1) διατυπώνεται στη μορφή ενός προβλήματος βελτιστοποίησης ενός στόχου, λ.χ. του πρώτου από τους προαναφερθέντες  $M$  στόχους χωρίς να είναι υποχρεωτικά αυτός, το οποίο πλέον υπόκειται σε  $M-1$  επιπρόσθετους περιορισμούς ισότητας. Δηλαδή, γράφεται ως εξής:

$$\begin{aligned} \min \quad & f_1(\vec{b}) \\ \text{s.t.} \quad & f_k(\vec{b}) - \hat{f}_k = 0, \forall k \in [2, M] \\ & c_j(\vec{b}) = 0, \forall j \in [1, M_c] \\ & g_j(\vec{b}) \geq 0, \forall j \in [1, M_g] \end{aligned} \quad (3.2)$$

Με άλλα λόγια, υποβαθμίζονται όλοι οι στόχοι εκτός από έναν σε περιορισμούς ισότητας. Με τον τρόπο αυτόν απαιτείται η ελαχιστοποίηση της  $f_1$  με τις υπόλοιπες συναρτήσεις-στόχοι ( $f_k, \forall k \in [2, M]$ ) να έχουν συγκεκριμένες τιμές ( $\hat{f}_k, \forall k \in [2, M]$ ). Με τη διατύπωση 3.2, μπορεί να εντοπιστεί ένα σημείο του μετώπου Pareto χωρίς ο χρήστης της μεθόδου να προσδίδει τιμές στους συντελεστές βαρύτητας  $\omega_i$  (πρόβλημα 3.1), αλλά στις τιμές των  $M-1$  στόχων (πρόβλημα 3.2). Επισημαίνεται ξανά, ότι λόγω σύμβασης αναφέρεται η  $f_1$  ως ο στόχος προς ελαχιστοποίηση, δηλαδή μπορεί να επιλεγεί οποιοσδήποτε άλλος στόχος αντί του πρώτου, χωρίς βλάβη της γενικότητας.

---

<sup>1</sup>subject to

Οι συνθήκες ΚΚΤ για το αρχικό πρόβλημα (3.1) είναι:

$$\begin{aligned}
\nabla_{\vec{b}} F(\vec{b}, \omega_k, \lambda_c, \mu) &= 0 \\
c_j(\vec{b}) &= 0, \forall j \in [1, M_c] \\
g_j(\vec{b}) &\geq 0, \forall j \in [1, M_g] \\
\mu_j g_j(\vec{b}) &= 0, \forall j \in [1, M_g] \\
\mu_j &\geq 0, \forall j \in [1, M_g]
\end{aligned} \tag{3.3}$$

όπου

$$F(\vec{b}, \omega_k, \lambda_c, \mu) = \sum_{k=1}^M \omega_k f_k(\vec{b}) - \sum_{j=1}^{M_c} \lambda_{c_j} c_j(\vec{b}) - \sum_{j=1}^{M_g} \mu_j g_j(\vec{b}) \tag{3.4α}$$

$$\text{και } \nabla_{\vec{b}} F(\vec{b}, \omega_k, \lambda_c, \mu) = \sum_{k=1}^M \omega_k \nabla_{\vec{b}} f_k(\vec{b}) - \sum_{j=1}^{M_c} \lambda_{c_j} \nabla_{\vec{b}} c_j(\vec{b}) - \sum_{j=1}^{M_g} \mu_j \nabla_{\vec{b}} g_j(\vec{b}) \tag{3.4β}$$

Βοηθά, χωρίς να είναι περιοριστικό, να υποτεθεί ότι  $\sum_{k=1}^M \omega_k = 1$ .

Οι συνθήκες ΚΚΤ για το επαναδιατυπωμένο πρόβλημα (3.2) είναι:

$$\begin{aligned}
\nabla_{\vec{b}} F(\vec{b}, \lambda_{f_k}, \lambda_c, \mu) &= 0 \\
f_k(\vec{b}) - \hat{f}_k &= 0, \forall k \in [2, M] \\
c_j(\vec{b}) &= 0, \forall j \in [1, M_c] \\
g_j(\vec{b}) &\geq 0, \forall j \in [1, M_g] \\
\mu_j g_j(\vec{b}) &= 0, \forall j \in [1, M_g] \\
\mu &\geq 0, \forall j \in [1, M_g]
\end{aligned} \tag{3.5}$$

όπου

$$F(\vec{b}, \lambda_{f_k}, \lambda_c, \mu) = f_1(\vec{b}) - \sum_{k=2}^M \lambda_{f_k} (f_k(\vec{b}) - \hat{f}_k) - \sum_{j=1}^{M_c} \lambda_{c_j} c_j(\vec{b}) - \sum_{j=1}^{M_g} \mu_j g_j(\vec{b}) \tag{3.6}$$

$$\text{και } \nabla_{\vec{b}} F(\vec{b}, \lambda_{f_k}, \lambda_c, \mu) = \nabla_{\vec{b}} f_1(\vec{b}) - \sum_{k=2}^M \lambda_{f_k} \nabla_{\vec{b}} f_k(\vec{b}) - \sum_{j=1}^{M_c} \lambda_{c_j} \nabla_{\vec{b}} c_j(\vec{b}) - \sum_{j=1}^{M_g} \mu_j \nabla_{\vec{b}} g_j(\vec{b}) \tag{3.7}$$

Οι Schmidt και Schulz [1], με κατάλληλη παραμετροποίηση, απέδειξαν με χρήση των ΚΚΤ συνθηκών (παράρτημα Α.22) ότι οι δύο τρόποι διατύπωσης (προβλήματα 3.1, 3.2) είναι ισοδύναμοι από μαθηματικής σκοπιάς. Από την αναγκαία συνθήκη πρώτης τάξης για την ύπαρξη ακροτάτου για το αρχικό πρόβλημα (σύστημα 3.3) προκύπτει:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^M \omega_k \nabla_{\vec{b}} f_k(\vec{b}) - \sum_{j=1}^{M_c} \lambda_{c_j} \nabla_{\vec{b}} c_j(\vec{b}) - \sum_{j=1}^{M_g} \mu_j \nabla_{\vec{b}} g_j(\vec{b}) = 0 \Leftrightarrow \\ \nabla_{\vec{b}} f_1(\vec{b}) - \sum_{k=2}^M \frac{-\omega_k}{\omega_1} \nabla_{\vec{b}} f_k(\vec{b}) - \sum_{j=1}^{M_c} \frac{\lambda_{c_j}}{\omega_1} \nabla_{\vec{b}} c_j(\vec{b}) - \sum_{j=1}^{M_g} \frac{\mu_j}{\omega_1} \nabla_{\vec{b}} g_j(\vec{b}) = 0 \end{aligned} \quad (3.8)$$

Από την άλλη, για το επαναδιατυπωμένο πρόβλημα (σύστημα 3.5) ισχύει:

$$\nabla_{\vec{b}} f_1(\vec{b}) - \sum_{k=2}^M \lambda_{f_k} \nabla_{\vec{b}} f_k(\vec{b}) - \sum_{j=1}^{M_c} \lambda_{c_j} \nabla_{\vec{b}} c_j(\vec{b}) - \sum_{j=1}^{M_g} \mu_j \nabla_{\vec{b}} g_j(\vec{b}) = 0 \quad (3.9)$$

Χρησιμοποιώντας στην εξίσωση 3.8 την εξής αντιστοιχία:

$$\begin{aligned} \frac{-\omega_k}{\omega_1} &\rightarrow \lambda_{f_k}, \forall k \in [2, M] \\ \frac{\lambda_{c_j}}{\omega_1} &\rightarrow \lambda_{c_j}, \forall j \in [1, M_c] \\ \frac{\mu_j}{\omega_1} &\rightarrow \mu_j, \forall j \in [1, M_g] \end{aligned}$$

είναι εμφανές ότι προκύπτει η εξίσωση 3.9.

Σχετικά με τους περιορισμούς ανισο-ισότητας, λόγω της συμπληρωματικής συνθήκης (παράρτημα Α.22), το ενδιαφέρον επικεντρώνεται για ενεργούς περιορισμούς ανισο-ισότητας, δηλαδή για όσους επαληθεύουν την ισότητα. Ό,τι ακολουθεί αφορά αυτούς τους περιορισμούς και δηλώνεται με τον αστερίσκο (\*).

Έστω ότι ισχύουν τα παρακάτω:

$$\begin{aligned} \vec{z} &= (\hat{f}_2 \quad \dots \quad \hat{f}_M)^T \\ \vec{y} &= (\vec{b} \quad \vec{\lambda}_{f_k} \quad \vec{\lambda}_c \quad \vec{\mu})^T \\ \vec{H}(\vec{z}, \vec{y}) &= \left( \nabla_{\vec{b}} F(\vec{b}, \lambda_{f_k}, \lambda_c, \mu) \quad \vec{f}_k(\vec{b}) - \hat{f}_k \quad \vec{c}(\vec{b}) \quad \vec{g}^*(\vec{b}) \right)^T \end{aligned} \quad (3.10)$$

όπου :

$$F(\vec{b}) = f_1(\vec{b}) - \sum_{k=2}^M \lambda_{f_k} (f_k(\vec{b}) - \hat{f}_k) - \sum_{j=1}^{M_c} \lambda_{c_j} c_j(\vec{b}) - \sum_{j=1}^{M_g^*} \mu_j g_j^*(\vec{b}) \quad (3.11)$$

Θα εφαρμοστεί το βασικό θεώρημα πεπλεγμένων συναρτήσεων (παράρτημα Γ.1) στις συνθήκες KKT όπως διατυπώνονται για το επαναδιατυπωμένο σύστημα (εξισώσεις 3.5 3.10), με σκοπό την έκφραση της μεταβολής των μεταβλητών σχεδιασμού και των πολλαπλασιαστών Lagrange ως προς τη μεταβολή των τιμών των στόχων  $\hat{f}_k \in [2, M]$ . Υπενθυμίζεται ότι το σύστημα που προκύπτει από το θεώρημα πεπλεγμένων συναρτήσεων είναι της μορφής (παράρτημα Γ.1):

$$\begin{aligned} \nabla_{\vec{z}} \vec{g}(\vec{z}) &= -[\nabla_{\vec{y}} \vec{H}(\vec{z}, \vec{g}(\vec{z}))]^{-1} \nabla_{\vec{z}} \vec{H}(\vec{z}, \vec{g}(\vec{z})) \Rightarrow \\ \nabla_{\vec{y}} \vec{H}(\vec{z}, \vec{g}(\vec{z})) \nabla_{\vec{z}} \vec{g}(\vec{z}) &= -\nabla_{\vec{z}} \vec{H}(\vec{z}, \vec{g}(\vec{z})) \end{aligned} \quad (3.12)$$

Για το παραπάνω σύστημα (εξίσωση 3.12) οι επιμέρους όροι αναλύονται ως εξής :

$$\begin{aligned} \nabla_{\vec{z}} \vec{y} &= \left[ \frac{\partial \vec{b}}{\partial \hat{f}_{2, \dots, M}} \quad \frac{\partial \lambda_{f_2, \dots, f_M}}{\partial \hat{f}_{2, \dots, M}} \quad \frac{\partial \lambda_{c_1, \dots, c_{M_c}}}{\partial \hat{f}_{2, \dots, M}} \quad \frac{\partial \mu_{1, \dots, M_g}}{\partial \hat{f}_{2, \dots, M}} \right]^T \\ \nabla_{\vec{z}} \vec{H}(\vec{z}, \vec{y}) &= \left[ \nabla_{\vec{b}, \hat{f}_k}^2 F(\vec{b}, \lambda_{f_k}, \lambda_c, \mu) \quad \nabla_{\hat{f}_k} (\vec{f}_k(\vec{b}) - \hat{f}_k) \quad \nabla_{\hat{f}_k} \vec{c}(\vec{b}) \quad \nabla_{\hat{f}_k} \vec{g}^*(\vec{b}) \right]^T \\ \nabla_{\vec{y}} \vec{H}(\vec{z}, \vec{y}) &= \left[ \nabla_{\vec{b}} \vec{H}(\vec{z}, \vec{y}) \quad \nabla_{\lambda_{f_k}} \vec{H}(\vec{z}, \vec{y}) \quad \nabla_{\lambda_c} \vec{H}(\vec{z}, \vec{y}) \quad \nabla_{\vec{\mu}^*} \vec{H}(\vec{z}, \vec{y}) \right] \end{aligned} \quad (3.13)$$

όπου :

$$\begin{aligned} \nabla_{\vec{b}, \hat{f}_k}^2 F(\vec{b}, \lambda_{f_k}, \lambda_c, \mu) &= \tilde{0} \\ \nabla_{\hat{f}_k} (\vec{f}_k(\vec{b}) - \hat{f}_k) &= -\tilde{I} \\ \nabla_{\hat{f}_k} \vec{c}(\vec{b}) &= \tilde{0} \\ \nabla_{\hat{f}_k} \vec{g}^*(\vec{b}) &= \tilde{0} \end{aligned} \quad (3.14)$$



με  $\tilde{I}$  να είναι ο μοναδιαίος πίνακας. Επίσης ισχύει:

$$\begin{aligned}
\nabla_{\vec{b}} \vec{H}(\vec{z}, \vec{y}) &= \begin{bmatrix} \nabla_{\vec{b}}^2 F(\vec{b}, \lambda_{f_k}, \lambda_c, \mu) \\ \nabla_{\vec{b}} \vec{f}_k(\vec{b}) \\ \nabla_{\vec{b}} \vec{c}(\vec{b}) \\ \nabla_{\vec{b}} \vec{g}^*(\vec{b}) \end{bmatrix} \\
\nabla_{\vec{\lambda}_{f_k}} \vec{H}(\vec{z}, \vec{y}) &= \begin{bmatrix} \nabla_{\vec{b}, \vec{\lambda}_{f_k}}^2 F(\vec{b}, \lambda_{f_k}, \lambda_c, \mu) \\ \tilde{0} \\ \tilde{0} \\ \tilde{0} \end{bmatrix} \\
\nabla_{\vec{\lambda}_c} \vec{H}(\vec{z}, \vec{y}) &= \begin{bmatrix} \nabla_{\vec{b}, \vec{\lambda}_c}^2 F(\vec{b}, \lambda_{f_k}, \lambda_c, \mu) \\ \tilde{0} \\ \tilde{0} \\ \tilde{0} \end{bmatrix} \\
\nabla_{\vec{\mu}} \vec{H}(\vec{z}, \vec{y}) &= \begin{bmatrix} \nabla_{\vec{b}, \vec{\mu}}^2 F(\vec{b}, \lambda_{f_k}, \lambda_c, \mu) \\ \tilde{0} \\ \tilde{0} \\ \tilde{0} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Οι παράγωγοι των πολλαπλασιασμών Lagrange αναπτύσσονται ως εξής:

$$\begin{aligned}
\left[ \frac{\partial \lambda_{f_2, \dots, f_M}}{\partial \hat{f}_2, \dots, \hat{f}_M} \right] &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \lambda_{f_2}}{\partial \hat{f}_2} & \frac{\partial \lambda_{f_2}}{\partial \hat{f}_3} & \cdots & \frac{\partial \lambda_{f_2}}{\partial \hat{f}_M} \\ \frac{\partial \lambda_{f_3}}{\partial \hat{f}_2} & \frac{\partial \lambda_{f_3}}{\partial \hat{f}_3} & \cdots & \frac{\partial \lambda_{f_3}}{\partial \hat{f}_M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \lambda_{f_M}}{\partial \hat{f}_2} & \frac{\partial \lambda_{f_M}}{\partial \hat{f}_3} & \cdots & \frac{\partial \lambda_{f_M}}{\partial \hat{f}_M} \end{bmatrix} \\
\left[ \frac{\partial \lambda_{c_1, \dots, c_{M_c}}}{\partial \hat{f}_2, \dots, \hat{f}_M} \right] &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \lambda_{c_1}}{\partial \hat{f}_2} & \frac{\partial \lambda_{c_1}}{\partial \hat{f}_3} & \cdots & \frac{\partial \lambda_{c_1}}{\partial \hat{f}_M} \\ \frac{\partial \lambda_{c_2}}{\partial \hat{f}_2} & \frac{\partial \lambda_{c_2}}{\partial \hat{f}_3} & \cdots & \frac{\partial \lambda_{c_2}}{\partial \hat{f}_M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \lambda_{c_{M_c}}}{\partial \hat{f}_2} & \frac{\partial \lambda_{c_{M_c}}}{\partial \hat{f}_3} & \cdots & \frac{\partial \lambda_{c_{M_c}}}{\partial \hat{f}_M} \end{bmatrix} \\
\left[ \frac{\partial \mu_{1, \dots, \mu_g}}{\partial \hat{f}_2, \dots, \hat{f}_M} \right] &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \mu_1}{\partial \hat{f}_2} & \frac{\partial \mu_1}{\partial \hat{f}_3} & \cdots & \frac{\partial \mu_1}{\partial \hat{f}_M} \\ \frac{\partial \mu_2}{\partial \hat{f}_2} & \frac{\partial \mu_2}{\partial \hat{f}_3} & \cdots & \frac{\partial \mu_2}{\partial \hat{f}_M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \mu_{M_g}}{\partial \hat{f}_2} & \frac{\partial \mu_{M_g}^*}{\partial \hat{f}_3} & \cdots & \frac{\partial \mu_{M_g}^*}{\partial \hat{f}_M} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Από την εξίσωση 3.11 προκύπτει:

$$\begin{aligned}
\nabla_{\vec{b}, \vec{\lambda}_{f_k}}^2 F(\vec{b}, \lambda_{f_k}, \lambda_c, \mu) &= -\nabla_{\vec{b}} \vec{f}_k(\vec{b}) \\
\nabla_{\vec{b}, \vec{\lambda}_c}^2 F(\vec{b}, \lambda_{f_k}, \lambda_c, \mu) &= -\nabla_{\vec{b}} \vec{c}(\vec{b}) \\
\nabla_{\vec{b}, \vec{\mu}}^2 F(\vec{b}, \lambda_{f_k}, \lambda_c, \mu) &= -\nabla_{\vec{b}} \vec{g}^*(\vec{b})
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Συνθέτοντας τις εξισώσεις 3.12, 3.11, 3.13, 3.14, 3.15, 3.16 και 3.17 προκύπτει το παρακάτω σύστημα εξισώσεων:

$$\begin{array}{c}
\overbrace{\left[ \begin{array}{cccc} \nabla_{\vec{b}}^2 F & -\nabla_{\vec{b}} f_{2, \dots, M} & -\nabla_{\vec{b}} c_{1, \dots, M_c} & -\nabla_{\vec{b}} g_{1, \dots, M_g}^* \\ [\nabla_{\vec{b}} f_{2, \dots, M}]^T & 0 & 0 & 0 \\ [\nabla_{\vec{b}} c_{1, \dots, M_c}]^T & 0 & 0 & 0 \\ [\nabla_{\vec{b}} g_{1, \dots, M_g}^*]^T & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]}^{N+(M-1)+M_c+M_g^*} \\
\left[ \begin{array}{c} \frac{\partial \vec{b}}{\partial \vec{b}} \\ \frac{\partial \hat{f}_{2, \dots, M}}{\partial \lambda_{f_2, \dots, f_M}} \\ \frac{\partial \hat{f}_{2, \dots, M}}{\partial \lambda_{c_1, \dots, M_c}} \\ \frac{\partial \hat{f}_{2, \dots, M}}{\partial \mu_{1, \dots, M_g^*}} \\ \frac{\partial \hat{f}_{2, \dots, M}}{\partial \hat{f}_{2, \dots, M}} \end{array} \right]^{M-1} = \overbrace{\left[ \begin{array}{c} \tilde{0} \\ \tilde{I} \\ \tilde{0} \\ \tilde{0} \end{array} \right]}^{M-1} \tag{3.18}
\end{array}$$

όπου ο μοναδιαίος πίνακας στο δεξί μέλος του συστήματος 3.18 εμφανίζεται στις εξισώσεις (αριθμώντας από πάνω προς τα κάτω)  $[N+1, N+M-1]$ .

Για λόγους που θα εξηγηθούν παρακάτω, πολλαπλασιάζονται οι εξισώσεις του συστήματος 3.18 από τη θέση  $[N+1, N+M-1+M_c+M_g^*]$  (αρίθμηση από πάνω προς τα κάτω) με  $-1$ :

$$\begin{array}{c}
\overbrace{\left[ \begin{array}{cccc} \nabla_{\vec{b}}^2 F & -\nabla_{\vec{b}} f_{2, \dots, M} & -\nabla_{\vec{b}} c_{1, \dots, M_c} & -\nabla_{\vec{b}} g_{1, \dots, M_g}^* \\ -[\nabla_{\vec{b}} f_{2, \dots, M}]^T & 0 & 0 & 0 \\ -[\nabla_{\vec{b}} c_{1, \dots, M_c}]^T & 0 & 0 & 0 \\ -[\nabla_{\vec{b}} g_{1, \dots, M_g}^*]^T & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]}^{N+(M-1)+M_c+M_g^*} \\
\left[ \begin{array}{c} \frac{\partial \vec{b}}{\partial \vec{b}} \\ \frac{\partial \hat{f}_{2, \dots, M}}{\partial \lambda_{f_2, \dots, f_M}} \\ \frac{\partial \hat{f}_{2, \dots, M}}{\partial \lambda_{c_1, \dots, M_c}} \\ \frac{\partial \hat{f}_{2, \dots, M}}{\partial \mu_{1, \dots, M_g^*}} \\ \frac{\partial \hat{f}_{2, \dots, M}}{\partial \hat{f}_{2, \dots, M}} \end{array} \right]^{M-1} = \overbrace{\left[ \begin{array}{c} \tilde{0} \\ -\tilde{I} \\ \tilde{0} \\ \tilde{0} \end{array} \right]}^{M-1} \tag{3.19}
\end{array}$$

Δηλαδή, από το σύστημα 3.19 προκύπτουν  $M-1$  γραμμικά συστήματα προς επίλυση, ώστε να υπολογιστούν οι μεταβολές των μεταβλητών σχεδιασμού για το νέο σημείο

του μετώπου ( $\min f_1, f_k = \hat{f}_k, \forall k \in [2, M]$ ) :

$$\begin{bmatrix} \nabla_{\vec{b}}^2 F & -\nabla_{\vec{b}} f_{2,\dots,M} & -\nabla_{\vec{b}} c_{1,\dots,M_c} & -\nabla_{\vec{b}} g_{1,\dots,M_g}^* \\ -[\nabla_{\vec{b}} f_k]^T & 0 & 0 & 0 \\ -[\nabla_{\vec{b}} c_{1,\dots,M_c}]^T & 0 & 0 & 0 \\ -[\nabla_{\vec{b}} g_{1,\dots,M_g}^*]^T & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \vec{b}}{\partial \lambda_{f_{2,\dots,M}}} \\ \frac{\partial \hat{f}_{2,\dots,M}}{\partial \lambda_{1,\dots,M_c}} \\ \frac{\partial \hat{f}_{2,\dots,M}}{\partial \mu_{1,\dots,M_g}} \\ \frac{\partial \hat{f}_{2,\dots,M}}{\partial \hat{f}_{2,\dots,M}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

Το μη-μηδενικό στοιχείο στο δεξιό μέλος εμφανίζεται στη θέση  $N+k-1$ .

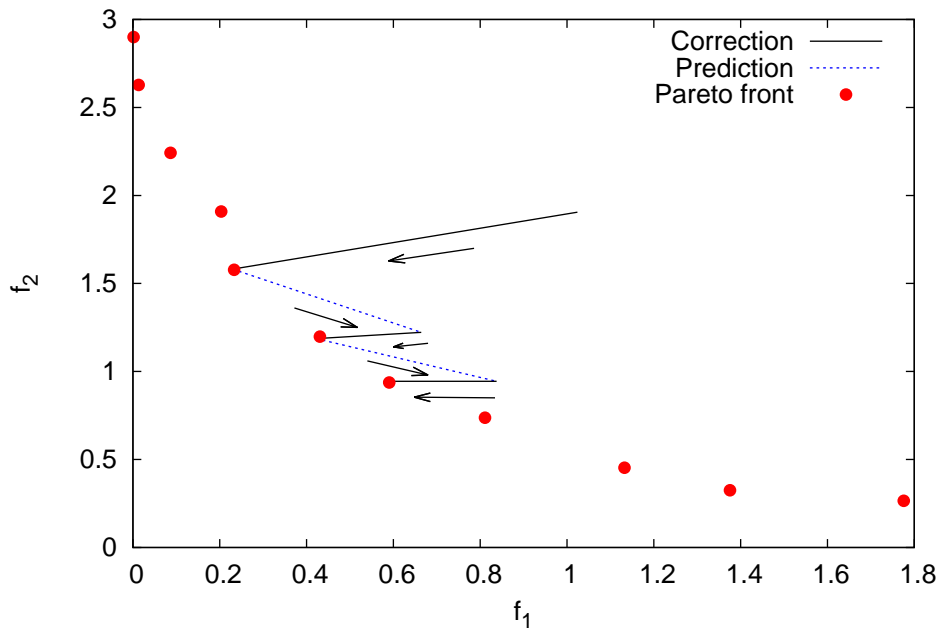
Το παραπάνω σύστημα περιγράφει τη σάρωση του μετώπου βέλτιστων λύσεων. Ξεκινώντας από ένα σημείο του μετώπου, δηλαδή γνωρίζοντας το διάνυσμα  $\vec{b}$  που ορίζει κάποιο σημείο του μετώπου ( $f_1, \dots, f_M$ ) είναι δυνατή η εύρεση του επόμενου σημείου με χρήση πρώτων και δευτέρων παραγώγων, αρκεί να ορίζονται από τον χρήστη της μεθόδου για το νέο σημείο οι τιμές των συναρτήσεων κόστους εκτός της πρώτης ( $\hat{f}_2, \dots, \hat{f}_M$ ).

Παρατηρώντας το σύστημα που επιλύεται στο βήμα πρόβλεψης (3.19) είναι εμφανές ότι η επίλυσή του δεν εμπλέκει τη νέα τιμή των περιορισμών-στόχων  $\hat{f}_k, \forall k \in [2, M]$ . Αυτό συμβαίνει καθώς το σύστημα αυτό προκύπτει από τις συνθήκες ύπαρξης βέλτιστης λύσης **πρώτης τάξεως**, με αποτέλεσμα να μην λαμβάνεται υπόψη η καμπυλότητα του μετώπου βέλτιστων λύσεων. Με άλλα λόγια, στην αριθμητική επίλυση της μεθόδου, είναι πιθανό η λύση που προκύπτει από την πρόβλεψη να απέχει από τις τιμές  $\hat{f}_k, \forall k \in [2, M]$ .

Για τον λόγο αυτόν, μετά από κάθε επίλυση του συστήματος απαιτείται διόρθωση που να επιτρέπει τον επανεντοπισμό του μετώπου στη περίπτωση απομάκρυνσης από αυτό (σχήμα 3.2).

Σημαντικό μειονέκτημα της μεθόδου που αναλύθηκε είναι η ανάγκη υπολογισμού του εσσιανού μητρώου (hessian) των συναρτήσεων-στόχων. Ο υπολογισμός των μητρώων δευτέρων παραγώγων έχει υψηλές απαιτήσεις σε χρόνο και υπολογιστική ισχύ [2]. Ως αποτέλεσμα, πολλές φορές είναι απαγορευτική η χρήση τους, ειδικά σε προβλήματα ρευστομηχανικής. Στη ΜΠΥΡ&Β/ΕΜΠ έχουν προταθεί μέθοδοι ικανές με χρήση συνδυασμού συζυγούς μεθόδου και ευθείας διαφόρισης, να υπολογίσουν το εσσιανό μητρώο με κόστος ανάλογο του  $N$  [4, 5, 6].

Ωστόσο, έχουν αναπτυχθεί μέθοδοι προσέγγισης του νέου εσσιανού μητρώου (όπως είναι η SR1: Symmetric Rank One και η BFGS: Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno) [2], καθώς και μέθοδοι οι οποίες δεν υπολογίζουν το εσσιανό μητρώο άμεσα. Αντί αυτού υπολογίζουν το γινόμενο του μητρώου πολλαπλασιασμένο με κάποιο διάνυσμα. Μία τέτοια τεχνική είναι η μέθοδος Newton με αποκοπή (truncated Newton) [7]. Ο υπολογισμός του γινομένου εσσιανού μητρώου με ένα γνωστό διάνυσμα έχει κόστος περίπου ίσο με το κόστος επίλυσης των εξισώσεων ροής. Σκοπός του αλγορίθμου που



Σχήμα 3.2: Η διαδικασία διόρθωσης (Correction)-πρόβλεψης (Prediction). Οι διακεκομμένες γραμμές δηλώνουν τη φάση πρόβλεψης, όπου από ένα σημείο βέλτιστης λύσης γίνεται προσπάθεια εύρεσης της επόμενης βέλτιστης λύσης. Οι συνεχείς γραμμές δηλώνουν τη φάση διόρθωσης. Οι δύο γραμμές που έπονται των φάσεων πρόβλεψης επαναφέρουν τις μεταβλητές σχεδιασμού στο μέτωπο κατά Pareto, ενώ η πρώτη συνεχής γραμμή αφορά τον αρχικό εντοπισμό του μετώπου βέλτιστων λύσεων.

αναπτύχθηκε, ο οποίος επεξηγείται παρακάτω, είναι η δυνατότητα χρησιμοποίησης τέτοιων τεχνικών.

### 3.3 Αλγόριθμος Αριθμητικής Επίλυσης

Η παρούσα εργασία πραγματεύεται προβλήματα τα οποία δεν υπόκεινται σε περιορισμούς ανισο-ισότητας ή ισότητας (έκτος αν η βέλτιστη λύση βρίσκεται στο σύνορο του πεδίου ορισμού), δηλαδή το πρόβλημα είναι της μορφής:

$$\min \begin{cases} f_1(\vec{b}) \\ \vdots \\ f_M(\vec{b}) \end{cases} \quad (3.21)$$

Το βήμα διόρθωσης πραγματοποιείται με τη χρήση ALM (παράρτημα Α.4.3) και η επίλυση των συστημάτων στο βήμα πρόβλεψης (συστήματα 3.20) με τη χρήση της μεθόδου συζυγών κλίσεων (παράρτημα Α.3.2). Ακολουθεί η περιγραφή του αλγορίθμου για τις φάσεις πρόβλεψης και διόρθωσης:

#### Κίνηση επί του μετώπου Pareto-Βήμα πρόβλεψης:

Υπενθυμίζεται ότι από τις συνθήκες KKT, με μια πρώτης τάξης προσέγγιση προέκυψαν τα γραμμικά συστήματα 3.18 τα οποία μετασχηματίστηκαν στα συστήματα 3.20. Για την επίλυση ενός συστήματος  $\tilde{A}\vec{x} = \vec{d}$ , η μέθοδος συζυγών κλίσεων απαιτεί συμμετρικό πίνακα  $\tilde{A}$  ώστε να επιτυγχάνεται σύγκλιση (παράρτημα Α.3.2). Γι' αυτό άλλωστε πραγματοποιήθηκε ο μετασχηματισμός των εξισώσεων 3.18 σε 3.19 έτσι ώστε να εμφανιστεί συμμετρικό μητρώο.

Από τη στιγμή που δεν μελετώνται προβλήματα με περιορισμούς, τα συστήματα που προκύπτουν έχουν την εξής μορφή:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \nabla_{\vec{b}}^2 F & -\nabla_{\vec{b}} f_{2,\dots,M} \\ -[\nabla_{\vec{b}} f_{2,\dots,M}]^T & \tilde{0} \end{bmatrix}}_{\tilde{A}} \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial \vec{b}}{\partial \hat{f}_k} \\ \frac{\partial \lambda_{f_{2,\dots,M}}}{\partial \hat{f}_k} \end{pmatrix}}_{\vec{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \vec{0} \\ -1 \\ \vec{0} \end{pmatrix}}_{\vec{d}} \quad (3.22)$$

όπου

$$F(\vec{b}) = f_1(\vec{b}) - \sum_{k=2}^M \lambda_{f_k} (f_k(\vec{b}) - \hat{f}_k) \quad (3.23)$$

Η μονάδα στο δεξί μέλος εμφανίζεται στη θέση  $N+k-1$ .

Επίλυση συστήματος για τη μετακίνηση πάνω στο μέτωπο βέλτιστων λύσεων:  
Αρχικοποίηση:

1. τίθεται:

$$x[i] = \frac{\Delta b_k[i]}{\Delta \hat{f}_k}, \forall i \in [1, N] \quad (3.24)$$

$$x[i] = \frac{\Delta \lambda_k[i]}{\Delta \hat{f}_k}, \forall i \in [N + 1, N + M - 1] \quad (3.25)$$

όπου  $\Delta \vec{b}_k, \Delta \vec{\lambda}_k$  τα διανύσματα μεταβολής των μεταβλητών σχεδιασμού και των συντελεστών Lagrange αντίστοιχα που προκύπτουν από τη μεταβολή του ελάχιστου στόχου-περιορισμού  $k$ .

2. Υπολογισμός  $\vec{r} = \vec{d} - \tilde{A}\vec{x}$  και τίθεται  $\vec{p} = \vec{r}$

για  $N_{CG}$  βήματα<sup>2</sup>:

1. Υπολογισμός  $\vec{\omega} = \tilde{A}\vec{p}$
2. Υπολογισμός  $\eta = \frac{\|\vec{r}\|}{\vec{p}^T \vec{\omega}}$
3. Ανανέωση διανύσματος λύσεων  $\vec{x}_{new} = \vec{x} + \eta \vec{p}$
4. Ανανέωση διανύσματος υπολοίπου  $\vec{r}_{new} = \vec{r} - \eta \vec{\omega}$
5. Υπολογισμός  $\beta = \frac{\|\vec{r}_{new}\|^2}{\|\vec{r}\|^2}$
6. Ανανέωση διανύσματος κατεύθυνσης  $\vec{p} = \vec{r}_{new} + \beta \vec{p}$
7. Υπολογισμός κριτηρίου σύγκλισης  $\|\vec{r}_{new}\|^2 < conv_{CG}$

Ο υπολογισμός του γινομένου  $\tilde{A}\vec{s}$ , όπου  $\vec{s} = \vec{x}, \vec{p}$  πραγματοποιείται ως εξής:

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} \vec{s}_a \\ \vec{s}_b \end{pmatrix} \quad (3.26\alpha')$$

$$\vec{s}_a = \frac{\partial \vec{b}}{\partial \hat{f}_k} \text{ ή } p[i], \forall i \in [1, N] \quad (3.26\beta')$$

$$\vec{s}_b = \frac{\partial \vec{\lambda}_{f_k}}{\partial \hat{f}_k} \text{ ή } p[i], \forall i \in [N + 1, N + M - 1] \quad (3.26\gamma')$$

$$\vec{\omega} = \tilde{A}\vec{s} = \begin{cases} \nabla_b^2 F(\vec{b}) \vec{s}_a - \sum_{k=2}^M \frac{\partial f_k}{\partial \vec{b}} \vec{s}_b \\ -\frac{\partial f_k}{\partial \vec{b}} \vec{s}_a \end{cases} \quad (3.26\delta')$$

<sup>2</sup>Όπου  $N_{CG}$  πλήθος επαναλήψεων μεθόδου συζυγών κλίσεων

Ανανέωση μεταβλητών σχεδιασμού:

Αφού έχουν επιλυθεί τα  $M-1$  συστήματα, προκύπτει:

$$\begin{pmatrix} \vec{b}_{new} \\ \vec{\lambda}_{f_k, new} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{b} \\ \vec{\lambda}_{f_k} \end{pmatrix} + \sum_{k=2}^M \vec{x}_{k, new} (f_k(\vec{b}) - \hat{f}_k) \quad (3.27)$$

### Εύρεση του μετώπου Pareto-Βήμα διόρθωσης:

Ο εντοπισμός του μετώπου βέλτιστων λύσεων επιτυγχάνεται με χρήση της μεθόδου ALM για το εξής πρόβλημα βελτιστοποίησης με περιορισμούς:

$$\begin{aligned} & \min f_1(\vec{b}) \\ \text{s.t. } & f_k(\vec{b}) - \hat{f}_k = 0, \forall k \in [2, M] \end{aligned} \quad (3.28)$$

Δηλαδή, η επαυξημένη συνάρτηση είναι:

$$F_{aug}(\vec{b}, \lambda, \omega_p) = f_1(\vec{b}) + \sum_{k=2}^M (-\lambda_{f_k} (f_k(\vec{b}) - \hat{f}_k)) + \sum_{k=2}^M \omega_{p, f_k} (f_k(\vec{b}) - \hat{f}_k)^2 \quad (3.29)$$

Διευκρινίζεται ότι οι συντελεστές  $\lambda$  **δεν** ταυτίζονται στις φάσεις της διόρθωσης και της πρόβλεψης.

