



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΡΕΥΣΤΩΝ
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΘΕΡΜΙΚΩΝ ΣΤΡΟΒΙΛΟΜΗΧΑΝΩΝ
ΜΟΝΑΔΑ ΠΑΡΑΛΛΗΛΗΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ
ΡΕΥΣΤΟΔΥΝΑΜΙΚΗΣ & ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ

**Θεμελίωση και προγραμματισμός της μεθόδου της
Ισορροπίας των Αρμονικών στην αριθμητική επίλυση
περιοδικών πεδίων ροής**

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΓΕΩΡΓΙΟΥ Δ. ΚΑΝΕΛΛΗ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ: ΚΥΡΙΑΚΟΣ Χ. ΓΙΑΝΝΑΚΟΓΛΟΥ

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΕΜΠ

Αθήνα, Οκτώβριος 2011



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΡΕΥΣΤΩΝ
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΘΕΡΜΙΚΩΝ ΣΤΡΟΒΙΛΟΜΗΧΑΝΩΝ
ΜΟΝΑΔΑ ΠΑΡΑΛΛΗΛΗΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ
ΡΕΥΣΤΟΔΥΝΑΜΙΚΗΣ & ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ

Θεμελίωση και προγραμματισμός της μεθόδου της Ισορροπίας των Αρμονικών στην
αριθμητική επίλυση περιοδικών πεδίων ροής

του Γεωργίου Δ.Κανέλλη

Επιβλέπων: Κυριάκος Χ.Γιαννάκογλου, Καθηγητής ΕΜΠ

Αθήνα, Οκτώβριος 2011

Περίληψη

Η παρούσα διπλωματική εργασία ασχολείται με την αριθμητική επίλυση περιοδικών πεδίων ροής. Συνήθως, μέχρι τώρα, τέτοια προβλήματα δεν είχαν ιδιαίτερη αντιμετώπιση και επιλύονταν με τη μέθοδο της χρονο-προέλασης η οποία είναι μία γενική μέθοδος που εφαρμόζεται στην επίλυση χρονικά μη-μόνιμων προβλημάτων ροής. Έτσι, στα πλαίσια αυτής της διπλωματικής, θα γίνει η θεμελίωση και ο προγραμματισμός της μεθόδου της Ισορροπίας των Αρμονικών η οποία εφαρμόζεται στην αριθμητική επίλυση περιοδικών μόνο πεδίων ροής. Κεντρική ιδέα της μεθόδου αποτελεί η θεώρηση ότι οι άγνωστες ποσότητες της ροής, λόγω της περιοδικότητας, μπορούν να προσεγγιστούν ικανοποιητικά από μερικούς όρους σειράς *Fourier*. Με αυτόν τον τρόπο μειώνονται οι συνολικοί άγνωστοι, καθώς αρκεί ο υπολογισμός αυτών ακριβώς των όρων. Το αναμενόμενο πλεονέκτημα μίας τέτοιας θεώρησης είναι το κέρδος σε υπολογιστικό χρόνο καθώς υπολογίζεται απ' ευθείας το περιοδικό φαινόμενο αποφεύγοντας τον υπολογισμό του μεταβατικού φαινομένου και απαιτείται ο υπολογισμός των λίγων αυτών συντελεστών *Fourier* αντί για τον υπολογισμό του πεδίου ροής σε κάθε μία από τις χρονικές στιγμές στις οποίες διακριτοποιούνται χρονικά οι μεταβλητές ροής με τη μέθοδο της χρονοπροέλασης. Εδώ, η μέθοδος της Ισορροπίας των Αρμονικών εφαρμόστηκε στην αριθμητική επίλυση των 2Δ εξισώσεων *Euler*, γύρω από μία μεμονωμένη αεροτομή. Ως διέγερση επιλέχθηκε η περιοδική μεταβολή της γωνίας της επ' άπειρον ροής. Για την επίλυση των εξισώσεων της Ισορροπίας των Αρμονικών εφαρμόστηκε ένα σχήμα *Jacobi*. Η ανάπτυξη του επιλύτη της ροής με τη μέθοδο της Ισορροπίας των Αρμονικών βασίστηκε στον υπάρχοντα επιλύτη 2Δ εξισώσεων *Euler* συμπίεστου ρευστού με χρήση μη δομημένων πλεγμάτων, η διακριτοποίηση των οποίων γίνεται με σχήμα πεπερασμένων όγκων κεντροκομβικής διατύπωσης και η επίλυσή τους γίνεται με χρήση μεθόδου χρονοπροέλασης. Η περίπτωση που κυρίως μελετήθηκε, στην οποία τέθηκε η ανηγμένη συχνότητα ίση με 0.1 και υπήρξε ικανοποιητικός

ρυθμός σύγκλισης παρουσίασε βελτίωση του χρόνου επίλυσης, ο οποίος βρέθηκε μάλιστα να είναι της τάξης μεγέθους των N_T χρονικά μόνιμων προβλημάτων, όπως και αναμενόταν. Ακόμη, παρατηρήθηκε καθυστέρηση σύγκλισης με την αύξηση της ανηγμένης συχνότητας της διέγερσης. Τέλος, έγινε σύγκριση των αποτελεσμάτων της Ισορροπίας των Αρμονικών με αυτά της μεθόδου χρονοπροέλασης, τα οποία ήταν όμοια μεταξύ τους. Χρησιμοποιήθηκαν δύο συχνότητες, μία χαμηλότερη ($f_r = 0.1$) και μία υψηλότερη ($f_r = 1$) και έγινε διερεύνηση για τον απαιτούμενο αριθμό αρμονικών για την ικανοποιητική προσέγγιση του πεδίου ροής.



NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY OF ATHENS
SCHOOL OF MECHANICAL ENGINEERING
DEPARTMENT OF FLUIDS
LABORATORY OF THERMAL TURBOMACHINES
PARALLEL CFD & OPTIMIZATION UNIT

Formulation and programming of the Harmonic Balance method for the numerical prediction of
periodic flow fields

George D.Kanellis

Advisor: Kyriakos C.Giannakoglou, Professor NTUA

Athens, October 2011

Abstract

Until recently the numerical prediction of periodic flow fields was based mostly on classical techniques for unsteady problems, such as time marching. These techniques are not efficient for periodic flow fields, since a transient period must be by-passed. In this diploma thesis the alternative Harmonic Balance (*HB*) method is implemented in order to accelerate the computation of periodic flow fields. This method allows for the direct computation of the periodic flow fields, without having to compute the transient flow. The central idea of the *HB* method is the approximation of the conservative flow variables by *Fourier* series, using a given number of harmonics, N_H . This way, a costly fluid dynamic unsteady computation is transformed into N_T ($N_T = 2N_H + 1$) parallel steady computations. For the numerical computation of the *HB* equations a *Jacobi* scheme is used. Here, the *HB* method is applied to the solution of the 2D compressible *Euler* equations around an isolated airfoil with periodic excitation of the angle of attack. The solver uses a vertex-centered finite-volume method for unstructured grids. The results obtained from the *HB* method for various numbers of harmonics are compared with those obtained from the time-marching algorithm. A final remark is that the convergence rate of the *HB* solver decays as the frequency is increased.

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ...

Με αυτήν την διπλωματική εργασία ολοκληρώνονται οι σπουδές μου στη σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών του ΕΜΠ. Σε αυτό το σημείο θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα της διπλωματικής μου εργασίας Κ.Χ.Γιαννάκογλου, Καθηγητή ΕΜΠ, για τη δυνατότητα που μου έδωσε να ασχοληθώ με αυτό το ενδιαφέρον θέμα, την καθοδήγηση του, καθώς και για το χρόνο που αφιέρωσε για να ξεπεραστούν δυσκολίες που προέκυψαν κατά τη δημιουργία αυτής της εργασίας. Ακόμη, ευχαριστώ τον Δημήτρη Παπαδημητρίου που με βοήθησε και αυτός σε ό,τι μου χρειάστηκε, σε πολλά σημεία αυτής της εργασίας. Επίσης, ευχαριστώ τον Ξενοφώντα Τρομπούκη που η βοήθειά του ήταν σημαντική σε αυτή την εργασία σε διάφορα στάδια και κυρίως στην δημιουργία του κώδικα. Επιπλέον, ευχαριστώ όλη την ομάδα του Εργαστηρίου Θερμικών Στροβιλομηχανών για τη βοήθειά τους σε όποια απορία προέκυπτε.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένειά μου, τους γονείς μου και την αδερφή μου, και τους φίλους μου για τη στήριξή τους όλα αυτά τα χρόνια.

Κανέλλης Γιώργος

Οκτώβριος 2011

Περιεχόμενα

1	Εισαγωγή	1
2	Παρουσίαση των εξισώσεων Euler και διακριτοποίηση αυτών	3
2.1	Οι εξισώσεις Euler	3
2.1.1	Η παραδοχή του τελείου αερίου	4
2.1.2	Αδιαστατοποίηση των εξισώσεων	6
2.2	Διακριτοποίηση του χωρίου ροής	10
2.2.1	Σχεδίαση των κυψελών ελέγχου	10
2.3	Διακριτοποίηση των εξισώσεων ροής	11
2.3.1	Εφαρμογή της μεθόδου των πεπερασμένων όγκων	11
2.3.2	Υπολογισμός διανύσματος μη συνεκτικής ροής	13
2.3.3	Αύξηση της ακρίβειας του σχήματος	18
2.4	Επιβολή οριακών συνθηκών	18
2.4.1	Στερεά τοιχώματα	19
2.4.2	Είσοδος - Έξοδος	20
3	Επίλυση στο πεδίο του χρόνου - Η μέθοδος της χρονο-προέλασης	23
3.1	Γενική περιγραφή	23
3.2	Διαδικασία επίλυσης	24
3.3	Επαναληπτική επίλυση χρησιμοποιώντας σχήμα Jacobi	25
4	Περιοδικά φαινόμενα ροής	27
4.1	Η μέθοδος της ισορροπίας των αρμονικών	27
4.2	Επίλυση περιοδικών ροών μέσω προσέγγισης με σειρές Fourier	28
5	Επίλυση στο πεδίο των συχνοτήτων - Η μέθοδος της Ισορροπίας των Αρμονικών	31
5.1	Μαθηματική θεμελίωση	31

6	Διατύπωση και επίλυση των εξισώσεων Euler σύμφωνα με τη μέθοδο της Ισοροπίας των Αρμονικών	45
6.1	Σχηματισμός των εξισώσεων	45
6.2	Αλγόριθμος επαναληπτικής επίλυσης των εξισώσεων ροής	48
6.2.1	Αρχικοποίηση	49
6.2.2	Ψευδοχρονικό βήμα Δt_{ps}	50
6.2.3	Κριτήριο σύγκλισης	50
6.3	Επαναληπτική επίλυση με σχήμα Jacobi	50
7	Υπολογισμοί με τη μέθοδο χρονο-προέλασης	55
7.1	Αποτελέσματα για ‘χαμηλή’ ανηγμένη συχνότητα	58
7.2	Αποτελέσματα για ‘υψηλή’ ανηγμένη συχνότητα	60
8	Έλεγχος για την ταυτότητα των σχέσεων της Ισοροπίας των Αρμονικών	65
9	Αποτελέσματα	71
9.1	Περίπτωση 1: ημιτονοειδής μεταβολή της γωνίας εισόδου της αεροτομής . . .	71
9.2	Περίπτωση 2: πολυωνυμική μεταβολή της γωνίας εισόδου της αεροτομής . .	78
9.3	Περίπτωση 3: μία πιο σύνθετη μεταβολή της γωνίας εισόδου της ροής	86
9.4	Εικόνες της ροής σε μερικές χρονικές στιγμές μέσα στην περίοδο	97
9.5	Σύγκλιση των εξισώσεων της ισοροπίας των αρμονικών-Χρόνοι υπολογισμού	97
9.6	Περίπτωση 4: Αποτελέσματα για υψηλότερη ανηγμένη συχνότητα με ημιτονοειδή μεταβολή της γωνίας εισόδου στην αεροτομή	100
10	Ανακεφαλαίωση-Συμπεράσματα	107

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Πολλά από τα προβλήματα που αντιμετωπίζονται με μεθόδους Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής είναι μη-μόνιμα προβλήματα. Αυτά συνήθως επιλύονται με μέθοδο χρονο-προέλασης κατά την οποία διακριτοποιείται στο χρόνο η λύση, και, ξεκινώντας από την αρχική συνθήκη, προχωράει η επίλυση στις υπόλοιπες χρονικές στιγμές. Επειδή η διαδικασία αυτή πολλές φορές καταναλώνει αρκετό υπολογιστικό χρόνο, γίνονται προσπάθειες έτσι ώστε να μειωθεί αυτός ο χρόνος με την εκμετάλλευση ειδικών χαρακτηριστικών που πιθανώς έχει η ροή. Έτσι, για την αντιμετώπιση των περιοδικών ροών, οι οποίες εμφανίζονται ιδιαίτερα συχνά, έχει προταθεί η μέθοδος της Ισορροπίας των Αρμονικών που εξετάζεται σε αυτήν την εργασία.

Η Ισορροπία των Αρμονικών (harmonic balance) είναι μια μέθοδος που χρησιμοποιείται σε χρονικά μη-μόνιμα (unsteady) προβλήματα στα οποία η διέγερση (excitation) είναι περιοδική. Βασίζεται στην προσέγγιση των άγνωστων πεδίων μέσω σειρών Fourier ως προς το χρόνο. Αυτό που γενικά θεωρείται ως κέρδος είναι ο απευθείας υπολογισμός του περιοδικού φαινομένου το οποίο συνήθως ενδιαφέρει, αποφεύγοντας τον υπολογισμό του μεταβατικού φαινομένου που συμβαίνει μέχρι να μονιμοποιηθεί η περιοδικότητα των μεγεθών της ροής. Ένα άλλο κέρδος είναι ότι απαιτείται να βρεθεί η ροή σε πολύ μικρότερο αριθμό χρονικών στιγμών μέσα στην περίοδο από αυτόν που απαιτείται για την κλασική μέθοδο επίλυσης τέτοιων προβλημάτων στη διάσταση του χρόνου (λ.χ με την τεχνική της χρονοπροέλασης). Συγκεκριμένα απαιτείται αριθμός στιγμών ίσος με τον αριθμό των συντελεστών Fourier που απαιτούνται για να προσεγγιστούν ικανοποιητικά τα μεγέθη της ροής. Για παράδειγμα, αν αρκούν $N_H = 3$ αρμονικές, οι συντελεστές (ακριβέστερα πεδία συντελεστών) Fourier που πρέπει να υπολογιστούν είναι $N_T = 2N_H + 1 = 7$, οι οποίοι για να προκύψουν θα πρέπει να είναι γνωστό το πεδίο σε 7 ισαπέχουσες χρονικές στιγμές στην περίοδο, όπως θα εξηγηθεί σε επόμενο κεφάλαιο. Με αυτόν τον τρόπο, ο υπολογισμός του χρονικά μη-μόνιμου πεδίου ροής καταλήγει να έχει ως υπολογιστικό κόστος ισοδύναμο με N_T χρονικά μόνιμα προβλήματα, όπου $N_T = 2N_H + 1$, με N_H τον αριθμό των αρμονικών που εκτιμάται ότι αρκούν για την

σωστή προσέγγιση του.

Σε αυτήν τη διπλωματική, αφού έγινε η θεμελίωση της μεθόδου έγινε ο προγραμματισμός της στην επίλυση διδιάστατων εξισώσεων *Euler* γύρω από μεμονωμένη αεροτομή, στην οποία θεωρήθηκε ως διέγερση η περιοδική μεταβολή της επ' άπειρον γωνίας ροής.

Δομή εργασίας

Στο δεύτερο κεφάλαιο εξηγούνται οι εξισώσεις *Euler*, οι οποίες αντιπροσωπεύουν το φυσικό πρόβλημα στο οποίο εφαρμόστηκε η ισορροπία των αρμονικών, και η διακριτοποίησή τους με σχήμα πεπερασμένων όγκων κεντροκομβικής διατύπωσης χρησιμοποιώντας μη δομημένο πλέγμα. Στο τρίτο κεφάλαιο παρουσιάζεται η μέθοδος της χρονο-προέλασης, η οποία εφαρμόζεται γενικά στα μη-μόνιμα προβλήματα. Το τέταρτο κεφάλαιο είναι ουσιαστικά εισαγωγικό και αναφέρεται στα περιοδικά φαινόμενα και περιγράφει τη γενική ιδέα της μεθόδου της Ισορροπίας των Αρμονικών, όπως αυτή εφαρμόστηκε στις δημοδιεύσεις στις οποίες στηρίχθηκε κυρίως αυτή η εργασία. Το πέμπτο κεφάλαιο ασχολείται με το σχηματισμό της εξίσωσης της Ισορροπίας των Αρμονικών και το έκτο με την αριθμητική επίλυση των εξισώσεων *Euler* γραμμένων σε μορφή Ισορροπίας Αρμονικών. Στο έβδομο κεφάλαιο παρουσιάζονται οι υπολογισμοί με τη μέθοδο της χρονο-προέλασης, με τους οποίους θα συγκριθεί η 'νέα' μέθοδος που εφαρμόζεται. Στο όγδοο κεφάλαιο θα γίνει μία επαλήθευση της ορθότητας των σχέσεων της Ισορροπίας των Αρμονικών θέτοντας σε αυτές τα αποτελέσματα της χρονο-προέλασης, ενώ στο ένατο θα παρουσιαστούν τα αποτελέσματα που πάρθηκαν με την εφαρμογή της Ισορροπίας των Αρμονικών και θα γίνει η σύγκριση τους με αυτά της χρονο-προέλασης. Τέλος, στο δέκατο κεφάλαιο παρουσιάζονται τα συμπεράσματα αυτής της εργασίας.

Κεφάλαιο 2

Παρουσίαση των εξισώσεων Euler και διακριτοποίηση αυτών

Στο παρόν κεφάλαιο παρουσιάζεται η μαθηματική διατύπωση του προβλήματος της μη-συνεκτικής ροής συμπιεστού ρευστού. Ειδικότερα, καταγράφονται οι εξισώσεις *Euler* και οι παραδοχές που τις συνοδεύουν. Στο κεφάλαιο αυτό πολλά στοιχεία έχουν παρθεί από τη διπλωματική εργασία του Ξενοφώντα Τρομπούκη [5], όπου ουσιαστικά ένα κεφάλαιο ασχολείται με την επίλυση με πεπερασμένους όγκους των *Navier – Stokes*, οι οποίες χωρίς το συνεκτικό όρο είναι οι εξισώσεις *Euler*.

2.1 Οι εξισώσεις Euler

Η συμπιεστή ροή μη-συνεκτικού ρευστού μοντελοποιείται μέσω των εξισώσεων *Euler* οι οποίες εκφράζουν σε διαφορική μορφή τη διατήρηση της μάζας, της ορμής και της ενέργειας. Για διδιάστατα προβλήματα και στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων (x,y) , οι εξισώσεις αυτές σε συντηρητική διανυσματική μορφή γράφονται (συντηρητική μορφή εννοούμε το να δίνεται η εξίσωση στη μορφή της απόκλισης div μιας φυσικής ποσότητας):

$$\frac{\partial \vec{W}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{F}^{inv}}{\partial x} + \frac{\partial \vec{G}^{inv}}{\partial y} = 0 \quad (2.1)$$

όπου ο εκθέτης *inv* δείχνει ότι στους όρους αυτούς δεν εμπεριέχεται η συνεκτικότητα και άρα είναι μη συνεκτικοί (*inviscid*).

Το διάνυσμα των συντηρητικών μεταβλητών \vec{W} έχει συνιστώσες

$$\vec{W} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ E \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

με ρ την πυκνότητα του ρευστού, u , v τις καρτεσιανές συνιστώσες της ταχύτητας \vec{U} του ρευστού, και E την ολική ενέργεια ανά μονάδα όγκου που δίνεται από τη σχέση

$$E = \rho e + \frac{1}{2} \rho (u^2 + v^2) \quad (2.3)$$

όπου e είναι η εσωτερική ενέργεια ανά μονάδα μάζας.

Οι συνιστώσες των παραπάνω διανυσμάτων ροής φαίνονται παρακάτω

$$\vec{F}^{inv} = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ (E + p)u \end{bmatrix}, \quad \vec{G}^{inv} = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ (E + p)v \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

2.1.1 Η παραδοχή του τελείου αερίου

Εκτός από την παραδοχή του μη-συνεκτικού ρευστού, έχει γίνει και η παραδοχή του τελείου αερίου. Ως τέλειο αέριο ορίζεται εκείνο το αέριο που εκφράζεται από την καταστατική εξίσωση:

$$p = \rho R_g T \quad (2.5)$$

με R_g τη σταθερά του τέλειου αερίου. Η εν λόγω σταθερά υπολογίζεται από τις ειδικές θερμοχωρητικότητες υπό σταθερή πίεση και όγκο, (c_p, c_v) αντίστοιχα:

$$R_g = c_p - c_v \quad (2.6)$$

Γενικά με τον όρο θερμοχωρητικότητα ορίζεται το πηλίκο του συναλασσόμενου ποσού θερμότητας μεταξύ του εξεταζόμενου θερμοδυναμικού συστήματος και του περιβάλλοντος του, όταν αυτό πραγματοποιεί μία στοιχειώδη μεταβολή από τη θερμοδυναμική κατάσταση 1 στη 2, προς τη μεταβολή της θερμοκρασίας του, όταν η παραπάνω 'στοιχειώδης' μεταβολή γίνεται υπό σταθερό ένα θερμοδυναμικό μέγεθος (προφανώς εξαιρείται από τον παραπάνω ορισμό η θερμοκρασία). Επομένως οι ειδικές θερμοχωρητικότητες υπό σταθερή πίεση και όγκο ορίζονται όπως ακολούθως

$$c_p = \left(\frac{\partial q}{\partial T} \right)_p, \quad c_v = \left(\frac{\partial q}{\partial T} \right)_v$$

ή ισοδύναμα εφαρμόζοντας το πρώτο θερμοδυναμικό αξίωμα:

$$c_p = \left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_p, \quad c_v = \left(\frac{\partial e}{\partial T} \right)_v \quad (2.7)$$

με h συμβολίζουμε την ενθαλπία του ρευστού ανά μονάδα μάζας. Η ενθαλπία συνδέεται με την εσωτερική ενέργεια μέσω της ακόλουθης σχέσης

$$h = e + \frac{P}{\rho} \quad (2.8)$$

Γενικά για την εύρεση των τιμών των ειδικών θερμοχωρητικοτήτων απαιτείται η γνώση δύο οποιονδήποτε θερμοδυναμικών μεγεθών. Στα τέλεια αέρια, εξ' ορισμού η εσωτερική ενέργεια είναι συνάρτηση μόνο της θερμοκρασίας και επομένως και το c_v και η ενθαλπία αφού $h = u + p/\rho = u + R_g T$ και άρα και το c_p . Η εξάρτηση αυτή όμως είναι μικρή και έτσι μπορεί να θεωρηθεί ότι ειδικές θερμοχωρητικότητες έχουν σταθερή τιμή. Άμεση συνέπεια των παραπάνω είναι οι ακόλουθες σχέσεις

$$e = c_v T, \quad h = c_p T \quad (2.9)$$

Τέλος, το πηλίκο των δύο ειδικών θερμοχωρητικοτήτων ορίζει τον εκθέτη (γ) ισεντροπικής μεταβολής

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v} \quad (2.10)$$

Ενδεικτικά αναφέρουμε ότι θεωρώντας τον αέρα ως τέλειο αέριο τον χαρακτηρίζουν οι ακόλουθες τιμές:

$$\begin{aligned} R_g &= 287.04 \text{ m}^2 \text{sec}^{-2} \text{K}^{-1} \\ c_p &= 1004.64 \text{ m}^2 \text{sec}^{-2} \text{K}^{-1} \\ c_v &= 717.6 \text{ m}^2 \text{sec}^{-2} \text{K}^{-1} \\ \gamma &= 1.4 \end{aligned}$$

Επιπλέον, η σχέση (2.3) έπειτα από τις προηγούμενες σχέσεις μπορεί εύκολα να γραφεί:

$$E = \frac{P}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} \rho (u^2 + v^2) \quad (2.11)$$

Επίσης, η ολική ενθαλπία δίνεται από την ακόλουθη σχέση

$$h_t = \frac{E + P}{\rho} = \frac{\gamma P}{\rho(\gamma - 1)} + \frac{1}{2} (u^2 + v^2) \quad (2.12)$$

2.1.2 Αδιαστατοποίηση των εξισώσεων

Συνήθης πρακτική που εφαρμόζεται πριν την αριθμητική επίλυση οποιουδήποτε διαφορικού συστήματος είναι η αδιαστατοποίηση των εμπλεκόμενων παραμέτρων. Βασικό προτέρημα που προκύπτει από αυτήν τη διαδικασία είναι ότι τα αποτελέσματα από μία επίλυση δεν αφορούν μόνο μία συγκεκριμένη εφαρμογή, αλλά μία ομάδα εφαρμογών όμοιες μεταξύ τους. Επιπλέον μέσω της αδιαστατοποίησης μπορεί να προκύψουν αδιάστατες παράμετροι που πραγματικά είναι αυτές που επηρεάζουν το φυσικό φαινόμενο που περιγράφεται από το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων, όπως ο αριθμός *Reynolds* στις εξισώσεις *Navier–Stokes*. Εδώ, που γράφονται οι εξισώσεις *Euler* δεν θα προκύψει τέτοια ποσότητα καθώς τα μεγέθη αδιαστατοποίησης απλοποιούνται από τις εξισώσεις.

Επιλέγοντας λοιπόν κατάλληλα μεγέθη αναφοράς (*reference*) προκύπτουν τα ακόλουθα αδιάστατα μεγέθη:

$$\check{x}_i = \frac{x_i}{L_{ref}}, \quad \check{u}_i = \frac{u_i}{U_{ref}}, \quad \check{\rho} = \frac{\rho}{\rho_{ref}} \quad (2.13)$$

Επιλέγουμε επίσης

$$\check{R}_g = \gamma - 1 \quad (2.14)$$

Δηλαδή

$$(R_g)_{ref} = c_v \quad (2.15)$$

Παραπάνω όταν λέμε επιλέγουμε τα $(\rho_{ref}, U_{ref}, L_{ref})$, εννοούμε ότι ανάλογα με την εφαρμογή που έχουμε διαλέγουμε κάποια αντιπροσωπευτικά μεγέθη, έτσι ώστε η αδιαστατοποίηση να έχει κάποιο νόημα. Εδώ, για παράδειγμα, όπου θα επιλυθεί μία μεμονωμένη αεροτομή, επιλέγουμε ως μεγέθη αδιαστατοποίησης αυτά της επ' άπειρον ροής και ως χαρακτηριστικό μήκος έχει θεωρηθεί η χορδή της αεροτομής. Για τα υπόλοιπα μεγέθη τα αντίστοιχα μεγέθη αναφοράς, δεν θα τεθούν 'αυθαίρετα', αλλά θα τεθούν σε σχέση με τα παραπάνω μεγέθη έτσι ώστε η μορφή των αδιαστατοποιημένων εξισώσεων που θα προκύψει να μοιάζει κατά το δυνατόν με τις διαστατές εξισώσεις.