Στην ALM (παράρτημα Α'.4.3) το βήμα ελαχιστοποίησης της επαυξημένης συνάρτησης πραγματοποιείται με τη μέθοδο απότομης καθόδου (παράρτημα Α'.3.1). Ακολουθεί ο αλγόριθμος του βήματος διόρθωσης:

1. Ελαχιστοποίηση της επαυξημένης συνάρτησης κόστους, η οποία πραγματοποιείται με χρήση απότομης καθόδου, της οποίας το πλήθος επαναλήψεων είναι  $N_{SD}$  και βήμα ανανέωσης των μεταβλητών σχεδιασμού  $\eta$ :

(α) Εύρεση  $\nabla_{\vec{b}} F_{aug}(\vec{b})$ , δηλαδή απαιτείται υπολογισμός των όρων  $\nabla_{\vec{b}} f_k(\vec{b}), \forall k \in [1, M]$

(β) Εύρεση νέου διανύσματος μεταβλητών σχεδιασμού  $\vec{b}_{new} = \vec{b} - \eta \nabla_{\vec{b}} F_{aug}(\vec{b})$ .  
Ανανέωση μεταβλητών σχεδιασμού  $\vec{b} = \vec{b}_{new}$ .

2. Έλεγχος σύγκλισης σύμφωνα με τα εξής κριτήρια:

- Ικανοποίηση των περιορισμών ισότητας με κάποια ανοχή  $f_k(\vec{b}) - \hat{f}_k < conv_{f_k}$ .
- Μικρή μεταβολή της συνάρτησης του πρώτου στόχου  $\Delta f_1 < conv_{f_1}$ .

3. Ανανέωση τιμών  $\lambda, \omega_p$  για κάθε στόχο σε περίπτωση μη σύγκλισης.

Τα βήματα 1, 2, 3 αποτελούν ένα κύκλο της διαδικασίας, ο οποίος στην παρούσα εργασία αποκαλείται εξωτερική επανάληψη της ALM. Το πλήθος εξωτερικών επανα-

λήψεων συμβολίζεται  $N_{ext,ALM}$ . Οι επαναλήψεις της απότομης καθόδου αποτελούν τον εσωτερικό βρόχο.

Από τα παραπάνω, είναι ξεκάθαρο ότι από τον χρήστη πρέπει να ορίζονται κάποιες βασικές παράμετροι:

Για το βήμα διόρθωσης:

- Βήμα απότομης καθόδου κατά την διαδικασία διόρθωσης ( $\eta$ ).
- Πλήθος βημάτων της απότομης καθόδου ( $N_{SD}$ ).
- Τα μεγέθη  $\gamma, \omega_p, \omega_{p,max}, \lambda_{start}$  για τον εκάστοτε στόχο-περιορισμό.
- Το κριτήριο ισότητας του κάθε περιορισμού-στόχου ( $conv_{f_k}$ ) καθώς και το κριτήριο σύγκλισης για την  $f_1$  ( $conv_{f_1}$ ).

Για το βήμα πρόβλεψης:

- Βήμα μετακίνησης στο μέτωπο βέλτιστων λύσεων, δηλαδή το  $\Delta \hat{f}_k = f_k - \hat{f}_k$ .
- Αρχικοποίηση του διανύσματος λύσεων ( $\vec{x}$ ).
- Κριτήριο σύγκλισης της μεθόδου συζυγών κλίσεων  $conv_{CG}$ .

### Παρατηρήσεις:

Το λογισμικό που αναπτύχθηκε, στην επίλυση του συστήματος 3.22, δέχεται τον όρο  $\nabla_b^2 F(\vec{b}) \vec{s}_a$  ως είσοδο, δίνοντας τη δυνατότητα για χρήση μεθόδων οι οποίες υπολογίζουν απευθείας το γινόμενο, αποφεύγοντας τον υπολογισμό του εσσιανού μητρώου. Όπως έχει ήδη αναφερθεί, μια τέτοια μέθοδος είναι η Newton με αποκοπή. Άλλωστε, στη μέθοδο συζυγών κλίσεων δεν χρειάζεται αυτούσιο μητρώο, αλλά το γινόμενο του με κάποιο διάνυσμα, γεγονός το οποίο την καθιστά κατάλληλη για μια τέτοια μέθοδο. Όσον αφορά το κόστος της συγκεκριμένης μεθόδου, ανέρχεται σε  $2 + 2 \cdot N_{CG}$  ισοδύναμες επιλύσεις ροής [7, 2], όπου  $N_{CG}$  το πλήθος επαναλήψεων της μεθόδου συζυγών κλίσεων.

Κάθε φορά που εκτελείται η μέθοδος συζυγών κλίσεων, η αρχικοποίηση του διανύσματος λύσης είναι το σημείο-λύση η οποία είχε βρεθεί στην προηγούμενη σάρωση του μετώπου. Για την πρώτη σάρωση, το λογισμικό που αναπτύχθηκε προσφέρει τις εξής δύο δυνατότητες:

1. Είτε να δοθεί μια εκτίμηση του εσσιανού μητρώου και επίλυση του συστήματος γραμμικά με απαλοιφή κατά Gauss.
2. Είτε με αρχικοποίηση των όρων  $\Delta \vec{b}_k, \Delta \vec{\lambda}_k$ .

Φυσικά, οι αρχικές τιμές των  $f_k, \forall k \in [2, M]$  για τις οποίες διατίθεται βέλτιστη λύση δεν είναι πάντα γνωστές, με αποτέλεσμα μια λανθασμένη εκτίμηση να κάνει το πρόβλημα μη-επιλύσιμο [1]. Ωστόσο, σε πραγματικά προβλήματα γίνεται προσπάθεια βελτίωσης ήδη υπάρχοντων προϊόντων, δηλαδή υφίσταται μια αίσθηση των μεγεθών.

Τέλος, χρειάζεται ιδιαίτερη προσοχή όταν το πεδίο ορισμού των μεταβλητών σχεδιασμού είναι φραγμένο. Μπορεί μεν το πρόβλημα βελτιστοποίησης να μην έχει



περιορισμούς, ωστόσο αν ο χρήστης επιβάλει ελάχιστη ή/και μέγιστη τιμή στις μεταβλητές σχεδιασμού, τότε ένα τέτοιο πεδίου ορισμού ( $b_{i,min} \geq b_i \geq b_{i,max}$ ) εισάγει περιορισμούς ανισο-ισότητας της μορφής:

$$\begin{aligned} g_{i,min} &= b_i - b_{i,min} \geq 0 \\ g_{i,max} &= b_{i,max} - b_i \geq 0 \end{aligned} \quad (3.30)$$

Όπως αναφέρθηκε προηγούμενως, όταν οι περιορισμοί ανισο-ισότητας είναι ενεργοί, δηλαδή οι πολλαπλασιαστές Lagrange  $\mu$  είναι μη μηδενικοί, τότε είναι που συμμετέχουν στο σύστημα 3.20 και επηρεάζουν τη μεταβολή των μεταβλητών σχεδιασμού. Άρα, είναι σημαντικό να ληφθούν υπόψη. Για τις παραγώγους των συναρτήσεων 3.30 ισχύει:

$$\begin{aligned} \nabla_{b_j} g_{i,min}^* &= \begin{cases} 1 & j = i \\ 0 & j \neq i \end{cases} \\ \nabla_{b_j} g_{i,max}^* &= \begin{cases} -1 & j = i \\ 0 & j \neq i \end{cases} \\ \nabla_{\vec{b}}^2 g_{i,min}^* &= \nabla_{\vec{b}}^2 g_{i,max}^* = \tilde{0} \end{aligned} \quad (3.31)$$

Έτσι, σύμφωνα με τα παραπάνω, το αρχικό σύστημα 3.22 επεκτείνεται δημιουργώντας το σύστημα:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \nabla_{\vec{b}}^2 F & -\nabla_{\vec{b}} f_{2,\dots,M} & -\nabla_{\vec{b}} g_{1,\dots,M_g}^* \\ -[\nabla_{\vec{b}} f_{2,\dots,M}]^T & \tilde{0} & \tilde{0} \\ -[\nabla_{\vec{b}} g_{1,\dots,M_g}^*]^T & \tilde{0} & \tilde{0} \end{bmatrix}}_{\tilde{A}} \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial \vec{b}}{\partial \hat{f}_k} \\ \frac{\partial \lambda_{f_{2,\dots,M}}}{\partial \hat{f}_k} \\ \frac{\partial \mu_{1,\dots,M_g}^*}{\partial \hat{f}_k} \end{pmatrix}}_{\vec{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \vec{0} \\ -1 \\ \vec{0} \end{pmatrix}}_{\vec{d}} \quad (3.32)$$

όπου

$$\nabla_{\vec{b}}^2 F(\vec{b}) = \nabla_{\vec{b}}^2 f_1(\vec{b}) - \sum_{k=2}^M \lambda_{f_k} \nabla_{\vec{b}}^2 f_k(\vec{b}) \quad (3.33)$$

Ουσιαστικά δεν αλλάζει ο τρόπος επίλυσης, απλά επεκτείνονται τα διανύσματα  $\vec{\omega}$ ,  $\vec{s}_b$ ,  $\vec{x}$ ,  $\vec{p}$ ,  $\vec{r}$ ,  $\vec{d}$  κατά  $M_g^*$  θέσεις και ο πίνακας  $\tilde{A}$  κατά  $M_g^*$  σειρές και στήλες.

### Ανάλυση Υπολογιστικού Κόστους

Διόρθωση: Το βήμα διόρθωσης, υπενθυμίζεται, ότι πραγματοποιείται με τη χρήση ALM. Απαιτεί  $N_{ext,ALM} \cdot N_{SD}$  επιλύσεις των εξισώσεων ροής και υπολογισμούς γενικευμένης πρώτης παραγώγου. Είναι εμφανές ότι σε περίπτωση που απαιτείται έντονη διόρθωση, το βήμα αυτό γίνεται ιδιαίτερα χρονοβόρο. Για τον λόγο αυτόν, είναι αναγκαία μια πρόβλεψη που να μην αποκλίνει πολύ από το μέτωπο βέλτιστων λύσεων, καθώς επίσης και το σημείο εκκίνησης να μην απέχει υπερβολικά από αυτό.

Πρόβλεψη: Το ουσιαστικό κόστος εδώ είναι ο υπολογισμός του γινομένου μεταξύ του εσσιανού μητρώου και του διανύσματος κατεύθυνσης. Συγκεκριμένα, σε κάθε πρόβλεψη του μετώπου απαιτείται είτε ο υπολογισμός των μητρώων  $\nabla_{\vec{b}}^2 f_k(\vec{b})$  είτε ο απευθείας υπολογισμός του διανύσματος  $\nabla_{\vec{b}}^2 f_k(\vec{b}) \vec{s}_a$ . Άρα, ο χρόνος και το κόστος επίλυσης εξαρτώνται κυρίως από τον τρόπο υπολογισμού του εσσιανού μητρώου.

Το εσσιανό μητρώο, με απλή διπλή παραγωγή κοστίζει περίπου  $N^2$  επιλύσεις ροής [2]. Με χρήση συνδυασμού συζυγούς μεθόδου (adjoint differentiation) και ευθείας διαφορίσης (direct differentiation), ο υπολογισμός του εσσιανού μητρώου ανέρχεται σε περίπου  $N+2$  επιλύσεις ροής [4]. Στο βήμα διόρθωσης, αν χρησιμοποιηθεί αυτούσιο το μητρώο δεύτερων παραγώγων, το κόστος ταυτίζεται με το κόστος υπολογισμού του μητρώου. Αν χρησιμοποιηθεί η Newton με αποκοπή, η οποία κοστίζει περίπου όσο  $2+2 \cdot N_{CG}$  επιλύσεις ροής [7] ( $N_{CG}$  πλήθος επαναλήψεων της μεθόδου συζυγών κλίσεων), εύκολα αποδεικνύεται ότι η Newton με αποκοπή υπερτερεί όταν  $N > \frac{N_{CG}}{2}$ . Για τον λόγο αυτόν, αυτή η μέθοδος είναι ιδιαίτερα χρήσιμη για προβλήματα μεγάλου πλήθους αγνώστων, όπου και η αποκοπή στη μέθοδο συζυγών κλίσεων έχει ισχυρό αντίκτυπο στον χρόνο επίλυσης του συστήματος.

### 3.4 Εναλλακτική Προσέγγιση της Μεθόδου Πρόβλεψης-Διόρθωσης

Στη διεθνή βιβλιογραφία υπάρχουν αρκετές μέθοδοι οι οποίες επιχειρούν με πρόβλεψη και διόρθωση να εντοπίσουν το μέτωπο βέλτιστων λύσεων. Αρκετές από αυτές συνδυάζουν και τη χρήση στοχαστικών αλγορίθμων. Μια τέτοια μέθοδος, η οποία αναπτύχθηκε από τους Sriram Shankaran και Brian Barr [8], περιγράφεται περιληπτικά σε αυτό το κεφάλαιο. Η συγκεκριμένη μέθοδος έχει εφαρμοστεί σε προβλήματα δύο στόχων μέχρι στιγμής. Ακολουθεί συνοπτικά ο αλγόριθμος για προβλήματα δύο στόχων:

1. Αρχικά, επιλέγεται ως βέλτιστη λύση για την εκκίνηση της μεθόδου η  $\min f_1$ , δηλαδή το άνω αριστερά άκρο (αν θεωρηθεί ότι στον κατακόρυφο άξονα είναι η  $f_2$  και στον οριζόντιο η  $f_1$ ). Προφανώς θα μπορούσε να επιλεγεί το άλλο άκρο χωρίς βλάβη της γενικότητας, απλά με ανταλλαγή των δεικτών 1, 2. Τα υπόλοιπα βήματα εκτελούνται επαναληπτικά.
2. Βήμα Πρόβλεψης: Ανανέωση των μεταβλητών σχεδιασμού χρησιμοποιώντας μέθοδο απότομης καθόδου:  $\vec{b}_{temp} = \vec{b} - \eta_{SD} \nabla_{\vec{b}} f_2(\vec{b})$ . Σημειώνεται ότι δεν λαμβάνεται καθόλου υπόψη η επίδραση του πρώτου στόχου, δηλαδή είναι ως να λύνεται το πρόβλημα  $\min f_2(\vec{b})$  για έναν κύκλο της απότομης καθόδου. Προφανώς, αυτό οδηγεί σε χαμηλότερες, αυθαίρετες τιμές της  $f_2$ , ενώ υπενθυμίζεται ότι η διαδικασία ξεκίνησε από το μέγιστο δυνατό.
3. Βήμα διόρθωσης: Έστω  $\vec{v}$  διάνυσμα ανίχνευσης της βέλτιστης λύσης. Με βάση

αυτό το διάνυσμα θα ανανεώνονται οι μεταβλητές σχεδιασμού. Όσο ισχύει  $\|\vec{v}\| > 0$  πραγματοποιούνται τα εξής:

(α) Αρχικά επιλύεται το εξής πρόβλημα:

$$\begin{aligned} \min(\max \nabla_{\vec{b}} f(\vec{b}_{temp}) \cdot \vec{v}) \\ \|\vec{v}\| \leq 1 \end{aligned} \quad (3.34)$$

όπου

$$\nabla_{\vec{b}} f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial b_1} & \cdots \\ \frac{\partial f_2}{\partial b_1} & \cdots \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

Εδώ, οι συγγραφείς προτείνουν τη χρησιμοποίηση στοχαστικής δειγματοληψίας για την εύρεση του  $\vec{v}$ .

(β) Επιλέγεται η παράμετρος  $t \in [0, 1]$  ώστε να επιλυθεί το πρόβλημα

$$\min f_k(\vec{b}_{temp} + t\vec{v}), \forall k \in [1, 2].$$

(γ) Ανανέωση των τιμών  $\vec{b}_{temp} = \vec{b}_{temp} + t\vec{v}$ . Με άλλα λόγια, η παράμετρος  $t$  αποτελεί το βήμα που ρυθμίζει την επιδραση του διανύσματος ανίχνευσης  $v$ . Επιλέγεται το βήμα για το οποίο εμφανίζεται η μεγαλύτερη μείωση σε έναν από τους δύο στόχους.

4. Ανανέωση των μεταβλητών σχεδιασμού  $\vec{b} = \vec{b}_{temp}$  και επιστροφή στο βήμα 2.



## **Κεφάλαιο 4**

# **Διερευνητικές Εφαρμογές της Μεθόδου σε Απλά Μαθηματικά Προβλήματα Δύο Στόχων**

Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιαστούν αποτελέσματα από προβλήματα βελτιστοποίησης δύο στόχων, βασισμένα αποκλειστικά σε μαθηματικές συναρτήσεις που πρέπει να ελαχιστοποιηθούν, σύμφωνα με τη μέθοδο που παρουσιάστηκε. Σκοπός των προκαταρκτικών αυτών δοκιμών είναι, με χαμηλό υπολογιστικό κόστος, να εξαχθούν συμπεράσματα για τον τρόπο χειρισμού άλλων προβλημάτων, τα οποία δεν είναι ούτε τόσο απλά ούτε τόσο οικονομικά σε υπολογιστικό κόστος. Οι υπολογισμοί των πρώτων και δευτέρων παραγώγων των συναρτήσεων κόστους πραγματοποιούνται αναλυτικά, πράγμα που σημαίνει ότι δεν υπάρχει αμφισβήτηση σχετικά με την ακρίβεια υπολογισμού τους. Έτσι, στο βήμα διόρθωσης δεν χρησιμοποιούνται μέθοδοι απευθείας υπολογισμού του μητρώου ή του γινομένου του επί το διάνυσμα κατεύθυνσης ανίχνευσης, δίνοντας έμφαση στην κατανόηση της μεθόδου. Σημειώνεται ότι, κατά την ανάλυση του κόστους της μεθόδου, θεωρείται ότι οι παράγωγοι έχουν υπολογιστεί με τις μεθόδους που απαιτούν τα προβλήματα ρευστομηχανικής, όπως για παράδειγμα με τη συζυγή μέθοδο [9, 10, 11].

Επιπλέον των αναλυτικών λύσεων, όπου ο υπολογισμός τους είναι εφικτός, η επαλήθευση των αποτελεσμάτων γίνεται με τη χρήση του λογισμικού EASY (Evolutionary Algorithms SYstem) [12], το οποίο έχει αναπτυχθεί από τη ΜΠΥΡ&Β/ΕΜΠ. Ο EASY, λειτουργεί με εξελικτικούς αλγόριθμους (ΕΑ), οι οποίοι αποτελούν την πιο συχνά χρησιμοποιούμενη παραλλαγή των πληθυσμιακών στοχαστικών αλγορίθμων βελτιστοποίησης και μπορούν, με ένα μόνο τρέξιμο, να παράξουν το μέτωπο των κατά Pareto βέλτιστων λύσεων.

## 4.1 Μαθηματικό Πρόβλημα Α

Έστω το ακόλουθο (κυρτό) πρόβλημα βελτιστοποίησης δύο στόχων:

$$\min \begin{cases} f_1(\vec{b}) = \sum_{i=1}^N (b_i - 3)^2 \\ f_2(\vec{b}) = \sum_{i=1}^N (b_i - 4)^2 \end{cases} \quad (4.1)$$

όπου  $b_i \in [1, 6], \forall i \in [1, N]$ .

Οι πρώτες και δεύτερες παράγωγοι των συναρτήσεων στόχων προκύπτουν αναλυτικά ως:

$$\begin{aligned} \nabla_{\vec{b}} f_1(\vec{b}) &= 2(\vec{b} - \vec{3}) \\ \nabla_{\vec{b}} f_2(\vec{b}) &= 2(\vec{b} - \vec{4}) \\ \nabla_{\vec{b}}^2 f_1(\vec{b}) &= \nabla_{\vec{b}}^2 f_2(\vec{b}) = 2\tilde{I} \end{aligned} \quad (4.2)$$

όπου  $\tilde{I}$  ο μοναδιαίος πίνακας.

Για το συγκεκριμένο πρόβλημα, είναι δυνατή η εύρεση του μετώπου βέλτιστων λύσεων με αναλυτικό τρόπο. Συγκεκριμένα, για τα ακραία σημεία του μετώπου βέλτιστων λύσεων ισχύουν τα εξής:

$$\begin{aligned} f_1(\vec{b}) = 0, f_2(\vec{b}) = N, b_i = 3 \forall i \in [1, N] \\ f_1(\vec{b}) = N, f_2(\vec{b}) = 0, b_i = 4 \forall i \in [1, N] \end{aligned} \quad (4.3)$$

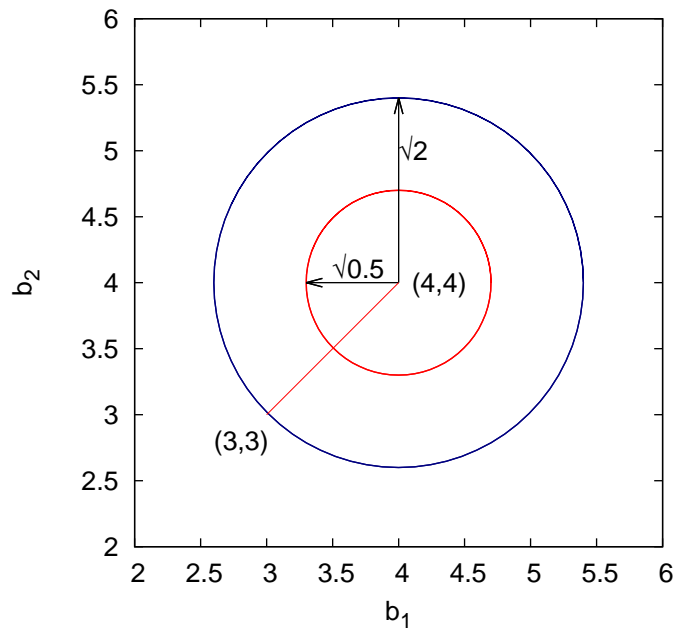
Αν είναι επιθυμητό να ικανοποιείται ο περιορισμός  $f_2(\vec{b}) = \hat{f}_2, \forall \hat{f}_2 \in [0, N]$ , τότε ισχύει:

$$\sum_{i=1}^N (b_i - 4)^2 = \hat{f}_2 \quad (4.4)$$

$$\min f_1(\vec{b}) = \sum_{i=1}^N (b_i - 3)^2 \quad (4.5)$$

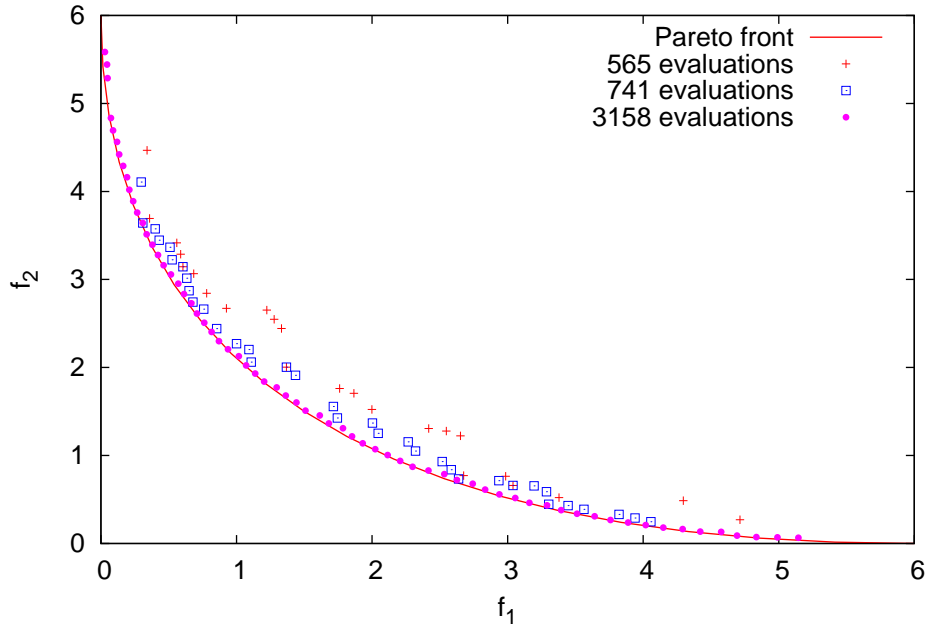
Η εξίσωση 4.4 ικανοποιείται για "άπειρα" διανύσματα  $\vec{b}$ . Δηλαδή, στο χώρο των μεταβλητών σχεδιασμού, ο γεωμετρικός τόπος της εξίσωσης 4.4 είναι μια υπερσφαίρα με κέντρο στο σημείο  $(4, 4, \dots, 4)$  και ακτίνα ίση με  $\sqrt{\hat{f}_2}$ . Ειδικά για  $N=2$ , ο γεωμετρικός τόπος είναι κύκλος. Από όλα τα διανύσματα λύσης της εξίσωσης 4.4, αυτά

που συνθέτουν το μέτωπο Pareto είναι τα διανύσματα για τα οποία ελαχιστοποιείται η  $f_1$ , δηλαδή αυτά που ανήκουν στην ευθεία που ενώνει τα σημεία  $(3, \dots, 3)$  και  $(4, \dots, 4)$  στον χώρο διάστασης  $N$ . Έτσι, η βέλτιστη λύση προκύπτει από την τομή της υπερσφαίρας με την ευθεία αυτή. Με άλλα λόγια, κατά τη σάρωση του μετώπου βέλτιστων λύσεων από την ελάχιστη τιμή του πρώτου στόχου προς την ελάχιστη του δεύτερου, οι συνιστώσες του διανύσματος  $\vec{b}$  μεταβάλλονται γραμμικά και με τον ίδιο ρυθμό από την τιμή 3 ως την 4 και, προφανώς, τα  $b_i, \forall i \in [1, N]$  έχουν την ίδια τιμή  $b$ . Για διευκόλυνση στην κατανόηση, παρατίθεται το σχήμα 4.1, το οποίο αντιστοιχεί σε πρόβλημα με  $N=2$ .



Σχήμα 4.1: Μαθηματική περίπτωση A: Ισοσταθμικές της συνάρτησης στόχου του δεύτερου στόχου  $f_2$  για  $N=2$ . Εμφανίζεται επίσης και το ευθύγραμμο τμήμα  $(3,3-4,4)$  των κατά Pareto βέλτιστων λύσεων. Με βάση την εξίσωση 4.4, τα ζεύγη  $b_1, b_2$  που λ.χ. δίνουν τιμή  $f_2=2$  ανήκουν στον κύκλο με κέντρο  $(4,4)$  και ακτίνα  $\sqrt{2}$ . Από αυτά, μόνο ένα ζεύγος των μεταβλητών σχεδιασμού δίνει βέλτιστη λύση. Αυτό προκύπτει από την τομή του ευθυγράμμου τμήματος και του κύκλου. Εδώ, το ζητούμενο ζεύγος είναι το  $(3,3)$ , το οποίο είναι το αριστερό ακραίο σημείο του μετώπου Pareto (εξισώσεις 4.3). Ομοίως, για  $f_2=0.5$  η βέλτιστη λύση είναι το  $(3.5, 3.5)$ , όπου  $f_1=f_2=0.5$ . Γενικεύοντας τα παραπάνω, τα διανύσματα  $\vec{b}$  τα οποία αντιστοιχούν στη βέλτιστη λύση προκύπτουν από την τομή των ισοσταθμικών κύκλων με το ευθύγραμμο τμήμα.

Για το πρόβλημα βελτιστοποίησης, επιλέγεται πλήθος μεταβλητών σχεδιασμού ίσο με  $N=6$ . Με βάση τα παραπάνω, προκύπτει στο σχήμα 4.2 το μέτωπο βέλτιστων λύσεων αναλυτικά, όπου γίνεται και σύγκριση των μετώπων που προκύπτουν από τον ΕΑ.



Σχήμα 4.2: Μαθηματικό πρόβλημα A : Σύγκριση του αναλυτικού μετώπου βέλτιστων λύσεων με το μέτωπο που προκύπτει από τον ΕΑ για διάφορα πλήθη αξιολογήσεων, για  $N = 6$ . Ο ΕΑ τερματίστηκε όταν το παραγόμενο μέτωπο βέλτιστων λύσεων παρουσίασε μικρή μεταβολή μεταξύ διαδοχικών γενεών. Για τον ΕΑ χρησιμοποιήθηκε Gray binary κωδικοποίηση, με 6 bits ανά μεταβλητή. Ο πληθυσμός των γονέων είναι  $\mu = 25$  και των απογόνων  $\lambda = 75$ .

Υπενθυμίζεται ότι, στην προτεινόμενη μέθοδο, το βήμα διόρθωσης πραγματοποιείται με τη μέθοδο ALM (κεφάλαιο 3, παράρτημα Α'.4.3). Σε αυτήν, πρέπει να οριστούν βασικές παράμετροι οι οποίες είναι:

- Το κριτήριο σύγκλισης  $conv f_1$  της συνάρτησης του στόχου ( $f_1$ ) που ελαχιστοποιείται.
- Η ανοχή για τον περιορισμό ισότητας  $conv f_2$ , που αντιστοιχεί στον στόχο που έχει υποβαθμιστεί σε περιορισμό ( $f_2$ ).
- Ο συντελεστής ποινής στην εκκίνηση του εκάστοτε βήματος διόρθωσης  $\omega_p$  και η μέγιστη τιμή που επιτρέπεται να αποκτήσει  $\omega_{p,max}$ , καθώς αυξάνεται με ρυθμό  $\gamma$ .
- Για κάθε εσωτερική επανάληψη της ALM (για την οποία οι τιμές  $\omega_p, \lambda$  παραμένουν αναλλοίωτες), η οποία αφορά την ελαχιστοποίηση της επαυξημένης συνάρτησης-στόχου και πραγματοποιείται με τη μέθοδο της απότομης καθόδου, χρειάζεται το βήμα  $\eta_{SD}$  ανανέωσης των μεταβλητών σχεδιασμού  $\vec{b}$ . Το πλήθος των εσωτερικών επαναλήψεων  $N_{SD}$  ορίζεται από τον χρήστη. Υπενθυμίζεται ότι στις εξωτερικές επαναλήψεις  $N_{ext,ALM}$  πραγματοποιείται η ανανέωση των παραμέτρων  $\omega_p, \lambda$  με το τρόπο που διατυπώνεται στο παράρτημα



### A.4.3.

Για το βήμα πρόβλεψης του μετώπου, το σύστημα 3.22 επιλύεται με τη μέθοδο των συζυγών κλίσεων, η οποία είναι επαναληπτική μέθοδος. Για αυτό, χρειάζεται ένα κριτήριο σύγκλισης  $conv_{CG}$  το οποίο αναφέρεται στο μέτρο του υπολοίπου (παράρτημα A.3.2). Από το διάνυσμα λύσεων  $\vec{x}$  του συστήματος 3.22 υπολογίζεται η μεταβολή των πολλαπλασιαστών Lagrange  $\lambda$  και των μεταβλητών σχεδιασμού, πολλαπλασιάζοντας με το επιθυμητό βήμα σάρωσης  $\Delta \hat{f}_2$ . Για τη μέθοδο των συζυγών κλίσεων, απαιτείται αρχικοποίηση του διανύσματος λύσεων. Στο συγκεκριμένο πρόβλημα, η αρχικοποίηση του διανύσματος λύσης πολλαπλασιασμένου με το βήμα σάρωσης για την πρώτη σάρωση του μετώπου επιλέγεται ως εξής:

$$\vec{x}_{init,CG} \cdot \Delta \hat{f}_2 = \begin{pmatrix} 0.1(\Delta b_1) \\ 0.1(\Delta b_2) \\ 0.1(\Delta b_3) \\ 0.1(\Delta b_4) \\ 0.1(\Delta b_5) \\ 0.1(\Delta b_6) \\ 0.0(\Delta \lambda_{f_2}) \end{pmatrix}$$

Για τις υπόλοιπες σαρώσεις, ως αρχικοποίηση χρησιμοποιείται το αποτέλεσμα της προηγούμενης πρόβλεψης.

Θα πραγματοποιηθούν δύο τρόποι σάρωσης του μετώπου βέλτιστων λύσεων: ο πρώτος ξεκινά από υψηλές τιμές της  $f_2$  ενώ ο δεύτερος από χαμηλές. Και για τις δύο περιπτώσεις, η προτεινόμενη μέθοδος έτρεξε με τις παραμέτρους του πίνακα 4.1.

Βήμα Διόρθωσης	$conv f_1$	$10^{-3}$
	$conv f_2$	$10^{-1}$
	$\omega_p$	$10^3$
	$\omega_{p,max}$	$10^5$
	$\gamma$	1.5
	$\eta_{SD}$	$10^{-6}$
	$N_{SD}$	10
Βήμα Πρόβλεψης	$\Delta \hat{f}_2$	$\pm 0.75$
	$conv_{CG}$	$10^{-3}$

Πίνακας 4.1: Μαθηματικό πρόβλημα A: Παράμετροι για τα βήματα διόρθωσης και πρόβλεψης για πρόβλημα 6 μεταβλητών σχεδιασμού.

Από τη στιγμή που το μέτωπο βέλτιστων λύσεων εκτείνεται στην περιοχή  $f_2 \in [0, 6]$ , η επιλογή του βήματος  $\Delta \hat{f}_2 = 0.75$  στη φάση της διόρθωσης αποσκοπεί στην εύρεση 9 σημείων επί του μετώπου. Ο συντελεστής ποινής έχει ιδιαίτερα υψηλή τιμή, γεγονός που συμβάλλει στη γρήγορη ικανοποίηση του περιορισμού. Ωστόσο, χρειάζεται ιδιαίτερη προσοχή στο κριτήριο σύγκλισης του πρώτου στόχου, καθώς έχει δοθεί έμφαση στην ικανοποίηση του περιορισμού. Για τον λόγο αυτόν, επιλέγεται αυστηρό κριτήριο

σύγκλισης, ώστε να αποτραπεί η πρόωρη σύγκλιση του βήματος διόρθωσης, δηλαδή να αποφευχθεί η εύρεση σημείου για το οποίο ισχύει ο περιορισμός αλλά δεν έχει επιτευχθεί η ελαχιστοποίηση του πρώτου στόχου (παράρτημα Β'.2).

Και στις δύο εκδοχές κίνησης επί του μετώπου χρησιμοποιήθηκε το ίδιο σημείο εκκίνησης:

$$\vec{b}_{init} = \begin{pmatrix} 2.0 \\ \vdots \\ 2.0 \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

για το οποίο οι τιμές των συναρτήσεων κόστους είναι:

$$\begin{aligned} f_1(\vec{b}_{init}) &= 8.0 \\ f_2(\vec{b}_{init}) &= 24.0 \end{aligned} \quad (4.7)$$

Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στα διαγράμματα του σχήματος 4.4.

#### **Παρατηρήσεις:**

Για την παρούσα μέθοδο απεικονίζονται (σχήμα 4.4) τα σημεία που προκύπτουν από την πρόβλεψη και τη διόρθωση. Είναι προφανές ότι το τελικό μέτωπο μη-κυριαρχούμενων λύσεων απαρτίζεται μόνο από τα σημεία που προκύπτουν κατά τη διόρθωση (correction). Δεδομένου ότι η κίνηση πάνω στο μέτωπο έγινε με σταθερό βήμα της  $f_2$ , η σύμπτωση με το μέτωπο που υπολογίστηκε αναλυτικά θεωρείται εξαιρετική. Παρόλα αυτά, για χαμηλές τιμές της  $f_2$  το βήμα πρόβλεψης δεν δίνει πάντα ικανοποιητικά αποτελέσματα, φαινόμενο που εξαρτάται ιδιαίτερα από την καμπυλότητα του μετώπου και το βήμα  $\Delta \hat{f}_2$ . Αυτό συμβαίνει καθώς το μέτωπο τείνει να γίνει παράλληλο με τον οριζόντιο άξονα ενώ το βήμα κατά τον κατακόρυφο άξονα παραμένει σταθερό. Έτσι, η μέθοδος δεν μπορεί να εντοπίσει τις βέλτιστες λύσεις της περιοχής αυτής με ικανοποιητική πυκνότητα. Στο σχήμα 4.5, πραγματοποιήθηκε δοκιμή με βήμα  $\Delta \hat{f}_2 = 0.25$  για επιβεβαίωση της παραπάνω παρατήρησης. Αυτό είναι ιδιαίτερα εμφανές στην περίπτωση της σάρωσης από χαμηλές σε υψηλές τιμές της  $f_2$  (σχήμα 4.4, κάτω), όπου από την τιμή  $f_2 = 5.13 \cdot 10^{-2}$  η πρόβλεψη δίνει αποτέλεσμα πάνω στο μέτωπο κατά Pareto μεν, αλλά με τιμή  $f_2 = 3.54$  δε, η οποία απέχει αρκετά από τις τιμές της περιοχής  $f_2 = 5.13 \cdot 10^{-2} + \Delta \hat{f}_2 = 5.13 \cdot 10^{-2} + 0.75 = 0.8013$ . Έτσι, ακολουθεί η διόρθωση που επαναφέρει τη διαδικασία στην τιμή  $f_2 = 0.80$ , ικανοποιώντας το βήμα  $\Delta \hat{f}_2 = 0.75$ .