Αδιαστατοποίηση πίεσης

$$p_t = p + \frac{1}{2}\rho U^2 \Rightarrow U = \sqrt{\frac{2}{\rho}(p_t - p)} \Rightarrow \check{U} = \frac{1}{U_{ref}} \sqrt{\frac{2 p_{ref}}{\check{\rho} \rho_{ref}}(\check{p}_t - \check{p})}$$

Είναι επιθυμητό η μορφή των σχέσεων να παραμένει ίδια και μετά την εισαγωγή των αδιάστατων μεγεθών, δηλαδή να ισχύει και πάλι

$$\check{U} = \sqrt{\frac{2}{\check{\rho}}(\check{p}_t - \check{p})}$$

Αυτό επιτυγχάνεται με την προφανή επιλογή

$$U_{ref} = \sqrt{\frac{p_{ref}}{\rho_{ref}}} \Rightarrow p_{ref} = \rho_{ref} U_{ref}^2$$

Αδιαστατοποίηση θερμοκρασίας

Με σκοπό η καταστατική εξίσωση των τελείων αερίων να έχει ίδια μορφή στις διαστατές ή τις αδιάστατες ποσότητες, προκύπτει

$$p = \rho R_g T \Rightarrow \check{p} = \left(\frac{\rho_{ref} (R_g)_{ref} T_{ref}}{p_{ref}} \right) \check{\rho} \check{R}_g \check{T} \rightarrow \frac{\rho_{ref} (R_g)_{ref} T_{ref}}{p_{ref}} = 1 \Rightarrow T_{ref} = \frac{U_{ref}^2}{c_v}$$

Αδιαστατοποίηση θερμοχωρητικότητας

Με σκοπό η εξίσωση της ολικής θερμοκρασίας να είναι της ίδιας μορφής είτε με τις αδιάστατες είτε με τις διαστατές ποσότητες, προκύπτει

$$T_t = T + \frac{1}{2c_p} U^2 \Rightarrow U = \sqrt{2c_p (T_t - T)} \Rightarrow \check{U} = \sqrt{\left(\frac{(c_p)_{ref} T_{ref}}{U_{ref}^2} \right) 2\check{c}_p (\check{T}_t - \check{T})} \rightarrow \left(\frac{(c_p)_{ref} T_{ref}}{U_{ref}^2} \right) = 1 \Rightarrow (c_p)_{ref} = \frac{U_{ref}^2}{T_{ref}} \Rightarrow (c_p)_{ref} = c_v$$

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v} \Rightarrow \gamma = \left(\frac{(c_p)_{ref}}{(c_v)_{ref}} \right) \frac{\check{c}_p}{\check{c}_v} \rightarrow (c_v)_{ref} = c_v$$

Αδιαστατοποίηση εσωτερικής ενέργειας

Με την ίδια με πριν λογική για την εσωτερική ενέργεια έχουμε

$$e = c_v T \Rightarrow \check{e} = \left(\frac{(c_v)_{ref} T_{ref}}{e_{ref}} \right) \check{c}_v \check{T} \rightarrow e_{ref} = U_{ref}^2$$

Αδιαστατοποίηση ενθαλπίας

$$h = c_p T \Rightarrow \check{h} = \left(\frac{(c_p)_{ref} T_{ref}}{h_{ref}} \right) \check{c}_p \check{T} \rightarrow h_{ref} = U_{ref}^2$$

Αδιαστατοποίηση ολικής ενέργειας

2. Παρουσίαση των εξισώσεων Euler και διακριτοποίηση αυτών

$$E = \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{1}{2}\rho U^2 \Rightarrow \check{E} = \frac{1}{E_{ref}} \left[(p_{ref}) \frac{\check{p}}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} (\rho_{ref} U_{ref}^2) \check{\rho} \check{U}^2 \right] \Rightarrow \check{E} = \frac{\rho_{ref} U_{ref}^2}{E_{ref}} \left(\frac{\check{p}}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} \check{\rho} \check{U}^2 \right) \rightarrow$$

$$E_{ref} = \rho_{ref} U_{ref}^2$$

Τελικά η αδιαστατοποίηση των υπολοίπων θερμοδυναμικών μεγεθών (δηλαδή πλην αυτών που φαίνονται στις σχέσεις (2.13)) γίνεται όπως παρακάτω

$$\check{p} = \frac{p}{\rho_{ref} U_{ref}^2}, \quad \check{T} = \frac{T}{U_{ref}^2 / c_v}, \quad \check{e} = \frac{e}{U_{ref}^2}, \quad \check{h} = \frac{h}{U_{ref}^2}, \quad \check{E} = \frac{E}{\rho_{ref} U_{ref}^2} \quad (2.16)$$

Όπως επίσης

$$\check{c}_p = \gamma, \quad \check{c}_v = 1 \quad (2.17)$$

Διατύπωση αδιάστατων εξισώσεων

• Εξίσωση συνέχειας

Η εξίσωση της συνέχειας αποτελεί την πρώτη γραμμή των εξισώσεων (2.1). Για χάρη συντομίας η εξίσωση συνέχειας, αλλά και οι εξισώσεις ορμής και ενέργειας που η εξαγωγή των αντίστοιχων αδιάστατων ακολουθεί, δεν θα γραφούν στη συνήθη μορφή τους, αλλά θα γίνει χρήση των διανυσμάτων \vec{W} , \vec{F} , \vec{G} , όπως αυτά ορίστηκαν από τις (2.2), (2.4), κάνοντας παράλληλα πιο εύκολη την σύγκριση μεταξύ των διαστατών και αδιάστατων εξισώσεων.

Εξίσωση συνέχειας

$$\frac{\partial W_1}{\partial t} + \frac{\partial F_1^{inv}}{\partial x} + \frac{\partial G_1^{inv}}{\partial y} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{(W_1)_{ref}}{t_{ref}} \frac{\partial \check{W}_1}{\partial \check{t}} + \frac{(F_1^{inv})_{ref}}{L_{ref}} \frac{\partial \check{F}_1^{inv}}{\partial \check{x}} + \frac{(G_1^{inv})_{ref}}{L_{ref}} \frac{\partial \check{G}_1^{inv}}{\partial \check{y}} = 0$$

Όμως

$$W_1 = \rho \rightarrow (W_1)_{ref} = \rho_{ref}$$

$$F_1^{inv} = \rho u \rightarrow (F_1^{inv})_{ref} = \rho_{ref} U_{ref}$$

2.1. Οι εξισώσεις Euler

$$G_1^{inv} = \rho v \longrightarrow (G_1^{inv})_{ref} = \rho_{ref} U_{ref}$$

Επομένως

$$\left(\frac{L_{ref}}{U_{ref} t_{ref}} \right) \frac{\partial \check{W}_1}{\partial \check{t}} + \frac{\partial \check{F}_1^{inv}}{\partial \check{x}} + \frac{\partial \check{G}_1^{inv}}{\partial \check{y}} = 0$$

Θέτοντας λοιπόν ίση με τη μονάδα τη ποσότητα που βρίσκεται μπροστά από τον χρονικό όρο της ανωτέρω εξίσωσης προκύπτει και το χρονικό μέγεθος αναφοράς t_{ref} , ενώ παράλληλα παρατηρούμε ότι η αδιάστατη από την διαστατή εξίσωση δεν διαφέρει σε τίποτα.

$$t_{ref} = \frac{L_{ref}}{U_{ref}}, \quad \check{t} = \frac{t}{L_{ref}/U_{ref}} \quad (2.18)$$

• Εξισώσεις ορμής

Οι εξισώσεις διατήρησης της ορμής είναι η δεύτερη και η τρίτη γραμμή των εξισώσεων (2.1), με εκείνη της δεύτερης γραμμής να αντιστοιχεί στην κατά x συνιστώσα της ορμής, ενώ της τρίτης στην κατά y συνιστώσα. Θα ακολουθήσει η εξαγωγή μόνο της αδιάστατης κατά x διατήρησης της ορμής αφού αυτή κατά y προκύπτει με όμοιο εντελώς τρόπο.

Εξίσωση ορμής κατά x

$$\begin{aligned} \frac{\partial W_2}{\partial t} + \frac{\partial F_2^{inv}}{\partial x} + \frac{\partial G_2^{inv}}{\partial y} &= 0 \Rightarrow \\ \frac{(W_2)_{ref}}{t_{ref}} \frac{\partial \check{W}_2}{\partial \check{t}} + \frac{(F_2^{inv})_{ref}}{L_{ref}} \frac{\partial \check{F}_2^{inv}}{\partial \check{x}} + \frac{(G_2^{inv})_{ref}}{L_{ref}} \frac{\partial \check{G}_2^{inv}}{\partial \check{y}} &= 0 \end{aligned}$$

Όμως

$$\begin{aligned} W_2 &= \rho u \longrightarrow (W_2)_{ref} = \rho_{ref} U_{ref} \\ F_2^{inv} &= \rho u^2 + p \longrightarrow (F_2^{inv})_{ref} = \rho_{ref} U_{ref}^2 \\ G_2^{inv} &= \rho uv \longrightarrow (G_2^{inv})_{ref} = \rho_{ref} U_{ref}^2 \end{aligned}$$

Οπότε η αδιάστατη εξίσωση ορμής κατά x παίρνει τη μορφή:

$$\frac{\partial \check{W}_2}{\partial \check{t}} + \frac{\partial \check{F}_2^{inv}}{\partial \check{x}} + \frac{\partial \check{G}_2^{inv}}{\partial \check{y}} = 0$$

όπου το $\rho_{ref} U_{ref}^2 / L_{ref}$, απλοποιείται αφού υπάρχει και στους τρεις όρους του αθροίσματος .

• Εξίσωση ενέργειας

$$\frac{\partial W_4}{\partial t} + \frac{\partial F_4^{inv}}{\partial x} + \frac{\partial G_4^{inv}}{\partial y} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{(W_4)_{ref}}{t_{ref}} \frac{\partial \check{W}_4}{\partial \check{t}} + \frac{(F_4^{inv})_{ref}}{L_{ref}} \frac{\partial \check{F}_4^{inv}}{\partial \check{x}} + \frac{(G_4^{inv})_{ref}}{L_{ref}} \frac{\partial \check{G}_4^{inv}}{\partial \check{y}} = 0$$

Όμως

$$W_4 = E \quad \longrightarrow (W_4)_{ref} = \rho_{ref} U_{ref}^2$$

$$F_4^{inv} = (E + p)u \quad \longrightarrow (F_4^{inv})_{ref} = \rho_{ref} U_{ref}^3$$

$$G_4^{inv} = (E + p)v \quad \longrightarrow (G_4^{inv})_{ref} = \rho_{ref} U_{ref}^3$$

Αντικαθιστώντας λοιπόν τα μεγέθη αναφοράς στην αδιάστατη εξίσωση ενέργειας και έπειτα από τις αναγκαίες πράξεις καταλήγουμε στην τελική μορφή της αδιάστατης εξίσωσης διατήρησης ενέργειας (2.19), που όπως βλέπουμε είναι η ίδια με την αντίστοιχη διαστατή εξίσωση.

$$\frac{\partial \check{W}_4}{\partial \check{t}} + \frac{\partial \check{F}_4^{inv}}{\partial \check{x}} + \frac{\partial \check{G}_4^{inv}}{\partial \check{y}} = 0 \quad (2.19)$$

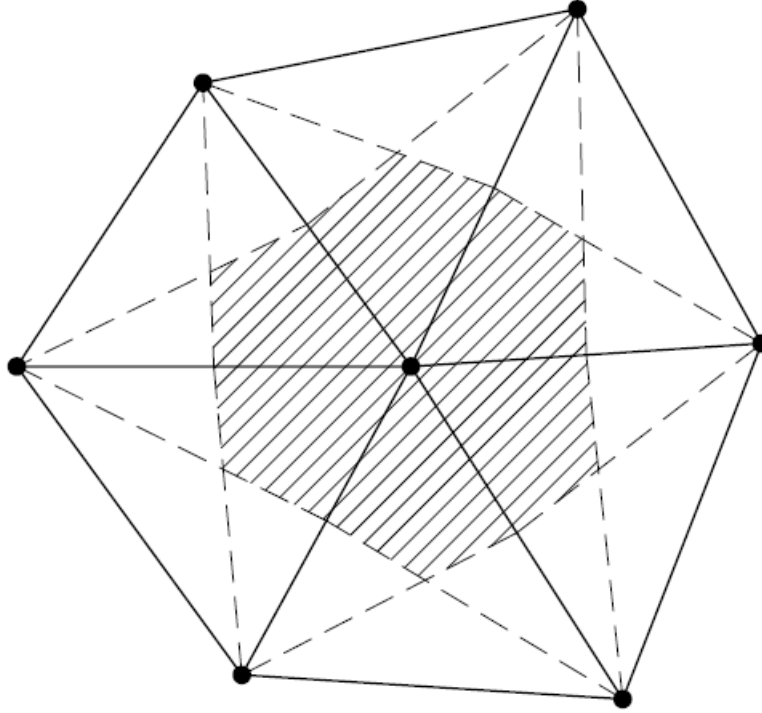
2.2 Διακριτοποίηση του χωρίου ροής

Στην παρούσα εργασία χρησιμοποιήθηκε κώδικας επίλυσης της ροής που έχει αναπτυχθεί από το Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών του ΕΜΠ. Αυτός χρησιμοποιεί **μη δομημένο πλέγμα**, αποτελούμενο από τριγωνικά στοιχεία. Οι εξισώσεις της ροής, προκειμένου να επιλυθούν αριθμητικά, ολοκληρώνονται στο χώρο, εφαρμόζοντας έτσι μία μέθοδο πεπερασμένων όγκων. Πιο συγκεκριμένα διακρίνουμε το χωρίο ροής σε υποπεριοχές (**κυψέλες ελέγχου**) όπου ολοκληρώνονται οι εξισώσεις ροής. Οι κυψέλες ελέγχου δεν πρέπει να επικαλύπτονται. Με αυτόν τον τρόπο καταλήγουμε σε σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων με αγνώστους τα μεγέθη της ροής στους κόμβους του πλέγματος (**κεντροκομβική διατύπωση-vertex centered formulation**). Η αποθήκευση των αποτελεσμάτων γίνεται σε κάθε κόμβο, με άλλα λόγια για δεδομένη χρονική στιγμή αποθηκεύουμε για κάθε κόμβο την τετράδα των αγνώστων της ροής (2-διάστατο).

2.2.1 Σχεδίαση των κυψελών ελέγχου

Για την σχεδίαση μίας κυψέλης ελέγχου γύρω από έναν κόμβο αρκεί η απομόνωση των μέσων των ευθύγραμμων τμημάτων στα οποία ανήκει ο εκάστοτε κόμβος ('κεντρικός' κόμβος, έστω P γύρω από τον οποίο σχηματίζεται η κυψέλη) και η ένωση των σημείων αυτών με το βαρύκεντρο

του τριγώνου (ή τα βαρύκεντρα των τριγώνων) στο οποίο ανήκει η κάθε ακμή. Όλα αυτά φαινόνται στο σχήμα 2.1.



Σχήμα 2.1: Κυψέλη ελέγχου.

2.3 Διακριτοποίηση των εξισώσεων ροής

2.3.1 Εφαρμογή της μεθόδου των πεπερασμένων όγκων

Επαναλαμβάνουμε τις εξισώσεις *Euler* γραμμένες σε διανυσματική γραφή:

$$\frac{\partial \vec{W}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{F}^{inv}}{\partial x} + \frac{\partial \vec{G}^{inv}}{\partial y} = 0 \quad (2.20)$$

Η παραπάνω γραφή συμπύσσεται εύκολα αν θεωρήσουμε σαν συνισταμένο διάνυσμα ροής :

$$\underline{\vec{F}}^{inv} = (\vec{F}^{inv}, \vec{G}^{inv}) \quad (2.21)$$

Οπότε

$$\frac{\partial \vec{W}}{\partial t} + \nabla \cdot \underline{\vec{F}}^{inv} = 0 \quad (2.22)$$

2. Παρουσίαση των εξισώσεων Euler και διακριτοποίηση αυτών

Ολοκληρώνοντας την 2.22 στη κυψέλη ελέγχου ενός τυχαίου εσωτερικού κόμβου P του χωρίου ροής, προκύπτει:

$$\int_{\text{cell}} \left[\frac{\partial \vec{W}}{\partial t} + \nabla \cdot \underline{\vec{F}}^{inv} \right] dx dy = 0$$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα *Green – Gauss* και θεωρώντας ότι $\int_{\text{cell}} \frac{\partial \vec{W}}{\partial t} dx dy = \left(\frac{\partial \vec{W}}{\partial t} \right)_P A_{\text{cell}}$, όπου A_{cell} το εμβαδόν της κυψέλης, έχουμε:

$$\left(\frac{\partial \vec{W}}{\partial t} \right)_P A_{\text{cell}} + \int_{\partial C_P} (\underline{\vec{F}}^{inv}) \cdot \vec{n} d\gamma = 0$$

με \vec{n} το κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα στη περίμετρο της κυψέλης (∂C_P) με φορά προς το εξωτερικό αυτής, ενώ $d\gamma$ το στοιχειώδες μήκος της περιμέτρου. Θέτοντας :

$$\vec{H} = \underline{\vec{F}}^{inv} \cdot \vec{n} = \vec{F} \hat{n}_x + \vec{G} \hat{n}_y \quad (2.23)$$

Ακόμα θέτουμε

$$\vec{H} = \underline{\vec{F}}^{inv} \cdot \vec{n} = \vec{F} n_x + \vec{G} n_y \quad (2.24)$$

η ανωτέρω έκφραση παίρνει τη μορφή:

$$\left(\frac{\partial \vec{W}}{\partial t} \right)_P A_{\text{cell}} + \int_{C_P} (\vec{H}^{inv}) d\gamma = 0$$

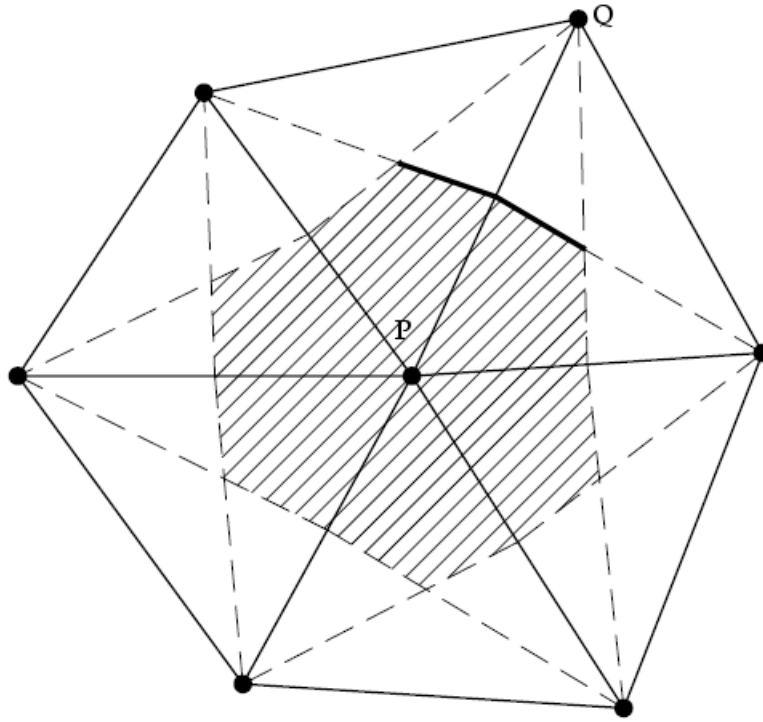
ή

$$\left(\frac{\partial \vec{W}}{\partial t} \right)_P A_{\text{cell}} + \sum_{Q \in \text{neigh}(P)} \vec{\Phi}_{PQ}^{inv} = 0 \quad (2.25)$$

όπου Q οι γειτονικοί κόμβοι του P , και τα $\vec{\Phi}_{PQ}^{inv}$ να ορίζονται ως ακολούθως

$$\vec{\Phi}_{PQ}^{inv} = \int_{\partial C_{PQ}} \vec{H}^{inv} d\gamma \quad (2.26)$$

Το μήκος ολοκλήρωσης για τον προσδιορισμό του μη-συνεκτικού διανύσματος ροής ($\vec{\Phi}_{PQ}^{inv}$) ∂C_{PQ} πρόκειται για το κοινό όριο των κυψελών ελέγχου του κόμβου P και του εκάστοτε γειτονικού Q , όπως αυτό φαίνεται με έντονη γραμμή στο σχήμα 2.2.



Σχήμα 2.2: Κυψέλη ελέγχου με κέντρο τον κόμβο P . Με Q συμβολίζονται γενικά οι γειτονικοί κόμβοι

2.3.2 Υπολογισμός διανύσματος μη συνεκτικής ροής

Το διάνυσμα μη-συνεκτικής ροής υπολογίζεται σε κάθε ακμή και έπειτα αφαιρείται ή προστίθεται ανάλογα, στον ισολογισμό της κυψέλης στην οποία αναφέρεται. Ο υπολογισμός του γίνεται σύμφωνα με τις τιμές των συντηρητικών μεταβλητών εκατέρωθεν του μέσου της ακμής PQ , οι οποίες υπολογίζονται συναρτήσει των αντίστοιχων τιμών στους κόμβους P και Q . Επίσης συνυπολογίζεται το κάθετο διάνυσμα \vec{n}_{PQ} που είναι το διανυσματικό άθροισμα των \vec{n}_1, \vec{n}_2 , με \vec{n}_1 και \vec{n}_2 τα κάθετα διανύσματα στα 2 εκατέρωθεν της ακμής PQ τμήματα που αποτελούν και τα κοινά όρια των δύο κυψελών με κέντρα το P και το Q , με μέτρο ίσο με αυτό των αντίστοιχων ευθυγράμμων τμημάτων (βλέπε έντονα σχεδιασμένα τμήματα του σχήματος 2.2). Δηλαδή:

$$\vec{n}_{PQ} = \vec{n}_1 + \vec{n}_2 \quad (2.27)$$

$$\vec{\Phi}_{PQ}^{inv} = \vec{f} \left(\vec{W}_{PQ}^L, \vec{W}_{PQ}^R, \vec{n}_{PQ} \right) \quad (2.28)$$

2. Παρουσίαση των εξισώσεων Euler και διακριτοποίηση αυτών

Να παρατηρηθεί ότι το \vec{H} της σχέσης (2.24) αν αυτή γραφτεί για $\vec{n} = \vec{n}_{PQ}$, θα έδινε μία προσέγγιση του ολοκληρώματος της σχέσης (2.26) που δίνει το Φ_{PQ} . Το πρόβλημα είναι όμως με ποιές τιμές του πεδίου ροής θα σχηματιστεί το \vec{H} . Γι' αυτό και γίνεται η παρακάτω ανάλυση έτσι ώστε να προκύψει τελικά (σύμφωνα με τις ιδιοτιμές και το φυσικό τους νόημα όπως θα δούμε παρακάτω) μία έκφραση για το Φ_{PQ} που να περιέχει τα \vec{H} σχηματισμένα με βάση τα \vec{W} της αντίστοιχης ακμής PQ λίγο 'πριν (ή προς το P)' (\vec{W}_{PQ}^L) και λίγο 'μετά (ή προς το Q)' (\vec{W}_{PQ}^R).

Πριν προχωρήσουμε στην έκφραση υπολογισμού του εν λόγω διανύσματος ροής χρειάζεται να ορίσουμε το ιακωβιανό μητρώο του διανύσματος \vec{F}^{inv} ως προς τις συντηρητικές μεταβλητές \vec{W} .

$$A_x \hat{=} \frac{\partial \vec{F}^{inv}}{\partial \vec{W}}, \quad A_y \hat{=} \frac{\partial \vec{G}^{inv}}{\partial \vec{W}} \quad (2.29)$$

Ορίζουμε επίσης

$$\begin{aligned} \underline{A} \hat{=} \frac{\partial \vec{H}^{inv}}{\partial \vec{W}} &\Rightarrow \underline{A} = \frac{\partial (\vec{F}^{inv} \cdot \vec{n})}{\partial \vec{W}} = \frac{\partial \vec{F}^{inv}}{\partial \vec{W}} \cdot \vec{n} = \frac{\partial \vec{F}^{inv}}{\partial \vec{W}} n_x + \frac{\partial \vec{G}^{inv}}{\partial \vec{W}} n_y \\ &\Rightarrow \underline{A} = A_x n_x + A_y n_y = A \cdot \vec{n}, \quad \text{με } A \hat{=} (A_x, A_y) \end{aligned} \quad (2.30)$$

Ιακωβιανό μητρώο \underline{A}

Στην ανάλυση που θα ακολουθήσει χάρην ευκολίας θα αγνοηθούν οι εκθέτες inv που υποδηλώνουν ότι το μέγεθος που τους φέρει αναφέρεται στη μη συνεκτική συνιστώσα της ροής, αφού έτσι και αλλιώς όλοι οι όροι είναι μη συνεκτικοί στις εξισώσεις *Euler* που μελετώνται. Επαναλαμβάνουμε τις συνιστώσες των διανυσμάτων ροής \vec{F} και \vec{G}

$$\vec{F} = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ (E + p)u \end{bmatrix}, \quad \vec{G} = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ (E + p)v \end{bmatrix}$$

Επομένως

$$\vec{H} = \vec{F} \cdot \vec{n} = \begin{bmatrix} \rho (\vec{u} \cdot \vec{n}) \\ \rho u (\vec{u} \cdot \vec{n}) + p n_x \\ \rho v (\vec{u} \cdot \vec{n}) + p n_y \\ (E + p) (\vec{u} \cdot \vec{n}) \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

Παραγωγίζοντας τώρα το \vec{H} ως προς τις συντηρητικές μεταβλητές της ροής $\vec{W} = [\rho \quad \rho u \quad \rho v \quad E]^T$ καταλήγουμε για το μητρώο \underline{A} στην παρακάτω σχέση

$$\begin{aligned} \underline{A}(:, 1) &= \begin{bmatrix} 0 \\ -u(\vec{u} \cdot \vec{n}) + \frac{\gamma-1}{2}(u^2 + v^2)n_x \\ -v(\vec{u} \cdot \vec{n}) + \frac{\gamma-1}{2}(u^2 + v^2)n_y \\ \left[-\gamma \frac{E}{\rho} + (\gamma-1)(u^2 + v^2) \right] (\vec{u} \cdot \vec{n}) \end{bmatrix} \\ \underline{A}(:, 2) &= \begin{bmatrix} n_x \\ \vec{u} \cdot \vec{n} + (2-\gamma)un_x \\ vn_x - (\gamma-1)un_y \\ \left[\frac{\gamma E}{\rho} - \frac{\gamma-1}{2}(u^2 + v^2) \right] n_x - (\gamma-1)u(\vec{u} \cdot \vec{n}) \end{bmatrix} \\ \underline{A}(:, 3) &= \begin{bmatrix} n_y \\ un_y - (\gamma-1)vn_x \\ \vec{u} \cdot \vec{n} + (2-\gamma)vn_y \\ \left[\frac{\gamma E}{\rho} - \frac{\gamma-1}{2}(u^2 + v^2) \right] n_y - (\gamma-1)v(\vec{u} \cdot \vec{n}) \end{bmatrix} \\ \underline{A}(:, 4) &= \begin{bmatrix} 0 \\ (\gamma-1)n_x \\ (\gamma-1)n_y \\ \gamma(\vec{u} \cdot \vec{n}) \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{2.32}$$