Για τις χαμηλές τιμές της συνάρτησης κόστους του δεύτερου στόχου  $f_2$  ελλοχεύει ένα ακόμα πρόβλημα. Υπενθυμίζεται ότι σε κάθε θέση του μετώπου Pareto ισχύει  $b_i = b_j = b, \forall i, j \in [1, N], i \neq j$ , άρα:

$$\begin{aligned} f_1(\vec{b}) &= N(b - 3)^2 \\ f_2(\vec{b}) &= N(b - 4)^2 \end{aligned} \quad (4.8)$$

Από τις συνθήκες ΚΚΤ προκύπτει το εξής σύστημα :

$$\begin{aligned}\nabla_{\vec{b}} F_{aug}(\vec{b}) &= \vec{0} \\ f_2(\vec{b}) - \hat{f}_2 &= 0\end{aligned}\tag{4.9}$$

όπου :

$$F_{aug}(\vec{b}) = f_1(\vec{b}) - \lambda_{f_2}(f_2(\vec{b}) - \hat{f}_2)\tag{4.10}$$

άρα, με βάση τις εξισώσεις 4.2 το σύστημα των συνθηκών ΚΚΤ αναλύεται στις  $N+1$  εξισώσεις :

$$\begin{aligned}2(b_i - 3) - 2\lambda_{f_2}(b_i - 4) &= 0, \forall i \in [1, N] \\ \sum_{i=1}^N (b_i - 4)^2 - \hat{f}_2 &= 0\end{aligned}\tag{4.11}$$

Λόγω της συμμετρίας η οποία διέπει τις τιμές των μεταβλητών σχεδιασμού στο μέτωπο βέλτιστων λύσεων ( $b_i = b, \forall i \in [1, N]$ ), οι πρώτες  $N$  εξισώσεις ταυτίζονται και άρα εκφυλίζονται σε μία εξίσωση :

$$2(b - 3) - 2\lambda_{f_2}(b - 4) = 0 \Rightarrow \lambda_{f_2} = \frac{b - 3}{b - 4}\tag{4.12}$$

Η εξίσωση τελευταία ΚΚΤ συνθήκη (εξίσωση 4.14α') αποτελεί μια αναλυτική σχέση μεταξύ των  $b$  και  $\hat{f}_2$  η οποία φυσικά ισχύει για το μέτωπο Pareto:

$$b = 4 \pm \sqrt{\frac{\hat{f}_2}{N}}\tag{4.13}$$

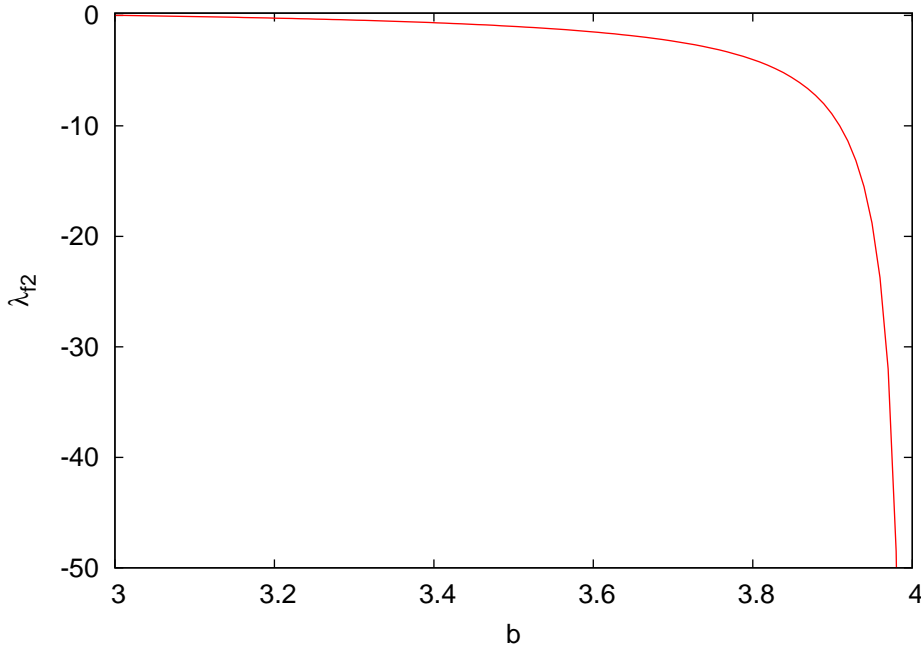
Υπενθυμίζεται ότι βέλτιστη λύση έχουμε για  $3 < b_i < 4, \forall i \in [1, N]$ , άρα απορρίπτεται η περίπτωση +.

Από την εξίσωση 4.12, είναι εμφανές ότι για το κάτω δεξιό άκρο του μετώπου βέλτιστων λύσεων ( $f_2 = 0$ ) η συντελεστής Lagrange απειρίζεται (σχήμα 4.3). Με άλλα λόγια, είναι επιθυμητή η αποφυγή της λύσης  $b_i = 4, \forall i \in [1, N]$ , ιδιαίτερα στη σάρωση από κάτω προς τα πάνω καθώς η πρόβλεψη θα παρήγαγε λανθασμένα αποτελέσματα.

Αυτό φαίνεται διατυπώνοντας το σύστημα 3.22 ως εξής:

$$2 - 2\lambda_{f_2} \frac{\partial b_i}{\partial \hat{f}_2} - 2(b_i - 4) \frac{\partial \lambda_{f_2}}{\partial \hat{f}_2} = 0, \Rightarrow \frac{\partial b_i}{\partial \hat{f}_2} = \frac{b - 4}{1 - \lambda_{f_2}} \frac{\partial \lambda_{f_2}}{\partial \hat{f}_2}, \forall i \in [1, N] \quad (4.14\alpha')$$

$$-2 \sum_{i=1}^N (b_i - 4) \frac{\partial b_i}{\partial \hat{f}_2} = -1 \Rightarrow \frac{\partial \lambda_{f_2}}{\partial \hat{f}_2} = \frac{1 - \lambda_{f_2}}{2N(b - 4)^2} \quad (4.14\beta')$$



Σχήμα 4.3: Μαθηματικό πρόβλημα A: Η μεταβολή του συντελεστή Lagrange  $\lambda_{f_2}$  συναρτήσει της τιμής  $b$  (εξίσωση 4.12) για τις βέλτιστες κατά Pareto λύσεις (υπενθυμίζεται ότι είναι ανεξάρτητο του πλήθους των μεταβλητών σχεδιασμού). Καθώς η λύση τείνει στην τιμή 4, ο συντελεστής Lagrange τείνει στο  $-\infty$ .

Από το παραπάνω σύστημα, χρησιμοποιώντας την σχέση 4.12 προκύπτει:

$$\frac{\partial \lambda_{f_2}}{\partial \hat{f}_2} = -\frac{1}{2N(b - 4)} \quad (4.15\alpha')$$

$$\frac{\partial b_i}{\partial \hat{f}_2} = -\frac{\partial \lambda_{f_2}}{\hat{f}_2} = \frac{1}{2N(b - 4)} \quad (4.15\beta')$$

Δηλαδή, από το σημείο  $\vec{b} = \vec{4}$  δεν μπορεί να πραγματοποιηθεί-ξεκινήσει η φάση πρόβλεψης επειδή προκύπτουν μεταβολές με άπειρη τιμή.

#### **Αριθμητική εφαρμογή:**

Την παραπάνω ανάλυση συμπληρώνει μια σύντομη αριθμητική εφαρμογή σχετικά

με το σφάλμα σάρωσης του μειώπου Pareto. Έστω ότι είναι γνωστή η βέλτιστη λύση  $\vec{b} = \vec{3}$ ,  $f_2(\vec{b}) = N$ , για το οποίο έχει δειχθεί ότι ισχύει  $\lambda_{f_2} = 0$ . Από τις εξισώσεις 4.156' και για βήμα σάρωσης  $\Delta \hat{f}_2 = -1$  προκύπτει από το βήμα πρόβλεψης:

$$\begin{aligned} \frac{\partial b_i}{\partial \hat{f}_2} &= -\frac{1}{2N}, \forall i \in [1, N] \\ b_{new,i} &= b_i + \Delta \hat{f}_2 \frac{\partial b_i}{\partial \hat{f}_2} = 3 + (-1)\left(-\frac{1}{2N}\right) = 3 + \frac{1}{2N} \forall i \in [1, N] \\ f_2(\vec{b}_{new}) &= \frac{1}{4N} + N - 1 > N - 1 = \hat{f}_2 \\ \frac{\partial \lambda_{f_2}}{\partial \hat{f}_2} &= \frac{1}{2N} \\ \lambda_{new,f_2} &= \lambda_{f_2} + \Delta \hat{f}_2 \frac{\partial \lambda_{f_2}}{\partial \hat{f}_2} = 0 + (-1)\left(\frac{1}{2N}\right) = -\frac{1}{2N} \end{aligned} \quad (4.16)$$

Υπενθυμίζεται ότι από τις συνθήκες ΚΚΤ έχουν προκύψει οι εξισώσεις 4.12. Για την τιμή  $f_2 = N - 1$ , ισχύουν για το μέτωπο βέλτιστων λύσεων:

$$\begin{aligned} b_{new,i} &= 4 - \sqrt{\frac{N-1}{N}} \neq 3 + \frac{1}{2N} \\ \lambda_{new,f_2} &= \frac{b_{new} - 3}{b_{new} - 4} = -\frac{1}{2N-1} \neq -\frac{1}{2N} \end{aligned} \quad (4.17)$$

Από τα παραπάνω είναι ξεκάθαρο ότι η πρόβλεψη δεν παράγει λύση με το επιθυμητό  $\hat{f}_2$ . Ωστόσο, η παραγόμενη λύση θα ανήκει στο μέτωπο βέλτιστων λύσεων, αφού  $b_i = b$ ,  $\forall i \in [1, N]$ . Σημειώνεται ότι αυτό συμβαίνει μόνο για σημείο εκκίνησης για το οποίο ισχύει  $b_i = b$ ,  $\forall i \in [1, N]$ . Παρατηρώντας τις εξισώσεις που διέπουν το πρόβλημα (4.1 4.2), είναι εμφανές ότι, αν στην προτεινόμενη μέθοδο το αρχικό διάνυσμα έχει  $b_i = b$ ,  $\forall i \in [1, N]$ , τότε οι παράγωγοι είναι ίσες και, άρα, θα προκύπτουν σε κάθε μεταβολή των μεταβλητών σχεδιασμού ίσες τιμές μεταξύ τους. ■

Παρόλο που το πρόβλημα αυτό απαιτεί ασήμαντο χρόνο εκτέλεσης, δεν παύει να έχει ενδιαφέρον το κόστος της μεθόδου. Για παράδειγμα, στην περίπτωση κατά την οποία η σάρωση πραγματοποιείται κατά τα φθίνοντα  $f_2$  (σχήμα 4.4, άνω), χρειάστηκαν:

- Στο βήμα διόρθωσης 830 επιλύσεις ροής και 830 υπολογισμοί των πρώτων παραγώγων ( $N_{SD} \cdot N_{ext,ALM}$ ).
- Στο βήμα πρόβλεψης 8 υπολογισμοί των πρώτων παραγώγων και 8 υπολογισμοί του εσσιανού (πλήθος βημάτων πρόβλεψης).

Όταν εφαρμόζεται η αιτιοκρατική μέθοδος, σε κάθε εσωτερική επανάληψη της ALM επιλύονται οι εξισώσεις ροής. Θεωρείται ότι η πρώτη παράγωγος υπολογίζεται με συνεχή συζυγή μέθοδο η οποία προσθέτει κόστος περίπου ίσο με μία επιπλέον επίλυση

των εξισώσεων ροής στο ήδη υπάρχον κόστος. Ο υπολογισμός του εσσιανού μητρώου πραγματοποιείται με εφαρμογή της ευθείας διαφόρισης στην πρώτη παράγωγο, διαδικασία που αυξάνει το κόστος κατά  $\sim N$  ισοδύναμες επιλύσεις των εξισώσεων ροής [2]. Έτσι, προκύπτει ότι η διαδικασία κόστισε 1724 επιλύσεις ροής. Από το σχήμα 4.2 φαίνεται ότι ο ΕΑ χρειάστηκε 3158 αξιολογήσεις ώστε να προσεγγίσει το αναλυτικό μέτωπο βέλτιστων λύσεων, χωρίς να ταυτίζεται πλήρως με αυτό σε μερικές περιοχές. Βέβαια, αξίζει να σημειωθεί ότι η αιτιοκρατική μέθοδος υπολόγισε 9 βέλτιστες λύσεις ενώ ο ΕΑ υπολόγισε 72. Ο όρος "ροή" χρησιμοποιείται εικονικά έστω και αν πρόκειται για ένα απλό μαθηματικό πρόβλημα.

Τέλος, μια ακόμη αξιοσημείωτη παρατήρηση αφορά την ακρίβεια των μεθόδων, δηλαδή κατά πόσο οι βέλτιστες λύσεις συμπίπτουν με το αναλυτικό μέτωπο βέλτιστων λύσεων. Υπενθυμίζεται ότι, για κάθε βέλτιστη λύση, οι μεταβλητές σχεδιασμού έχουν μεταξύ τους ίσες τιμές, άρα με χρήση της τυπικής απόκλισης μεταξύ των μεταβλητών σχεδιασμού μπορεί να εξεταστεί το κατά πόσο οι παραγόμενες λύσεις ταυτίζονται με το αναλυτικό μέτωπο:

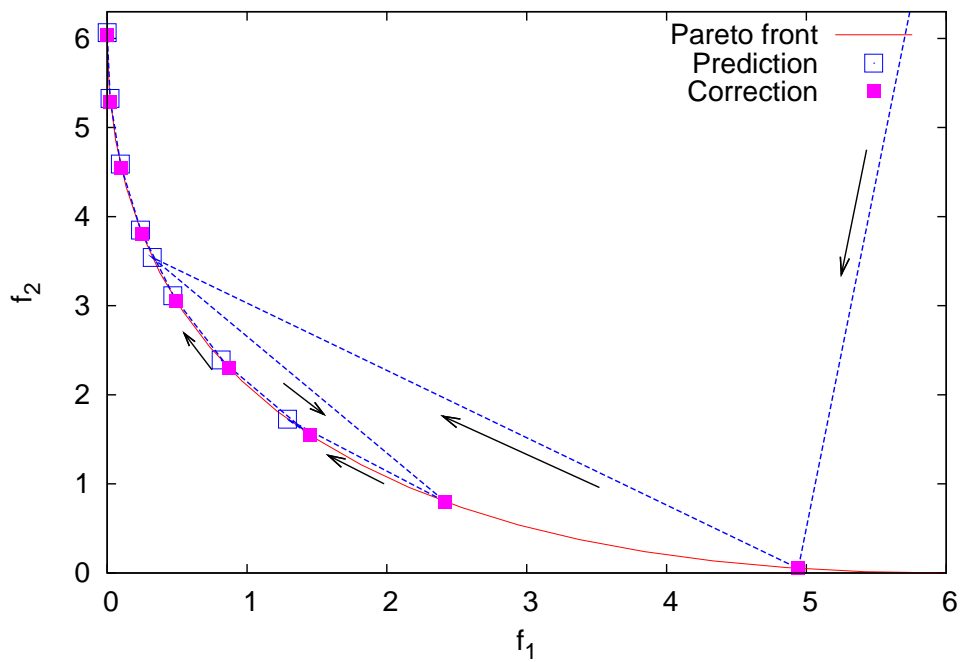
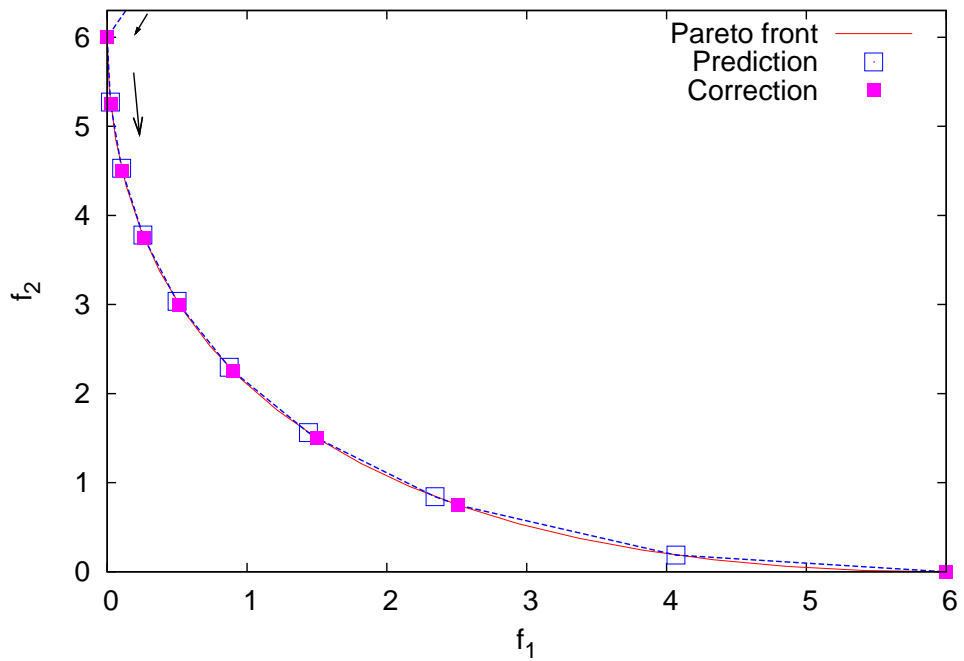
$$TA = \sum_{i=1}^N \left( \sum_{j=i+1}^N (b_i - b_j)^2 \right) \quad (4.18)$$

Όπως αναφέρθηκε στην αριθμητική εφαρμογή, όταν το σημείο εκκίνησης διέπεται από την σχέση  $b_i = b, \forall i \in [1, N]$ , οι προκύπτουσες λύσεις διέπονται από τον ίδιο κανόνα, δηλαδή οι μεταβλητές σχεδιασμού παρουσιάζουν μηδενική τυπική απόκλιση. Για αυτό, πραγματοποιήθηκε ένα τρέξιμο με αρχικό διάνυσμα λύσεων:

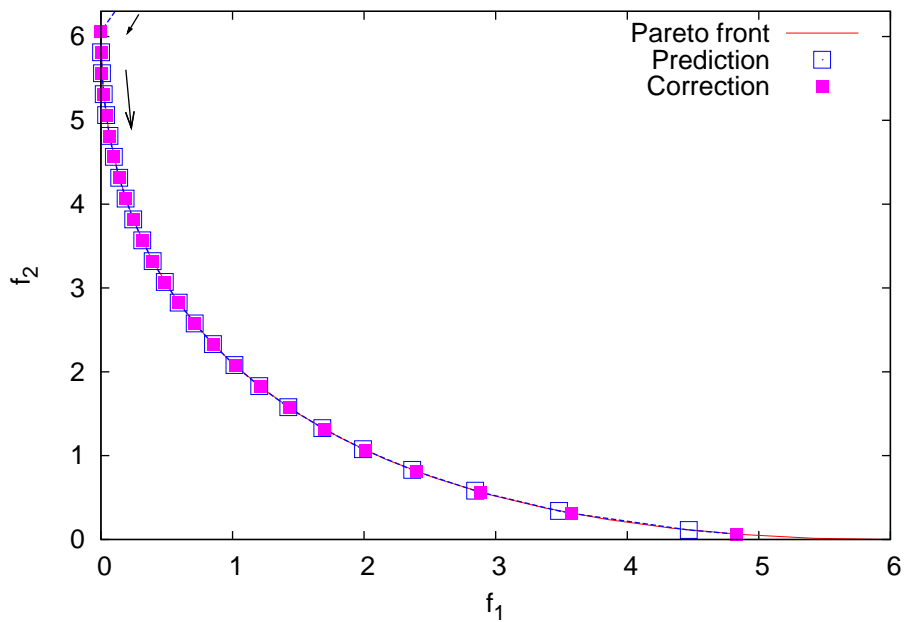
$$\vec{b}_{start} = ( 2.2 \quad 3.0 \quad 4.0 \quad 1.0 \quad 5.0 \quad 6.0 )^T \quad (4.19)$$

Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στο σχήμα 4.6.

Είναι σημαντική η προσεκτική ερμηνεία των παρατηρήσεων που προηγήθηκαν, καθώς αποτελούν πορίσματα τα οποία προέχονται από μαθηματικό πρόβλημα. Άρα, τα συμπεράσματα που προκύπτουν μπορεί να μην παρουσιάζουν καθολική εφαρμογή, ειδικά σε πολύπλοκα πραγματικά προβλήματα, τα οποία εξετάζονται παρακάτω.

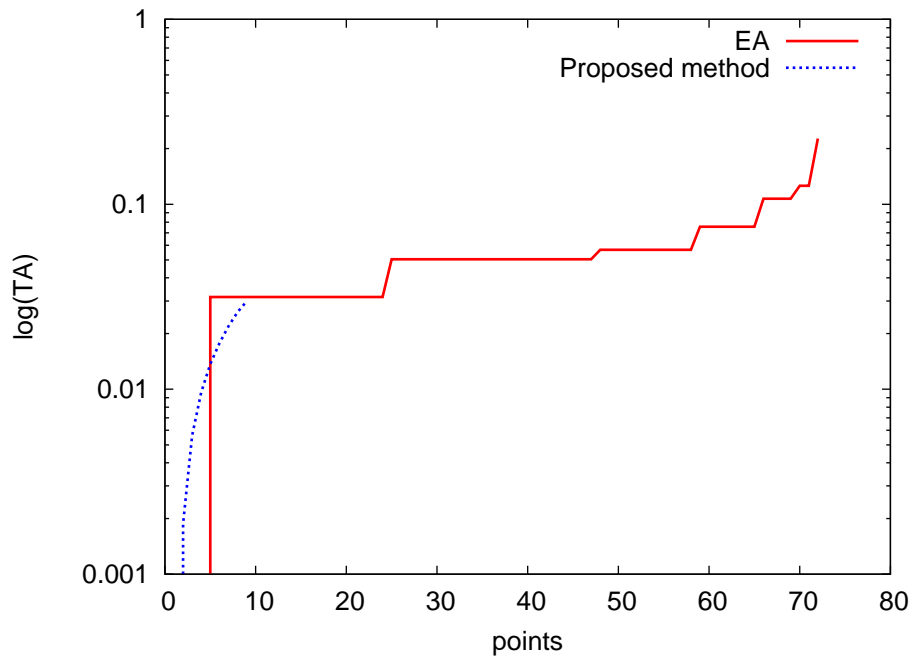


Σχήμα 4.4: Μαθηματικό πρόβλημα A: Άνω: σάρωση του μετώπου από πάνω προς τα κάτω (φθίνοντα  $f_2$ ). Κάτω σχήμα: σάρωση του μετώπου από κάτω προς τα πάνω (αύξοντα  $f_2$ ). Και στις δύο περιπτώσεις, κατά την πρόβλεψη, η μέθοδος συζυγών κλίσεων ικανοποίησε το κριτήριο σύγκλισης  $conv_{CG}$  από τη δεύτερη επανάληψη της, δίνοντας υπόλοιπο μικρότερο του  $10^{-20}$ . Το σημείο εκκίνησης δεν εμφανίζεται για λόγους κλίμακας.



Σχήμα 4.5: Μαθηματικό πρόβλημα A: Σάρωση του μετώπου από πάνω προς τα κάτω (φθίνοντα  $f_2$ ) για βήμα  $\Delta \hat{f}_2 = 0.25$  (αντί για  $\Delta \hat{f}_2 = 0.75$ , όπως στο σχήμα 4.4). Όσο και αν το βήμα μικραίνει, στην περιοχή όπου το μέτωπο τείνει να γίνει παράλληλο με τον οριζόντιο άξονα η πρόβλεψη αποκλίνει (η περιοχή η οποία εφάπτεται στον οριζόντιο άξονα χαρακτηρίζεται από  $\lambda_{f_2} \rightarrow \infty$ ). Όπως και προηγουμένως, το σημείο εκκίνησης δεν εμφανίζεται για λόγους κλίμακας.





Σχήμα 4.6: Μαθηματικό πρόβλημα A : Σύγκριση τυπικής απόκλισης (TA) των τιμών των μεταβλητών σχεδιασμού μεταξύ των Pareto λύσεων που παράγουν ο EA και η μέθοδος πρόβλεψης-διόρθωσης. Από τη στιγμή που η προτεινόμενη μέθοδος χρησιμοποιεί παραγώγους τείνει να παράξει λύσεις πιο κοντά στις αναλυτικές από ότι ο EA, ο οποίος χρησιμοποιεί τεχνικές τυχαμτικής αναζήτησης.

## 4.2 Μαθηματικό Πρόβλημα Β

Ως δεύτερο πρόβλημα βελτιστοποίησης επιλύεται ένα με  $N = 5$  μεταβλητές σχεδιασμού, το:

$$\min \begin{cases} f_1(\vec{b}) = \frac{b_1+b_2+b_3+b_5}{b_3b_4} = \frac{b_1+b_2+b_5}{b_3b_4} + \frac{1}{b_4} \\ f_2(\vec{b}) = b_4 + b_3e^{-b_1b_2b_5} \end{cases} \quad (4.20)$$

$$b_i \in [1, 6], \forall i \in [1, 5]$$

Οι πρώτες παράγωγοι των συναρτήσεων στόχων προκύπτουν αναλυτικά ως:

$$\nabla_{\vec{b}} f_1(\vec{b}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{b_3b_4} \\ \frac{1}{b_3b_4} \\ -\frac{b_1+b_2+b_5}{b_3^2b_4} \\ -\left(\frac{b_1+b_2+b_5}{b_3} + 1\right)\frac{1}{b_4^2} \\ \frac{1}{b_3b_4} \end{pmatrix} \quad \nabla_{\vec{b}} f_2(\vec{b}) = \begin{pmatrix} -e^{-b_1b_2b_5}b_2b_3b_5 \\ -e^{-b_1b_2b_5}b_1b_3b_5 \\ e^{-b_1b_2b_5}b_2b_3b_5 \\ 1.0 \\ -e^{-b_1b_2b_5}b_1b_2b_3 \end{pmatrix}$$

ενώ οι δεύτερες παράγωγοι, στη μορφή των εσσιανών μητρών, γράφονται ως:

$$\nabla_{\vec{b}}^2 f_1(\vec{b}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{b_3^2b_4} & -\frac{1}{b_3b_4^2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{b_3^2b_4} & -\frac{1}{b_3b_4^2} & 0 \\ -\frac{1}{b_3^2b_4} & -\frac{1}{b_3^2b_4} & 2\frac{b_1+b_2+b_5}{b_3^3b_4} & \frac{b_1+b_2+b_5}{b_3^2b_4^2} & -\frac{1}{b_3^2b_4} \\ -\frac{1}{b_3b_4^2} & -\frac{1}{b_3b_4^2} & \frac{b_1+b_2+b_5}{b_3^2b_4^2} & 2\left(\frac{b_1+b_2+b_5}{b_3} + 1\right) & -\frac{1}{b_3b_4^2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{b_3^2b_4} & -\frac{1}{b_3b_4^2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\nabla_{\vec{b}}^2 f_2(\vec{b}) = \begin{bmatrix} b_3(b_2b_5)^2 & b_3b_5g & -b_2b_5 & 0 & b_3b_2g \\ b_3b_5g & b_3(b_1b_5)^2 & -b_1b_5 & 0 & b_3b_1g \\ -b_2b_5 & -b_1b_5 & 0 & 0 & -b_1b_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_3b_2g & b_3b_1g & -b_1b_2 & 0 & b_3(b_2b_1)^2 \end{bmatrix} e^{-b_1b_2b_5} \quad (4.21)$$

όπου  $g = (b_1b_2b_5 - 1)$ .

Από τις αντικειμενικές συναρτήσεις (4.20) είναι εφικτή η αναλυτική εύρεση της μέγι-

στης και της ελάχιστης τιμής της  $f_2$ :

$$\left. \begin{array}{l} b_3 = b_{3,min}, b_4 = b_{4,min} \\ b_1 = b_{1,max}, b_2 = b_{2,max}, b_5 = b_{5,max} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f_1(\vec{b}) = f_{1,max} = 10 \\ f_2(\vec{b}) = f_{2,min} \cong 1 \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} b_3 = b_{3,max}, b_4 = b_{4,max} \\ b_1 = b_{1,min}, b_2 = b_{2,min}, b_5 = b_{5,min} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f_1(\vec{b}) = f_{1,min} = 0.25 \\ f_2(\vec{b}) = f_{2,max} \cong 8.21 \end{array} \right. \quad (4.22)$$

Με βάση τα παραπάνω θα επιλεγεί βήμα σάρωσης κοντά στη μονάδα, καθώς η δεύτερος στόχος κυμαίνεται μεταξύ των τιμών 1 και 8.21.

Όπως και στο πρώτο μαθηματικό πρόβλημα (κεφάλαιο 4.1), πραγματοποιούνται δύο δοκιμές όσον αφορά τη φορά σάρωσης του μετώπου, επιλέγοντας το ίδιο σημείο εκκίνησης:

$$\vec{b}_{start} = \begin{pmatrix} 3.0 \\ \vdots \\ 3.0 \end{pmatrix} \quad (4.23)$$

για το οποίο προκύπτει:

$$\begin{aligned} f_1(\vec{b}_{start}) &\cong 1.333 \\ f_2(\vec{b}_{start}) &\cong 3.000 \end{aligned} \quad (4.24)$$

Η εκτέλεση της μεθόδου γίνεται σύμφωνα με τις παραμέτρους που αναγράφονται στον πίνακα 4.2. Για την επίλυση του συστήματος 3.22, στη φάση της πρόβλεψης, επιλέγεται για την πρώτη σάρωση του μετώπου η εξής αρχικοποίηση του διανύσματος λύσεων πολλαπλασιασμένου με το βήμα σάρωσης:

$$\vec{x}_{start,CG} \cdot \Delta \hat{f}_2 = \begin{pmatrix} -100.0(\delta b_1) \\ -100.0(\delta b_2) \\ -100.0(\delta b_3) \\ -100.0(\delta b_4) \\ -100.0(\delta b_5) \\ -100.0(\delta \lambda_{f_2}) \end{pmatrix}$$

Προφανώς οι τιμές της αρχικοποίησης είναι ιδιαίτερα μεγάλες κατά απόλυτη τιμή, δεδομένου του πεδίου ορισμού των μεταβλητών σχεδιασμού και της τάξης μεγεθών των τιμών των συναρτήσεων κόστους. Ωστόσο, είναι μια καλή ευκαιρία για δοκιμή της σύγκλισης της μεθόδου συζυγών κλίσεων.

Βήμα Διόρθωσης	$conv f_1$	$3 \cdot 10^{-5}$
	$conv f_2$	0.5
	$\omega_p$	1
	$\omega_{p,max}$	10
	$\gamma$	1.5
	$\eta_{SD}$	$5 \cdot 10^{-2}$
	$N_{SD}$	10
Βήμα Πρόβλεψης	$\Delta \hat{f}_2$	$\pm 0.7$
	$conv_{CG}$	0.1

Πίνακας 4.2: Μαθηματικό πρόβλημα B: Παράμετροι για τα βήματα διόρθωσης και πρόβλεψης.

Τα αποτεύματα φαίνονται στο σχήμα 4.7.

### Παρατηρήσεις :

Στον πίνακα 4.3 παρουσιάζεται το πλήθος των επαναλήψεων της μεθόδου συζυγών κλίσεων ( $N_{CG}$ ) που απαιτούνται για να ικανοποιηθεί το κριτήριο σύγκλισης  $conv_{CG}$  σε κάθε φάση πρόβλεψης. Γενικά επιτυγχάνεται αποκοπή ( $N_{CG} < N$ ), ακόμα και στην πρώτη σάρωση, όπου η αρχικοποίηση απέχει, όπως αναφέρθηκε παραπάνω, αρκετά από την ακριβή λύση.

Όσον αφορά το κόστος της μεθόδου, στη σάρωση προς φθίνοντα  $f_2$  (σχήμα 4.7, άνω) χρειάστηκαν 205 υπολογισμοί πρώτων παραγώγων στο βήμα διόρθωσης, καθώς και 14 υπολογισμοί δευτέρων παραγώγων στο βήμα πρόβλεψης. Θεωρώντας ότι το κόστος υπολογισμού της πρώτης παραγώγου ανέρχεται σε  $\sim 1$  ισοδύναμη επίλυση ροής, η οποία προστίθεται στο κόστος επίλυσης του ευθέως προβλήματος, ενώ ο υπολογισμός του εσσιανού σε  $\sim N$  επιλύσεις ροής επιπλέον του κόστους της πρώτης παραγώγου [2], προκύπτει ότι η διαδικασία κόστισε 508 επιλύσεις ροής ενώ ο ΕΑ χρειάστηκε 965 αξιολογήσεις. Κατά τη σάρωση προς αύξουσες τιμές του δεύτερου στόχου χρειάστηκαν 89 υπολογισμοί πρώτων παραγώγων στο βήμα διόρθωσης και 19 υπολογισμοί δευτέρων παραγώγων στο βήμα πρόβλεψης, δηλαδή σύνολο 311 επιλύσεις ροής. Ωστόσο, ο ΕΑ υπολόγισε 50 σημεία στο μέτωπο βέλτιστων λύσεων, ενώ η αιτιοκρατική μέθοδος υπολόγισε 8.

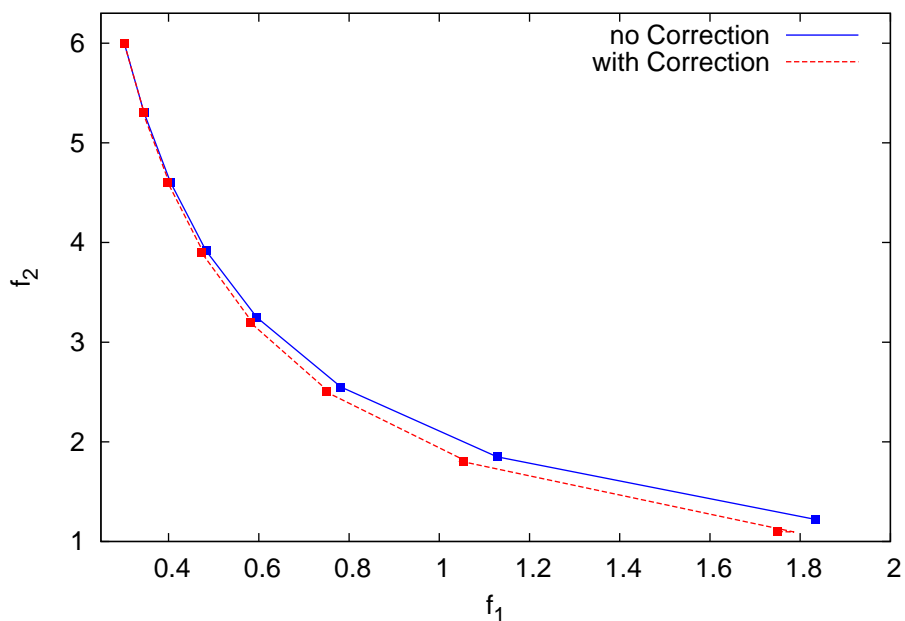
Τέλος, ενδιαφέρον παρουσιάζει η περίπτωση όπου δεν πραγματοποιείται η φάση διόρθωσης (σχήμα 4.8). Συγκεκριμένα, εκκινώντας από μια λύση που ανήκει στο μέτωπο Pareto είναι εμφανές ότι κατά τη σάρωση του μετώπου παρουσιάζεται μια συσσώρευση σφάλματος η οποία οδηγεί σε απομάκρυνση των λύσεων από το πραγματικό μέτωπο βέλτιστων λύσεων.

πρόβλεψη	πλήθος
1	4
2	1
3	1
4	1
5	1
6	3
7	3

πρόβλεψη	πλήθος
1	4
2	3
3	3
4	3
5	2
6	3
7	1

Πίνακας 4.3: Μαθηματικό πρόβλημα Β: Επαναλήψεις της μεθόδου συζυγών κλίσεων σε κάθε πρόβλεψη για την σάρωση προς κάτω (αριστερά) και προς τα πάνω (δεξιά).





Σχήμα 4.8: Μαθηματικό πρόβλημα B: Η επίδραση της φάσης διόρθωσης (σάρωση του μετώπου Pareto προς τα κάτω). Παρατηρώντας το άνω σχήμα 4.7, φαίνεται ότι η πρόβλεψη δίνει λύση αρκετά κοντά στο μέτωπο βέλτιστων λύσεων, αν όχι πάνω σε αυτό. Ωστόσο, ακόμα και αυτή η μικρή απόκλιση είναι ικανή να οδηγήσει σε συσσωρευμένο σφάλμα και, κατά συνέπεια, στην απομάκρυνση από το μέτωπο αν δεν γίνει εφαρμογή της διόρθωσης.

### 4.3 Μαθηματικό Πρόβλημα Γ

Έστω το μη-κυρτό (non-convex) πρόβλημα ελαχιστοποίησης δύο στόχων, το οποίο είναι γνωστό ως ZDT 2 πρόβλημα [13],  $N$  μεταβλητών σχεδιασμού:

$$\begin{aligned} \min \left\{ \begin{array}{l} f_1(\vec{b}) = b_1 \\ f_2(\vec{b}) = g(\vec{b})h(\vec{b}) \end{array} \right. \quad (4.25) \\ b_i \in [0, 1], \forall i \in [1, N] \end{aligned}$$

όπου  $g, h$  οι βοηθητικές συναρτήσεις:

$$\begin{aligned} g(\vec{b}) &= 1 + \frac{9}{N-1} \sum_{i=2}^N b_i \\ h(\vec{b}) &= 1 - \left( \frac{f_1(\vec{b})}{g(\vec{b})} \right)^2 \end{aligned} \quad (4.26)$$

Οι πρώτες παράγωγοι των συναρτήσεων-στόχων προκύπτουν αναλυτικά ως:

$$\begin{aligned} \nabla_{\vec{b}} f_1(\vec{b}) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \\ \nabla_{\vec{b}} f_2(\vec{b}) &= h(\vec{b}) \nabla_{\vec{b}} g(\vec{b}) + g(\vec{b}) \nabla_{\vec{b}} h(\vec{b}) \end{aligned} \quad (4.27)$$

και οι δεύτερες ως:

$$\begin{aligned} \nabla_{\vec{b}}^2 f_1(\vec{b}) &= \tilde{0} \\ \nabla_{\vec{b}}^2 f_2(\vec{b}) &= \nabla_{\vec{b},i} h(\vec{b}) \nabla_{\vec{b},j} g(\vec{b}) + \nabla_{\vec{b},i} g(\vec{b}) \nabla_{\vec{b},j} h(\vec{b}) + g(\vec{b}) \nabla_{\vec{b}}^2 h(\vec{b}) \end{aligned} \quad (4.28)$$

Οι πρώτες παράγωγοι των βοηθητικών συναρτήσεων υπολογίζονται αναλυτικά ως



εξής:

$$\begin{aligned}
\nabla_{\vec{b}} g(\vec{b}) &= \frac{9}{m-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \\
\nabla_{\vec{b}} h(\vec{b}) &= -2 \frac{f_1(\vec{b})}{g(\vec{b})} \nabla_{\vec{b}} \frac{f_1(\vec{b})}{g(\vec{b})} \\
\nabla_{\vec{b}} \frac{f_1(\vec{b})}{g(\vec{b})} &= \frac{g(\vec{b}) \nabla_{\vec{b}} f_1(\vec{b}) - f_1(\vec{b}) \nabla_{\vec{b}} g(\vec{b})}{g^2(\vec{b})}
\end{aligned} \tag{4.29}$$

Για το εσσιανό μητρώο της συνάρτησης  $h$  ισχύει:

$$\begin{aligned}
\nabla_{\vec{b}}^2 h(\vec{b}) &= -2 \left( \nabla_{\vec{b},i} \frac{f_1(\vec{b})}{g(\vec{b})} \nabla_{\vec{b},j} \frac{f_1(\vec{b})}{g(\vec{b})} + \frac{f_1(\vec{b})}{g(\vec{b})} \nabla_{\vec{b}}^2 \frac{f_1(\vec{b})}{g(\vec{b})} \right) \\
\nabla_{\vec{b}}^2 \frac{f_1(\vec{b})}{g(\vec{b})} &= \frac{\nabla_{\vec{b},j} g(\vec{b}) \nabla_{var,i} f_1(\vec{b}) - \nabla_{\vec{b},i} g(\vec{b}) \nabla_{var,j} f_1(\vec{b})}{g^2(\vec{b})} - \\
&\quad \frac{2}{g^3(\vec{b})} (g(\vec{b}) \nabla_{\vec{b},i} f_1(\vec{b}) - f_1(\vec{b}) \nabla_{\vec{b},i} g(\vec{b})) \nabla_{\vec{b},j} g(\vec{b})
\end{aligned} \tag{4.30}$$

Ενδιαφέρον παρουσιάζει το γεγονός ότι ο πρώτος στόχος εξαρτάται μόνο από την πρώτη μεταβλητή σχεδιασμού. Για την ελαχιστοποίηση της συνάρτησης  $f_2$  από τις εξισώσεις 4.25 προκύπτει ότι πρέπει οι  $g, h$  να είναι ελάχιστες. Με την σειρά της, η συνάρτηση  $h$  παρουσιάζει ελάχιστο όταν η  $g$  παρουσιάζει ελάχιστη τιμή, άρα οι μεταβλητές σχεδιασμού  $b_i, \forall i \in [2, N]$  επιλέγονται έτσι ώστε να ελαχιστοποιείται η συνάρτηση  $g$ . Από τη στιγμή που το πεδίου ορισμού για όλες τις μεταβλητές είναι από 0 έως και 1 είναι εμφανές ότι στο μέτωπο βέλτιστων λύσεων θα ισχύει  $b_i = 0, \forall i \in [2, N]$ , καθώς επίσης και  $g(\vec{b}) = 1$ . Άρα, η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή της  $f_2$  στο μέτωπο Pareto μπορεί να προκύψει εύκολα:

$$\begin{aligned}
f_{2,max}(\vec{b}) &= 1 - f_{1,min}^2(\vec{b}) = 1 - 0^2 = 1 \\
f_{2,min}(\vec{b}) &= 1 - f_{1,max}^2(\vec{b}) = 1 - 1^2 = 0
\end{aligned}$$

Για την επίλυση του προβλήματος επιλέγεται πλήθος μεταβλητών σχεδιασμού ίσο με  $N=3$ .

Όπως και στα δύο προηγούμενα προβλήματα, πραγματοποιούνται δύο δοκιμές όσον αφορά τη φορά σάρωσης του μετώπου, για το οποίο επιλέγεται το ίδιο σημείο εκ-

κίνησης:

$$\vec{b}_{start} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.0 \\ 0.0 \end{pmatrix} \quad (4.31)$$

για το οποίο ισχύει:

$$\begin{aligned} f_1(\vec{b}_{start}) &= 0.5 \\ f_2(\vec{b}_{start}) &= 0.75 \end{aligned} \quad (4.32)$$

Για την εκτέλεση της μεθόδου χρησιμοποιήθηκαν οι παράμετροι που αναγράφονται στον πίνακα 4.4. Για την επίλυση του συστήματος 3.22, στη φάση της πρόβλεψης, επιλέγεται για την πρώτη σάρωση του μετώπου η εξής αρχικοποίηση του διανύσματος λύσεων πολλαπλασιασμένου με το βήμα σάρωσης:

$$\vec{x}_{start,CG} \cdot \Delta \hat{f}_2 = \begin{pmatrix} 0.1(\delta b_1) \\ 0.1(\delta b_2) \\ 0.1(\delta b_3) \\ 0.1(\delta \lambda_{f_2}) \end{pmatrix}$$

Βήμα Διόρθωσης	$conv f_1$	$2 \cdot 10^{-7}$
	$conv f_2$	0.05
	$\omega_p$	1.0
	$\omega_{p,max}$	1.0
	$\gamma$	1.0
	$\eta_{SD}$	$10^{-3}$
	$N_{SD}$	1
Βήμα Πρόβλεψης	$\Delta \hat{f}_2$	$\pm 0.1$
	$conv_{CG}$	$10^{-3}$

Πίνακας 4.4: Μαθηματικό πρόβλημα Γ: Παράμετροι για τα βήματα διόρθωσης και πρόβλεψης.

Τα αποτελέσματα εμφανίζονται στο σχήμα 4.9.

### Παρατηρήσεις:

Τονίζεται ότι από τη στιγμή που στο μέτωπο βέλτιστων λύσεων οι  $N - 1$  μεταβλητές σχεδιασμού λαμβάνουν τη μικρότερη επιτρεπτή από τον χρήστη τιμή, το σύστημα 3.22 πρέπει να επεκταθεί και να συμπεριλάβει  $N - 1$  ενεργούς περιορισμούς ανισοσότητας (σύστημα 3.32), που σε αυτή την περίπτωση είναι δύο. Άρα, το σύστημα

έχει 6 αγνώστους <sup>1</sup>:

- $\frac{\partial b_i}{\partial f_2}$  (3 μεταβλητές)
- $\frac{\partial \lambda_{f_2}}{\partial f_2}$  (1 μεταβλητή)
- $\frac{\partial \mu_i}{\partial f_2}$  (2 μεταβλητές)

Στο σύστημα 3.22 προστίθενται μηδενικά στοιχεία και οι παράγωγοι των ενεργών περιορισμών, που προκύπτουν από το πεδίο ορισμού, δημιουργώντας το σύστημα 3.32. Αυτές οι παράγωγοι είναι ιδιαίτερα απλές, καθώς ο κάθε περιορισμός είναι μία γραμμική σχέση πρώτης τάξης που εξαρτάται μόνο από μία μεταβλητή σχεδιασμού. Έτσι, η διαδικασία δεν επιβαρύνεται από τον υπολογισμό τους.

Σε κάθε βήμα πρόβλεψης, και στις δύο περιπτώσεις σάρωσης του μετώπου, η μέθοδος συζυγών κλίσεων πραγματοποιήσε τέσσερις επαναλήψεις, δηλαδή λιγότερες από το πλήθος των μεταβλητών του συστήματος 3.32.

Είναι ιδιαίτερα σημαντικό το γεγονός ότι η προτεινόμενη μέθοδος μπορεί να υπολογίσει μέτωπο Pareto σε κοίλο πρόβλημα, όπως φαίνεται και από το σχήμα 4.9. Υπενθυμίζεται ότι η ανάλυση της μεθόδου (κεφάλαιο 3) ξεκίνησε από τον συμβατικό τρόπο διαχείρισης προβλημάτων πολλών στόχων με αιτιοκρατικές μεθόδους, αυτόν της συσσώρευσης όλων των συναρτήσεων κόστους σε μία, αφού πολλαπλασιαστεί καθεμία με έναν συντελεστή βάρους (εξίσωση 2.2). Ο συμβατικός τρόπος δεν μπορεί να επιλύσει μη-κυρτά προβλήματα, καθώς η ελαχιστοποίηση της συνάρτησης  $\omega_1 f_1(\vec{b}) + \omega_2 f_2(\vec{b})$  συγκλίνει σε ένα εκ των δύο άκρων του μετώπου βέλτιστων λύσεων (παράρτημα Α.2). Με άλλα λόγια, η προτεινόμενη μέθοδος διαθέτει ένα σημαντικό πλεονέκτημα έναντι της συμβατικής μεθόδου.

Επίσης, παρατηρείται ότι σε υψηλές τιμές του στόχου  $f_2$  η πρόβλεψη απέχει όλο και περισσότερο από τη διόρθωση. Υπενθυμίζεται ότι κάτι παρόμοιο παρουσιάστηκε και στο πρώτο μαθηματικό πρόβλημα (κεφάλαιο 4.1 σχήμα 4.4) στις αντίστοιχες περιοχές (στις χαμηλές τιμές  $f_2$ ), δηλαδή εκεί όπου το μέτωπο Pareto τείνει να γίνει παράλληλο με τον άξονα της  $f_1$ .

Για το άνω αριστερά άκρο του μετώπου, όπου ισχύει  $b_1 = b_2 = b_3 = 0$ , χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις που αναλύθηκαν παραπάνω (εξισώσεις 4.25, 4.26, 4.27, 4.28, 4.29, 4.30) προκύπτουν:

$$\begin{aligned} f_1(\vec{0}) &= 0 & g(\vec{0}) &= 1 \\ h(\vec{0}) &= 1 & \nabla_{\vec{b}} h(\vec{b}) &= 0 \\ \nabla_{\vec{b}} f_2(\vec{b}) &= \nabla_{\vec{b}} g(\vec{b}) \end{aligned} \quad (4.33)$$

Με βάση τα παραπάνω και τις εξισώσεις 4.27 και 4.29 προκύπτουν οι τιμές των

<sup>1</sup> Προηγουμένως όπου έγινε αναφορά στην αρχικοποίηση του διανύσματος λύσεων δεν αναφέρθηκε η αρχικοποίηση των  $\mu_2, \mu_3$ . Στον αλγόριθμο που έχει αναπτυχθεί η αρχική μεταβολή των πολλαπλασιαστών των ενεργών ανισο-ισοτήτων ορίζεται ίσο με την αρχικοποίηση της μεταβολής του  $\lambda_{f_2}$ .

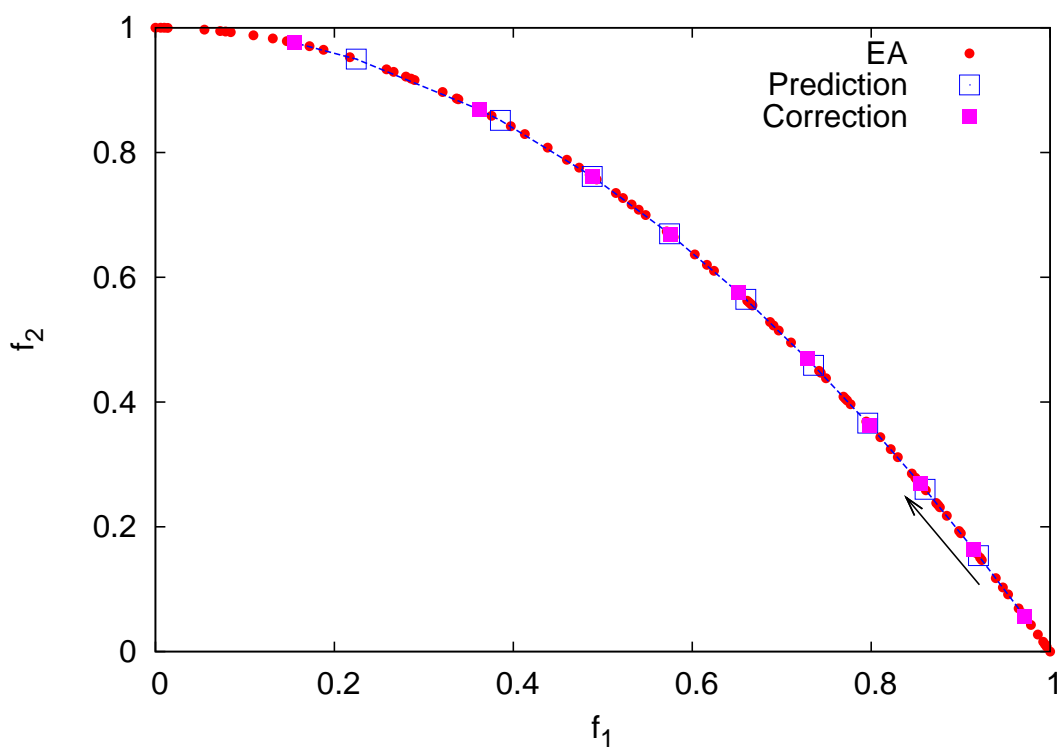
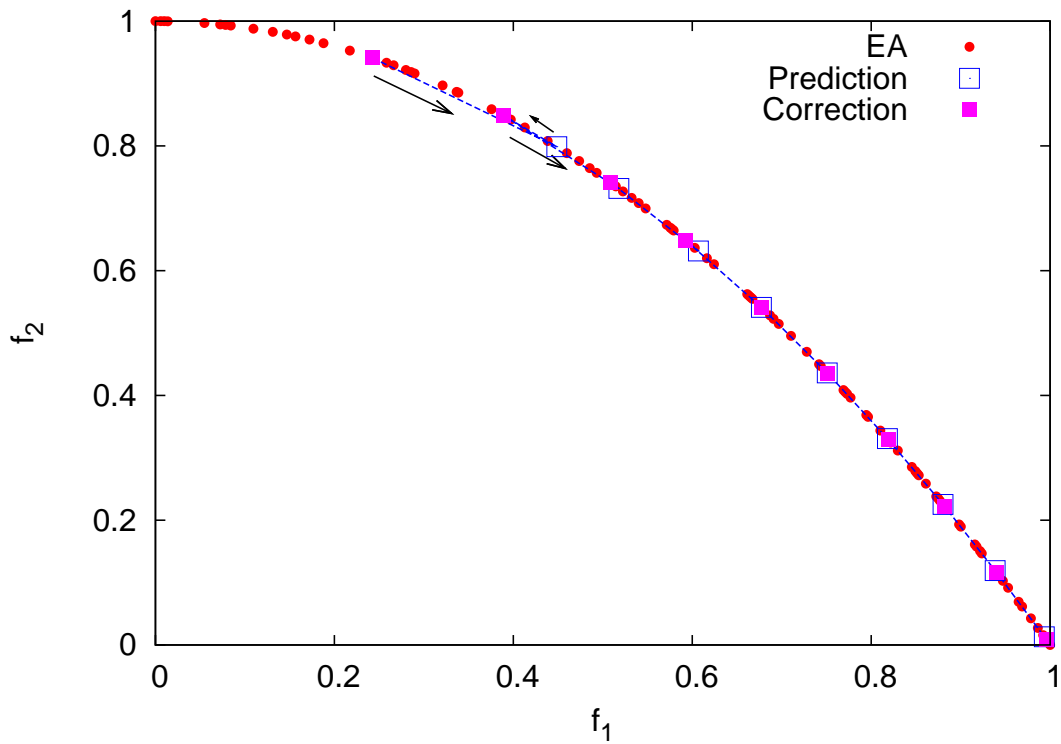
παραγώγων των συναρτήσεων κόστους για το σημείο  $\vec{b} = \vec{0}$ ,  $N = 3$ :

$$\begin{aligned}\nabla_{\vec{b}} f_1(\vec{b}) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \nabla_{\vec{b}} f_2(\vec{b}) &= \frac{9}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\end{aligned}\tag{4.34}$$

Έτσι, οι συνθήκες ΚΚΤ γράφονται ως εξής:

$$\begin{aligned}1 - \lambda_{f_2} \cdot 0 &= 0 \\ 0 - 4.5\lambda_{f_2} - \mu_2 &= 0 \\ 0 - 4.5\lambda_{f_2} - \mu_3 &= 0\end{aligned}\tag{4.35}$$

Δηλαδή ο πολλαπλασιαστής ισότητας Lagrange προκύπτει  $\infty$  στην περιοχή που γίνεται οριζόντιο το μέτωπο βέλτιστων λύσεων, όπως παρατηρήθηκε και στο πρώτο μαθηματικό πρόβλημα (κεφάλαιο 4.1). Για το άλλο άκρο του μετώπου ( $b_1 = 1, b_2 = b_3 = 0$ ), ακολουθώντας την ίδια ανάλυση, προκύπτει  $\lambda_{f_2} = -0.5$ .



Σχήμα 4.9: Μαθηματικό πρόβλημα Γ. Άνω: σάρωση του μετώπου Pareto από πάνω προς τα κάτω (φθίνοντα  $f_2$ ). Κάτω: σάρωση από κάτω προς τα πάνω (αύξοντα  $f_2$ ). Δεν εμφανίζεται το σημείο εκκίνησης, το οποίο ανήκει στο μέτωπο βέλτιστων λύσεων, για λόγους ευκρίνειας.



# Κεφάλαιο 5

## Εφαρμογές σε Προβλήματα

## Ρευστομηχανικής Δύο Στόχων

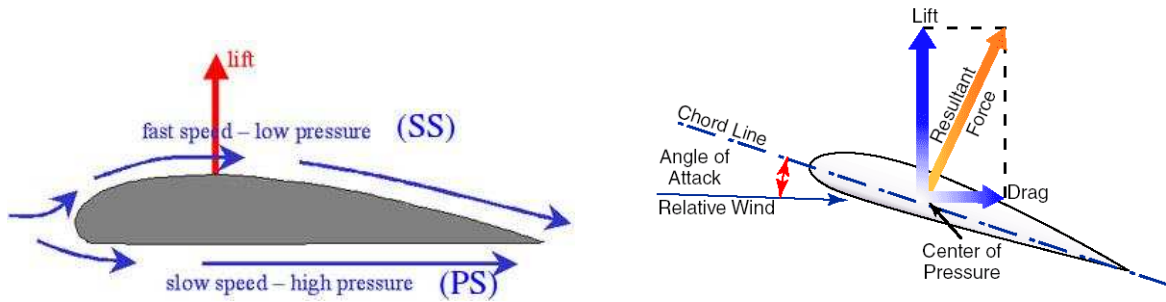
### 5.1 Ρευστομηχανικό Πρόβλημα A

Στην εισαγωγή πραγματοποιήθηκε αναφορά σε ένα πρόβλημα το οποίο συναντάται στη βιομηχανία. Αυτό είναι η βελτιστοποίηση της γεωμετρίας μιας αεροτομής, έτσι ώστε να μεγιστοποιηθεί ο συντελεστής άνωσης  $C_L$ , χωρίς να διακυβεύεται η μηχανική αντοχή της.

Η αντοχή ενός αντικειμένου εξαρτάται από διάφορους παράγοντες: το υλικό, την εσωτερική κατανομή του υλικού, το σχήμα του, τον λόγο πάχους-μήκους κ.α.. Έστω ότι στο παρόν παράδειγμα εξετάζεται η αντοχή με βάση το πάχος της αεροτομής. Μια ιδιαίτερα λεπτή αεροτομή κάμπτεται εντονότερα και είναι πιο επιρρεπής σε θραύση, ενώ μια παχιά αεροτομή και επιβαρύνει το σύστημα εξαιτίας του προστιθέμενου βάρους και δεν διαθέτει ικανοποιητικά αεροδυναμικά χαρακτηριστικά. Τέλος, σε αεροναυπηγικές εφαρμογές, ο εσωτερικός χώρος των πτερύγιων χρησιμοποιείται ως αποθηκευτικός χώρος καυσίμου, δηλαδή απαιτείται σχετικά παχιά πτέρυγα [14].

Ο συντελεστής άνωσης εξαρτάται σημαντικά από την κυρτότητα των πλευρών υποπίεσης και υπερπίεσης. Όσο μεγαλύτερη είναι η κυρτότητα της πλευράς υποπίεσης, τόσο περισσότερο επιταχύνεται το ρευστό. Ομοίως, στην πλευρά υπερπίεσης, όσο η ροή επιβραδύνεται, η πίεση αυξάνεται. Ως αποτέλεσμα, δημιουργείται υποπίεση στην άνω πλευρά και υπερπίεση στην κάτω πλευρά οι οποίες συμβάλλουν στην εμφάνιση ανωστικής δύναμης και οπισθέλκουσας (σχήμα 5.1).

Η περιφέρεια της αεροτομής σχεδιάζεται με χρήση καμπύλων Bezier (παράρτημα Γ.2). Για την ακρίβεια, οι πλευρές υπερπίεσης και υποπίεσης σχεδιάζονται με μια



Σχήμα 5.1: Οι περιοχές υπερπίεσης (high pressure) και υποπίεσης (low pressure) γύρω από αεροτομή για προσκολλημένη ροή και η ανάπτυξη των δυνάμεων άνωσης (lift) και οπισθέλκουσας (drag) [15, 16].

καμπύλη πέντε σημείων ελέγχου (control points-CP)  $(\hat{X}, \hat{Y})$  η καθεμία. Από αυτά τα σημεία, τα ακραία είναι σταθερά ως η αρχή (πρώτο CP) και το πέρας (τελευταίο CP) της χορδής, καθώς και τα σημεία ελέγχου τα οποία έπονται του πρώτου. Για τα δύο εναπομείναντα σημεία μεταβάλλονται οι  $\hat{Y}$  συνιστώσες, άρα οι μεταβλητές σχεδιασμού είναι τέσσερις και είναι  $\hat{Y}_{PS,3}, \hat{Y}_{PS,4}, \hat{Y}_{SS,3}, \hat{Y}_{SS,4}$  (όπου PS: pressure side, SS: suction side οι πλευρές υπερπίεσης και υποπίεσης αντίστοιχα-σχήμα 5.2). Δηλαδή:

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{Y}_{PS,3} \\ \hat{Y}_{PS,4} \\ \hat{Y}_{SS,3} \\ \hat{Y}_{SS,4} \end{pmatrix} \quad (5.1)$$

Έστω, λοιπόν, το παρακάτω πρόβλημα βελτιστοποίησης της μορφής μιας αεροτομής με δύο στόχους. Ο πρώτος στόχος είναι η αύξηση του συντελεστή άνωσης  $C_L$ :

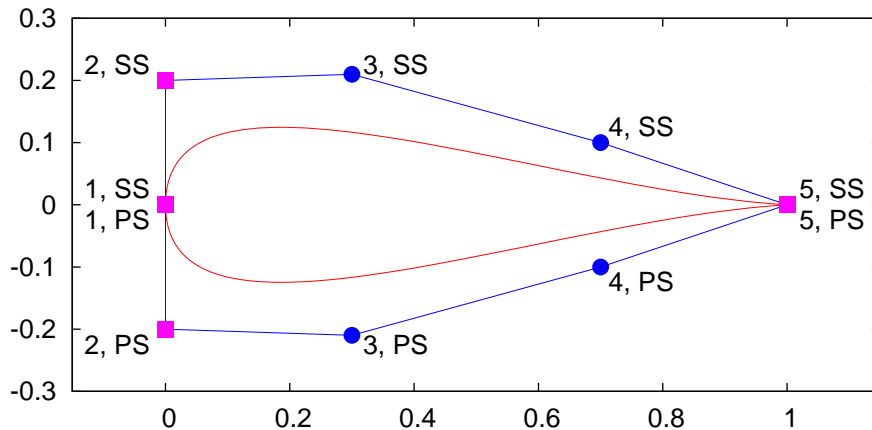
$$\min f_1 = -C_L(\vec{b}) \quad (5.2)$$

Ο δεύτερος στόχος αφορά την ικανοποίηση μιας τιμής εμβαδού-στόχου ( $E_{target}$ ). Θεωρείται σταθερή χορδή, δηλαδή ουσιαστικά το εμβαδόν αντιπροσωπεύει το μέσο πάχος, αποτελώντας ένα **πολύ απλό** κριτήριο δομικής ανάλυσης:

$$\min f_2 = \frac{1}{2}(E(\vec{b}) - E_{target})^2 \quad (5.3)$$

Σημειώνεται ότι δεν υπάρχουν περιορισμοί ισότητας ή ανισο-ισότητας.

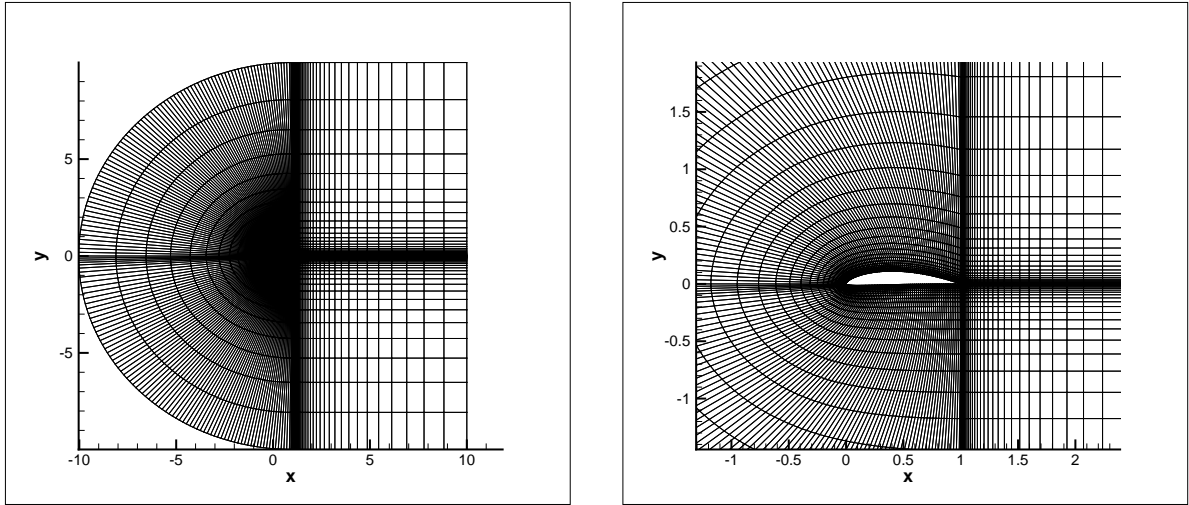




Σχήμα 5.2: Αεροτομή σχεδιασμένη με τη χρήση πολυωνύμων Bezier. Μια καμπύλη Bezier αντιστοιχεί στην κάτω πλευρά (PS, υπερπίεση) και μία στην άνω (SS, υποπίεση). Στο παρόν πρόβλημα, τα τετραγωνικά σημεία (1, 2, 5) παραμένουν σταθερά, ενώ τα κυκλικά (3, 4) έχουν τη δυνατότητα να κινούνται κατακόρυφα (κατά τον άξονα  $y$ ).

### 5.1.1 Υπολογισμός Πρώτου Στόχου και των Παραγώγων του

Στη ΜΠΥΡ&B/ΕΜΠ έχει αναπτυχθεί λογισμικό, το οποίο πέρα από την αριθμητική επίλυση εξισώσεων ροής γύρω από αεροτομή και τον υπολογισμό του συντελεστή άνωσης υπολογίζει και τις παραγώγους πρώτης και δεύτερης τάξης ως προς τις συντεταγμένες των σημείων ελέγχου της καμπύλης. Συγκεκριμένα, ο υπολογισμός της πρώτης παραγώγου πραγματοποιείται με τη χρήση της συνεχούς συζυγούς μεθόδου [5, 6, 9, 10, 11] ενώ δεν υπολογίζεται αυτούσιο το εσσιανό μητρώου της κάθε συνάρτησης-στόχου. Αυτό που υπολογίζεται είναι το διάνυσμα που προκύπτει από τον πολλαπλασιασμό του μητρώου δεύτερων παραγώγων με το διάνυσμα ανίχνευσης και πραγματοποιείται με χρήση της μεθόδου Newton με αποκοπή (truncated Newton) [7]. Ο αριθμός Mach της επί άπειρο ροής είναι 0.4 και η γωνία της επί άπειρον ταχύτητας του ρευστού ως προς τη χορδή της αεροτομής είναι ίση με  $1^\circ$ . Η ροή θεωρείται ατριβής και συμπιεστή, άρα επιλύονται οι εξισώσεις Euler. Χρησιμοποιείται δομημένο πλέγμα C-τύπου, του οποίου η γένεση πραγματοποιείται μέσω υπερβολικών αλγεβρικών εξισώσεων 5.3). Το λογισμικό που χρησιμοποιήθηκε διαχειρίζεται το πλέγμα ως μη δομημένο με τετράπλευρα στοιχεία. Για την επίλυση των εξισώσεων ροής χρησιμοποιείται η μέθοδος των πεπερασμένων όγκων με κεντροκομβική διατύπωση, δηλαδή γύρω από κάθε κόμβο του πλέγματος ορίζεται μια επιφάνεια στην οποία ολοκληρώνονται οι εξισώσεις ροής [17].



Σχήμα 5.3: Ρευστομηχανικό πρόβλημα A: Πλέγμα C-τύπου.

### 5.1.2 Υπολογισμός Δεύτερου Στόχου και των Παραγώγων του

Η μεταβολή του δεύτερου στόχου ως προς μία μεταβλητή σχεδιασμού  $b_i$  και η μεταβολή ως προς δύο μεταβλητές  $b_i, b_j$ , όπου  $b_i, b_j$  οι συντεταγμένες των σημείων ελέγχου, είναι:

$$f_2 = \frac{1}{2}(E(\vec{b}) - E_{target})^2 \quad (5.4)$$

$$\frac{\delta f_2}{\delta b_i} = (E(\vec{b}) - E_{target}) \frac{\delta E(\vec{b})}{\delta b_i} \quad (5.5)$$

$$\frac{\delta^2 f_2}{\delta b_i \delta b_j} = (E(\vec{b}) - E_{target}) \frac{\delta^2 E(\vec{b})}{\delta b_i \delta b_j} + \frac{\delta E(\vec{b})}{\delta b_i} \frac{\delta E(\vec{b})}{\delta b_j} \quad (5.6)$$

$$b_i, b_j \in \vec{b}$$

#### Εύρεση Εμβαδού και των Παραγώγων του:

Για το εμβαδόν κλειστού επίπεδου χωρίου  $\Omega$  ισχύει:

$$E = \int_{\Omega} \int dxdy \Rightarrow E = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \int \left( \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} \right) dxdy \Rightarrow E = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \int \nabla \cdot \vec{r} dxdy$$

Από θεώρημα Green-Gauss [18], τελικά, προκύπτει:

$$E = \frac{1}{2} \oint_{\partial\Omega} \vec{r} \cdot \vec{n} ds \quad (5.7)$$

όπου  $\vec{r} = (x, y)$  διάνυσμα θέσης του κλειστού περιγράμματος της αεροτομής,  $\vec{n}$  το κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα στο σύνορο του χωρίου  $\partial\Omega$  (αριστερόστροφη φορά όπως εμφανίζεται η αεροτομή στο σχήμα 5.4) και  $ds$  απειροστό μήκος επί του συνόρου.

Για την τελική έκφραση του εμβαδού (εξίσωση 5.7) οι παράγωγοι αναπτύσσονται ως εξής:

$$\frac{\delta E}{\delta b_i} = \frac{1}{2} \oint_{\partial\Omega} \left( \frac{\delta \vec{r}}{\delta b_i} \cdot \vec{n} + \vec{r} \cdot \frac{\delta \vec{n}}{\delta b_i} \right) ds + \frac{1}{2} \oint_{\partial\Omega} \vec{r} \cdot \vec{n} \frac{\delta ds}{\delta b_i} \quad (5.8a')$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta^2 E}{\delta b_i \delta b_j} = & \frac{1}{2} \oint_{\partial\Omega} \left( \frac{\delta^2 \vec{r}}{\delta b_i \delta b_j} \cdot \vec{n} + \frac{\delta \vec{r}}{\delta b_i} \cdot \frac{\delta \vec{n}}{\delta b_j} + \frac{\delta \vec{r}}{\delta b_j} \cdot \frac{\delta \vec{n}}{\delta b_i} + \frac{\delta^2 \vec{n}}{\delta b_i \delta b_j} \cdot \vec{r} \right) ds + \\ & \frac{1}{2} \oint_{\partial\Omega} \left( \frac{\delta \vec{r}}{\delta b_i} \cdot \vec{n} + \frac{\delta \vec{n}}{\delta b_i} \cdot \vec{r} \right) \frac{\delta ds}{\delta b_j} + \frac{1}{2} \oint_{\partial\Omega} \left( \frac{\delta \vec{r}}{\delta b_j} \cdot \vec{n} + \frac{\delta \vec{n}}{\delta b_j} \cdot \vec{r} \right) \frac{\delta ds}{\delta b_i} \end{aligned} \quad (5.8b')$$

Ωστόσο, τα προκύπτοντα σημεία μιας καμπύλης Bezier έχουν γραμμική εξάρτηση από τα σημεία ελέγχου [19, 2] (παράρτημα Γ.2), άρα οι παράγωγοι δεύτερης τάξης είναι μηδενικές, απλοποιώντας την εξίσωση 5.8b' στη μορφή:

$$\begin{aligned} \frac{\delta^2 E}{\delta b_i \delta b_j} = & \frac{1}{2} \oint_{\partial\Omega} \left( \frac{\delta \vec{r}}{\delta b_i} \cdot \frac{\delta \vec{n}}{\delta b_j} + \frac{\delta \vec{r}}{\delta b_j} \cdot \frac{\delta \vec{n}}{\delta b_i} \right) ds + \frac{1}{2} \oint_{\partial\Omega} \left( \frac{\delta \vec{r}}{\delta b_i} \cdot \vec{n} + \frac{\delta \vec{n}}{\delta b_i} \cdot \vec{r} \right) \frac{\delta ds}{\delta b_j} + \\ & \frac{1}{2} \oint_{\partial\Omega} \left( \frac{\delta \vec{r}}{\delta b_j} \cdot \vec{n} + \frac{\delta \vec{n}}{\delta b_j} \cdot \vec{r} \right) \frac{\delta ds}{\delta b_i} \end{aligned} \quad (5.9)$$

Στο πρόβλημα που μελετάται, οι μεταβλητές  $b_i, b_j$  αντιστοιχούν στα μεγέθη  $\hat{Y}_{PS,3}$ ,  $\hat{Y}_{PS,4}$ ,  $\hat{Y}_{SS,3}$  και  $\hat{Y}_{SS,4}$ .

Στο παράρτημα Γ.2 παρουσιάζονται οι σχέσεις που χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό των διανυσμάτων θέσης των σημείων της καμπύλης  $\vec{r}$  και των κάθετων διανυσμάτων  $\vec{n}$  στα μέσα κάθε τμήματος  $ds$ , καθώς και τις παραγώγους αυτών ως προς τη μετατόπιση των σημείων ελέγχου.