Αφού έχουν γίνει οι απαραίτητες πράξεις προκειμένου να καταλήξουμε στην παραπάνω εξίσωση είναι εύκολο να δούμε ότι τυχαίνει να ισχύει (μπορεί εύκολα να γίνει επαλήθευση της παρακάτω εξίσωσης)

$$\vec{H}^{inv} = \underline{A} \vec{W} \tag{2.33}$$

Αυτό σημαίνει ότι το \vec{H}^{inv} είναι ομογενής συνάρτηση πρώτου βαθμού του \vec{W} και βασικά οφείλεται στο γεγονός ότι αυτό ισχύει και για τα δύο διανύσματα ροής \vec{F}^{inv} , \vec{G}^{inv} , δηλαδή είναι

$$\vec{F}^{inv} = A_x \vec{W}, \quad \vec{G}^{inv} = A_y \vec{W} \tag{2.34}$$

2. Παρουσίαση των εξισώσεων Euler και διακριτοποίηση αυτών

Οι ιδιοτιμές του μητρώου \underline{A} δίνονται παρακάτω

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \vec{u} \cdot \vec{n} \\ \lambda_2 &= \vec{u} \cdot \vec{n} \\ \lambda_3 &= \left(\vec{u} \cdot \vec{n} + c \right) |\vec{n}| \\ \lambda_4 &= \left(\vec{u} \cdot \vec{n} - c \right) |\vec{n}|\end{aligned}$$

Όμοια παρατίθενται παρακάτω τα αριστερά και δεξιά ιδιοδιανύσματα του μητρώου \underline{A} . Τα δεξιά ιδιοδιανύσματα πρέπει να ικανοποιούν τη σχέση $(A - \lambda_k I) r_k = 0$, σε αντίθεση με τα αριστερά που πρέπει: $l_k (A - \lambda_k I) = 0$. Στις σχέσεις που προηγήθηκαν με I συμβολίζεται ο μοναδιαίος πίνακας.

$$\begin{aligned}r_1 &= \left[1 \quad u \quad v \quad \frac{1}{2}(u^2 + v^2) \right]^T \\ r_2 &= \left[0 \quad \hat{n}_y \quad -\hat{n}_x \quad \hat{n}_y u - \hat{n}_x v \right]^T \\ r_3 &= \left[\frac{1}{c} \quad \frac{u}{c} + \hat{n}_x \quad \frac{v}{c} + \hat{n}_y \quad \frac{1}{2c}(u^2 + v^2) + \frac{c}{\gamma - 1} + \vec{u} \cdot \vec{n} \right]^T \\ r_4 &= \left[\frac{1}{c} \quad \frac{u}{c} - \hat{n}_x \quad \frac{v}{c} - \hat{n}_y \quad \frac{1}{2c}(u^2 + v^2) + \frac{c}{\gamma - 1} - \vec{u} \cdot \vec{n} \right]^T \\ l_1 &= \left[1 - \frac{(\gamma - 1)(u^2 + v^2)}{2c^2} \quad \frac{(\gamma - 1)u}{c^2} \quad \frac{(\gamma - 1)v}{c^2} \quad -\frac{(\gamma - 1)}{c^2} \right] \\ l_2 &= \left[\hat{n}_x v - \hat{n}_y u \quad \hat{n}_y \quad -\hat{n}_x \quad 0 \right] \\ l_3 &= \left[-\frac{\vec{u} \cdot \vec{n}}{2} + \frac{(\gamma - 1)(u^2 + v^2)}{4c} \quad \frac{\hat{n}_x}{2} - \frac{(\gamma - 1)u}{2c} \quad \frac{\hat{n}_y}{2} - \frac{(\gamma - 1)v}{2c} \quad \frac{\gamma - 1}{2c} \right] \\ l_4 &= \left[\frac{\vec{u} \cdot \vec{n}}{2} + \frac{(\gamma - 1)(u^2 + v^2)}{4c} \quad -\frac{\hat{n}_x}{2} - \frac{(\gamma - 1)u}{2c} \quad -\frac{\hat{n}_y}{2} - \frac{(\gamma - 1)v}{2c} \quad \frac{\gamma - 1}{2c} \right]\end{aligned}$$

Εύκολα λοιπόν, γνωρίζοντας τα παραπάνω μπορούμε να γράψουμε το μητρώο \underline{A} στην ακόλουθη μορφή

$$\underline{A} = P \Lambda P^{-1} \tag{2.35}$$

με Λ διαγώνιο πίνακα με στοιχεία τις ιδιοτιμές του \underline{A} και

$$P = \begin{bmatrix} r_1 & r_2 & r_3 & r_4 \end{bmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \\ l_4 \end{bmatrix}$$

Ορίζουμε επίσης τα μητρώα:

$$\underline{A}^+ = P\Lambda^+P^{-1} \quad , \quad \underline{A}^- = P\Lambda^-P^{-1} \quad (2.36)$$

$$|\underline{A}| = \underline{A}^+ - \underline{A}^- \quad (2.37)$$

όπου το μητρώο Λ^+ περιέχει τις θετικές ιδιοτιμές, ενώ το Λ^- τις αρνητικές.

Τώρα, για τον υπολογισμό του διανύσματος ροής έχουμε δύο εναλλακτικές, το σχήμα *Roe* και το σχήμα *fvs* (flux vector splitting).

Σχήμα Roe

Σύμφωνα με το σχήμα *Roe* έχουμε για το διάνυσμα μη συνεκτικής ροής

$$\vec{\Phi}_{PQ}^{inv} = \frac{1}{2} \left[\vec{H}(\vec{W}_{PQ}^R, \vec{n}_{PQ}) + \vec{H}(\vec{W}_{PQ}^L, \vec{n}_{PQ}) \right] - \frac{1}{2} |\tilde{\underline{A}}_{PQ}| (\vec{W}_{PQ}^R - \vec{W}_{PQ}^L) \quad (2.38)$$

όπου τα $\vec{W}_{PQ}^L, \vec{W}_{PQ}^R$ εξαρτώνται από την τάξη χωρικής διακριτοποίησης που θα επιλεγθεί (θα εξηγηθεί παρακάτω αυτό) και ουσιαστικά είναι οι μεταβλητές ροής εκατέρωθεν του κοινού ορίου των κυψελίδων του P και του Q . Όπου $|\tilde{\underline{A}}_{PQ}|$ είναι το μητρώο που προκύπτει από τις απόλυτες τιμές των ιδιοτιμών του \underline{A} (σχέση 2.37) υπολογισμένο όμως με βάσει τις κατά *Roe* μέσες τιμές των πρωτευουσών μεταβλητών. Αυτές δίνονται παρακάτω:

$$\vec{U}_{PQ} = [\tilde{\rho} \quad \tilde{u} \quad \tilde{v} \quad \tilde{p}]^T \quad (2.39)$$

Οι τρεις πρώτες συνιστώσες υπολογίζονται άμεσα από την ακόλουθη σχέση. Αντίθετα για τον υπολογισμό της μέσης τιμής της πίεσης υπολογίζεται πρώτα η μέση τιμή κατά *Roe* της ολικής ενθαλπίας σύμφωνα με την ακόλουθη σχέση και έπειτα προκύπτει η μέση τιμή της πίεσης (σχέση 2.41).

$$\vec{U}_{PQ} = \frac{\sqrt{\rho_L} \vec{U}_L + \sqrt{\rho_R} \vec{U}_R}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}} \quad (2.40)$$

$$h_t = \frac{\gamma P}{(\gamma - 1)\rho} + \frac{1}{2}(u^2 + v^2) \quad (2.41)$$

Σχήμα fvs (flux vector splitting)

Το σχήμα αυτό εκμεταλλεύεται το φυσικό νόημα των ιδιοτιμών που δείχνουν τη φορά με την οποία μεταφέρεται η πληροφορία. Ουσιαστικά το ίδιο σχήμα χρησιμοποιείται και στους οριακούς κόμβους εισόδου-εξόδου όπως θα δούμε παρακάτω. Σύμφωνα με αυτό το σχήμα, είναι για το \vec{H}

$$\vec{H} = \underline{A}^+ \vec{W}^L + \underline{A}^- \vec{W}^R \quad (2.42)$$

όπου το A^+ περιέχει τις θετικές ιδιοτιμές ενώ το A^- τις αρνητικές. Ακόμη τα \vec{W}^L, \vec{W}^R εξαρτώνται από την τάξη της χωρικής διακριτοποίησης.

2.3.3 Αύξηση της ακρίβειας του σχήματος

Στην ανάλυση που προηγήθηκε για τον προσδιορισμό του διανύσματος συνεκτικής ροής έγινε χρήση των τιμών των συντηρητικών μεταβλητών εκατέρωθεν του μέσου της ακμής PQ , χωρίς όμως να προσδιοριστούν οι τιμές αυτές, δηλαδή οι θέσεις από όπου θα ‘διαβαστούν’ οι τιμές των επιθυμητών μεταβλητών. Η επιλογή αυτή σχετίζεται με την ακρίβεια που θέλουμε να δώσουμε στην χωρική διακριτοποίηση των εξισώσεων της ροής. Μπορούμε δηλαδή να θεωρήσουμε $\vec{W}_L = \vec{W}_P$ και $\vec{W}_R = \vec{W}_Q$, να επιλέξουμε με άλλα λόγια χωρική διακριτοποίηση πρώτης τάξης. Αντίθετα εφαρμόζοντας το θεώρημα του *Taylor* στις πρωτεύουσες μεταβλητές και έπειτα υπολογίζοντας τις τιμές των \vec{W}_L, \vec{W}_R μπορούμε να αυξήσουμε τη τάξη της χωρικής διακριτοποίησης. Παρακάτω φαίνεται η σχέση του *Taylor* με αποκομμένους τους όρους δεύτερης τάξης και πάνω:

$$\begin{aligned}\vec{U}_{PQ}^L &= \vec{U}_P + \frac{1}{2}\vec{PQ} \cdot (\nabla \vec{U})_P \\ \vec{U}_{PQ}^R &= \vec{U}_Q - \frac{1}{2}\vec{PQ} \cdot (\nabla \vec{U})_Q\end{aligned}\tag{2.43}$$

Από τις τιμές των μη-συντηρητικών μεταβλητών μπορούμε έπειτα να υπολογίσουμε τις τιμές των συντηρητικών. Με τον τρόπο αυτό αυξάνεται η ακρίβεια του σχήματος χωρικής διακριτοποίησης σε δεύτερης τάξης. Απαιτείται όμως παράλληλα ο υπολογισμός των κλίσεων των πρωτευουσών μεταβλητών στους κόμβους του πλέγματος. Παρά το μειονέκτημα αυτό όμως, τα προτερήματα από την αύξηση της ακρίβειας διακριτοποίησης καθιστούν τέτοιου είδους εφαρμογές πλέον διαδεδομένες.

2.4 Επιβολή οριακών συνθηκών

Στην ανάλυση που προηγήθηκε είχαμε θεωρήσει τυχαίο κόμβο P στο εσωτερικό του χωρίου ροής. Όταν όμως ο εν λόγω κόμβος βρίσκεται στο όριο του χωρίου του ροής πρέπει να ληφθούν κάποιιοι παράμετροι επιπλέον, ή πιο συγκεκριμένα πρέπει να υπολογιστεί το διάνυσμα ροής που εξέρχεται από την κυψέλη του κόμβου προς τον εξωτερικό περιβάλλον. Με βάση λοιπόν τα παραπάνω η ολοκλήρωση των εξισώσεων *Euler* σε κυψέλη οριακού κόμβου δίνει το ακόλουθο αποτέλεσμα (σε σχέση με την έκφραση 2.25)

$$\frac{\partial \vec{W}}{\partial t} A_{cell} + \sum_{Q \in K(P)} \vec{\Phi}_{PQ}^{inv} + \vec{\Phi}_{\partial C}^{inv} = 0\tag{2.44}$$

όπου ∂C είναι το όριο του χωρίου ροής.

Στη συνέχεια θα αναφερθούμε στον υπολογισμό του μη-συνεκτικού διανύσματος ροής όταν ο οριακός κόμβος P αποτελεί κόμβο τοιχώματος, εισόδου ή εξόδου (υπενθυμίζεται ότι σε αυτή τη διπλωματική θα ασχοληθούμε με μία μεμονωμένη αεροτομή).

2.4.1 Στερεά τοιχώματα

Στο σχήμα 2.3 βλέπουμε την κυψέλη ελέγχου ενός κόμβου που βρίσκεται πάνω στο τοίχωμα. Στις περιπτώσεις αυτές το μη-συνεκτικό διάνυσμα ροής ($\vec{\Phi}_{wall}^{inv}$) υπολογίζεται ως μία συνάρτηση των \vec{P} , \vec{n}_P , δηλαδή

$$\vec{\Phi}_{wall}^{inv} = f(\vec{W}_P, \vec{n}_P) \quad (2.45)$$

με $\vec{n}_P = \vec{n}_{P,1} + \vec{n}_{P,2}$ (βλέπε σχήμα 2.3)

Τα διανύσματα $\vec{n}_{P,1}$ και $\vec{n}_{P,2}$ είναι κάθετα στο όριο της κυψέλης ελέγχου που ανήκει στο 'τοιχώμα' με κέντρο το P και έχουν ως μέτρο το μέτρο του αντίστοιχου ευθυγράμμου τμήματος που αντιπροσωπεύουν.