Ο υπολογισμός των παραγώνων πρώτης και δεύτερης τάξης πραγματοποιείται με μηδενικό υπολογιστικό κόστος. Ο υπολογισμός των παραπάνω είναι μια απλή αριθμητική ολοκλήρωση, η οποία εδώ πραγματοποιείται με τη μέθοδο του τραπεζίου.

### 5.1.3 Εφαρμογή της Προτεινόμενης Μεθόδου

Υπενθυμίζεται ότι για την πλευρά υπερπίεσης και υποπίεσης αντιστοιχούν πέντε σημεία ελέγχου, εκ των οποίων τα δύο παρουσιάζουν μεταβλητή κατακόρυφη συνι-

σώσα. Τα σταθερά σημεία ελέγχου των καμπύλων Bezier είναι:

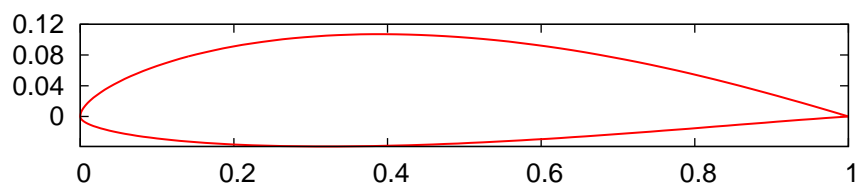
$$\begin{aligned} (\hat{X}_{PS,1}, \hat{Y}_{PS,1}) &= (0, 0) & (\hat{X}_{SS,1}, \hat{Y}_{SS,1}) &= (0, 0) \\ (\hat{X}_{PS,2}, \hat{Y}_{PS,2}) &= (0, -0.030593) & (\hat{X}_{SS,2}, \hat{Y}_{SS,2}) &= (0, 0.051063) \\ (\hat{X}_{PS,5}, \hat{Y}_{PS,5}) &= (1, 0) & (\hat{X}_{SS,5}, \hat{Y}_{SS,5}) &= (1, 0) \end{aligned}$$

Για σημείο εκκίνησης της διαδικασίας βελτιστοποίησης επιλέγεται:

$$\begin{aligned} (\hat{X}_{PS,3}, \hat{Y}_{PS,3}) &= (0.3, -0.07) & (\hat{X}_{SS,3}, \hat{Y}_{SS,3}) &= (0.3, 0.19) \\ (\hat{X}_{PS,4}, \hat{Y}_{PS,4}) &= (0.7, -0.02) & (\hat{X}_{SS,4}, \hat{Y}_{SS,4}) &= (0.7, 0.09) \end{aligned}$$

για το οποίο προκύπτει η αεροτομή του σχήματος 5.4 με τις συναρτήσεις-στόχους να λαμβάνουν τις τιμές:

$$f_1(\vec{b}_{start}) = -0.3035 \quad f_2(\vec{b}_{start}) = 1.918 \cdot 10^{-4}$$



Σχήμα 5.4: Ρευστομηχανικό πρόβλημα A: Η αρχική αεροτομή.

Επιλέχθηκε να αναπτυχθεί αεροτομή με εμβαδό ίσο με  $E_{target} = 0.08$  και όρια των

μεταβλητών σχεδιασμού:

$$\begin{array}{ll} b_1 \in [-0.2, 0] & b_2 \in [-0.1, 0] \\ b_3 \in [0, 0.2] & b_4 \in [0, 0.1] \end{array}$$

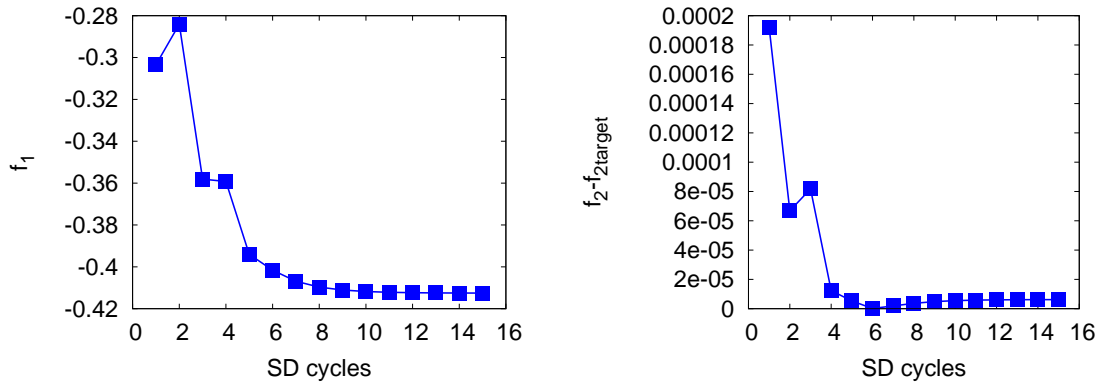
Καθώς δεν είναι γνωστή η τάξη των μεγεθών των τιμών των συναρτήσεων κόστους στο μέτωπο βέλτιστων λύσεων, εφαρμόζεται αρχικά η μέθοδος της απότομη καθόδου με σκόπο την ελαχιστοποίηση της συνάρτησης  $F_{aug,SD} = \omega_1 f_1 + \omega_2 f_2$ , ( $\omega_2 = 1 - \omega_1$ ). Δηλαδή, αντικαθίσταται η πρώτη διόρθωση, κατά την οποία εντοπίζεται το μέτωπο βέλτιστων λύσεων σύμφωνα με την προτεινόμενη μέθοδο, με την εξίσωση 2.2 (κεφάλαιο 2). Στο σημείο εκκίνησης, οι παράγωγοι της  $f_1$  είναι κατά τρεις τάξεις μεγαλύτερες από της  $f_2$  κατά απόλυτη τιμή. Για να συμβάλλουν στον ίδιο βαθμό οι παράγωγοι των δύο συναρτήσεων-στόχων στην παράγωγο της  $F_{aug,SD}$ , επιλέγονται  $\omega_1 = 0.00097$ ,  $\omega_2 = 0.99903$  και κριτήριο σύγκλισης της απότομης καθόδου  $10^{-8}$ , δηλαδή η τιμή της  $F_{aug,SD}$  δεν πρέπει να παρουσιάζει μεγαλύτερη διαφορά από την προαναφερθείσα τιμή από επανάληψη σε επανάληψη. Ο εντοπισμός του μετώπου πραγματοποιείται έπειτα από 15 επαναλήψεις, όπως φαίνεται και στο σχήμα 5.5, με βέλτιστη λύση τη:

$$\vec{b}_{opt} = \begin{pmatrix} 0.0 \\ 0.0 \\ 0.199180 \\ 0.1 \end{pmatrix}$$

για την οποία ισχύει:

$$f_1(\vec{b}_{opt}) = -0.4125 \quad f_2(\vec{b}_{opt}) = 6.188 \cdot 10^{-6}$$

Γνωρίζοντας μία βέλτιστη λύση, είμαστε σε θέση να ρυθμίσουμε κατάλληλα τις παραμέτρους για τη σάρωση του μετώπου με τον τρόπο που παρουσιάζεται στο παράρτημα Β' (πίνακας 5.1). Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στα σχήματα 5.6 5.7.



Σχήμα 5.5: Ρευστομηχανικό πρόβλημα A: Διαγράμματα σύγκλισης για τον εντοπισμό του μετώπου βέλτιστων λύσεων. Ο αρχικός εντοπισμός του μετώπου δεν πραγματοποιείται με χρήση ALM, όπως υποδεικνύει η προτεινόμενη μέθοδος, αλλά με τη χρήση συντελεστών βάρυτητας, όπως περιγράφεται και στην εισαγωγή (κεφάλαιο 2).

Βήμα Διόρθωσης	$conv f_1$	$5 \cdot 10^{-3}$
	$conv f_2$	$1 \cdot 10^{-7}$
	$\omega_p$	$10^8$
	$\omega_{p,max}$	$10^8$
	$\gamma$	1.0
	$\eta_{SD}$	$10^{-2}$
	$N_{SD}$	1
Βήμα Πρόβλεψης	$\Delta \hat{f}_2$	$-0.5 \cdot 10^{-6}$
	$conv_{CG}$	0.1

Πίνακας 5.1: Ρευστομηχανικό πρόβλημα A: Οι βασικές παράμετροι της προτεινόμενης μεθόδου.

### Παρατηρήσεις:

Στο βήμα πρόβλεψης, το πλήθος των μεταβλητών του συστήματος στο βήμα πρόβλεψης (εξισώσεις 3.20) δεν είναι μόνο 5, δηλαδή  $N = 4$  μεταβλητές σχεδιασμού και ένας πολλαπλασιαστής Lagrange. Το μέτωπο βέλτιστων λύσεων κινείται επί του συνόρου του πεδίου ορισμού, καθώς τρεις από τις τέσσερις μεταβλητές σχεδιασμού λαμβάνουν τη μέγιστη τιμή (η φυσική ερμηνεία βρίσκεται παρακάτω). Το φραγμένο πεδίο ορισμού λειτουργεί ως επιπρόσθετοι περιορισμοί ανισο-ισότητας, οι οποίοι όταν είναι ενεργοί πρέπει να λαμβάνονται υπόψη στην πρόβλεψη (σύστημα 3.32). Άρα το σύστημα προς επίλυση έχει 8 μεταβλητές. Παρόλα αυτά, κατά την εκτέλεση των προβλέψεων, η συζυγής μέθοδος πραγματοποιεί σε αρκετές περιπτώσεις περισσότερες του πλήθους των μεταβλητών επαναλήψεις (πίνακας 5.2). Αυτό πιθανότατα οφείλεται στο ότι το κριτήριο σύγκλισης  $conv_{CG}$  είναι ιδιαίτερα αυστηρό. Επίσης, κοντά στην περιοχή των χαμηλών τιμών της  $f_2$ , όπου απαιτούνται σχεδόν οι διπλάσιες επαναλήψεις από τις θεωρητικά αναγκαίες, παρατηρήθηκε έντονη μεταβολή των παραγώγων του πρώτου στόχου καθώς, ενώ ήταν τάξης 1, εμφανίστηκαν τιμές της τάξης

10<sup>3</sup>.

πρόβλεψη	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
πλήθος επαναλήψεων ( $N_{CG}$ )	11	8	8	12	8	12	8	12	9	12	14	9	15

Πίνακας 5.2: Ρευστομηχανικό πρόβλημα A: Πλήθος επαναλήψεων της μεθόδου συζυγών κλίσεων σε κάθε φάση πρόβλεψης.

Στη διόρθωση που έπεται της τελευταίας σάρωσης, παρουσιάζεται μια έντονη ταλάντωση στις καμπύλες σύγκλισης (σχήμα 5.7, κύκλοι 160+) με αυξανόμενο εύρος. Η ALM παρουσιάζει αποκλίνουσα συμπεριφορά παρόλο που το βήμα πρόβλεψης δεν έχει αποκλίνει σημαντικά από το μέτωπο.

Από τη στιγμή που η πρόβλεψη φαίνεται να υπολογίζει λύσεις πάνω ή κοντά στο μέτωπο Pareto (σχήμα 5.6), πραγματοποιήθηκε και δοκιμή χωρίς να πραγματοποιείται βήμα διόρθωσης (σχήμα 5.9). Όπως φαίνεται, το αποτέλεσμα είναι ιδιαίτερα ικανοποιητικό, καθιστώντας στην προκείμενη περίπτωση τη φάση διόρθωσης περιττή. Αυτό πιθανότατα συμβαίνει επειδή το μέτωπο βέλτιστων λύσεων δεν παρουσιάζει έντονη καμπυλότητα. Επίσης, το πρώτο βέλτιστο σημείο που υπολογίζεται δεν πρέπει να απέχει από το πραγματικό μέτωπο βέλτιστων λύσεων. Σε αντίθετη περίπτωση, η παράλειψη της φάσης διόρθωσης θα έχει ως αποτέλεσμα τη συσσώρευση σφάλματος και, κατά συνέπεια, την απομάκρυνση από το πραγματικό μέτωπο, όπως στο δεύτερο μαθηματικό πρόβλημα (κεφάλαιο 4.2, σχήμα 4.8). Ωστόσο, σημειώνεται ότι εξαιτίας της μη τήρησης του βήματος κατά το βήμα πρόβλεψης (για τους λόγους που αναλύθηκαν στο κεφάλαιο 3), η απουσία της διόρθωσης οδηγεί στη μη κάλυψη ολόκληρου του μετώπου βέλτιστων λύσεων.

Ενδιαφέρον παρουσιάζει το υπολογιστικό κόστος της μεθόδου. Ο εξελικτικός αλγόριθμος πραγματοποίησε 1076 επιλύσεις των εξισώσεων κατάστασης (δεν έχει γίνει χρήση μεταπροτύπων) για να υπολογίσει 50 βέλτιστες λύσεις. Εδώ, για να υπολογιστούν 14 σημεία χρειάστηκαν:

1. 15 επιλύσεις εξισώσεων κατάστασης και 15 υπολογισμοί παραγώγων για τον αρχικό εντοπισμό του μετώπου (σχήμα 5.5).
2.  $131 \cdot N_{SD}$  υπολογισμοί πρώτων παραγώγων για τα βήματα διόρθωσης συνολικά (σχήμα 5.7).
3.  $N_{CG}$  επαναλήψεις της μεθόδου συζυγών κλίσεων για κάθε μία από τις 13 προβλέψεις που πραγματοποιήθηκαν.

Υπενθυμίζεται ότι η πρώτη παράγωγος υπολογίζεται με συνεχή συζυγή μέθοδο, η οποία κοστίζει περίπου όσο και δύο επιλύσεις των εξισώσεων ροής [2] (συμπεριλαμβανομένης και της λύσης του ευθέως προβλήματος). Για την επίλυση του συστήματος της φάσης πρόβλεψης χρησιμοποιείται η TN με κόστος ισοδύναμο με περίπου  $2+2 \cdot N_{CG}$  επιλύσεις των εξισώσεων ροής [7], όπου  $N_{CG}$  το πλήθος των επαναλήψεων της μεθόδου συζυγών κλίσεων. Έτσι προκύπτει υπολογιστικό κόστος της προτεινόμενης μεθόδου ισοδύναμο με 594 επιλύσεις των εξισώσεων ροής.

Για το τρέξιμο όπου δεν πραγματοποιείται βήμα διόρθωσης οι συνολικές επαναλήψεις της συζυγούς μεθόδου ήταν 136, άρα το συνολικό κόστος ανέρχεται στις 328 περίπου ισοδύναμες επιλύσεις ροής. Επιπλέον, πραγματοποιήθηκε ένα ακόμα τρέξιμο όπου παραλείπεται η πρόβλεψη, δηλαδή η σάρωση του μετώπου γίνεται μόνο με τη χρήση της ALM. Ως ζητούμενες τιμές του δεύτερου στόχου  $\hat{f}_2$  ορίστηκαν οι τιμές  $f_2$  των βέλτιστων σημείων που υπολογίστηκαν με την προτεινόμενη μέθοδο (σχήμα 5.6). Συνολικά, από το πρώτο βέλτιστο σημείο (σημείο 1-σχήμα 5.6) μέχρι το τελευταίο (σημείο 3-σχήμα 5.6) απαιτήθηκαν 139 εξωτερικές επαναλήψεις της ALM που μεταφράζεται σε 278 ισοδύναμες επιλύσεις ροής (λαμβάνοντας υπόψη και τον υπολογισμό της πρώτης βέλτιστης λύσης). Προφανώς χρησιμοποιήθηκε το ίδιο αρχικό σημείο και οι πρώτες παράγωγοι υπολογίστηκαν με τη συνεχή συζυγή μέθοδο.

Έστω ότι στο βήμα πρόβλεψης δεν χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος Newton με αποκοπή αλλά ο υπολογισμός του αυτοσίου εσσιανού μητρώου των συναρτήσεων-στόχων με χρήση συζυγούς μεθόδου και ευθείας διάφορισης. Με τη μέθοδο αυτή το κόστος της πρόβλεψης ανέρχεται στις  $2+N$  περίπου επίλυσεις εξισώσεων ροής. Άρα, η προτεινόμενη μέθοδος κοστίζει σχεδόν 370 επιλύσεις ροής [2] ενώ στην περίπτωση όπου παραλείπεται το βήμα διόρθωσης το κόστος είναι μόλις 108 επιλύσεις ροής. Υπενθυμίζεται ότι, όπως ειπώθηκε και στο κεφάλαιο 3, η μέθοδος Newton με αποκοπή υπερσχύει του απλού υπολογισμού του εσσιανού μητρώου σε προβλήματα υψηλού πλήθους μεταβλητών σχεδιασμού. Στον πίνακα 5.3 παρουσιάζεται συνοπτικά το υπολογιστικό κόστος των διάφορων μεθόδων.

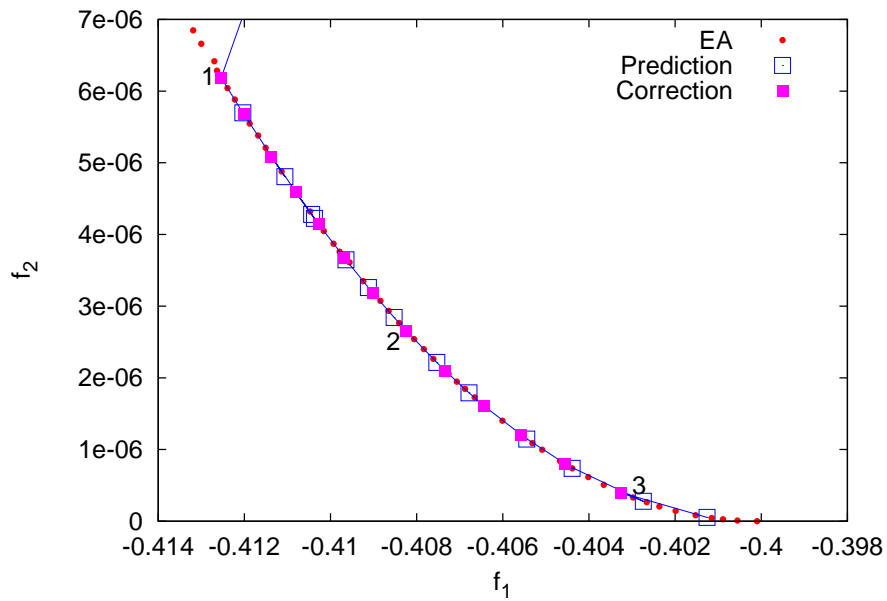
Αξίζει να σημειωθεί ότι αρχικά εφαρμόστηκε η μέθοδος χωρίς να ληφθεί υπόψη ότι οι μεταβλητές σχεδιασμού  $b_1, b_2, b_4$  βρίσκονται στο άνω όριο του πεδίου ορισμού στο μέτωπο βέλτιστων λύσεων (σχήμα 5.10). Ως αποτέλεσμα, στην εφαρμογή των ΚΚΤ συνθηκών δεν υπήρχαν οι όροι  $\mu_1, \mu_2, \mu_4$ , γεγονός που σημαίνει ότι η υπολογιζόμενη τιμή του πολλαπλασιαστή  $\lambda_{f_2}$  δεν είναι η σωστή. Επιπλέον, από την επίλυση του συστήματος 3.22 προέκυπταν λανθασμένες μεταβολές, δηλαδή μη-μηδενικές μεταβολές  $\frac{\partial b_i}{\partial f_2}, i = 1, 2, 4$  και λανθασμένη  $\frac{\partial b_3}{\partial f_2}$ . Ως αποτέλεσμα, προκύπτει μια κακής ποιότητας πρόβλεψη, μακριά από το μέτωπο βέλτιστων λύσεων και την τιμή  $\hat{f}_2$ .

Τέλος, παρατηρείται ότι στο μέτωπο βέλτιστων λύσεων τα μεταβαλλόμενα σημεία ελέγχου της πλευράς υπερπίεσης και το σημείο ελέγχου 4 της πλευράς υποπίεσης (σχήμα 5.2) έχουν τη μέγιστη δυνατή τιμή (0, 0.1 αντίστοιχα). Η ερμηνεία του παραπάνω αποτελέσματος είναι ότι η μεγιστοποίηση της άωσης απαιτεί ολόενα και πιο κυρτή αεροτομή, κάτι το οποίο θα προέκυπτε αν οι μεταβλητές σχεδιασμού δεν ήταν άνω φραγμένες. Ως αποτέλεσμα, μόνο η τρίτη μεταβλητή σχεδιασμού είναι αυτή που καθορίζει κατά πόσο ικανοποιείται η ελαχιστοποίηση του κάθε στόχου, εκφυλίζοντας το πρόβλημα σε μίας μεταβλητής σχεδιασμού αντί τεσσάρων. Υπενθυμίζεται ότι η κυρτότητα στην πλευρά υποπίεσης παίζει σημαντικό ρόλο στην ανάπτυξη άωσης, για αυτό άλλωστε όσο μειώνεται η τιμή της  $f_2$ , δηλαδή η άνω πλευρά της αεροτομής τείνει στη χορδή (σχήμα 5.2), τόσο ο συντελεστής άωσης μειώνεται (αυξάνεται η τιμή  $-C_L$ ).

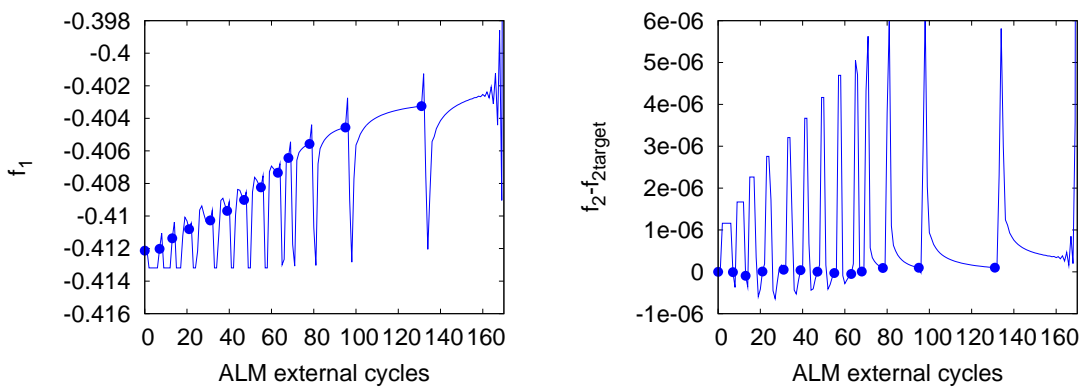


Μέθοδος	Ισοδύναμες επιλύσεις ροής
Εξελικτικός αλγόριθμος (χωρίς χρήση μεταπροτύπων)	1076
Προτεινόμενη μέθοδος με TN	594
Η μέθοδος αναφοράς (υπολογισμός εσσιανού μητρώου)	370
Προτεινόμενη μέθοδος με TN χωρίς το βήμα διόρθωσης (μόνο πρόβλεψη)	328
Η μέθοδος αναφοράς (υπολογισμός εσσιανού μητρώου) χωρίς το βήμα διόρθωσης (μόνο πρόβλεψη)	108
Χρήση μόνο της ALM (μόνο διόρθωση)	278

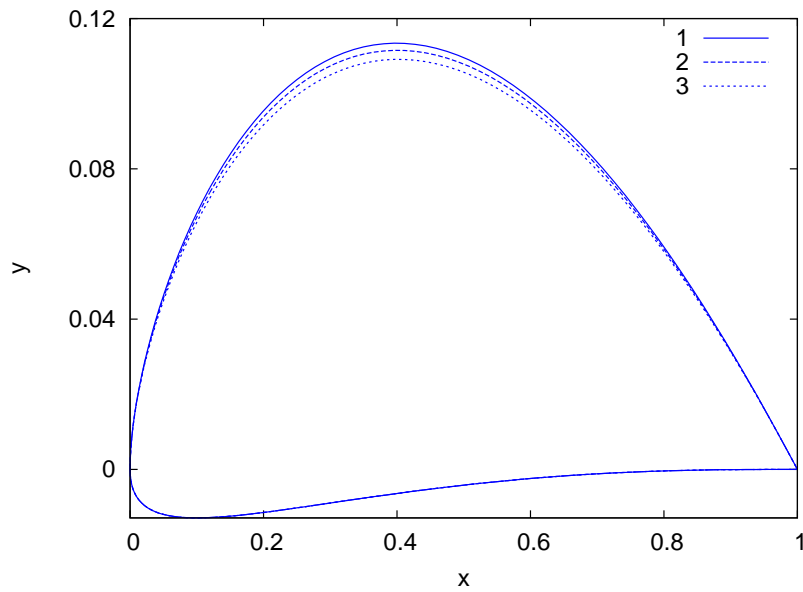
Πίνακας 5.3: Ρευστομηχανικό πρόβλημα A: Συγκριτικός πίνακας υπολογιστικού κόστους κάθε μεθόδου. Όπως έχει ειπωθεί και στο κεφάλαιο 3, η TN αξίζει ιδιαίτερα σε προβλήματα βελτιστοποίησης πολλών μεταβλητών σχεδιασμού σε σχέση με τη χρήση αυτούσιου εσσιανού μητρώου.



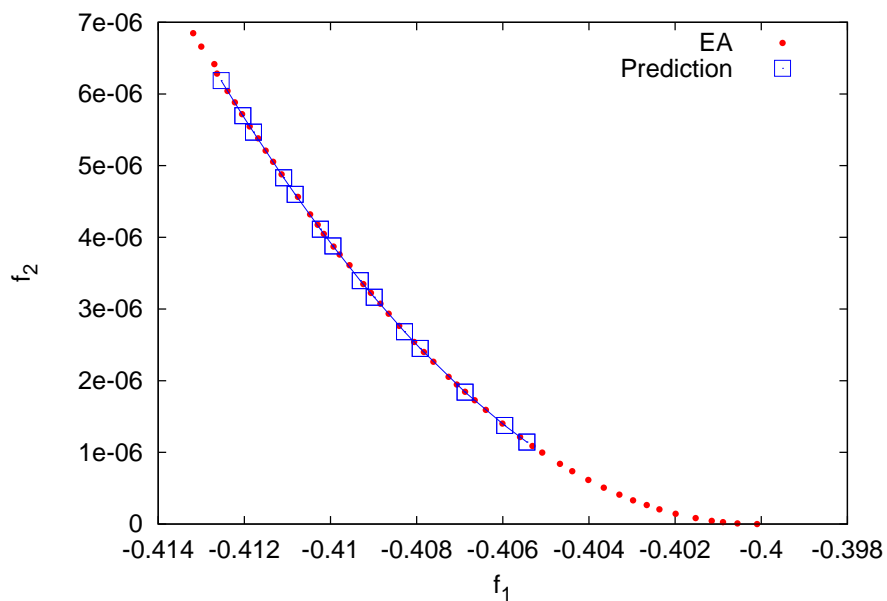
Σχήμα 5.6: Ρευστομηχανικό πρόβλημα A: Σύγκριση μετώπου βέλτιστων λύσεων EA (κυκλικά σημεία) με τη μέθοδο που μελετάται (γεμάτα τετραγωνικά σημεία), δηλαδή με χρήση TN. Παρουσιάζονται επίσης και οι προβλέψεις (κενά τετραγωνικά σημεία). Το σημείο εκκίνησης παραλείπεται για λόγους κλίμακας.



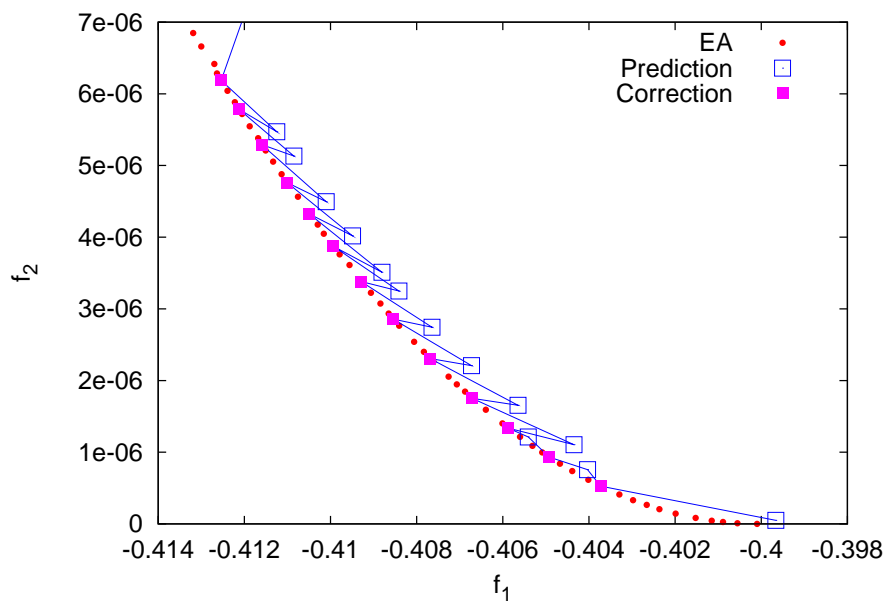
Σχήμα 5.7: Ρευστομηχανικό πρόβλημα A: Σύγκλιση των κριτηρίων της ALM. Τα κυκλικά σημεία δηλώνουν την εύρεση βέλτιστης λύσης.



Σχήμα 5.8: Ρευστομηχανικό πρόβλημα A : Σύγκριση μεταξύ τριών αεροτομών για διάφορες βέλτιστες λύσεις (1, 2, 3, σύμφωνα με το σχήμα 5.6). Η κλίμακα των αξόνων δεν είναι 1:1 για να είναι εμφανής η μη-ταύτιση των καμπυλών στην περιοχή υποπίεσης.



Σχήμα 5.9: Ρευστομηχανικό πρόβλημα A : Σύγκριση μετώπου βέλτιστων λύσεων που προκύπτει από τον EA (κυκλικά σημεία) με τη μέθοδο που μελετάται (κενά τετραγωνικά σημεία) όταν δεν πραγματοποιείται η φάση της διόρθωσης, δηλαδή πραγματοποιείται μόνο TN.



Σχήμα 5.10: Ρευστομηχανικό πρόβλημα A: Σύγκριση μετώπου βέλτιστων λύσεων που προκύπτει από τον EA (κυκλικά σημεία) με τη μέθοδο που μελετάται (γεμάτα τετραγωνικά σημεία) όταν στη φάση διόρθωσης, στην επίλυση του συστήματος 3.22 δεν λαμβάνεται υπόψη ότι κάποιες μεταβλητές σχεδιασμού βρίσκονται στο σύνορο του πεδίου ορισμού. Παρουσιάζονται επίσης και οι προβλέψεις (κενά τετραγωνικά σημεία). Είναι λογικό, από τη στιγμή που επιλύεται λανθασμένο σύστημα, να προκύπτουν λανθασμένες μεταβολές των μεταβλητών σχεδιασμού. Για τις τρεις από τις τέσσερις μεταβλητές προκύπτει τιμή εκτός του πεδίου ορισμού. Ακόμα και αν δεν ληφθούν υπόψη οι μεταβολές των μεταβλητών σχεδιασμού 1, 2, 4, για τη μεταβλητή 3 έχει προκύψει λανθασμένη μεταβολή, έχοντας ως αποτέλεσμα το παραπάνω σχήμα.

## 5.2 Ρευστομηχανικό Πρόβλημα Β

Το παρόν πρόβλημα αποτελεί παραλλαγή του ρευστομηχανικού προβλήματος Α (κεφάλαιο 5.1), με εξαίρεση την αλλαγή του δεύτερου στόχου. Αντί για την απλοποιημένη έκφραση μηχανικής αντοχής, ως δεύτερος στόχος ορίζεται η ελαχιστοποίηση του συντελεστή οπισθέλκουσας:

$$\begin{aligned} \min f_1 &= -C_L(\vec{b}) \\ \min f_2 &= C_D(\vec{b}) \end{aligned} \quad (5.10)$$

Σε προβλήματα αεροδυναμικής φύσης, η αναπτυσσόμενη οπισθέλκουσα δύναμη (drag) είναι το "κόστος" για την ανάπτυξη άνωσης, με την έννοια ότι αυξημένη άνοση σημαίνει αυτόματα και αυξημένη οπισθέλκουσα. Η οπισθέλκουσα είναι η δύναμη που εμποδίζει την κίνηση της αεροτομής, και, κατά συνέπεια, την κίνηση του αεροσκάφους, κατά την κατεύθυνση κίνησης, πράγμα που σημαίνει ότι απαιτείται επιπλέον κατανάλωση καυσίμου. Για αυτό, η μείωση της είναι επιτακτική.

Οι συνθήκες ροής είναι:

- Γωνία ταχύτητας της επί άπειρο ροής ως προς την χορδή της αεροτομής ίση με  $0.5^\circ$ .
- Η ροή του αέρα στο επί άπειρο πεδίο χαρακτηρίζεται από αριθμό  $Mach = 0.7$ .

Ο υπολογισμός του  $C_D$  και των παραγώγων ως προς τις συντεταγμένες των σημείων ελέγχου πραγματοποιείται με το ίδιο λογισμικό με τον οποίο υπολογίζονται ο  $C_L$  και οι παράγωγοί του. Από τη στιγμή που η ροή είναι ατριβής και συμπίεστη, όπως και στο προηγούμενο πρόβλημα, η μόνη πηγή οπισθέλκουσας είναι τα φαινόμενα συμπίεστικότητας, δηλαδή η ανάπτυξη κύματος κρούσης στην πλευρά υποπίεσης.

### 5.2.1 Εφαρμογή της Προτεινόμενης Μεθόδου

Τα σταθερά σημεία ελέγχου είναι:

$$\begin{aligned} (\hat{X}_{PS,1}, \hat{Y}_{PS,1}) &= (0, 0) & (\hat{X}_{SS,1}, \hat{Y}_{SS,1}) &= (0, 0) \\ (\hat{X}_{PS,2}, \hat{Y}_{PS,2}) &= (0, -0.030593) & (\hat{X}_{SS,2}, \hat{Y}_{SS,2}) &= (0, 0.051063) \\ (\hat{X}_{PS,5}, \hat{Y}_{PS,5}) &= (1, 0) & (\hat{X}_{SS,5}, \hat{Y}_{SS,5}) &= (1, 0) \end{aligned}$$

Για το σημείο εκκίνησης έχει επιλεγεί διαφορετικό περίγραμμα της αεροτομής, για

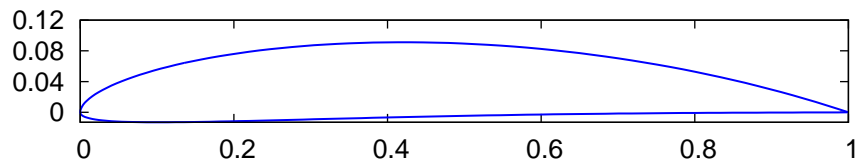
το οποίο ισχύει:

$$\begin{aligned} (\hat{X}_{PS,3}, \hat{Y}_{PS,3}) &= (0.3, 0.0) & (\hat{X}_{SS,3}, \hat{Y}_{SS,3}) &= (0.3, 0.1388) \\ (\hat{X}_{PS,4}, \hat{Y}_{PS,4}) &= (0.7, -0.001) & (\hat{X}_{SS,4}, \hat{Y}_{SS,4}) &= (0.7, 0.099) \end{aligned}$$

για το οποίο προκύπτει η αεροτομή του σχήματος 5.11 με τις συναρτήσεις-στόχους να λαμβάνουν τις τιμές:

$$f_1(\vec{b}_{start}) = -0.4669 \quad f_2(\vec{b}_{start}) = 8.480 \cdot 10^{-3}$$

Γενικά, σε λεπτές αεροτομές είναι σύνηθες ο συντελεστής άνωσης να είναι κατά δύο τάξεις μεγαλύτερος από τον συντελεστή οπισθέλκουσας.



Σχήμα 5.11: Ρευστομηχανικό πρόβλημα Β: Η αρχική αεροτομή.

Ο αρχικός εντοπισμός του μετώπου βέλτιστων λύσεων γίνεται πράξη όπως και στο πρώτο ρευστομηχανικό πρόβλημα (κεφάλαιο 5.1), δηλαδή ελαχιστοποιώντας τη συνάρτηση  $F_{aug,SD} = \omega_1 f_1 + \omega_2 f_2$ , ( $\omega_2 = 1 - \omega_1$ ), όπου  $\omega_1 = 0.3, \omega_2 = 0.7$ . Η πρώτη βέλτιστη λύση που εντοπίζεται είναι η:

$$\vec{b}_{opt} = \begin{pmatrix} 0.0 \\ 0.0 \\ 0.145123 \\ 0.1 \end{pmatrix}$$

για την οποία ισχύει:

$$f_1(\vec{b}_{opt}) = -0.4694 \qquad f_2(\vec{b}_{opt}) = 9.710 \cdot 10^{-3}$$

Έτσι, με βάση τον πίνακα 5.4 προκύπτουν τα αποτελέσματα των σχημάτων 5.12 5.13.

Βήμα Διόρθωσης	$conv f_1$	$1 \cdot 10^{-5}$
	$conv f_2$	$1 \cdot 10^{-4}$
	$\omega_p$	1.0
	$\omega_{p,max}$	1.0
	$\gamma$	1.0
	$\eta_{SD}$	$3 \cdot 10^{-7}$
	$N_{SD}$	10
Βήμα Πρόβλεψης	$\Delta \hat{f}_2$	$-0.75 \cdot 10^{-3}$
	$conv_{CG}$	0.1

Πίνακας 5.4: Ρευστομηχανικό πρόβλημα Β: Οι βασικές παράμετροι της προτεινόμενης μεθόδου.

#### Παρατηρήσεις:

Όπως και στο πρώτο ρευστομηχανικό πρόβλημα (κεφάλαιο 5.1), οι μεταβλητές σχεδιασμού  $b_i, i = 1, 2, 4$  λαμβάνουν τη μέγιστη τιμή του πεδίου ορισμού. Άρα, είναι σημαντικό να ληφθεί αυτό υπόψη κατά το βήμα πρόβλεψης, δηλαδή το σύστημα που επιλύεται είναι  $8 \times 8$ . Κατά τη σάρωση του μετώπου πραγματοποιήθηκαν 8 βήματα πρόβλεψης, για τα οποία απαιτήθηκαν 68 συνολικά επαναλήψεις της μεθόδου συζυγών κλίσεων ώστε να ικανοποιηθεί το κριτήριο σύγκλισης  $conv_{CG}$  (πίνακας 5.5).

πρόβλεψη	1	2	3	4	5	6	7	8
πλήθος επαναλήψεων ( $N_{CG}$ )	9	8	8	8	8	7	10	10

Πίνακας 5.5: Ρευστομηχανικό πρόβλημα Β: Πλήθος επαναλήψεων της μεθόδου συζυγών κλίσεων σε κάθε φάση πρόβλεψης.

Πραγματοποιήθηκε και σε αυτό το πρόβλημα δοκιμή όπου αγνοήθηκε η φάση διόρθωσης (σχήμα 5.16), η οποία έδωσε λύσεις κοντά ή πάνω στο μέτωπο Pareto. Ωστόσο, στη περιοχή όπου το μέτωπο Pareto τείνει να γίνει παράλληλο με τον οριζόντιο άξονα είναι εμφανές ότι απαιτείται διόρθωση καθώς υφίσταται σημαντική απόκλιση από το μέτωπο βέλτιστων λύσεων.

Όσον αφορά το υπολογιστικό κόστος, για κάθε μέθοδο ισχύουν τα εξής:

- Ο ΕΑ χρειάστηκε 717 επιλύσεις ροής για την παραγωγή του μετώπου βέλτιστων λύσεων. Δεν πραγματοποιήθηκε χρήση μεταπροτύπων. Τελικά ο ΕΑ υπολόγισε 43 βέλτιστες λύσεις.
- Η προτεινόμενη μέθοδος με χρήση TN (σχήμα 5.12) χρειάστηκε 8 υπολογισμούς πρώτων παραγώγων για τον εντοπισμό της πρώτης βέλτιστης λύσης, 16

συνολικά υπολογισμούς πρώτων παραγώγων κατά τις φάσεις διόρθωσης και συνολικά 69 επαναλήψεις της TN στις 8 φάσεις πρόβλεψης. Κατά τη διαδικασία αυτή υπολογίστηκαν 9 βέλτιστες λύσεις.

- Η προτεινόμενη μέθοδος χωρίς το βήμα διόρθωσης (σχήμα 5.16) χρειάστηκε συνολικά 40 επαναλήψεις της TN στις 8 φάσεις πρόβλεψης. Κατά τη διαδικασία αυτή υπολογίστηκαν 5 βέλτιστες λύσεις.

Αν θεωρηθεί ότι στη φάση πρόβλεψης δεν χρησιμοποιείται η μέθοδος Newton με αποκοπή αλλά υπολογίζονται αυτούσια τα εσσιανά μητρώα των συναρτήσεων κόστους προκύπτει:

- Η μέθοδος αναφοράς (υπολογισμός αυτούσιου του εσσιανού μητρώου) χρειάστηκε 8 υπολογισμούς πρώτων παραγώγων για τον εντοπισμό της πρώτης βέλτιστης λύσης, 16 συνολικά υπολογισμούς πρώτων παραγώγων κατά τις φάσεις διόρθωσης και 8 συνολικά υπολογισμούς των εσσιανών μητρώων στα 8 βήματα πρόβλεψης.
- Η μέθοδος αναφοράς (υπολογισμός αυτούσιου του εσσιανού μητρώου) αγνοώντας το βήμα διόρθωσης χρειάστηκε 8 υπολογισμούς πρώτων παραγώγων για τον εντοπισμό της πρώτης βέλτιστης λύσης και 5 συνολικά υπολογισμούς των εσσιανών μητρώων στα 5 βήματα πρόβλεψης.

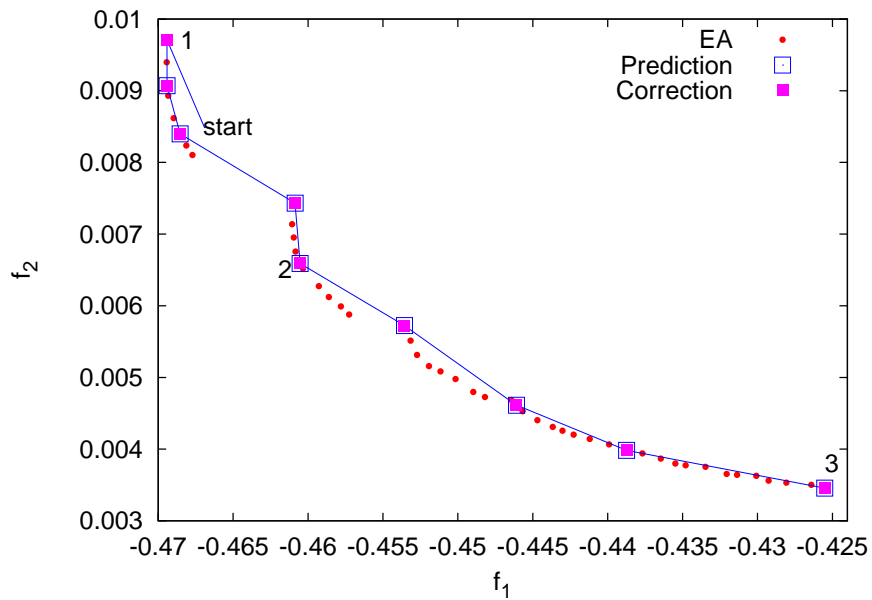
Οι πρώτες παράγωγοι παράγονται με τη χρήση συζυγούς μεθόδου, η οποία κοστίζει περίπου όσο δύο επιλύσεις εξισώσεων ροής (συνυπολογίζεται και η επίλυση του ευθέως προβλήματος) [2]. Η Newton με αποκοπή κοστίζει σε κάθε επίλυση του συστήματος  $3.22 \cdot 2 + 2 \cdot N_{CG}$ <sup>1</sup>, όπου  $N_{CG}$  το πλήθος επαναλήψεων της μεθόδου συζυγών κλίσεων. Θεωρώντας ότι ο υπολογισμός του αυτούσιου εσσιανού μητρώου πραγματοποιείται με συνδυασμό συζυγούς μεθόδου και ευθείας διαφόρισης, το κόστος κάθε πρόβλεψης ανέρχεται σε περίπου  $2 + N$  επιλύσεις ροής [2]. Με βάση τα παραπάνω, προκύπτει ο πίνακας 5.6, όπου παρουσιάζονται συγκεντρωτικά τα συνολικά κόστη.

Μέθοδος	Ισόδύναμες επιλύσεις ροής
Εξελικτικός αλγόριθμος (χωρίς χρήση μεταπροτύπων)	717
Προτεινόμενη μέθοδος με TN	202
Η μέθοδος αναφοράς (υπολογισμός εσσιανού μητρώου)	96
Προτεινόμενη μέθοδος με TN χωρίς το βήμα διόρθωσης (μόνο πρόβλεψη)	106
Η μέθοδος αναφοράς (υπολογισμός εσσιανού μητρώου) χωρίς το βήμα διόρθωσης (μόνο πρόβλεψη)	46

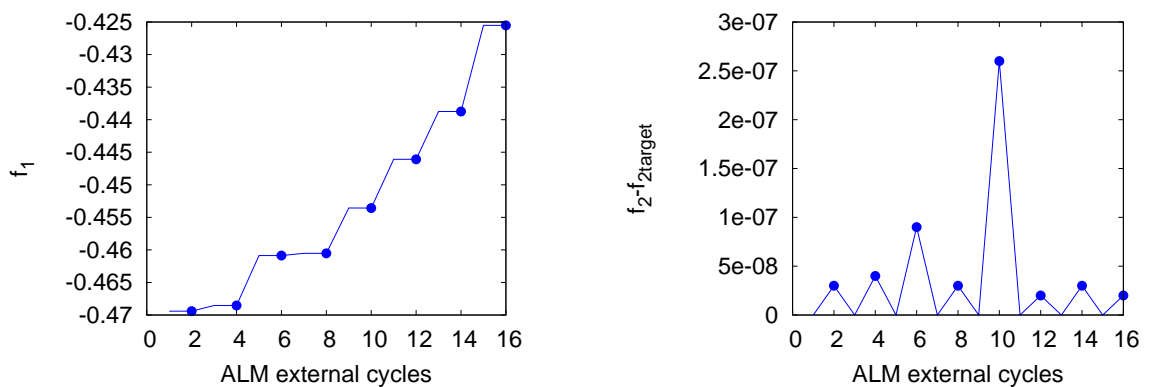
Πίνακας 5.6: Ρευστομηχανικό πρόβλημα Β: Συγκριτικός πίνακας υπολογιστικού κόστους κάθε μεθόδου.

<sup>1</sup>επίλυση εξισώσεων ροής, υπολογισμός πρώτων παραγώγων και υπολογισμός γινομένου δεύτερων παραγώγων με διάλυση ανίχνευσης

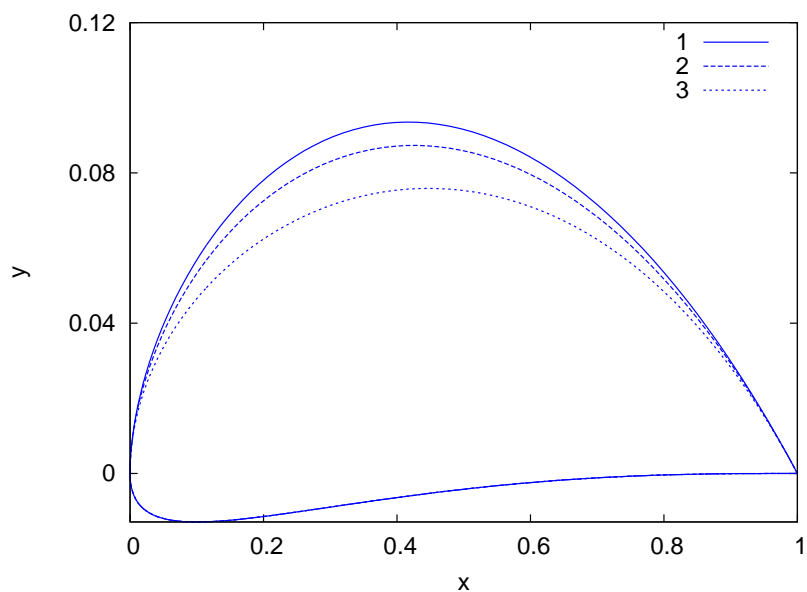




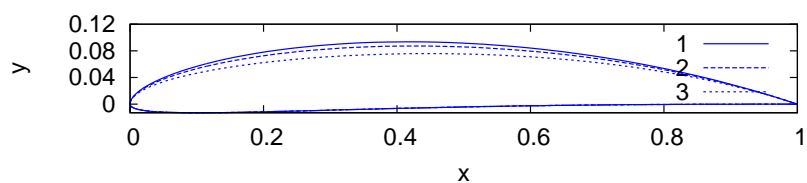
Σχήμα 5.12: Ρευστομηχανικό πρόβλημα Β: Σύγκριση μετώπου βέλτιστων λύσεων ΕΑ (κυκλικά σημεία) με τη προτεινόμενη μέθοδο (γεμάτα τετραγωνικά σημεία), δηλαδή με χρήση ΤΝ. Παρουσιάζονται επίσης και οι προβλέψεις (κενά τετραγωνικά σημεία).



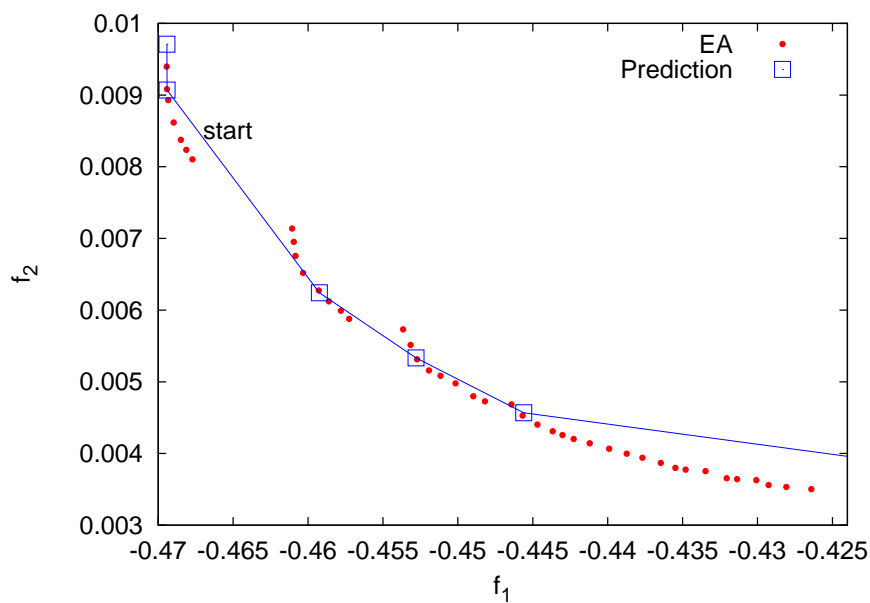
Σχήμα 5.13: Ρευστομηχανικό πρόβλημα Β: Σύγκλιση των κριτηρίων της ALM. Τα κυκλικά σημεία δηλώνουν την εύρεση βέλτιστης λύσης.



Σχήμα 5.14: Ρευστομηχανικό πρόβλημα Β: Σύγκριση μεταξύ τριών αεροτομών για διάφορες βέλτιστες λύσεις (1, 2, 3, σύμφωνα με το σχήμα 5.12). Η κλίμακα των αξόνων δεν είναι 1:1 για να είναι εμφανής η μη-ταύτιση των καμπυλών στην περιοχή υποπίεσης.



Σχήμα 5.15: Ρευστομηχανικό πρόβλημα Β: Σύγκριση μεταξύ τριών αεροτομών για διάφορες βέλτιστες λύσεις (1, 2, 3, σύμφωνα με το σχήμα 5.12) με κλίμακα αξόνων 1:1.



Σχήμα 5.16: Ρευστομηχανικό πρόβλημα Β: Σύγκριση μετώπου βέλτιστων λύσεων που προκύπτει από τον ΕΑ (κυκλικά σημεία), με τη μέθοδο που μελετάται (κενά τετραγωνικά σημεία) όταν δεν πραγματοποιείται η φάση της διόρθωσης. Εντύπωση κάνει το άλμα της δεύτερης πρόβλεψης σε σχέση με την δεύτερη πρόβλεψη του σχήματος 5.12. Επίσης, εμφανίζεται έντονη απομάκρυνση από το μέτωπο βέλτιστων λύσεων στην πέμπτη πρόβλεψη. Τα παραπάνω είναι αποτέλεσμα της, έστω και μικρής, απόκλισης από το πραγματικό μέτωπο βέλτιστων λύσεων, πράγμα που αποδεικνύει τη σημασία του βήματος διόρθωσης, ακόμα και αν είναι μόλις δύο επαναλήψεων όπως στην περίπτωση του σχήματος 5.12.



## Κεφάλαιο 6

### Συμπεράσματα και Προτάσεις

### Περαιτέρω Έρευνας

Στην παρούσα διπλωματική εργασία διατυπώθηκε, προγραμματίστηκε και πιστοποιήθηκε μια αιτιοκρατική μέθοδος υπολογισμού του μετώπου κατά Pareto, σε προβλήματα πολυκριτηριακής βελτιστοποίησης. Με δύο λόγια, η μέθοδος βρίσκει ένα σημείο του μετώπου και μετά κινείται επί αυτού, ανάγοντας όλες τις συναρτήσεις-στόχους, πλην μίας, σε περιορισμούς ισότητας. Από πλευράς υπολογιστικού φόρτου, η μέθοδος απαιτεί την εύρεση των εσσιανών μητρώων των συναρτήσεων-στόχων. Από αλγοριθμικής άποψης, η κίνηση στο μέτωπο βέλτιστων λύσεων αποτελείται από ένα βήμα πρόβλεψης, το οποίο βρίσκει ένα σημείο κοντά στο μέτωπο, ίσως και πάνω σε αυτό, και από ένα βήμα διόρθωσης, το οποίο τοποθετεί το σημείο στο μέτωπο στην περίπτωση που έχει απομακρυνθεί από αυτό.

Η μέθοδος πρόβλεψης-διόρθωσης που αναπτύχθηκε βασίστηκε στην εργασία [1] και εφαρμόστηκε σε προβλήματα δύο στόχων. Αποδείχθηκε η ικανότητα της στο να εντοπίζει τόσο κυρτά, όσο και μη-κυρτά μέτωπα και χρησιμοποιήθηκε σε δύο παρεμφερή προβλήματα ρευστομηχανικής. Στην προσπάθεια δημιουργίας μιας οικονομικής μεθόδου από άποψης υπολογιστικού κόστους χρησιμοποιήθηκαν η συνεχής συζυγής μέθοδος και η μέθοδος Newton με αποκοπή στον εντοπισμό των πρώτων και των δεύτερων παραγώγων αντίστοιχα.

Σύμφωνα με ότι προηγήθηκε, το πρώτο βήμα ώστε ο αλγόριθμος που αναπτύχθηκε να αποκτήσει ευρεία χρήση είναι η επέκτασή του και σε προβλήματα με περιορισμούς ισότητας και ανισο-ισότητας. Η αρχή έχει γίνει ήδη από τη στιγμή που συμπεριλήφθηκαν οι περιορισμοί που εισάγονται από τα φραγμένα πεδία ορισμών των μεταβλητών σχεδιασμού (σύστημα 3.32).

Σε δύο μαθηματικά προβλήματα, το πρώτο (4.1) και το τρίτο (4.3), παρατηρήθηκε ότι ο πολλαπλασιαστής Lagrange  $\lambda_{f_2}$  των ΚΚΤ συνθηκών τείνει να απειριστεί στην

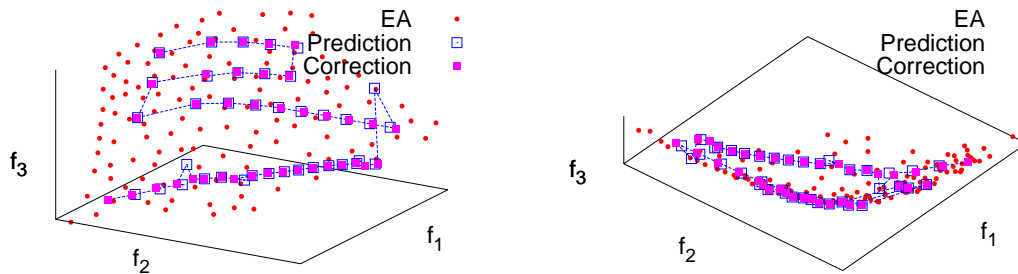
περιοχή όπου το μέτωπο τείνει να γίνει οριζόντιο ενώ όταν το μέτωπο είναι ιδιαίτερα κατακόρυφο ο πολλαπλασιαστής μηδενίζεται. Φυσικά, ενδιαφέρον παρουσιάζει η περιοχή όπου το  $\lambda_{f_2}$  λαμβάνει υπερβολικά υψηλή τιμή, καθώς μπορεί να επηρεάζει τις μεταβολές των μεταβλητών σχεδιασμού που υπολογίζονται κατά το βήμα πρόβλεψης.

Παρατηρώντας τους πίνακες με το υπολογιστικό κόστος στα δύο ρευστομηχανικά προβλήματα βελτιστοποίησης (πίνακες 5.3 5.6) είναι εμφανές ότι το μεγαλύτερο ποσοστό του υπολογιστικού κόστους οφείλεται στη φάση διόρθωσης. Μάλιστα, το βήμα αυτό μπορεί να είναι και περιττό, όπως προκύπτει στο πρώτο ρευστομηχανικό πρόβλημα (σχήμα 5.9). Ωστόσο, καλό είναι να μην παραγκωνιστεί τελείως, καθώς υπάρχουν περιπτώσεις όπου χρειάζεται, όπως στο δεύτερο ρευστομηχανικό πρόβλημα (σχήμα 5.16). Ως αποτέλεσμα, αξίζει να διερευνηθεί κατά πόσο μπορεί να επιταχυνθεί το βήμα διόρθωσης. Το σημείο όπου επιδέχεται αλλαγές είναι στην ελαχιστοποίηση της επαυξημένης συνάρτησης, δηλαδή στην εσωτερική επανάληψη (παράρτημα Α.4.3). Θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν μέθοδοι Newton, οι οποίες μπορούν να προκαλέσουν ταχύτερη σύγκλιση με αντάλλαγμα τον υπολογισμό του εσσιανού μητρώου [2].

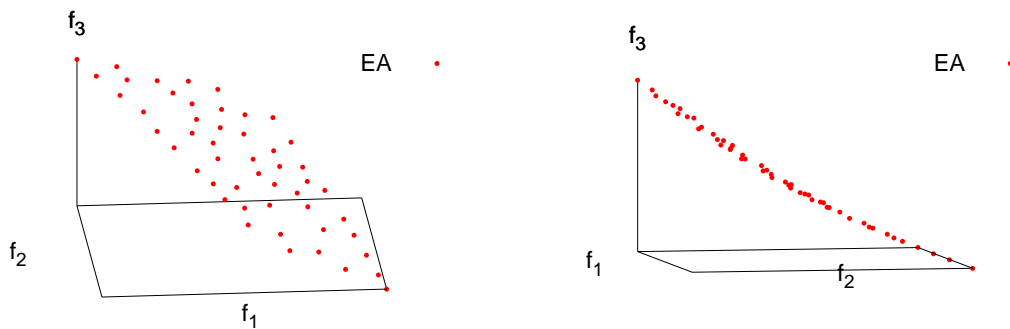
Τέλος, μεγάλης σημασίας είναι η εύρεση αλγορίθμου με τον οποίο μπορούν να αναγνωρίζονται τα όρια του μετώπου βέλτιστων λύσεων. Σε προβλήματα δύο στόχων δεν είναι απολύτως απαραίτητο αλλά για προβλήματα τριών και περισσότερων στόχων αποτελεί επιτακτική ανάγκη. Σε κάποια προβλήματα το όριο του μετώπου φαίνεται από το πόσο έντονα μεταβάλλεται η τιμή μίας συνάρτησης κόστους, όπως για παράδειγμα στο σχήμα 6.1. Αξίζει να σημειωθεί ότι για το συγκεκριμένο πρόβλημα πραγματοποιήθηκε δοκιμή με την προτεινόμενη μέθοδο. Όπως φαίνεται, η μέθοδος διόρθωσης σαρώνει το μέτωπο βέλτιστων λύσεων με τη μορφή τεθλασμένης γραμμής. Για αυτό άλλωστε, είναι σημαντική η αναγνώριση/γνώση <sup>1</sup> των ορίων ώστε να μπορεί να αλλάξει η κατεύθυνση της γραμμής αυτής και να προσεγγιστεί με τον τρόπο αυτό η επιφάνεια Pareto. Από την άλλη, σε άλλα προβλήματα το μέτωπο βέλτιστων λύσεων δεν παρουσιάζει τόσο έντονη καμπυλότητα, όπως στο σχήμα 6.2. Σε κάθε περίπτωση, είναι σημαντική η ανάπτυξη αυτού του τομέα ώστε η διαδικασία να είναι αυτοματοποιημένη και, κατά συνέπεια, εύχρηστη.

---

<sup>1</sup>Ο εντοπισμός των ορίων σε προβλήματα δύο στόχων πριν την εκτέλεση της προτεινόμενης μεθόδου είναι ιδιαίτερα προσίτος. Τα δύο ακραία σημεία προκύπτουν για τα δύο προβλήματα βελτιστοποίησης:  $\min f_1$  για το πάνω αριστερά και  $\min f_2$  για το κάτω δεξιά σημείο του μετώπου. Όμως, κάτι τέτοιο δεν είναι απλό για προβλήματα περισσότερων στόχων, καθώς είναι πλήθος σημείων που απαρτίζουν τα σύνορα του μετώπου βέλτιστων λύσεων και άρα η διαδικασία είναι αρκετά χρονοβόρα.



Σχήμα 6.1: Όψεις του τριδιάστατου μετώπου βέλτιστων λύσεων με συναρτήσεις-στόχοι μαθηματικού προβλήματος βελτιστοποίησης. Η διακεκομμένη γραμμή δηλώνει την πορεία πρόβλεψης-διόρθωσης της προτεινόμενης μεθόδου. Η απότομες αλλαγές της πορείας, που πραγματοποιεί η προτεινόμενη μέθοδος, δεν αποτελούν προϊόν εντοπισμού του συνόρου του μετώπου. Αντιθέτως, οι αλλαγές αυτές προέκυψαν από συγκεκριμένη επιλογή της τιμής της συνάρτησης του τρίτου στόχου ( $f_3$ ) δοσμένη από τον χρήστη ( $\hat{f}_3$ ), δηλαδή γνωρίζοντας εξ αρχής ποιό είναι το μέτωπο Pareto. Κάτι τέτοιο, φυσικά, καθιστά την προτεινόμενη μέθοδο μη εύχρηστη, για αυτό πρέπει να βρεθεί τρόπος επιλογής των τιμών των συναρτήσεων-στόχων αυτόματα.



Σχήμα 6.2: Όψεις του τριδιάστατου μετώπου βέλτιστων λύσεων με συναρτήσεις στόχων βασισμένες σε εμπειρικές σχέσεις, οι οποίες συσχετίζουν βασικά μεγέθη της πτήσης ενός αεροπλάνου μεταξύ τους. Τα βασικά αυτά μεγέθη είναι η μέση ταχύτητα πτήσης  $V$ , το μήκος της πορείας πτήσης  $R$ , το βάρος του καυσίμου  $W_F$  και το βάρος του φορτίου  $W_L$ . Οι τρεις στόχοι είναι οι  $f_1 = W_F/W_L$  (ελαχιστοποίηση καυσίμου ανά μονάδα φορτίου),  $f_2 = 1/R$  (μεγιστοποίηση διανυόμενης απόστασης) και  $f_3 = R/V$  (ελαχιστοποίηση χρόνου πτήσης).





## Παράρτημα Α΄

### Ορισμοί και Βασικές Μέθοδοι Βελτιστοποίησης

#### Α΄.1 Η Έννοια της Κυριαρχίας στο Μέτωπο κατά Pareto

Γενικά, σε ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης  $M$  στόχων, μία λύση  $\vec{b}_1$  κυριαρχεί της λύσης  $\vec{b}_2$  όταν για όλους τους στόχους ισχύει το εξής:

$$f_i(\vec{b}_1) \leq f_i(\vec{b}_2), \forall i \in [1, M] \quad (\text{A.1})$$

και, συγχρόνως, υπάρχει ένας τουλάχιστον στόχος  $m$  για τον οποίον ισχύει  $f_m(\vec{b}_1) < f_m(\vec{b}_2)$ .

Δηλαδή, μια λύση θα είναι κυριαρχούμενη αν υπάρχει τουλάχιστον μία άλλη λύση, της οποίας οι τιμές των συναρτήσεων-στόχων είναι μικρότερες ή ίσες από τις αντίστοιχες της κυριαρχούμενης λύσης (για έναν στόχο τουλάχιστον πρέπει να είναι αυστηρά μικρότερη, αλλιώς οι λύσεις είναι ισοδύναμες).

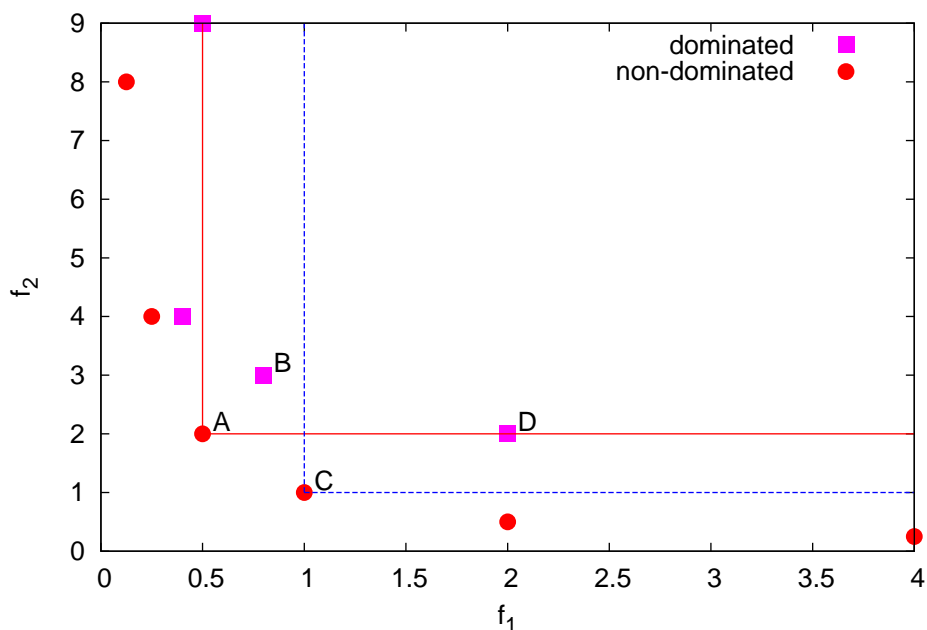
Δεν υφίσταται ουσιαστική διαφορά για προβλήματα τα οποία περιλαμβάνουν μεγιστοποίηση μιας ή περισσότερων συναρτήσεων-στόχων, από τη στιγμή που είναι εύκολη η μετατροπή του προβλήματος μεγιστοποίησης σε πρόβλημα ελαχιστοποίησης:

$$\max f(\vec{b}) = \begin{cases} \min(-f(\vec{b})) \\ \text{ή} \\ \min \frac{1}{f(\vec{b})} \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

Έστω ότι μελετάται πρόβλημα βελτιστοποίησης δύο στόχων, όπου επιδιώκεται η ελαχιστοποίηση δύο συναρτήσεων στόχων  $f_1, f_2$  (σχήμα Α.1). Για να θεωρείται η λύση  $\vec{b}_B$  κυριαρχούμενη πρέπει να υπάρχει τουλάχιστον μία λύση  $\vec{b}_A$  τέτοια ώστε να ισχύει (για προβλήματα ελαχιστοποίησης):

$$f_1(\vec{b}_A) < f_1(\vec{b}_B) \quad f_2(\vec{b}_A) < f_2(\vec{b}_B) \quad (\text{A.3})$$

Στο παράδειγμα του σχήματος Α.1, το σημείο Β δεν κυριαρχείται από το σημείο C, το οποίο είναι μη-κυριαρχούμενο, καθώς ως προς τον πρώτο στόχο (οριζόντιος άξονας) είναι καλύτερο, αλλά ως προς τον δεύτερο όχι (κατακόρυφος άξονας). Το σημείο Β θα μπορούσε να ανήκει στο μέτωπο βέλτιστων λύσεων αν δεν υπήρχε το σημείο Α, το οποίο υπερτερεί ως προς και τους δύο στόχους, με αποτέλεσμα το σημείο Β να είναι κυριαρχούμενο.



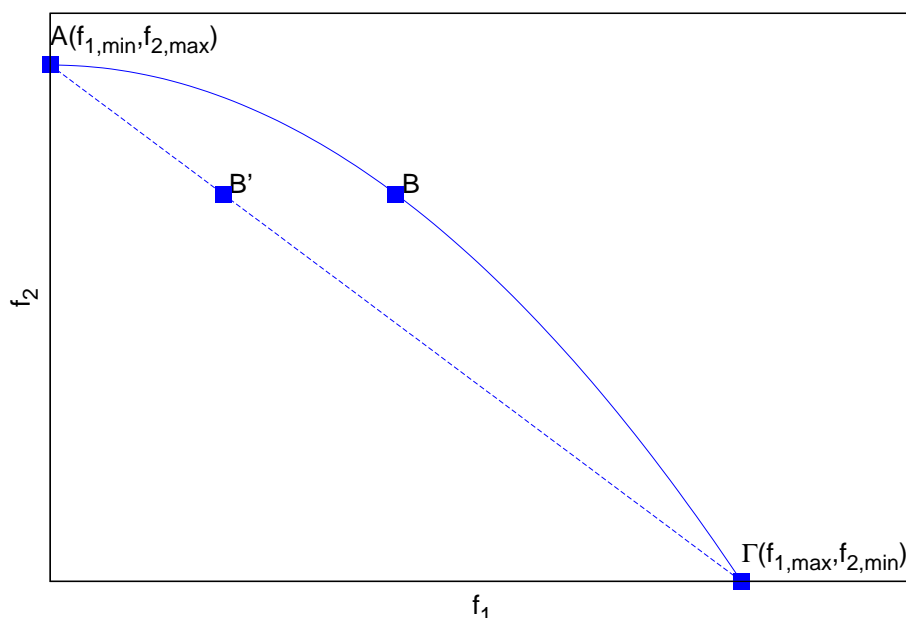
Σχήμα Α.1: Μέτωπο κατά Pareto των μη-κυριαρχούμενων λύσεων (κυκλικά σημεία) και κάποιες κυριαρχούμενες λύσεις (τετραγωνικά σημεία), σε πρόβλημα ελαχιστοποίησης δύο στόχων

## Α'.2 Η μέθοδος των Βαρών σε Μη-Κυρτά Προβλήματα

Μια συνάρτηση για να είναι μη-κυρτή/κοίλη (non-convex/concave) σε ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης πρέπει να διέπεται από τον εξής κανόνα:

$$f(t\vec{b}_1 + (1-t)\vec{b}_2) \geq tf(\vec{b}_1) + (1-t)f(\vec{b}_2) \quad \forall \vec{b}_1, \vec{b}_2 \in \vec{B} \subset \mathbf{R}^N, \forall t \in [0, 1] \quad (\text{Α'.4})$$

Έστω, λοιπόν, ένα μη-κυρτό πρόβλημα βελτιστοποίησης δύο στόχων  $f_1, f_2$  (σχήμα Α'.2).



Σχήμα Α'.2: Μέτωπο κατά Pareto για μη-κυρτό πρόβλημα ελαχιστοποίησης δύο στόχων.

Έστω μία βέλτιστη λύση  $B$  (η οποία δεν ταυτίζεται με τα ακραία σημεία  $A, \Gamma$ ) για την οποία ζητείται να εξεταστεί αν είναι δυνατή η εύρεση της με τον συμβατικό αιτιοκρατικό τρόπο, δηλαδή με τη χρήση συντελεστών βαρύτητας  $\omega, \forall \omega \in (0, 1)$  (εξίσωση 2.2) και την επίλυση ενός προβλήματος ελαχιστοποίησης ενός στόχου. Θαδειχθεί ότι, σε μη-κυρτά προβλήματα, η μέθοδος των βαρών μπορεί να δώσει ως βέλτιστη λύση μόνο κάποιο εκ των δύο άκρων του μετώπου βέλτιστων λύσεων ανεξάρτητα από τις τιμές των βαρών.

Για να μην είναι δυνατός ο εντοπισμός της βέλτιστης λύσης  $B$ , πρέπει για τη σύνθετη

συνάρτηση-στόχος

$$F_B = \omega f_{1,B} + (1 - \omega) f_{2,B} \quad (\text{A.5})$$

να ισχύει είτε  $F_B > F_A$  ή  $F_B > F_\Gamma$  για συγκεκριμένη τιμή του συντελεστή  $\omega$ . Δηλαδή, να μην ελαχιστοποιείται στο σημείο B.

Για να δειχθούν τα παραπάνω θα χρησιμοποιηθεί το βοηθητικό σημείο B' το οποίο ανήκει στην ευθεία AΓ (σχήμα A.2). Για το σημείο B' ισχύει  $f_{1,B'} < f_{1,B}$ ,  $f_{2,B'} = f_{2,B}$ , άρα:

$$G_{B'} = \omega f_{1,B'} + (1 - \omega) f_{2,B'} = \omega f_{1,B'} + (1 - \omega) f_{2,B} \quad (\text{A.6})$$

δηλαδή  $F_B > G_B$

Η ευθεία AΓ έχει κλίση

$$\lambda = \frac{f_{2,max} - f_{2,min}}{f_{1,min} - f_{1,max}} < 0 \quad (\text{A.7})$$

και, αφού το σημείο B' ανήκει σε αυτή, θα ισχύει:

$$\frac{f_{2,B'} - f_{2,min}}{f_{1,B'} - f_{1,max}} = \frac{f_{2,B'} - f_{2,max}}{f_{1,B'} - f_{1,min}} = \lambda \quad (\text{A.8})$$

Άρα, με βάση τα παραπάνω, αρκεί να δειχθεί ότι  $G_B > F_\Gamma, F_A$ .