Προκειμένου να βρεθεί το διάνυσμα μη-συνεκτικής ροής ξεκινάμε από τη σχέση (2.26). Αυτή γίνεται ως εξής αν ληφθεί υπ' όψιν και η (2.23)

$$\vec{\Phi}_{wall}^{inv} = \vec{H}_1 \cdot |\vec{n}_{P,1}| + \vec{H}_2 \cdot |\vec{n}_{P,2}| = \underline{F} \cdot n_{P,1} + \underline{F} \cdot n_{P,2} = \underline{F} \cdot \vec{n}_P \quad (2.46)$$

όπου το ολοκλήρωμα της (2.26) στο τοίχωμα αντικαταστάθηκε από την συνάρτηση που ολοκληρώνεται επί το αντίστοιχο μήκος το οποίο ισούται όπως έχει αναφερθεί με τα μέτρα των $n_{P,1}$, $n_{P,2}$. Έτσι, αν θεωρηθεί ότι $\vec{n}_P = (n_x, n_y)$ και αυτό συνδυαστεί με τον ορισμό των F , G καταλήγουμε

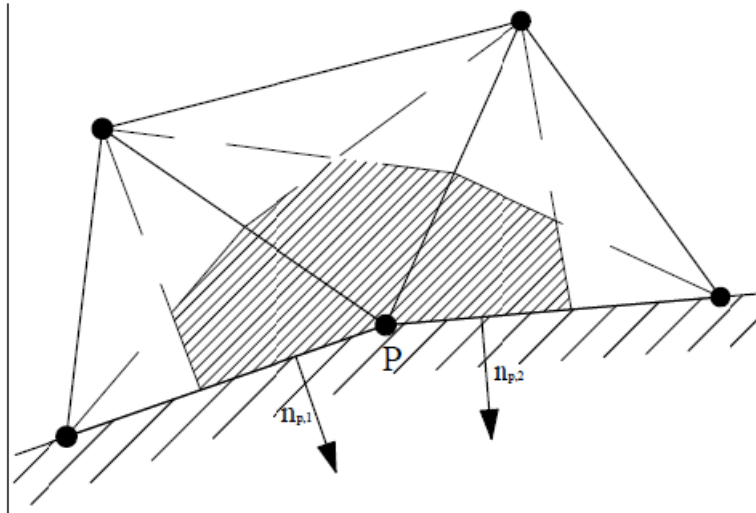
$$\vec{\Phi}_{wall}^{inv} = \begin{bmatrix} \rho(\vec{u} \cdot \vec{n}) \\ \rho u(\vec{u} \cdot \vec{n}) + p n_x \\ \rho v(\vec{u} \cdot \vec{n}) + p n_y \\ (E + p)(\vec{u} \cdot \vec{n}) \end{bmatrix}_P$$

Για τους κόμβους του τοιχώματος όμως ισχύουν οι συνθήκες μη-εισχώρησης στις εξισώσεις *Euler* του ατρισούς ρευστού. Πιο συγκεκριμένα η συνθήκη μη-εισχώρησης υπαγορεύει στο ρευστό να κινείται εφαπτομενικά του τοιχώματος, δηλαδή

$$\vec{u} \cdot \vec{n} = 0 \quad (2.47)$$

Τελικά το μη-συνεκτικό διάνυσμα ροής καταλήγει στην παρακάτω μορφή

$$\vec{\Phi}_{wall}^{inv} = \begin{bmatrix} 0 \\ p n_x \\ p n_y \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.48)$$



Σχήμα 2.3: Κυψέλη κόμβου τοιχώματος.

2.4.2 Είσοδος - Έξοδος

Έχει αποδειχθεί ότι το πρόσημο των ιδιοτιμών του μητρώου (\underline{A}) καθορίζει την κατεύθυνση μεταφοράς της ‘πληροφορίας’. Θυμίζουμε ότι οι ιδιοτιμές του \underline{A} ισούνται με:

$$\lambda_1 = \vec{u} \cdot \vec{n}$$

$$\lambda_2 = \vec{u} \cdot \vec{n}$$

$$\lambda_3 = (\vec{u} \cdot \vec{n} + c) |\vec{n}|$$

$$\lambda_4 = (\vec{u} \cdot \vec{n} - c) |\vec{n}|$$

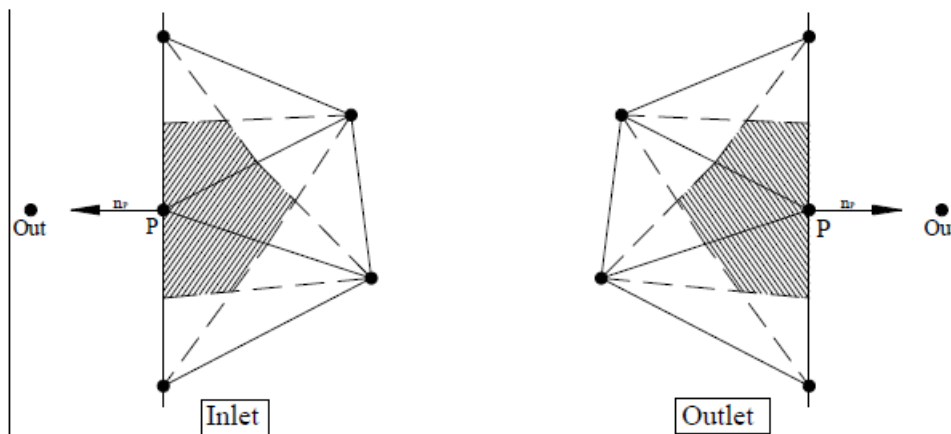
Βλέπουμε ότι οι τρεις πρώτες ιδιοτιμές έχουν θετικό πρόσημο, άρα η αντίστοιχη ‘πληροφορία’ ταξιδεύει στην πορεία της ροής του ρευστού. Το πρόσημο της τέταρτης ιδιοτιμής εξαρτάται από το αν η ροή είναι υποηχητική ή υπερηχητική. Για υποηχητικές ροές η τέταρτη ιδιοτιμή προκύπτει αρνητική, άρα η τέταρτη μεταβλητή των εξισώσεων ροής μεταφέρεται από κατόντι προς ανάντι της ροής. Το αντίθετο ακριβώς συμβαίνει σε υπερηχητικές ροές όπου η τέταρτη συνιστώσα του διανύσματος ροής ‘ταξιδεύει’ μαζί με τη ροή, όπως έτσι και αλλιώς πράττουν και οι υπόλοιπες συνιστώσες. Το συμπέρασμα λοιπόν που απορρέει από την παράγραφο αυτή είναι ότι το κλείσιμο των εξισώσεων ροής απαιτεί τρία γνωστά μεγέθη στη είσοδο του χωρίου ροής και ένα στην έξοδο αυτού όταν η ροή διακρίνεται από υποηχητικές ταχύτητες. Αντίθετα αν η κίνηση του ρευστού συνοδεύεται από υπερηχητικές ταχύτητες χρειάζονται τέσσερα γνωστά μεγέθη στην είσοδο της ροής. Ποια θα είναι τα τέσσερα αυτά μεγέθη σχετίζεται με την εφαρμογή. Πιο συγκεκριμένα σε εφαρμογές απομονωμένης αεροτομής, όπως θα έχουμε σε αυτήν τη διπλωματική, επιλέγονται η πυκνότητα (ρ_∞) και το μέτρο της ταχύτητας ($|\vec{V}_\infty|$)

του ρευστού της επ' άπειρο δέσμης, η γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα της ταχύτητας με τη χορδή της αεροτομής, αλλά και ο αριθμός *Mach* της επ' άπειρον δέσμης. Αντίθετα εφαρμογές με ακροφύσια σαν χωρία ροής συνοδεύονται από τις τιμές της ολικής πίεσης (p_t) και θερμοκρασίας (T_t) στην είσοδο της ροής, τη γωνία που σχηματίζει η ταχύτητα του ρευστού στην είσοδο με την αξονική διεύθυνση και επίσης τη στατική πίεση εξόδου αν η ροή είναι υποηχητική ή εισόδου αν είναι υπερηχητική. Συχνά βέβαια αντί της στατικής πίεσης δίνεται ο αριθμός *Mach* της ροής (ισεντροπικός σε υποηχητικές ροές και εισόδου σε υπερηχητικές ροές) από όπου υπολογίζεται η στατική πίεση στην επιθυμητή θέση.

Το διάνυσμα ροής που εξέρχεται από τις εξεταζόμενες κυψέλες ελέγχου υπολογίζεται σύμφωνα με το ανάντι σχήμα των *Steger, Warming* ακρίβειας πρώτης τάξης.

$$\vec{\Phi}_{I/O}^{inv} = \underline{A}_P^+ \vec{W}_P + \underline{A}_P^- \vec{W}_{out} \quad (2.49)$$

Όπου με 'out' συμβολίζεται ένας υποθετικό κόμβος εξωτερικά του πεδίου ροής όπως φαίνεται και στο σχήμα 2.4. Οι συντηρητικές μεταβλητές στον θεωρητικό αυτόν κόμβο υπολογίζονται σύμφωνα με τα μεγέθη που ειπώθηκαν στην προηγούμενη παράγραφο, ανάλογα την εφαρμογή, και το πρόσημο των ιδιοτιμών του \underline{A} . Με άλλα λόγια με τον τρόπο αυτό επιβάλουμε έμμεσα τις οριακές συνθήκες εισόδου - εξόδου στο προς επίλυση σύστημα.



Σχήμα 2.4: Κυψέλες ελέγχου κόμβων εισόδου-εξόδου.

Υπολογισμός συντηρητικών μεταβλητών θεωρητικού κόμβου (*out*) σε απομονωμένη αεροτομή

Όπως έχει αναφερθεί νωρίτερα σε εφαρμογές απομονωμένης αεροτομής, δηλαδή σε εφαρμογές που η ροή γύρω από την αεροτομή επηρεάζεται μόνο από την παρουσία της ίδιας, τα μεγέθη που συνήθως δίνονται για το κλείσιμο των εξισώσεων ροής είναι η πυκνότητα, το διάνυσμα της ταχύτητας και ο αριθμός *Mach* της επ' άπειρον ροής ($\rho_\infty, |\vec{V}_\infty|, \alpha_\infty, M_\infty$).

2. Παρουσίαση των εξισώσεων Euler και διακριτοποίηση αυτών

Επομένως:

$$\rho_{out} = \rho_{\infty}$$

$$(\rho u)_{out} = \rho_{\infty} |\vec{V}_{\infty}| \cos \alpha_{\infty}$$

$$(\rho v)_{out} = \rho_{\infty} |\vec{V}_{\infty}| \sin \alpha_{\infty}$$

$$\left. \begin{aligned} M_{\infty} &= \frac{|\vec{V}_{\infty}|}{c} = \frac{|\vec{V}_{\infty}|}{\sqrt{\gamma(\gamma-1)T_{\infty}}} \\ \frac{p_{out}}{\rho_{\infty}} &= (\gamma-1)T_{\infty} \end{aligned} \right\} \Rightarrow M_{\infty} = |\vec{V}_{\infty}| \sqrt{\frac{\rho_{\infty}}{p_{out}}} \Rightarrow p_{out} = \rho_{\infty} \left(\frac{|\vec{V}_{\infty}|}{M_{\infty}} \right)^2$$

$$E_{out} = \frac{p_{out}}{\gamma-1} + \frac{1}{2} \rho_{\infty} |\vec{V}_{\infty}|^2$$

Κεφάλαιο 3

Επίλυση στο πεδίο του χρόνου - Η μέθοδος της χρονο-προέλασης

Σε αυτό το κεφάλαιο περιγράφεται εν συντομία η μέθοδος της χρονο-προέλασης (time marching), ως εναλλακτική της οποίας στην παρούσα εργασία εφαρμόζεται η μέθοδος της ισοροπίας των αρμονικών (harmonic balance) ή πιο απλά **HB**, όπως θα αναφέρεται. Αυτό γίνεται για να γίνουν αντιληπτές καλύτερα οι διαφορές των δύο μεθόδων και να γίνουν φανερά τα στοιχεία τα οποία αλλάζουν, καθώς και αυτά που παραμένουν ίδια.

3.1 Γενική περιγραφή

Σύμφωνα με τη μέθοδο της χρονο-προέλασης (time marching) ή πιο απλά **TM**, όπως υποδηλώνεται και από την ονομασία της, γίνεται κατά τη διαδικασία αριθμητικής επίλυσης των εξισώσεων μια 'προέλαση' στο χρόνο, μέσω της οποίας η λύση βρίσκεται διαδοχικά από τη μία χρονική στιγμή στην επόμενη χρησιμοποιώντας τις ήδη γνωστές λύσεις προηγούμενων στιγμών. Αρχικά, γνωρίζουμε τις (συντηρητικές) μεταβλητές ροής \vec{W} σε κάθε κόμβο του πεδίου ροής (έστω την $t_0 = 0$). Στη συνέχεια ο κώδικας υπολογίζει τη λύση στην αμέσως επόμενη στιγμή προσεγγίζοντας την παράγωγο με ένα σχήμα πεπερασμένων διαφορών πίσω διαφόρισης, πρώτης τάξης ακρίβειας (αντλεί πληροφορία μόνο από την προηγούμενη στιγμή). Έπειτα, το σχήμα που εφαρμόζεται είναι **δεύτερης τάξης ακρίβειας** και με αυτό τον τρόπο υπολογίζεται η ροή σε κάποια χρονική στιγμή αντλώντας πληροφορία από τις δύο προηγούμενες. Μεταξύ τώρα δύο διαδοχικών χρονικών στιγμών γίνονται για λόγους σύγκλισης βήματα στον ψευδοχρόνο όπου το τελευταίο ψευδοχρονικό βήμα κρατείται ως η λύση της αντίστοιχης χρονικής στιγμής.

3.2 Διαδικασία επίλυσης

Αρχικά, ξαναγράφουμε την τελική διακριτή μορφή των (ολοκληρωμένων σε έναν πεπερασμένο όγκο) εξισώσεων Euler (διακριτή στο χώρο ακόμη), όπως προέκυψε από προηγούμενο κεφάλαιο.

$$\left(\frac{\partial \vec{W}}{\partial t}\right)_P A_{cell} + \sum_{Q \in \text{neigh}(P)} \vec{\Phi}_{PQ}^{inv} = 0 \quad (3.1)$$

όπου ο δείκτης (inv) θα παραλείπεται στη συνέχεια, αφού αναφερόμαστε έτσι και αλλιώς σε μη-συνεκτικό ρευστό.

Η παραπάνω εξίσωση, αν προστεθεί ο όρος της ψευδοχρονικής παραγώγου γίνεται:

$$\left(\frac{\partial \vec{W}}{\partial t_{ps}}\right)_P A_{cell} + \left(\frac{\partial \vec{W}}{\partial t}\right)_P A_{cell} + \sum_{Q \in \text{neigh}(P)} \vec{\Phi}_{PQ}^{inv} = 0 \quad (3.2)$$

όπου t_{ps} ο ψευδοχρόνος, σε αντιδιαστολή με τον πραγματικό χρόνο t .