Έστω, λοιπόν, ότι ισχύει  $G_B > F_\Gamma$ . Έτσι προκύπτει:

$$\begin{aligned} G_B > F_\Gamma &\Rightarrow \omega(f_{1,B'} - f_{1,\Gamma}) + (1 - \omega)(f_{2,B} - f_{2,\Gamma}) > 0 \\ &\Rightarrow \omega(f_{1,B'} - f_{1,max}) + (1 - \omega)(f_{2,B} - f_{2,min}) > 0 \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Αφού  $f_{1,B'} - f_{1,max} < 0$ :

$$\begin{aligned} G_B > F_\Gamma &\Rightarrow \omega + (1 - \omega) \frac{f_{2,B} - f_{2,min}}{f_{1,B} - f_{1,max}} < 0 \\ &\stackrel{\text{A.8}}{\Rightarrow} \omega + (1 - \omega)\lambda < 0 \\ &\Rightarrow \omega < \frac{\lambda}{\lambda - 1} < 1 \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Τώρα, έστω ότι ισχύει  $G_B > F_A$ :

$$\begin{aligned} G_B > F_A &\Rightarrow \omega(f_{1,B'} - f_{1,A}) + (1 - \omega)(f_{2,B} - f_{2,A}) > 0 \\ &\Rightarrow \omega(f_{1,B'} - f_{1,min}) + (1 - \omega)(f_{2,B} - f_{2,max}) > 0 \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Αφού  $f_{1,B'} - f_{1,min} > 0$ :

$$\begin{aligned}
 G_B > F_A &\Rightarrow \omega + (1 - \omega) \frac{f_{2,B} - f_{2,max}}{f_{1,B} - f_{1,min}} > 0 \\
 &\stackrel{A.8}{\Rightarrow} \omega + (1 - \omega)\lambda > 0 \\
 &\Rightarrow \omega > \frac{\lambda}{\lambda - 1}
 \end{aligned} \tag{A.12}$$

Συνοψίζοντας τα παραπάνω, είναι εμφανές ότι όταν  $\omega < \frac{\lambda}{\lambda-1}$  η βέλτιστη λύση που προκύπτει ελαχιστοποιώντας την εξίσωση είναι το ακραίο σημείο Γ και, όταν  $\omega > \frac{\lambda}{\lambda-1}$ , ως βέλτιστη λύση προκύπτει το σημείο Α.

### Α'.3 Μέθοδοι Ανίχνευσης κατά Γραμμή

Οι μέθοδοι ανίχνευσης κατά γραμμή (line search methods) αποτελούν μια εκ των βασικότερων κατηγοριών εύρεσης βέλτιστης λύσης. Στην κατηγορία αυτή ανήκουν δύο μέθοδοι που χρησιμοποιούνται στην παρούσα εργασία: η μέθοδος της απότομης καθόδου (steepest descent) και η μέθοδος των συζυγών κλίσεων (conjugate gradient) [2, 20]. Οι μέθοδοι ανίχνευσης κατά γραμμή είναι επαναληπτικές/βηματικές και συγκλίνουν προς τη λύση πραγματοποιώντας μια τεθλασμένη πορεία στον χώρο των λύσεων. Κάθε ευθύγραμμο τμήμα αποτελεί ένα βήμα προς τη λύση. Οι μέθοδοι διαφέρουν μεταξύ τους ως προς τον τρόπο υπολογισμού της νέας κατεύθυνσης και τα μήκη των ευθυγράμμων τμημάτων της τεθλασμένης πορείας που διαγράφουν (βήμα) [2, 20].

Η βασική ιδέα των μεθόδων ανίχνευσης κατά γραμμή είναι η ανανέωση των μεταβλητών σχεδιασμού ( $\vec{b}$ ) κατά  $\eta\vec{p}$ , όπου  $\eta$  το βήμα και  $\vec{p}$  η κατεύθυνση ανίχνευσης (search direction):

$$\vec{b}_{new} = \vec{b} \pm \eta\vec{p} \tag{A.13}$$

#### Α'.3.1 Μέθοδος Απότομης Καθόδου

Η μέθοδος της απότομης καθόδου ανήκει σε μια ευρύτερη οικογένεια μεθόδων, οι οποίες βασίζονται στη χρήση της πρώτης ή και της δεύτερης παραγώγου της συνάρτησης-στόχου ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού (gradient-based methods).

Στη μέθοδο της απότομης καθόδου, η κατεύθυνση ανίχνευσης είναι  $\pm \nabla_{\vec{b}} F(\vec{b})$ , όπου το πρόσημο ορίζεται από το είδος βελτιστοποίησης, δηλαδή από το αν ζητείται ελαχιστοποίηση (-) ή μεγιστοποίηση (+). Το βήμα  $\eta_{SD}$  ορίζεται από τον χρήστη. Προφανώς, η επιλογή βήματος απαιτεί προσοχή, όταν οι μεταβλητές σχεδιασμού διαφέρουν σε

τάξη μεγέθους. Ο τύπος της απότομης καθόδου, για προβλήματα ελαχιστοποίησης, προκύπτει από τα παραπάνω ως εξής:

$$\vec{b}_{new} = \vec{b} - \eta_{SD} \nabla_{\vec{b}} F(\vec{b}) \quad (A'.14)$$

Η διαδικασία τερματίζει, όταν πλέον παρατηρείται μηδαμινή μεταβολή, από επανάληψη σε επανάληψη, της τιμής της συνάρτησης προς ελαχιστοποίηση/μεγιστοποίηση [2, 20].

Στην παρούσα εργασία, η μέθοδος απότομης καθόδου χρησιμοποιείται στο βήμα διόρθωσης, όπου ελαχιστοποιείται η επαυξημένη συνάρτηση-στόχος (παράρτημα A'.4.3).

### A'.3.2 Μέθοδος των Συζυγών Κλίσεων για Γραμμικά προβλήματα

Σκοπός της μεθόδου συζυγών κλίσεων (conjugate gradient) είναι να χρησιμοποιείται κάθε κατεύθυνση ανίχνευσης  $\vec{p}$  μία και μοναδική φορά. Αυτό επιτυγχάνεται με τον υπολογισμό και χρήση συζυγών διανυσμάτων κατεύθυνσης [2, 21]. Στα μαθηματικά, η έννοια της συζυγίας (conjugacy) μεταξύ δύο διανυσμάτων σημαίνει ότι είναι Α-ορθογώνια, όπου Α τετραγωνικό μητρώο, δηλαδή  $\vec{p}_i^T \tilde{A} \vec{p}_j = 0, i \neq j$ . Με άλλα λόγια, τα διανύσματα κατεύθυνσης είναι γραμμικά ανεξάρτητα μεταξύ τους, καθιστώντας την ιδιαίτερα χρήσιμη μέθοδο για προβλήματα υψηλού αριθμού αγνώστων [21].

Έστω το γραμμικό πρόβλημα:

$$\tilde{A} \vec{b} = \vec{d} \quad (A'.15)$$

όπου  $\tilde{A}$  συμμετρικό μητρώο και θετικά ορισμένο, δηλαδή  $\vec{b}^T \tilde{A} \vec{b} > 0, \forall \vec{b}$  [2, 20, 21].

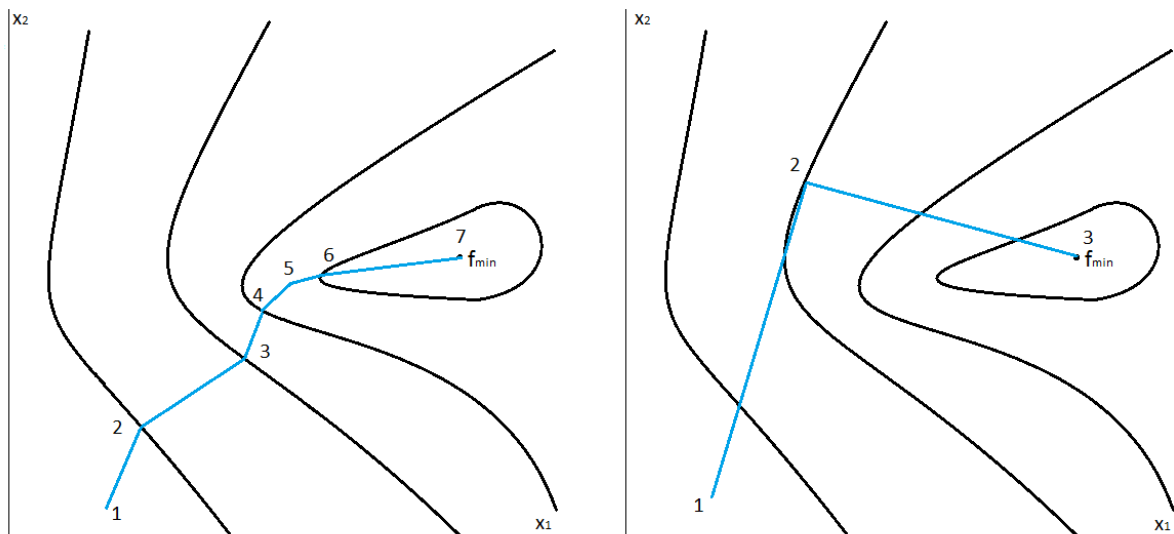
Ο αλγόριθμος της μεθόδου συζυγών κλίσεων για γραμμικά προβλήματα είναι ο εξής:

1. Αρχικοποίηση του διανύσματος λύσης και εύρεση του αρχικού υπολοίπου  $\vec{r}_0 = \vec{d} - \tilde{A} \vec{b}_0$ . Ορίζεται ως αρχική διεύθυνση ανίχνευσης η  $\vec{p}_0 = \vec{r}_0$ . Ακολουθεί επαναληπτική διαδικασία, θέτοντας  $\vec{r}_{old} = \vec{r}_0, \vec{p}_{old} = \vec{p}_0$ .
2. Υπολογισμός του βήματος  $\eta = \frac{\|\vec{r}_{old}\|^2}{\vec{p}_{old}^T \tilde{A} \vec{p}_{old}}$ .
3. Ανανέωση του διανύσματος λύσεων  $\vec{b}$  κατά  $\eta \vec{p}$  και ανανέωση του διανύσματος υπολοίπου  $\vec{r}$  κατά  $-\eta \tilde{A} \vec{p}$ .
4. Υπολογισμός του συντελεστή  $\beta = \frac{\|\vec{r}_{new}\|^2}{\|\vec{r}_{old}\|^2}$  και ανανέωση της κατεύθυνσης ανίχνευσης ως  $\vec{p}_{new} = \vec{r}_{new} + \beta \vec{p}_{new}$ .
5. Έλεγχος της συνθήκης σύγκλισης, η οποία συνήθως είναι  $\|\vec{r}_{new}\| \rightarrow 0$  ή η πραγματοποίηση ορισμένου πλήθους επαναλήψεων. Σε περίπτωση μη σύγκλισης,

γίνεται επανάληψη της διαδικασίας από το βήμα 2 θέτοντας

$$\vec{r}_{old} = \vec{r}_{new}, \vec{p}_{old} = \vec{p}_{new}.$$

Σχετικά με το κριτήριο σύγκλισης, όπως σε όλες τις αριθμητικές μεθόδους, έτσι και σε αυτήν των συζυγών κλίσεων, ένα άπειρο, θεωρητικά, πλήθος επαναλήψεων οδηγεί σε εύρεση της ακριβούς λύσης (σχήμα Α.3). Εδώ πρακτικά, συνήθως, επιτυγχάνεται σε πλήθος επαναλήψεων το πολύ ίσο με το πλήθος των μεταβλητών του γραμμικού συστήματος. Η ιδιότητα αυτή είναι αποτέλεσμα της συζυγίας μεταξύ των διανυσμάτων ανίχνευσης [20]. Μάλιστα, στα αρχικά βήματα εμφανίζεται, συνήθως, η μέγιστη μείωση του σφάλματος, δηλαδή του υπολοίπου  $\|\vec{r}\|^2$ , δίνοντας τη δυνατότητα στον χρήστη να εκτελέσει λιγότερες επαναλήψεις από το πλήθος των μεταβλητών, αποκτώντας λύση με αποδεκτό σφάλμα [2, 21]. Φυσικά, η αρχικοποίηση δεν πρέπει να απέχει υπερβολικά από τη λύση, ώστε να είναι εφικτό το παραπάνω.



Σχήμα Α.3: Παράδειγμα με συνάρτηση δύο μεταβλητών ( $x_1, x_2$ ). Αριστερά: Η μέθοδος της απότομης καθόδου δεν χρησιμοποιεί αναγκαστικά το κάθε διάνυσμα κατεύθυνσης μία και μοναδική φορά, καθώς η πληροφορία που αξιοποιεί είναι η κατεύθυνση μέγιστης μεταβολής σε κάθε θέση (gradient). Έτσι, λόγω του σταθερού βήματος, είναι πιθανό να βρεθεί σε θέση με ίση παράγωγο προηγούμενου σημείου, δηλαδή να χρησιμοποιήσει ξανά την ίδια κατεύθυνση ανίχνευσης. Δεξιά: Αντιθέτως, η συζυγής μέθοδος αποφεύγει το παραπάνω φαινόμενο, πραγματοποιώντας, σε αυτό το διδιάστατο παράδειγμα, 2 βήματα μόνο.

## Α'.4 Βελτιστοποίηση με Περιορισμούς

### Α'.4.1 Η Επαυξημένη Συνάρτηση Lagrange

Έστω το πρόβλημα ελαχιστοποίησης ενός στόχου με  $M_c$  περιορισμούς ισότητας :

$$\begin{aligned} \min f(\vec{b}) \\ c_j(\vec{b}) = 0, \forall j \in [1, M_c] \end{aligned} \quad (\text{A'.16})$$

Ένας τρόπος επίλυσης του παραπάνω θα ήταν με τη δημιουργία μιας νέας δίκλαδης συνάρτησης κόστους [22, 3]:

$$\min f'(\vec{b}) = \begin{cases} f(\vec{b}), & \text{όταν } c_j(\vec{b}) = 0 \forall j \\ \infty, & \text{όταν } \exists j \text{ ώστε } c_j(\vec{b}) \neq 0 \end{cases} \quad (\text{A'.17})$$

Με άλλα λόγια, αποδίδεται υψηλή ποινή σε λύσεις που δεν ικανοποιούν τους περιορισμούς του προβλήματος. Ωστόσο, μια μη-συνεχής συνάρτηση-στόχος, όπως η παραπάνω, δεν είναι διαχειρίσιμη σε αιτιοκρατικές μεθόδους βελτιστοποίησης, αφού είναι μη-παραγωγίσιμη.

Η βασική ιδέα της συνάρτησης Lagrange είναι η δημιουργία μιας επαυξημένης συνάρτησης και, κατά συνέπεια, τη διαμόρφωση ενός νέου προβλήματος, η οποία θα λαμβάνει υπόψη τη συνάρτηση κόστους ( $f$ ) και τις συναρτήσεις των περιορισμών ( $c$ ) πολλαπλασιαζόμενες με συντελεστές βαρύτητας  $\lambda_j$  (πολλαπλασιαστές Lagrange), δηλαδή :

$$\min L(\vec{b}, \vec{\lambda}) = f(\vec{b}) - \sum_{j=1}^{M_c} \lambda_j c_j(\vec{b}) \quad (\text{A'.18})$$

Ουσιαστικά, με αυτόν τον τρόπο αντικαταστάθηκε ο όρος ποινής  $\infty$  με  $-\sum_{j=1}^{M_c} \lambda_j c_j(\vec{b})$

Η επαυξημένη Lagrange συνάρτηση κόστους είναι παραγωγίσιμη, αν βέβαια είναι παραγωγίσιμες οι συναρτήσεις-στόχοι και περιορισμών.

Όπως είναι γνωστό, για την εύρεση ακρότατου σημείου μιας συνάρτησης πρέπει να ισχύει η πρώτη τάξης αναγκαία συνθήκη, δηλαδή να μηδενίζεται η παράγωγος.



Επομένως, ισχύει:

$$\begin{aligned}\nabla_{\vec{b}}L(\vec{b}, \vec{\lambda}) &= \nabla_{\vec{b}}f(\vec{b}) - \sum_{i=1}^{M_c} \lambda_j \nabla_{\vec{b}}c_j(\vec{b}) = 0 \Rightarrow \\ \nabla_{\vec{b}}f(\vec{b}) &= \sum_{i=1}^{M_c} \lambda_j \nabla_{\vec{b}}c_j(\vec{b})\end{aligned}\tag{A'.19}$$

Παράλληλα με την εξίσωση A'.19, πρέπει να ισχύουν και οι περιορισμοί ισότητας, άρα το σύστημα προς επίλυση είναι:

$$\begin{aligned}\nabla_{\vec{b}}L(\vec{b}, \vec{\lambda}) &= \vec{0} \\ c_j(\vec{b}) &= 0, \forall j \in [1, M_c]\end{aligned}$$

δηλαδή  $N + M_c$  εξισώσεις με  $N + M_c$  αγνώστους, ήτοι τα  $\vec{b}$  και  $\vec{\lambda}$ .

Δηλαδή, θεωρώντας ένα πρόβλημα ενός περιορισμού ισότητας, άρα έναν πολλαπλασιαστική Lagrange  $\lambda$ , θα είχαμε την απαίτηση  $\nabla_{\vec{b}}f(\vec{b}) = \lambda \nabla_{\vec{b}}c(\vec{b})$ . Με άλλα λόγια, το διάνυσμα της παραγώγου της συνάρτησης-στόχου του προβλήματος απαιτείται να είναι παράλληλο του διανύσματος της παραγώγου του περιορισμού πολλαπλασιασμένο με τον συντελεστή Lagrange (σχήμα A'.4).

#### A'.4.2 Οι Συνθήκες Karush-Kuhn-Tucker (KKT)

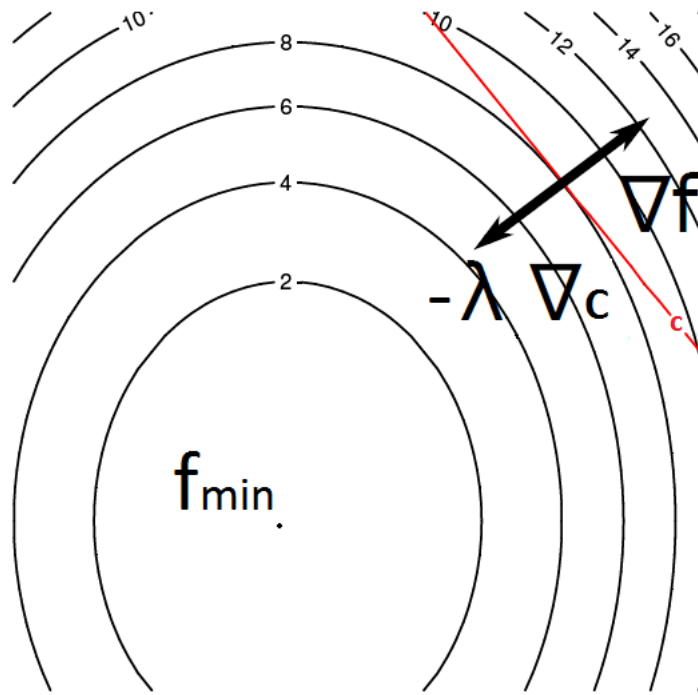
Γενικεύοντας το πρόβλημα που αναλύθηκε στο κεφάλαιο A'.4.1, για ένα γενικό πρόβλημα ελαχιστοποίησης ενός στόχου με  $M_c$  περιορισμούς ισότητας και  $M_g$  περιορισμούς ανισο-ισότητας, δηλαδή:

$$\begin{aligned}\min f(\vec{b}) \\ c_j(\vec{b}) &= 0, \forall j \in [1, M_c] \\ g_j(\vec{b}) &\geq 0, \forall j \in [1, M_g]\end{aligned}\tag{A'.20}$$

η αντίστοιχη επαυξημένη συνάρτηση γράφεται ως:

$$\min L(\vec{b}, \vec{\lambda}) = f(\vec{b}) - \sum_{j=1}^{M_c} \lambda_j c_j(\vec{b}) - \sum_{j=1}^{M_g} \mu_j g_j(\vec{b})\tag{A'.21}$$

Αποδεικνύεται [22, 3] ότι για το γενικευμένο πρόβλημα βελτιστοποίησης (εξισώσεις A'.20 A'.21), αναγκαίες συνθήκες για τη βέλτιστη λύση, γνωστές ως πρώτης τάξεως



Σχήμα Α.4: Γεωμετρική αναπαράσταση των αναγκαίων συνθηκών για ύπαρξη βέλτιστης λύσης κατά Lagrange σε πρόβλημα ενός στόχου και ενός περιορισμού [22]. Οι ελλειπτικές γραμμές αποτελούν ισοσταθμικές της συνάρτησης  $f$ , ενώ στην ευθεία  $c$  ικανοποιείται ο περιορισμός ισότητας.

οριακές συνθήκες ή συνθήκες Karush-Kuhn-Tucker (KKT), είναι οι [2, 3, 1]:

$$\begin{aligned} \nabla_{\vec{b}} L(\vec{b}, \vec{\lambda}, \vec{\mu}) &= \nabla_{\vec{b}} f(\vec{b}) - \sum_{j=1}^{M_c} \lambda_j \nabla_{\vec{b}} c_j(\vec{b}) - \sum_{j=1}^{M_g} \mu_j \nabla_{\vec{b}} g_j(\vec{b}) = 0 \\ c_j(\vec{b}) &= 0, \forall j \in [1, M_c] \\ g_j(\vec{b}) &\geq 0, \forall j \in [1, M_g] \\ \mu_j g_j(\vec{b}) &= 0, \forall j \in [1, M_g] \\ \mu_j &\geq 0, \forall j \in [1, M_g] \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

Η συνθήκη  $\vec{\mu}^T \vec{g}(\vec{b}) = 0$  υποδηλώνει ότι οι πολλαπλασιαστές Lagrange  $\mu_j$ , δηλαδή όσοι αφορούν ανισό-ισότητες, οφείλουν να είναι μηδενικοί όταν οι αντίστοιχοι περιορισμοί δεν επαληθεύονται οριακά ( $g > 0$ ), δηλαδή δεν είναι ενεργοί (συμπληρωματική συνθήκη) [2]. Δηλαδή, οι περιορισμοί ανισο-ισότητας επηρεάζουν την τιμή της επαυξημένης συνάρτησης και την παράγωγό της μόνο όταν έχουν εκφυλιστεί σε περιορισμούς ισότητας.

### Α'.4.3 Επαυξημένη Μέθοδος με Πολλαπλασιαστές Lagrange (ALM) για Περιορισμούς Ισότητας

Η παρούσα εργασία πραγματεύεται προβλήματα βελτιστοποίησης χωρίς περιορισμούς ισότητας. Ωστόσο, εμφανίζεται έμμεσα πρόβλημα βελτιστοποίησης με περιορισμούς ισότητας στο βήμα διόρθωσης, όπου απαιτείται η επανεύρεση του μετώπου βέλτιστων λύσεων για συγκεκριμένες τιμές των στόχων  $f_{2,\dots,M}$ . Το βήμα διόρθωσης αναλύεται στο κεφάλαιο 3.

Για να περιγραφεί η συγκεκριμένη μέθοδος, είναι χρήσιμο να γίνει μια συνοπτική αναφορά πρώτα στις μεθόδους Σειριακής Ελαχιστοποίησης (Sequential Unconstrained Minimization Technique - SUMT). Οι μέθοδοι χωρίζονται σε τρεις κατηγορίες:

- μέθοδος εξωτερικής ποινής
- μέθοδος εσωτερικής ποινής
- μέθοδος διευρυμένης εσωτερικής ποινής

Βασικό χαρακτηριστικό όλων είναι η χρησιμοποίηση μιας επαυξημένης συνάρτησης-στόχου, η οποία απαρτίζεται από δύο όρους, τη συνάρτηση  $f'$  προς ελαχιστοποίηση (ή μεγιστοποίηση) και τον όρο ποινής  $\Pi(\vec{b})$ :

$$\begin{aligned} \min f'(\vec{b}, \omega_p) &= f(\vec{b}) + \omega_p \Pi(\vec{b}) \\ \Pi(\vec{b}) &= h(c_j(\vec{b}), g_k(\vec{b})), \forall j \in [1, M_c], \forall k \in [1, M_g] \end{aligned} \quad (\text{A'.23})$$

όπου  $\omega_p \geq 0$  ο συντελεστής ποινής .

Έτσι, πραγματοποιείται η βελτιστοποίηση της νέας συνάρτησης-στόχου με μέθοδο βελτιστοποίησης που δε χειρίζεται περιορισμούς. Οι μέθοδοι SUMT απαιτούν την επίλυση του προβλήματος ελαχιστοποίησης που δημιουργήθηκε αρκετές φορές, με το συντελεστή ποινής να ορίζεται αρχικά από τον χρήστη και με δυνατότητα να μεταβάλλεται αυτόματα σε κάθε κύκλο [2]. Η αύξηση του συντελεστή ποινής αποσκοπεί στην ενίσχυση της αυστηρότητας των περιορισμών καθώς συγκλίνει ο αλγόριθμος.

Αυτές οι μέθοδοι χρησιμοποιούνται ευρέως καθώς παρουσιάζουν ευκολία στην εφαρμογή και αποτελεσματικότητα. Ωστόσο, εξαρτώνται ιδιαίτερα από τη συνάρτηση και τον συντελεστή ποινής που επιλέγει ο χρήστης. Η επαυξημένη μέθοδος με πολλαπλασιαστές Lagrange (Augmented Lagrange Multiplier Methods - ALM) επιχειρεί να μειώσει την εξάρτηση αυτή [2].

Έστω το πρόβλημα βελτιστοποίησης ενός στόχου με  $M_c$  περιορισμούς ισότητας:

$$\begin{aligned} \min f(\vec{b}) \\ c_j(\vec{b}) = 0, j \in [1, M_c] \end{aligned} \quad (\text{A'.24})$$

Για να αποτελεί πρόβλημα βελτιστοποίησης, επιβάλλεται να ισχύει  $M_c < N$ , όπου  $N$  το πλήθος μεταβλητών σχεδιασμού. Σε περίπτωση ισότητας ( $N = M_c$ ), έχουμε επίλυση συστήματος, καθώς υπάρχουν ισάριθμοι άγνωστοι και εξισώσεις, ενώ στην τρίτη περίπτωση ( $N < M_c$ ) το σύστημα είναι αδύνατο. Διευκρινίζεται ότι ο συγκεκριμένος περιορισμός αφορά τις μεταβλητές σχεδιασμού οι οποίες **συμμετέχουν στους περιορισμούς**. Στην περίπτωση της ισότητας ( $N = M_c$ ) και της ύπαρξης μεταβλητών σχεδιασμού που δεν επηρεάζουν τις συναρτήσεις περιορισμών, το πρόβλημα εκφύλιζεται σε ένα άλλο ελεύθερο περιορισμών, όπου κάποιες μεταβλητές σχεδιασμού έχουν συγκεκριμένες αμετάβλητες τιμές οι οποίες προκύπτουν από το σύστημα.

Η επαυξημένη συνάρτηση είναι:

$$F_{aug}(\vec{b}, \vec{\lambda}, \vec{\omega}_p) = f(\vec{b}) + \sum_{j=1}^{M_c} (-\lambda_j c_j(\vec{b}) + \omega_{p,j} c_j^2(\vec{b})) \quad (A.25)$$

Εδώ το πρόβλημα βελτιστοποίησης χωρίς περιορισμούς έχει δύο ομάδες παραμέτρων. Η μια ομάδα τίθεται από τον χρήστη αυθαίρετα και εκφράζει τη βαρύτητα των περιορισμών  $\omega_{p,j}$ , ενώ η δεύτερη περιλαμβάνει τους πολλαπλασιαστές Lagrange  $\lambda_j$ , των οποίων δεν είναι γνωστές οι τιμές στη βέλτιστη λύση. Ως αποτέλεσμα, απαιτείται επαναληπτική διαδικασία κατά την οποία μεταβάλλεται οι τιμές των  $\lambda_j, \omega_{p,j}$ . Για τη βέλτιστη λύση, φυσικά, πρέπει να ισχύει  $\nabla_{\vec{b}} F_{aug} = \vec{0}$  όταν  $\vec{b}_{opt}$  εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού των μεταβλητών σχεδιασμού.

Ακολουθεί ο αλγόριθμος εκτέλεσης της ALM σε βήματα:

1. Ορίζεται αρχικό διάνυσμα των μεταβλητών ( $\vec{b}$ ) και αρχικό διάνυσμα των πολλαπλασιαστών Lagrange  $\vec{\lambda}$ . Συνηθίζεται το αρχικό διάνυσμα των πολλαπλασιαστών να είναι μηδενικό, δηλαδή το πρόβλημα εκφύλιζεται σε SUMT. Επίσης, ορίζεται η αρχική τιμή του συντελεστή ποινής  $\omega_p > 0$ , τον συντελεστή ανανέωσης  $\gamma$  (παρουσιάζεται παρακάτω) και η μέγιστη τιμή ποινής  $\omega_{p,max}$  για κάθε περιορισμό.
2. Ελαχιστοποιείται η επαυξημένη συνάρτηση  $F_{aug}$ . Το βήμα αυτό μπορεί να πραγματοποιηθεί με οποιαδήποτε μέθοδο εύρεσης ελαχίστου. Στην παρούσα εργασία χρησιμοποιείται η απότομη κάθοδος.
3. Η σύγκλιση της μεθόδου θεωρείται επιτυχής όταν ικανοποιούνται οι περιορισμοί με την ανοχή που επιβάλλει η χρήση αριθμητικής επίλυσης και, ταυτόχρονα, παρατηρείται μηδενική μεταβολή της τιμής της  $F(\vec{b})$ . Αυτό μπορεί να συμβαίνει είτε επειδή το  $\vec{b}$  είναι εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού με  $\nabla_{\vec{b}} F_{aug}(\vec{b}) = \vec{0}$  είτε επειδή το διάνυσμα των μεταβλητών σχεδιασμού βρίσκεται στα όρια του πεδίου ορισμού με το ακρότατο της επαυξημένης συνάρτησης να υφίσταται για  $\vec{b}$  εκτός των ορίων. <sup>1</sup>

<sup>1</sup>Ακολουθώντας αυστηρά μαθηματικά, προβλήματα με φραγμένο πεδίο ορισμού απαιτούν τη χρήση ALM για περιορισμούς ανισότητας. Ωστόσο, αυτό εδώ μπορεί να αποφευχθεί απαγορεύοντας απλά

4. Σε περίπτωση μη ικανοποίησης των ανωτέρω, ανανεώνονται οι τιμές των παραμέτρων και ο αλγόριθμος επιστρέφει στο δεύτερο βήμα. Προτεινόμενες σχέσεις για την ανανέωση των τιμών  $\lambda_j, \omega_{p,j}$  είναι οι [20]:

$$\begin{aligned}\lambda_{new,j} &= \lambda_j - 2\omega_{p,j}c_j(\vec{b}) \\ \omega_{p,new,j} &= \min(\omega_{p,j}, \omega_{p,max,j}) \\ \forall j &\in [1, M_c]\end{aligned}$$

Είναι εμφανές ότι η διαδικασία απαρτίζεται από δύο εμφωλευμένες επαναλήψεις: η εσωτερική αφορά την ελαχιστοποίηση της  $F_{aug}$ , ενώ η εξωτερική αναφέρεται στη μεταβολή των τιμών των παραμέτρων  $\lambda_j, \omega_{p,j}$ . Στην παρούσα εργασία, η εσωτερική επανάληψη αντιστοιχεί στις επαναλήψεις τις οποίες πραγματοποιεί η μέθοδος της απότομης καθόδου. Περισσότερες πληροφορίες για τον τρόπο ρύθμισης των παραμέτρων βρίσκονται στο παράρτημα (B).

---

στις οριακές μεταβλητές σχεδιασμού να λάβουν τιμές εκτός πεδίου ορισμού. Έτσι, η λύση κινείται επί του συνόρου, με την πιθανότητα όμως να υπολογίζει τη βέλτιστη λύση πιο αργά από την ALM για περιορισμούς ανισότητας.



## Παράρτημα Β΄

### Οδηγίες για την Επιλογή Παραμέτρων στην ALM

Το παρόν παράρτημα περιέχει μερικές πρακτικές οδηγίες για την επιλογή παραμέτρων και κριτηρίων στο βήμα διόρθωσης. Είναι βασισμένο στις δοκιμές που πραγματοποιήθηκαν για το πρόβλημα ελαχιστοποίησης αεροτομής και εμβαδού (κεφάλαιο 5.1). Η παρουσίαση της ALM, με την οποία υλοποιείται το βήμα διόρθωσης, παρουσιάζεται στο πρώτο παράρτημα (κεφάλαιο Α΄.4.3). Υπενθυμίζεται ότι η φάση διόρθωσης έπεται της φάσης πρόβλεψης και αποσκοπεί στον εντοπισμό του πραγματικού μετώπου βέλτιστων λύσεων σε περίπτωση απομάκρυνσης από αυτό. Επίσης, στο συγκεκριμένο πρόβλημα, οι στόχοι είναι δύο, με συναρτήσεις στόχων τις:

$$\begin{aligned} \min f_1(\vec{b}) &= -C_L(\vec{b}) \\ \min f_2(\vec{b}) &= (E(\vec{b}) - E_{target})^2 \end{aligned}$$

Άρα, κατά το βήμα διόρθωσης, για την εφαρμογή της ALM, η συνάρτηση προς ελαχιστοποίηση είναι η  $f_1$  ενώ περιορισμός είναι η επιβολή συγκεκριμένης τιμής  $\hat{f}_2$  για τον δεύτερο στόχο  $f_2$ , δηλαδή ο περιορισμός ισότητας  $f_2(\vec{b}) - \hat{f}_2 = 0$ .

#### Β΄.1 Επιλογή των Παραμέτρων της ALM

Η διαδικασία που ακολουθείται είναι η εξής:

1. Επιλογή σημείου εκκίνησης ( $\vec{b}_{start}$ ).
2. Πραγματοποίηση πρώτου, προκαταρκτικού υπολογισμού των τιμών και των παραγώγων των συναρτήσεων-στόχων για το σημείο  $\vec{b}_{start}$ .
3. Επιλογή συντελεστών ( $\omega_{p,j}, \omega_{max,p,j}, \lambda_j, \forall j \in [2, M]$ , εδώ  $M = 2$ ) για την ALM και των κριτηρίων σύγκλισης, λαμβάνοντας υπόψη την τάξη μεγέθους των συ-

ναρτήσεων και των παραγώγων τους. Υπενθυμίζεται ότι για αυτό το πρόβλημα η επαυξημένη συνάρτηση γράφεται ως

$$F_{aug}(\vec{b}) = f_1(\vec{b}) - \lambda(f_2(\vec{b}) - \hat{f}_2) + \omega_p(f_2(\vec{b}) - \hat{f}_2)^2 \quad (\text{B'.1})$$

Κατά την εκλογή των παραμέτρων πρέπει να λαμβάνεται υπόψη η διαφορά τάξης των όρων

- $\nabla_{\vec{b}} f_1(\vec{b})$ , οποίος επηρεάζει την ελαχιστοποίηση του στόχου  $f_1$
- $-\lambda \nabla_{\vec{b}} f_2(\vec{b}) + \omega_p(f_2(\vec{b}) - \hat{f}_2) \nabla_{\vec{b}} f_2(\vec{b})$  ο οποίος επηρεάζει την ικανοποίηση του περιορισμού  $f_2(\vec{b}) - \hat{f}_2 = 0$

έτσι ώστε στη μεταβολή των μεταβλητών σχεδιασμού να μην παραγκωνίζεται ούτε η ελαχιστοποίηση της  $f_1(\vec{b})$  ούτε η ικανοποίηση του περιορισμού  $f_2(\vec{b}) - \hat{f}_2 = 0$ . Επίσης, στην επιλογή των συντελεστών της ALM πρέπει να ληφθεί υπόψη ότι το  $\lambda$  μεταβάλλεται ανά εξωτερικό κύκλο ALM. Υπενθυμίζεται ότι ο εξωτερικός βρόχος αφορά τη μεταβολή των παραμέτρων  $\omega_{max,p,j}$ ,  $\lambda_j$  της ALM (παράρτημα Α.4.3), ενώ ο εσωτερικός την ελαχιστοποίηση της  $F_{aug}$ , η οποία στην παρούσα εργασία πραγματοποιείται με τη μέθοδο της απότομης καθόδου (παράρτημα Α.3.1).

4. Επιλογή βήματος απότομης καθόδου, λαμβάνοντας υπόψη την τάξη μεγέθους της παραγώγου της επαυξημένης συνάρτησης και των ορίων των μεταβλητών σχεδιασμού.

Λαμβάνοντας υπόψη τα παραπάνω, για αρχικό σημείο  $(-0.07 \ -0.02 \ 0.19 \ 0.09)^T$  το οποίο είναι το ίδιο με αυτό που χρησιμοποιείται στην εφαρμογή της προτεινόμενης μεθόδου στο κεφάλαιο 5.1, προκύπτει ο παρακάτω πίνακας:

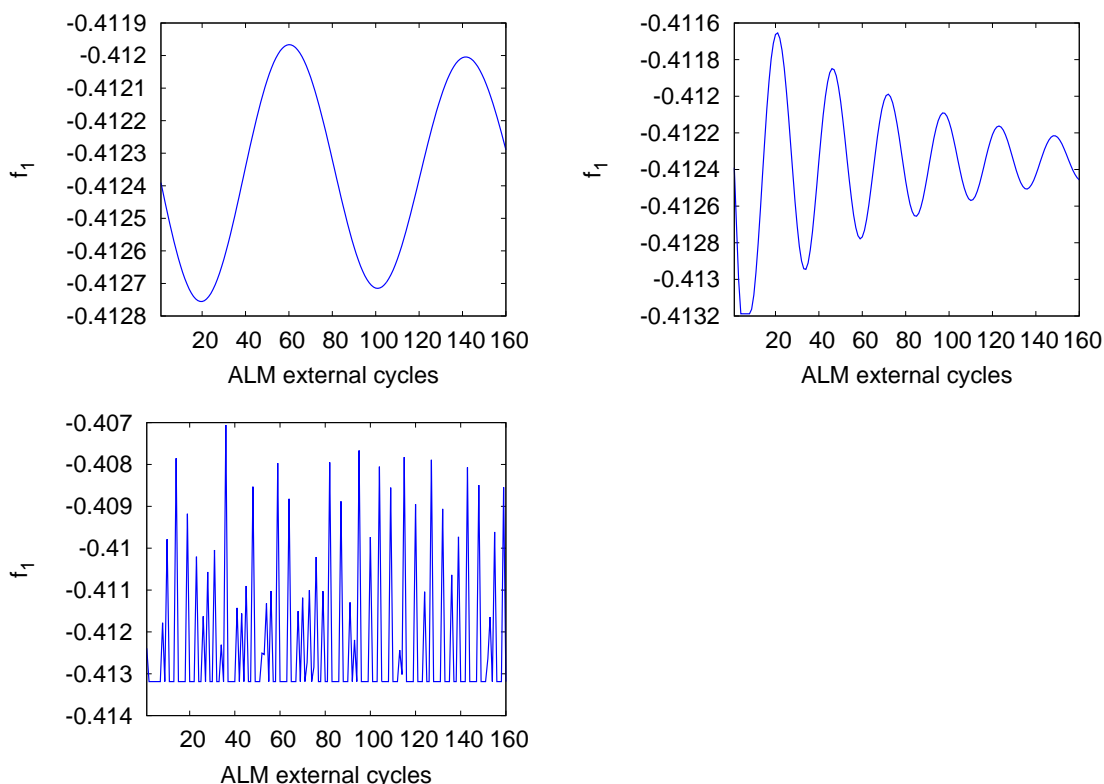
$\nabla_{\vec{b}} f_1(\vec{b})$	-0.5258949 -1.8093640 -0.8090790 -2.2006727
$\nabla_{\vec{b}} f_2(\vec{b})$	$-7.75 \cdot 10^{-4}$ $-8.74 \cdot 10^{-4}$ $7.75 \cdot 10^{-4}$ $8.74 \cdot 10^{-4}$
$(f_2(\vec{b}) - \hat{f}_2) \nabla_{\vec{b}} f_2(\vec{b})$	$-3.19 \cdot 10^{-11}$ $-3.59 \cdot 10^{-11}$ $3.19 \cdot 10^{-11}$ $3.59 \cdot 10^{-11}$

Πίνακας Β'.1: Επιμέρους όροι της παραγώγου της  $F_{aug}$  (εξίσωση Β'.1). Είναι εμφανής η διαφορά τάξης των μεγεθών, ιδιαίτερα μεταξύ του όρου που αφορά τον στόχο προς ελαχιστοποίηση ( $\nabla_{\vec{b}} f_1(\vec{b})$ ) και τους όρους που αφορούν την ικανοποίηση του περιορισμού ( $\nabla_{\vec{b}} f_2(\vec{b})$  και  $(f_2(\vec{b}) - \hat{f}_2) \nabla_{\vec{b}} f_2(\vec{b})$ ).



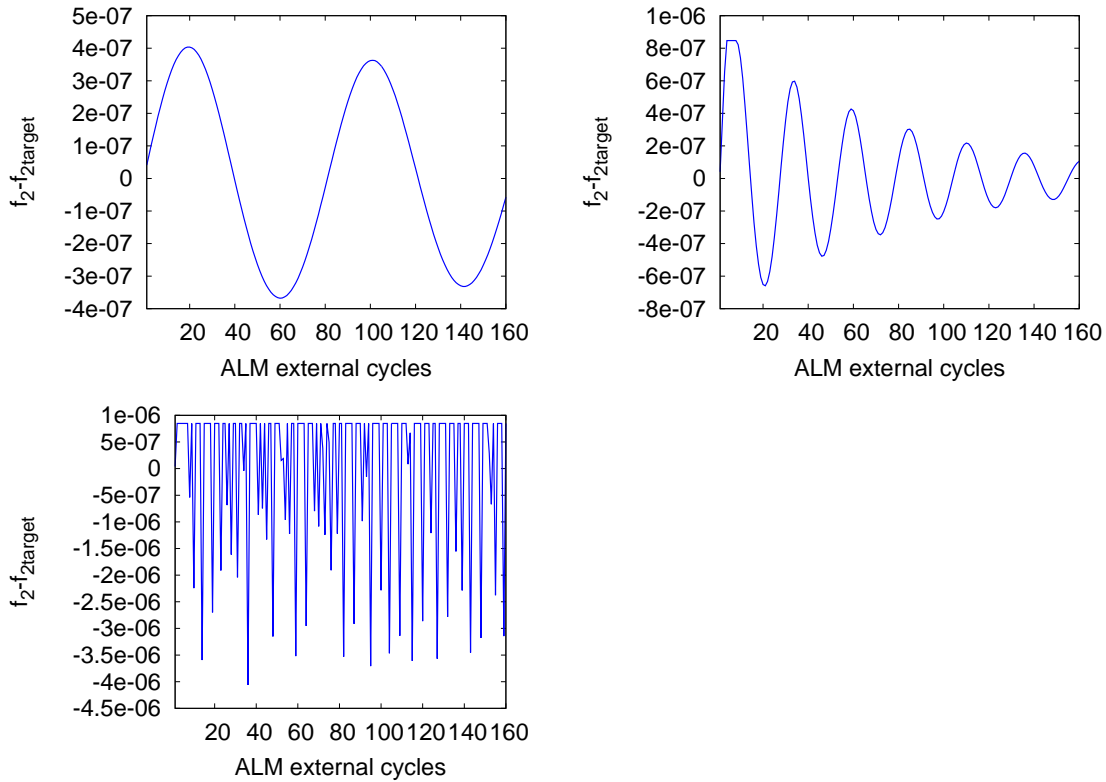
Έπειτα από μερικές προκαταρκτικές δοκιμές, επιλέγεται **σταθερό**  $\omega_p = 10^8$  και **ένας** κύκλος απότομης καθόδου για κάθε κύκλο ALM. Όταν υφίσταται αβεβαιότητα για τις επιλογές των παραμέτρων, είναι προτιμότερη η αποφυγή πολλαπλών εσωτερικών επαναλήψεων της απότομης καθόδου.

Ένας ακόμα σημαντικός παράγοντας για τη σύγκλιση της ALM είναι το βήμα  $\eta_{SD}$  της απότομης καθόδου. Από τα σχήματα Β'.1 Β'.2 είναι εμφανές ότι ένα μεγάλο βήμα ( $\eta_{SD} = 5 \cdot 10^{-2}$ ) οδηγεί σε απόκλιση ενώ ένα μικρό βήμα ( $\eta_{SD} = 5 \cdot 10^{-5}$ ) οδηγεί σε ιδιαίτερα αργή σύγκλιση. Για βήμα  $\eta_{SD} = 5 \cdot 10^{-4}$  παρουσιάζονται εντονότερες υπερακοντίσεις μεν, αλλά ταχύτερη σύγκλιση δε σε σχέση με το μικρότερο βήμα.



Σχήμα Β'.1: Σύγκλιση της  $f_1$  για διάφορες τιμές βήματος της απότομης καθόδου ( $\eta_{SD}$ ). Όσο αυξάνεται το βήμα, η σύγκλιση επιταχύνεται. Ωστόσο, για μια τιμή του  $\eta_{SD}$  και πάνω παρατηρείται απόκλιση.

Σε περίπτωση που το σημείο εκκίνησης των μεταβλητών σχεδιασμού δίνει λύση μακριά από το μέτωπο βέλτιστων λύσεων, είναι πιθανόν οι παράγωγοι των συναρτήσεων κόστους να είναι διαφορετικής τάξης σε σχέση με τις παραγώγους στα σημεία του μετώπου. Αν ο χρήστης δεν διαθέτει πληροφορία για το μέτωπο βέλτιστων λύσεων, η ρύθμιση των παραμέτρων σύμφωνα με το αρχικό σημείο μπορεί να αποφέρει επιπλέον υπολογιστικό κόστος. Αυτό συμβαίνει όταν στην πρώτη διόρθωση, καθώς η ALM συγκλίνει προς το μέτωπο Pareto, εμφανίζεται έντονη μείωση της απόλυτης τιμής των παραγώγων (σχήμα Β'.3) και, συνεπώς, μικρότερη μεταβολή των μεταβλητών σχεδιασμού ανά επανάληψη. Όμως, ακόμα και στην περίπτωση όπου διατίθεται



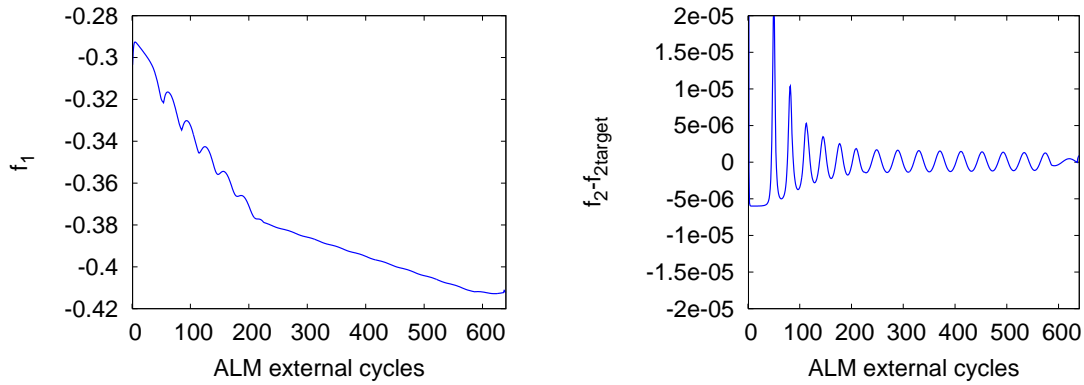
Σχήμα Β'.2: Σύγκλιση του περιορισμού  $f_2(\vec{b}) - \hat{f}_2 = 0$  για διάφορες τιμές βήματος της απότομης καθόδου ( $\eta_{SD}$ ). Όπως και στο σχήμα Β'.1, παρουσιάζεται η ταχύτητα σύγκλισης σε σχέση με το βήμα της απότομης καθόδου.

πληροφορία για το μέτωπο βέλτιστων λύσεων, είτε από εμπειρία, είτε από παρόμοιες περιπτώσεις, δεν παύει να ελλοχεύει ο κίνδυνος λανθασμένης επιλογής. Η ρύθμιση των παραμέτρων έτσι ώστε να πραγματοποιείται ταχύτερα το βήμα διόρθωσης έπειτα από κάθε πρόβλεψη, σε συνδυασμό με ακραία επιλογή αρχικού σημείου, μπορεί να αποφέρει τη μη σύγκλιση της ALM στον πρώτο εντοπισμό του μετώπου. Βέβαια, ένας απλός τρόπος για να αποφευχθούν όλα αυτά είναι να χρησιμοποιηθεί ο συμβατικός τρόπος αιτιοκρατικής ελαχιστοποίησης πολλών στόχων, δηλαδή  $\min(\omega_1 f_1(\vec{b}) + \omega_2 f_2(\vec{b}))$ .

## Β'.2 Επιλογή Κριτηρίων Σύγκλισης της ALM

### Περιορισμοί Ισότητας :

Φυσικά, κατά πόσο απέχει ένας περιορισμός από την ικανοποίηση του είναι σχετικό. Η ισότητα μεταξύ μιας συνάρτησης και μιας τιμής, αν μπορεί να θεωρηθεί ότι ικανοποιείται εξαρτάται από την τάξη των μεγεθών. Παράδειγμα, έστω ότι υφίστανται οι



Σχήμα Β.3: Παράδειγμα σύγκλισης στην περίπτωση επιλογής σημείου εκκίνησης μακριά από το μέτωπο βέλτιστων λύσεων. Η πτώση στον ρυθμό μείωσης της  $f_1$  οφείλεται στη μεταβολή της τάξης μεγέθους των παραγώγων.

εξής δύο περιορισμοί:

$$f_1(\vec{b}) - 0.01 = 0 \qquad f_2(\vec{b}) - 80 = 0 \qquad (\text{B.2})$$

Ως κριτήριο σύγκλισης, άμα αυτό τεθεί το ίδιο και στους δύο περιορισμούς, τότε θα εμφανιστούν ένα εκ των δύο προβλημάτων:

- είτε θα είναι της τάξεως του 0.1, τιμή μεγαλύτερη της τάξης του πρώτου περιορισμού ( $f_1(\vec{b}) - 0.01 = 0$ ), καθιστώντας τον ιδιαίτερα "χαλαρό",
- είτε θα είναι της τάξεως 0.001, καθιστώντας τον δεύτερο στόχο ( $f_2(\vec{b}) - 80 = 0$ ) δυσκολότερα επιτεύξιμο από τον πρώτο.

Σε αυτό το παράδειγμα, η συνάρτηση-στόχος του δεύτερου στόχου, που είναι περιορισμός, είναι της τάξεως  $10^{-6}$ , γι' αυτό επιλέχθηκε ανοχή  $10^{-7}$ .

### Κριτήριο Σύγκλισης της Συνάρτησης Κόστους της ALM:

Η συνάρτηση κόστους της ALM είναι η συνάρτηση του στόχου προς ελαχιστοποίηση, δηλαδή η  $f_1$ . Το κριτήριο αυτό εξαρτάται από δύο παράγοντες: από το βήμα σε συνδυασμό με το πλήθος επαναλήψεων της απότομης καθόδου και από την τάξη μεγέθους της συνάρτησης-στόχου. Μικρές μεταβολές ανά κύκλο ALM απαιτούν ακόμα μικρότερο κριτήριο σύγκλισης καθώς, σε αντίθετη περίπτωση, μπορεί να προκληθεί πρόωρη σύγκλιση, δηλαδή η μέθοδος να έχει συγκλίνει δίχως όντως να εντοπίσει το ελάχιστο της  $f_1$ . Πέραν της εμπειρίας, ο μοναδικός τρόπος για να εξακριβωθεί η ορθότητα της επιλογής είναι η πραγματοποίηση μίας δοκιμαστικής εκτέλεσης με ακόμα αυστηρότερο κριτήριο. Στην περίπτωση όπου η διαφορά των ελαχίστων της συνάρτησης κόστους είναι επιτρεπτή μεταξύ του νέου και του προηγούμενου κριτηρίου, η αρχική εκτίμηση είναι ορθή.



## Παράρτημα Γ'

### Μαθηματικά Εργαλεία

#### Γ'.1 Βασικό Θεώρημα Πεπλεγμένων Συναρτήσεων

Έστω μια βαθμωτή συνάρτηση  $H$  δύο μεταβλητών  $z, y$  για την οποία ισχύει  $H(z, y) = 0$ . Από τον ορισμό του ολικού διαφορικού ισχύει:

$$dH(z, y) = \frac{\partial H(z, y)}{\partial z} dz + \frac{\partial H(z, y)}{\partial y} dy = 0 \quad (\Gamma.1)$$

Αν το μέγεθος  $y$  εξαρτάται από το μέγεθος  $z$  και μόνο από αυτό, τότε ορίζεται το μέγεθος  $\frac{dy(z)}{dz}$ . Άρα, διαιρώντας την παραπάνω εξίσωση με  $dz$  προκύπτει:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H(z, y)}{\partial z} + \frac{\partial H(z, y)}{\partial y} \frac{dy(z)}{dz} = 0 &\Rightarrow \frac{\partial H(z, y)}{\partial y} \frac{dy(z)}{dz} = -\frac{\partial H(z, y)}{\partial z} \\ &\Rightarrow \frac{dy(z)}{dz} = -\left[\frac{\partial H(z, y)}{\partial y}\right]^{-1} \frac{\partial H(z, y)}{\partial z} \end{aligned} \quad (\Gamma.2)$$

Το βασικό θεώρημα πεπλεγμένων συναρτήσεων (implicit function theorem) αποτελεί γενίκευση της παραπάνω εξίσωσης και είναι χρήσιμο εργαλείο στην ανάλυση συναρτήσεων πολλών μεταβλητών, καθώς παρουσιάζει τη μεταβολή των μεταβλητών  $\vec{y}$  ως προς τις μεταβλητές  $\vec{z}$ , αν βέβαια υφίσταται κάποια συσχέτιση μεταξύ τους. Η μαθηματική διατύπωση είναι η εξής [23, 3, 1]:

Έστω η διανυσματική συνάρτηση πολλών μεταβλητών  $\vec{H}(\vec{z}, \vec{y})$ , όπου  $\vec{z}, \vec{y}$  τα διανύσματα των μεταβλητών. Αν ζητούνται οι σχέσεις του μεγέθους  $\vec{y}$  σε σχέση με το  $\vec{z}$ , δηλαδή ζητείται η σχέση  $\vec{y} = \vec{g}(\vec{z})$ , τότε ισχύει:

$$\nabla_{\vec{z}} \vec{g}(\vec{z}) = -[\nabla_{\vec{y}} \vec{H}(\vec{z}, \vec{g}(\vec{z}))]^{-1} \nabla_{\vec{z}} \vec{H}(\vec{z}, \vec{g}(\vec{z})) \quad (\Gamma.3)$$

Βασικές προϋποθέσεις είναι:

1. Ο όρος  $\nabla_{\vec{y}} \vec{H}(\vec{z}, \vec{g}(\vec{z}))$  να είναι αντιστρέψιμος.
2. Οι εμπλεκόμενες συναρτήσεις να είναι συνεχείς και παραγωγίσιμες.

### Γ'.1.1 Εφαρμογή

Έστω το πρόβλημα ελαχιστοποίησης δύο περιορισμών ισότητας:

$$\begin{aligned} & \min f_1(\vec{b}) \\ \text{s.t. } & q(\vec{b}, a) = 0 \\ & c(\vec{b}) = 0 \end{aligned} \quad (\Gamma.4)$$

όπου  $a$  βαθμωτή παράμετρος του πρώτου περιορισμού.

Από τις συνθήκες ΚΚΤ (κεφάλαιο Α'.4.2), η αντίστοιχη συνάρτηση Lagrange γράφεται ως:

$$L(\vec{b}, \lambda_q, \lambda_c) = f_1(\vec{b}) - \lambda_q q(\vec{b}, a) - \lambda_c c(\vec{b}) \quad (\Gamma.5)$$

ενώ οι αναγκαίες συνθήκες για την εύρεση ελάχιστου για το πρόβλημα Γ.4 είναι οι:

$$\begin{aligned} \nabla_{\vec{b}} L(\vec{b}, \lambda_q, \lambda_c) &= \vec{0} \\ q(\vec{b}, a) &= 0 \\ c(\vec{b}) &= 0 \end{aligned} \quad (\Gamma.6)$$

Έστω ότι ζητούνται οι παράγωγοι των μεταβλητών σχεδιασμού και των πολλαπλασιαστών Lagrange ως προς την παράμετρο  $a$ . Οι εξισώσεις του συστήματος Γ.6 αποτελούν διανυσματική συνάρτηση  $\vec{H}$ :

$$\vec{H}(\vec{z}, \vec{g}(\vec{z})) = \begin{pmatrix} \nabla_{\vec{b}} L(\vec{b}, \lambda_q, \lambda_c) \\ q(\vec{b}, a) \\ c(\vec{b}) \end{pmatrix} = \vec{0} \quad (\Gamma.7)$$

Ζητείται η εύρεση των παραγώγων ως προς ένα μόνο μέγεθος, το οποίο είναι το  $a$ , άρα το διάνυσμα  $\vec{z}$  είναι βαθμωτό μέγεθος:

$$\vec{z} = z = a \quad (\Gamma.8)$$

Τα μεγέθη  $y_i$  των οποίων θα υπολογιστεί η μεταβολή ως προς την παράμετρο  $a$  είναι:

$$\vec{y} = \vec{g}(\vec{z}) = \begin{pmatrix} \vec{b} \\ \lambda_q \\ \lambda_c \end{pmatrix} \quad (\Gamma.9)$$

Με άλλα λόγια, έχουμε τις σχέσεις Γ.6 και επιθυμούμε τη μετατροπή τους με τέτοιο τρόπο, έτσι ώστε να εκφράζεται η μεταβολή των  $\vec{b}$ ,  $\lambda_q$ ,  $\lambda_c$  ως προς το  $a$ . Με εφαρμογή του θεωρήματος πεπλεγμένων συναρτήσεων προκύπτει:

$$\begin{aligned} \nabla_{\vec{z}} \vec{g}(\vec{z}) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial \vec{b}}{\partial a} \\ \frac{\partial \lambda_q}{\partial a} \\ \frac{\partial \lambda_c}{\partial a} \end{pmatrix} \\ \nabla_{\vec{z}} \vec{H}(\vec{z}, \vec{g}(\vec{z})) &= \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\partial q(\vec{b}, a)}{\partial a} \\ 0 \end{pmatrix} \\ \nabla_{\vec{y}} \vec{H}(\vec{z}, \vec{g}(\vec{z})) &= \begin{bmatrix} \nabla_{\vec{b}}^2 L(\vec{b}, \lambda_q, \lambda_c) & -\nabla_{\vec{b}} q(\vec{b}, a) & -\nabla_{\vec{b}} c(\vec{b}) \\ \nabla_{\vec{b}} q(\vec{b}, a) & 0 & 0 \\ \nabla_{\vec{b}} c(\vec{b}) & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\Gamma.10)$$

Άρα το σύστημα το οποίο προκύπτει σύμφωνα με τη σχέση Γ.3 είναι το εξής:

$$\begin{bmatrix} \nabla_{\vec{b}}^2 L(\vec{b}, \lambda_q, \lambda_c) & -\nabla_{\vec{b}} q(\vec{b}, a) & -\nabla_{\vec{b}} c(\vec{b}) \\ [\nabla_{\vec{b}} q(\vec{b}, a)]^T & 0 & 0 \\ [\nabla_{\vec{b}} c(\vec{b})]^T & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \vec{b}}{\partial a} \\ \frac{\partial \lambda_q}{\partial a} \\ \frac{\partial \lambda_c}{\partial a} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \vec{0} \\ \frac{\partial q(\vec{b}, a)}{\partial a} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\Gamma.11)$$

Σε μια προσπάθεια να συνδεθούν τα παραπάνω με τη βασική θεωρία της εργασίας (κεφάλαιο 3), έστω ότι έχουμε ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης δύο στόχων και ενός περιορισμού ισότητας:

$$\begin{aligned} \min & \begin{cases} f_1(\vec{b}) \\ f_2(\vec{b}) \end{cases} \\ \text{s.t.} & c(\vec{b}) = 0 \end{aligned} \quad (\Gamma.12)$$

Με βάση τη θεωρία και, συγκεκριμένα, το σύστημα 3.2, το πρόβλημα αποκτά την

παρακάτω μορφή:

$$\begin{aligned} & \min f_1(\vec{b}) \\ \text{s.t. } & f_2(\vec{b}) - \hat{f}_2 = 0 \\ & c(\vec{b}) = 0 \end{aligned} \quad (\Gamma.13)$$

Το πρόβλημα αυτό προκύπτει και από το παράδειγμα που αναλύθηκε, πραγματοποιώντας την παρακάτω αντιστοιχία:

$$\begin{aligned} a & \rightarrow \hat{f}_2 \\ q(\vec{b}, a) & \rightarrow f_2(\vec{b}) - \hat{f}_2 \end{aligned} \quad (\Gamma.14)$$

Ως αποτέλεσμα, δημιουργείται το εξής σύστημα:

$$\begin{bmatrix} \nabla_{\vec{b}}^2 L(\vec{b}, \lambda_{f_2}, \lambda_c) & -\nabla_{\vec{b}} f(\vec{b}) & -\nabla_{\vec{b}} c(\vec{b}) \\ [\nabla_{\vec{b}} f_2(\vec{b})]^T & 0 & 0 \\ [\nabla_{\vec{b}} c(\vec{b})]^T & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \vec{b}}{\partial a} \\ \frac{\partial \lambda_{f_2}}{\partial \hat{f}_2} \\ \frac{\partial \lambda_c}{\partial \hat{f}_2} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \vec{0} \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\Gamma.15)$$

## Γ'.2 Καμπύλες μέσω Πολυωνύμων Bezier-Bernstein

Οι καμπύλες Bezier-Bernstein αποτελούν έναν τρόπο προσέγγισης μιας καμπύλης χωρίς να απαιτείται υψηλό πλήθος σημείων ελέγχου (control points-CP) [19]. Συγκεκριμένα, για καμπύλες στον χώρο ισχύει:

$$\vec{r}(t) = \sum_{i=1}^{n_{CP}} \vec{R}_{i,CP} C_i(t) \quad (\Gamma.16)$$

Δηλαδή τα σημεία της καμπύλης έχουν γραμμική εξάρτηση από τα σημεία ελέγχου.

Για τον συντελεστή  $C_i$  ισχύει:

$$\begin{pmatrix} C_1(t) \\ \vdots \\ C_{n_{CP}}(t) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} m_{1,1} & \cdots & m_{1,n_{CP}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n_{CP},1} & \cdots & m_{n_{CP},n_{CP}} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} t^0 \\ \vdots \\ t^{n_{CP}-1} \end{pmatrix} \quad (\Gamma.17\alpha)$$

$$m_{i,j} = (-1)^{j-i} \binom{n_{CP}-1}{j-1} \binom{j-1}{i-1}, \forall i, j \in [1, n_{CP}] \quad (\Gamma.17\beta)$$



όπου  $\vec{r}(t) = (x, y, z)$  το διάνυσμα θέσης της καμπύλης,  $\vec{R}_{i,CP} = (X_{i,CP}, Y_{i,CP}, Z_{i,CP})$  το διάνυσμα θέσης των σημείων ελέγχου και  $t \in [0, 1]$  η παράμετρος η οποία αναφέρεται στη θέση σημείου πάνω στην καμπύλη.

Με άλλα λόγια, οι συντεταγμένες των σημείων της καμπύλης επηρεάζονται μόνο από τις αντίστοιχες συντεταγμένες των σημείων ελέγχου και από έναν συντελεστή εξαρτώμενη από την παράμετρο θέσης  $t$ . Δηλαδή, αν ένα σημείο ελέγχου κινηθεί κατά τον άξονα  $y$ , τα σημεία της καμπύλης θα διατηρήσουν σταθερό  $x$  για κάθε  $t \in [0, 1]$ .

Στην παρούσα διπλωματική εργασία, οι καμπύλες Bezier χρησιμοποιούνται στη γένεση του περιγράμματος της αεροτομής (κεφάλαιο 5.1), δηλαδή ο όρος της τρίτης διάστασης ( $z$ ) είναι μηδενικός. Το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στην καμπύλη προκύπτει για διδιάστατες καμπύλες ως εξής:

$$\vec{n} = (n_x, n_y) = \left(-\frac{dy}{ds}, \frac{dx}{ds}\right) \quad (\Gamma.18\alpha')$$

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 \quad (\Gamma.18\beta')$$

## Γ'.2.1 Παράγωγοι ως προς τις Συντεταγμένες των Σημείων Ελέγχου

Στο κεφάλαιο 5.1 αποδείχθηκε ότι για την εύρεση της πρώτης και δεύτερης παραγώγου του εμβαδού της αεροτομής ως προς τις συντεταγμένες των σημείων ελέγχου (εξισώσεις 5.8α' 5.9) χρειάζονται οι πρώτες παράγωγοι του διανυσμάτος θέσης  $\vec{r}$ , του μοναδιαίου διανύσματος  $\vec{n}$  και του απειροστού μήκους τόξου της περιφέρειας  $ds$ .

Σύμφωνα με τα παραπάνω, από την εξίσωση Γ.16, για ένα σημείο  $(x, y)$  επί του περιγράμματος της αεροτομής το οποίο αντιστοιχεί σε συγκεκριμένη τιμή της παραμέτρου  $t$  προκύπτει:

$$\frac{\delta x}{\delta X_{i,CP}} = C_i(t) \quad (\Gamma.19\alpha')$$

$$\frac{\delta y}{\delta Y_{i,CP}} = C_i(t) \quad (\Gamma.19\beta')$$

Για τη μεταβολή του μήκους ισχύει:

$$\begin{aligned} \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 &= \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 \Rightarrow \\ 2\frac{ds}{dt^2}\frac{\delta ds}{\delta X_{i,CP}} &= 2\frac{dx}{dt}\frac{\delta \frac{dx}{dt}}{\delta X_{i,CP}} \text{ και} \\ 2\frac{ds}{dt^2}\frac{\delta ds}{\delta Y_{i,CP}} &= 2\frac{dy}{dt}\frac{\delta \frac{dy}{dt}}{\delta Y_{i,CP}} \\ \frac{\delta ds}{\delta X_{i,CP}} &= \frac{dt^2}{ds}\frac{dx}{dt}\frac{dC_i(t)}{dt}C_i(t) \text{ και} & (\Gamma.20\alpha') \\ \frac{\delta ds}{\delta Y_{i,CP}} &= \frac{dt^2}{ds}\frac{dy}{dt}\frac{dC_i(t)}{dt}C_i(t) & (\Gamma.20\beta') \end{aligned}$$

όπου πάλι από την εξίσωση Γ.16 παραγωγίζοντας ως προς την παράμετρο  $t$  προκύπτει:

$$\frac{dx}{dt} = \sum_{i=1}^{n_{CP}} X_{i,CP} \frac{dC_i(t)}{dt} \quad (\Gamma.21\alpha')$$

$$\frac{dy}{dt} = \sum_{i=1}^{n_{CP}} Y_{i,CP} \frac{dC_i(t)}{dt} \quad (\Gamma.21\beta')$$

Ομοίως προκύπτει:

$$\frac{\delta n_x}{\delta X_{i,CP}} = -\frac{dt}{ds}n_x n_y \frac{dC_i(t)}{dt} \quad (\Gamma.22\alpha')$$

$$\frac{\delta n_x}{\delta Y_{i,CP}} = -\frac{dt}{ds}(1 - n_x^2) \frac{dC_i(t)}{dt} \quad (\Gamma.22\beta')$$

$$\frac{\delta n_y}{\delta X_{i,CP}} = -\frac{dt}{ds}(1 - n_y^2) \frac{dC_i(t)}{dt} \quad (\Gamma.22\gamma')$$

$$\frac{\delta n_y}{\delta Y_{i,CP}} = -\frac{dt}{ds}n_x n_y \frac{dC_i(t)}{dt} \quad (\Gamma.22\delta')$$

Στο κεφάλαιο 5.1 χρειάζονται μόνο οι παράγωγοι ως προς την  $y$  διεύθυνση, δηλαδή χρησιμοποιούνται οι εξισώσεις Γ.19β', Γ.20β', Γ.21β', Γ.22β' και Γ.22δ'.

## Βιβλιογραφία

- [1] Schmidt, S. and Schulz, V.: *Pareto-curve continuation in multi-objective optimization*. Pacific Journal of Optimization, 4(2):243–257, 2008.
- [2] Γιαννάκογλου, Κ. Χ.: *Μέθοδοι Βελτιστοποίησης στην Αεροδυναμική*. Αθήνα, τέταρτη έκδοση, 2006.
- [3] Boyd, S. and Vandenberghe, L.: *Convex Optimization*. Cambridge Press, seventh edition, 2009.
- [4] Papadimitriou, D. I. and Giannakoglou, K. C.: *Computation of the Hessian matrix in aerodynamic inverse design using continuous adjoint formulations*. Computers & Fluids, 37(8):1029–1039, 2008.
- [5] Papadimitriou, D. I. and Giannakoglou, K. C.: *A continuous adjoint method with objective function derivatives based on boundary integrals, for inviscid and viscous flows*. Computers & Fluids, 37(2):325–341, 2007.
- [6] Papadimitriou, D. I. and Giannakoglou, K. C.: *Optimization and Computational Fluid Dynamics*. Springer.
- [7] Papadimitriou, D. I. and Giannakoglou, K. C.: *Aerodynamic design using the truncated newton algorithm and the continuous adjoint approach*. International journal for Numerical Methods in Fluids, 68:724–739, 2012.
- [8] Shankaran, S. and Barr, B.: *Efficient gradient-based algorithms for the construction of Pareto fronts*. Proceedings of ASME Turbo Expo 2011, 2011.
- [9] [http://flowhead.sems.qmul.ac.uk/events/conference2012/downloads/presentations/12\\_NTUA\\_Giannakoglou\\_OK.pdf](http://flowhead.sems.qmul.ac.uk/events/conference2012/downloads/presentations/12_NTUA_Giannakoglou_OK.pdf).
- [10] Zymaris, A.S. and Papadimitriou, D.I. and Papoutsis-Kiachagias, E.M. and Giannakoglou, K.C.: *A continuous adjoint method with objective function derivatives based on boundary integrals, for inviscid and viscous flows*. Engineering Computations.
- [11] Zymaris, A.S. and Papadimitriou, D.I. and Giannakoglou, K.C. and Othmer, C.: *Continuous adjoint approach to the Spalart-Allmaras turbulence model for incompressible flows*. Computers & Fluids, 38(8):494–520, 2013.
- [12] <http://velos0.ltt.mech.ntua.gr/EASY/>.

- [13] Zitler, E., Deb, K. and Thiele, L.: *Comparison of Multiobjective Evolutionary Algorithms: Empirical Results*. *Evolutionary Computation*, 8(2):173–195, 2000.
- [14] Dole, C. E. and Lewis, J. E.: *Flight Theory and Aerodynamics: A Practical Guide for Operational Safety*. John Wiley & Sons, second edition, 2000.
- [15] <http://www.free-online-private-pilot-ground-school.com/aerodynamics.html>.
- [16] <http://www.diracdeltaco.uk/science/source/a/e/aerofoil/source.html>.
- [17] Ζερβογιάννης, Θ.: *Μέθοδοι βελτιστοποίησης στην αεροδυναμική και τις στροβιλομηχανές με χρήση συζυγών τεχνικών, υβριδικών πλεγμάτων και του ακριβούς εσσιανού μητρώου*. Διδακτορική διατριβή, Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, Ε.Μ.Π., Αθήνα, 2011.
- [18] Καδιανάκης, Ν., Καρανάσιος, Σ., και Φελούρης, Α.: *Ανάλυση 2, Συναρτήσεις Πολλών Μεταβλητών*. Καδιανάκης, Ν., Καρανάσιος, Σ. και Φελούρης, Α., όγδοη έκδοση, 2009.
- [19] Γιαννάκογλου, Κ. Χ., Αναγνωστόπουλος, Ι., και Μπεργελές, Γ.: *Αριθμητική Ανάλυση για Μηχανικούς*. Αθήνα, τρίτη έκδοση, 2003.
- [20] Nocedal, J. and Wright, S. J.: *Numerical Optimization*. Springer, second edition, 2006.
- [21] Shewchuk, J. R.: *An Introduction to the Conjugate Gradient Method Without the Agonizing Pain*. Pittsburgh, fourth edition, 1994.
- [22] *Lagrangian duality for dummies*. [http://cs.stanford.edu/people/davidknowles/lagrangian\\_duality.pdf](http://cs.stanford.edu/people/davidknowles/lagrangian_duality.pdf).
- [23] Χαϊνης, Ι. Θ.: *Μαθήματα Μαθηματικής Αναλύσεως, τόμος Β*. Αθήνα, δεύτερη έκδοση, 1998.