Παρακάτω ο δείκτης k θα αναφέρεται στις ψευδοχρονικές στιγμές, ενώ ο δείκτης n στις πραγματικές.

Η παράγωγος ως προς τον πραγματικό χρόνο με πίσω πεπερασμένες διαφορές ακρίβειας δεύτερης τάξης γράφεται:

$$\left(\frac{\partial \vec{W}}{\partial t}\right)^{n+1} = \frac{3\vec{W}^{n+1} - 4\vec{W}^n + \vec{W}^{n-1}}{2\Delta t} + O(\Delta t)^2 \quad (3.3)$$

Η παράγωγος ως προς τον ψευδοχρόνο (για την οποία η ακρίβεια δεν έχει σημασία) με ένα απλό σχήμα ακρίβειας πρώτης τάξης γράφεται:

$$\left(\frac{\partial \vec{W}}{\partial t_{ps}}\right)^{k+1} = \frac{\vec{W}^{k+1} - \vec{W}^k}{\Delta t_{ps}} = \frac{\Delta \vec{W}^{k+1}}{\Delta t_{ps}} \quad (3.4)$$

Επειδή το $\sum_{Q \in \text{neigh}(P)} \vec{\Phi}_{PQ}$ είναι μη-γραμμική συνάρτηση του \vec{W} θα εφαρμοστεί μία επαναληπτική λύση της εξίσωσης στην οποία μέσω της Δ -διατύπωσης θα γίνει μία γραμμικοποίηση του μη-γραμμικού όρου. Πιο συγκεκριμένα γράφουμε:

$$\sum_{Q \in \text{neigh}(P)} \vec{\Phi}_{PQ}^{n+1,k+1} = \sum_{Q \in \text{neigh}(P)} \vec{\Phi}_{PQ}^{n+1,k} + \sum_{Q \in \text{neigh}(P)} \left. \frac{\partial \vec{\Phi}_{PQ}}{\partial \vec{W}} \right|^{n+1,k} \cdot \Delta \vec{W}^{n+1,k+1} \quad (3.5)$$

Έτσι αντικαθιστώντας τις (3.3),(3.4),(3.5) στην (3.2), έχουμε :

$$\frac{3\vec{W}^{n+1,k+1} - 4\vec{W}^n + \vec{W}^{n-1}}{2\Delta t} + \frac{\Delta \vec{W}^{n+1,k+1}}{\Delta t_{ps}} + \sum_{Q \in \text{neigh}(P)} \vec{\Phi}_{PQ}^{n+1,k} + \sum_{Q \in \text{neigh}(P)} \left. \frac{\partial \vec{\Phi}_{PQ}}{\partial \vec{W}} \right|^{n+1,k} \cdot \Delta \vec{W}^{n+1,k+1} = 0$$

ή

$$\frac{3(\vec{W}^{n+1,k} + \Delta\vec{W}^{n+1,k+1}) - 4\vec{W}^n + \vec{W}^{n-1}}{2\Delta t} + \frac{\Delta\vec{W}^{n+1,k+1}}{\Delta t_{ps}} + \sum_{Q \in \text{neigh}(P)} \vec{\Phi}_{PQ}^{n+1,k} + \sum_{Q \in \text{neigh}(P)} \left. \frac{\partial \vec{\Phi}_{PQ}}{\partial \vec{W}} \right|^{n+1,k} \cdot \Delta\vec{W}^{n+1,k+1} = 0 \quad (3.6)$$

όπου η παραπάνω εξίσωση είναι ουσιαστικά οι τέσσερις εξισώσεις ροής γραμμένες την χρονική στιγμή $n + 1$ στον κόμβο P . Αξίζει να τονιστεί ότι ο ψευδοχρόνος δεν έχει κανένα φυσικό νόημα. Ο όρος $\sum_{Q \in \text{neigh}(P)} \left. \frac{\partial \vec{\Phi}_{PQ}}{\partial \vec{W}} \right|^{n+1,k} \cdot \Delta\vec{W}^{n+1,k+1}$ εξαρτάται από τα \vec{W}_P και τα \vec{W}_Q δηλαδή οι εξισώσεις ροής γραμμένες στον κόμβο P περιέχουν πληροφορία από το ίδιο το P και από όλους τους ‘άμεσους’ (δηλαδή συνδεδεμένους με μία ακμή) γείτονές του, Q . Με αυτήν τη λογική ο συγκεκριμένος όρος γίνεται:

$$\sum_{Q \in \text{neigh}(P)} \left. \frac{\partial \vec{\Phi}_{PQ}}{\partial \vec{W}} \right|^{n+1,k} \cdot \Delta\vec{W}^{n+1,k+1} = [\text{diag}]_P \cdot \Delta\vec{W}_P + \sum_{Q \in \text{neigh}(P)} [\text{zm}]_Q \cdot \Delta\vec{W}_Q \quad (3.7)$$

Στην παραπάνω εξίσωση είναι το $[\text{diag}]$ και το $[\text{zm}]$ πίνακες 4×4 των οποίων οι τιμές είναι συνάρτηση των \vec{W}_P και \vec{W}_Q αντίστοιχα (εννοείται ότι οι τιμές τους αντλούνται από το πιο πρόσφατο ψευδοχρονικό βήμα). Χωρίζοντας τώρα σε δεξί και αριστερό μέλος (αριστερά κρατάμε τους ‘αγνώστους’ $\Delta\vec{W}$) έχουμε (η παρακάτω εξίσωση είναι οι τέσσερις εξισώσεις ροής γραμμένες στον κόμβο P τη χρονική στιγμή $n + 1$)

$$\left[A_{\text{cell}} I_{4 \times 4} \cdot \left[\frac{3}{2\Delta t} + \frac{1}{\Delta t_{ps}} \right] + [\text{diag}]_{4 \times 4} \right] \cdot \Delta\vec{W}_P + \sum_{Q \in \text{neigh}(P)} [\text{zm}]_Q \cdot \Delta\vec{W}_Q = [\text{res}]_{4 \times 1} \quad (3.8)$$

όπου:

$$[\text{res}]_{4 \times 1} = - \left[\frac{3\vec{W}^{n+1,k} - 4\vec{W}^n + \vec{W}^{n-1}}{2\Delta t} + \sum_{Q \in \text{neigh}(P)} \vec{\Phi}_{PQ}^{n+1,k} \right] \quad (3.9)$$

Παρατηρούμε ότι ουσιαστικά το $[\text{res}]$ (υπόλοιπο ή residual) είναι το μέρος της εξίσωσης που εκφράζει τη φυσική του προβλήματος (*physics*). Όταν το $[\text{res}] = 0$ ισχύει για κάθε κόμβο, με το ‘ίσον’ να σημαίνει την ακρίβεια του υπολογιστή που επιθυμεί ο χρήστης (μετά θα εξηγηθεί το για κάθε τι σημαίνει) έχουμε βρεί τη λύση που αναζητούμε και κρατάμε το $\vec{W}^{n+1,k}$ ως τη λύση της χρονικής στιγμής $n + 1$. Εξάλλου από την (3.8) φαίνεται ότι όταν $[\text{res}] \rightarrow 0 \quad \forall$ κόμβο $P \Rightarrow \Delta\vec{W} \rightarrow 0 \quad \forall P$ και με αυτόν τον τρόπο η επαναληπτική διαδικασία συγκλίνει.

3.3 Επαναληπτική επίλυση χρησιμοποιώντας σχήμα **Jacobi**

Η (3.8) είναι ουσιαστικά οι 4 εξισώσεις *Euler* της ροής στον κόμβο P τη στιγμή t_{n+1} , αφού πρώτα έχουν ολοκληρωθεί στην κυψέλη ελέγχου και κατόπιν διακριτοποιηθεί. Αν γράψουμε

αυτη την εξίσωση σε κάθε κόμβο τότε προκύπτουν N_s τετράδες εξισώσεων για μία συγκεκριμένη στιγμή. Προκειμένου να πάμε στην επόμενη λύση στον ψευδοχρόνο πρέπει να βρεθούν οι N_s τετράδες αγνώστων \vec{W} . Άρα γίνεται εύκολα φανερό ότι ουσιαστικά πρέπει να επιλυθεί αριθμητικά ένα γραμμικό σύστημα προκειμένου να προχωρήσουμε τη λύση στην επόμενη ψευδο-χρονική στιγμή, της μορφής

$$[\mathbf{B}]_{4N_s \times 4N_s} \cdot \Delta \vec{W}_{4N_s} = [\mathbf{C}]_{4N_s}$$

Το να λυθεί αυτό το σύστημα με απ' ευθείας αντιστροφή του μητρώου $[\mathbf{B}]$ είναι απαγορευτικό απο πλευράς υπολογιστικού κόστους λόγω αφενός μεγέθους του μητρώου και αφετέρου αν λάβουμε υπόψη ότι είναι ένα αραιό μητρώο δεδομένου του ότι κάθε κόμβος επηρεάζεται άμεσα από τους γειτονικούς του και όχι από όλους τους κόμβους του πλέγματος και έτσι στο συνολικό μητρώο προκύπτουν πολλά μηδενικά στοιχεία.

Γράφουμε την (3.8) ως εξής

$$[DIAG]_{4 \times 4} \Delta \vec{W}_P^{new} = [res]_{4 \times 1} - \sum_{Q \in \text{neigh}(P)} [zm]_Q \cdot \Delta \vec{W}_Q^{old} \quad (3.10)$$

όπου:

$$[DIAG] = \left[A_{cell} I_{4 \times 4} \cdot \left[\frac{3}{2\Delta t} + \frac{1}{\Delta t_{ps}} \right] + [diag]_{4 \times 4} \right]$$

ή τελικά :

$$\Delta \vec{W}_P^{new} = [DIAG]_{4 \times 4}^{-1} \cdot \left[[res]_{4 \times 1} - \sum_{Q \in \text{neigh}(P)} [zm]_Q \cdot \Delta \vec{W}_Q^{old} \right] \quad (3.11)$$

όπου τα $[zm]$, $[res]$, $[DIAG]^{-1}$ έχουν υπολογιστεί για τα 'τρέχοντα' $\vec{W}^{n+1,k}$.

Όπως υποδηλώνει η (3.11) ο αλγόριθμος του σχήματος *Jacobi* είναι ο εξής:

1. Τίθεται $\Delta \vec{W}^{old} = 0$
2. $n \leftarrow 1$
3. εφαρμόζοντας την (3.11) \forall κόμβο P , υπολογίζονται τα $\Delta \vec{W}^{new}$.
4. $\Delta \vec{W}^{old} \leftarrow \Delta \vec{W}^{new}$
5. αν $n < n_{jacobi}$, τότε : $n \leftarrow n + 1$ και επιστροφή στο 3.
6. Τέλος

Το n_{jacobi} είναι ένας αριθμός που έχει ορίσει ο χρήστης εκ' των προτέρων. Με άλλα λόγια δεν υπάρχει κάποιο εσωτερικό κριτήριο σύγκλισης αλλά εκτελούνται οι επαναλήψεις στην *Jacobi* συγκεκριμένο αριθμό φορών (στην δική μας περίπτωση περίπου 15).

Όταν τελειώσει η *Jacobi*, υπολογίζονται τα νέα \vec{W} , δηλαδή:

$$\vec{W}^{n+1,k+1} = \vec{W}^{n+1,k} + \Delta \vec{W}_{jacobi}$$

Κεφάλαιο 4

Περιοδικά φαινόμενα ροής

Το βασικό αντικείμενο της εργασίας αυτής είναι μία νέα μέθοδος που εφαρμόζεται σε περιοδικά φαινόμενα ροής. Λέγοντας περιοδικά φαινόμενα ροής, είναι αυτονόητο ότι η λύση που περιμένουμε να έχουμε θα είναι περιοδική συνάρτηση του χρόνου. Τέτοια φαινόμενα προκύπτουν όταν κάποια από τις οριακές συνθήκες μεταβάλλεται οδηγώντας με αυτόν τον τρόπο κατ' αρχήν σε ένα χρονικά μη-μόνιμο (*unsteady*) πρόβλημα, αλλά η μεταβολή αυτή δεν γίνεται με τυχαίο τρόπο αλλά είναι περιοδική. Σε αυτήν την εργασία για παράδειγμα, όπου θα μελετηθεί η διδιάστατη ροή γύρω από μία μεμονωμένη αεροτομή το μέγεθος που θα αλλάζει είναι η γωνία εισόδου της ροής α_1 . Άλλο χαρακτηριστικό αυτών των φαινομένων είναι ότι η λύση προκειμένου να γίνει περιοδική πρέπει πρώτα να περάσει μία χρονική περίοδος γνωστή ως μεταβατικό φαινόμενο.

Μια πρακτική όταν επιλύουμε τέτοιου είδους φαινόμενα, είναι η έκφραση και επομένως και η προσέγγιση της λύσης που επιθυμούμε μέσω πεπερασμένου αριθμού όρων σειράς *Fourier*. Αυτή η πρακτική επιτρέπει μεταξύ των άλλων και τον απ' ευθείας υπολογισμό του περιοδικού φαινομένου που μας ενδιαφέρει αποφεύγοντας τον υπολογισμό του μεταβατικού φαινομένου. Αυτή είναι και η γενική ιδέα της μεθόδου με την οποία θα ασχοληθούμε σε αυτήν την εργασία και ονομάζεται ισορροπία αρμονικών *harmonic balance* ή πιο απλά *HB*.

4.1 Η μέθοδος της ισορροπίας των αρμονικών

Η μέθοδος της ισορροπίας των αρμονικών (*harmonic balance*) είναι μία μέθοδος που πρωτοξεκίνησε από τα ηλεκτρικά κυκλώματα, όπου χρησιμοποιήθηκε για την εύρεση της απόκρισης στην ημιτονοειδή μόνιμη κατάσταση, δηλαδή της κατάστασης ισορροπίας που επέρχεται μετά το πέρας των μεταβατικών φαινομένων (ο όρος ισορροπία έχει την έννοια της περιοδικότη-

τας και όχι της σταθερότητας ως προς το χρόνο). Στην κατάσταση αυτή, οι μεταβλητές των κυκλωμάτων, δηλαδή οι τάσεις και τα ρεύματα είναι περιοδικές συναρτήσεις ως προς το χρόνο και προσεγγίζονται με σειρές *Fourier*. Ουσιαστικά κεντρική ιδέα της μεθόδου είναι ότι, λόγω *Fourier* οι άγνωστοι είναι οι συντελεστές της σειράς που ισούνται με το διπλάσιο των αρμονικών συν το σταθερό όρο που αποτελεί και το μέσο όρο (χρονικά) της συνάρτησης. Ο νόμος που πρέπει να υπακούουν οι τάσεις και τα ρεύματα είναι ο νόμος του *Kirchhoff* ο οποίος όμως τώρα γράφεται στο πεδίο των συχνοτήτων. Επειδή όμως οι υπάρχουσες σχέσεις του τύπου $I = f(V)$ συνδέουν τα μεγέθη στο πεδίο του χρόνου και όχι στο πεδίο των συχνοτήτων εφαρμόζονται διακριτοί μετασχηματισμοί *Fourier* για τη μετάβαση από το ένα πεδίο στο άλλο και αντίστροφα οι οποίοι εντάσσονται γενικά σε μία επαναληπτική διαδικασία για την επίλυση. Αυτό που τελικά ζητείται να βρεθεί είναι μία 'ισσοροπία' μεταξύ των συντελεστών *Fourier* του ρεύματος και της τάσης η οποία να επαληθεύει τον νόμο ρευμάτων *Kirchhoff* γραμμένο στο πεδίο των συχνοτήτων.

4.2 Επίλυση περιοδικών ροών μέσω προσέγγισης με σειρές *Fourier*

Παρακάτω παρουσιάζεται η γενική ιδέα δύο διαφορετικών τρόπων με τους οποίους μπορεί να προσεγγιστεί η λύση με χρήση σειρών *Fourier* σε προβλήματα ρευστομηχανικής, η διαφορά των οποίων ουσιαστικά έγκειται στον τρόπο επίλυσης των εξισώσεων που προκύπτουν. Στην εργασία αυτή, η μέθοδος που εφαρμόστηκε στηρίχθηκε κυρίως στις δημοσιεύσεις [7] και [17]. Να σημειωθεί ότι και στις δύο εργασίες χρησιμοποιείται η παραπάνω λογική της ισοροπίας των αρμονικών που περιγράφηκε επιγραμματικά πιο πάνω.

Γενικά, έστω ότι πρέπει να επιλυθούν οι εξισώσεις *Euler*, οι οποίες αφού διακριτοποιηθούν και ολοκληρωθούν σε κυψέλες ελέγχου μπορούν να έρθουν στη μορφή (γραμμένες σε έναν κόμβο μία χρονική στιγμή):

$$\frac{d\vec{W}}{dt} \cdot A_{cell} + R = 0 \quad (4.1)$$

όπου $\vec{R} = \vec{R}(\vec{W})$, με $\vec{W} = [\rho \quad \rho u \quad \rho v \quad E]^T$ και A_{cell} το εμβαδόν της κυψέλης.

Non-Linear Frequency Domain Method

Αυτή η μέθοδος παρουσιάζεται στη δημοσίευση [17] και έχει όνομα Non-Linear Frequency Domain Method. Σύμφωνα με αυτή τη μέθοδο χωρίζεται η λύση σε N_T εικόνες της ισαπέχουσες χρονικά μέσα στην περίοδο. Ακόμη, τα \vec{R} και \vec{W} , αν προσεγγιστούν με N_H όρους αθροίσματος σειράς *Fourier*, μπορούν να γραφτούν ως εξής

$$W(t) = \sum_{k=-N_H}^{N_H} \tilde{W}_k e^{jk\omega t} \quad (4.2)$$

και

$$R(t) = \sum_{k=-N_H}^{N_H} \tilde{R}_k e^{jk\omega t} \quad (4.3)$$

όπου $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

Αντικαθιστώντας τώρα την παράγωγο της (4.2) στην (4.1) γίνεται φανερό ότι για κάθε αρμονική θα πρέπει να μηδενίζεται η ποσότητα \tilde{R}_k^* για την οποία έχουμε:

$$\tilde{R}_k^* = A_{cell} jk\omega \tilde{W}_k + \tilde{R}_k \quad (4.4)$$

Επειδή σχέση μεταξύ R και W στο πεδίο των συχνοτήτων δεν είναι άμεσα διαθέσιμη κάτι το οποίο ισχύει για το πεδίο του χρόνου γίνονται οι επόμενοι μετασχηματισμοί από το πεδίο των συχνοτήτων στο πεδίο του χρόνου και αντίστροφα για την επίλυση της $\tilde{R}_k^* = 0 \forall k$.

Αυτός ο αλγόριθμος ξεκινάει με μία αρχική προσέγγιση για τα \tilde{W}_k και έπειτα συνεχίζεται επαναληπτική διαδικασία στην οποία επαναλαμβάνονται τα παρακάτω βήματα μέχρι να επιτευχθεί σύγκλιση.

1. Έχοντας τα \tilde{W}_k , υπολογίζονται τα W σε κάθεμιά από τις N_T χρονικές εικόνες μέσω ενός μετασχηματισμού *Fourier*, τα οποία συμβολίζονται ως W^i , με $i = 1, N_T$.
2. Έχοντας τώρα τα W^i , αφού στο πεδίο του χρόνου υπάρχει διαθέσιμη σχέση $R = R(W)$ υπολογίζονται τα R^i .
3. Στη συνέχεια μέσω ενός αντίστροφου διακριτού μετασχηματισμού *Fourier* υπολογίζονται από τα R^i τα \tilde{R}_k .
4. Υπολογίζεται τώρα το $\tilde{R}_k^* = A_{cell} jk\omega \tilde{W}_k + \tilde{R}_k \forall k$, και ελέγχεται η σύγκλιση.
5. Βρίσκονται οι διορθωμένες τιμές για τα \tilde{W}_k , που θα δώσουν στη συνέχεια τιμή πιο κοντά στο μηδέν για το \tilde{R}_k^* , για όλα τα k (προφανώς αφού είναι μιγαδικοί αριθμοί γίνεται έλεγχος έτσι ώστε το μέτρο τους να τείνει στο μηδέν). (Αυτό το βήμα εξαρτάται από την επαναληπτική διαδικασία που χρησιμοποιείται για τη λύση της εξίσωσης η οποία είναι συνήθως η μέθοδος *Newton – Raphson*.)

Στο τέλος της ανωτέρω διαδικασίας έχουν υπολογιστεί τα \tilde{W}_k , με αποτέλεσμα να είναι δυνατή μία χρονική ‘αναδόμηση’ της λύσης $W(t)$, βάσει του τύπου (4.2).

Η μέθοδος της Ισορροπίας των Αρμονικών (**Harmonic Balance Method**)

Αυτή η μέθοδος εφαρμόζεται στη δημοσίευση [7]. Σε αυτό το σημείο δεν θα αναφερθούν πολλά γι’ αυτή τη μέθοδο αφού αυτή είναι ουσιαστικά ακριβώς η μέθοδος που εξετάστηκε σε αυτή την εργασία και θα αναλυθεί λεπτομερώς πιο κάτω. Η μέθοδος αυτή βασίζεται σε παρόμοια λογική με την προηγούμενη, μόνο που εδώ η μετάβαση που γίνεται από το πεδίο των

συχνοτήτων στο πεδίο του χρόνου και αντίστροφα ενσωματώνεται στον τελικό τύπο που είναι στο πεδίο του χρόνου μεσω μαθηματικών εκφράσεων. Συγκεκριμένα στην (4.4) αντικαθίσταται κάθε ένα από τα \widetilde{W}_k , \widetilde{R}_k με όλα τα W^i και όλα τα R^i αντίστοιχα και έτσι αποδεικνύεται μία σχέση που ισχύει μεταξύ των W^i και R^i (μία διανυσματική σχέση που αποτελείται από N_T σχέσεις κάθε μία απο τις οποίες συνδέει το αντίστοιχο σε αυτή R^i με όλα τα W^i). Έτσι ως άγνωστοι είναι πλέον τα W^i επειδή $R = R(W)$.

Γι' αυτό και η μέθοδος ονομάζεται *ισορροπία των αρμονικών* επειδή οι άγνωστες συναρτήσεις, αφού προσεγγιστούν από ένα δεδομένο πλήθος αρμονικών, εν τέλει αυτό που πρέπει να βρεθεί είναι μία ισορροπία ή αλλιώς ένας συνδυασμός τιμών των χρονικών εικόνων, δηλαδή τα W^i (η λέξη ισορροπία υποδηλώνει και την ταυτόχρονη εύρεση των W^i σε αντίθεση με τη μέθοδο χρονο-προέλασης).

Κεφάλαιο 5

Επίλυση στο πεδίο των συχνοτήτων - Η μέθοδος της Ισορροπίας των Αρμονικών

5.1 Μαθηματική θεμελίωση

Όπως έχει αναφερθεί και παραπάνω με τη μέθοδο **HB** σε αντιδιαστολή με την χρονο-προέλαση γίνεται δυνατός ο απ' ευθείας υπολογισμός του περιοδικού φαινομένου που ενδιαφέρει, μέσω προσέγγισης της λύσης με άθροισμα πεπερασμένου αριθμού όρων σειράς Fourier, εκμεταλλευόμενοι έτσι την περιοδικότητα του φαινομένου.

Έστω ότι η διαφορική εξίσωση που πρέπει να επιλυθεί είναι γενικά της μορφής :

$$\frac{d\mathbf{W}(t)}{dt} + \mathbf{R}(t) = 0 \quad (5.1)$$

όπου στην παραπάνω εξίσωση \mathbf{W} είναι η λύση (λ.χ. το διάνυσμα των μεταβλητών ροής) που πρέπει να υπολογιστεί και το \mathbf{R} το χωρικό υπόλοιπο spatial residual και είναι γενικά μία συνάρτηση του \mathbf{W} , δηλαδή $\mathbf{R} = \mathbf{R}(\mathbf{W})$. Θεωρούμε ότι είναι δυνατό τα \mathbf{R} και \mathbf{W} να προσεγγιστούν μέσω σειράς Fourier N_H αρμονικών, δηλαδή N_H συχνοτήτων, ως εξής

$$\begin{aligned} \mathbf{W}(t) &\approx \widehat{\mathbf{W}}_0 + \sum_{n=1}^{N_H} (\widehat{\mathbf{W}}_{an} \cos(\omega nt) + \widehat{\mathbf{W}}_{bn} \sin(\omega nt)) \\ \mathbf{R}(t) &\approx \widehat{\mathbf{R}}_0 + \sum_{n=1}^{N_H} (\widehat{\mathbf{R}}_{an} \cos(\omega nt) + \widehat{\mathbf{R}}_{bn} \sin(\omega nt)) \end{aligned} \quad (5.2)$$

όπου $\omega = \frac{2\pi}{T}$, με T την περίοδο του φαινομένου, δηλαδή πρακτικά την περίοδο διέγερσης. Παρατηρούμε από τις παραπάνω σχέσεις ότι αρκεί ο υπολογισμός $2N_H + 1$ ποσοτήτων (ή πεδίων στη συγκεκριμένη περίπτωση που ενδιαφέρει η ροή) για να βρεθεί με ικανοποιητική ακρίβεια η λύση \mathbf{W} .

Ακόμη είναι:

$$\frac{d\mathbf{W}(t)}{dt} = \sum_{n=1}^{N_H} \left(-\widehat{\mathbf{W}}_{an} \omega n \sin(\omega n t) + \widehat{\mathbf{W}}_{bn} \omega n \cos(\omega n t) \right)$$

Αντικαθιστώντας το παραπάνω στην (5.1) παίρνουμε :

$$\widehat{\mathbf{R}}_0 + \sum_{n=1}^{N_H} \left(\widehat{\mathbf{W}}_{bn} \omega n + \widehat{\mathbf{R}}_{an} \right) \cos(\omega n t) + \sum_{n=1}^{N_H} \left(-\widehat{\mathbf{W}}_{an} \omega n + \widehat{\mathbf{R}}_{bn} \right) \sin(\omega n t) = 0$$

Επειδή η παραπάνω σχέση πρέπει να ικανοποιείται $\forall t$, πρέπει να ικανοποιούνται οι παρακάτω $2N_H + 1$ εξισώσεις

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \widehat{\mathbf{R}}_0 = 0 \\ \widehat{\mathbf{W}}_{bn} \omega n + \widehat{\mathbf{R}}_{an} = 0 \\ -\widehat{\mathbf{W}}_{an} \omega n + \widehat{\mathbf{R}}_{bn} = 0 \end{array} \right. \begin{array}{l} , n = 1, N_H \\ , n = 1, N_H \end{array} \Bigg|_{2N_H+1 \text{ εξισώσεις}} \quad . \quad (\Sigma 0)$$

Από το παραπάνω σύστημα ($\Sigma 0$) τίθεται ως στόχος ο υπολογισμός των $\widehat{\mathbf{W}}_{ai}$ και $\widehat{\mathbf{W}}_{bi}$. Η δυσκολία έτσι ώστε να λυθεί το ($\Sigma 0$) είναι ότι ενώ γενικά υπάρχει σχέση που συνδέει τα $\mathbf{R}(t)$ με τους αγνώστους $\mathbf{W}(t)$ της αντίστοιχης χρονικής στιγμής, κάτι τέτοιο δεν ισχύει για τα $\widehat{\mathbf{R}}_{ai}$ και τα $\widehat{\mathbf{R}}_{bi}$ με τα $\widehat{\mathbf{W}}_{ai}$ και τα $\widehat{\mathbf{W}}_{bi}$, αφού κάθε $\widehat{\mathbf{R}}_{ai}$ ή $\widehat{\mathbf{R}}_{bi}$ εξαρτάται από όλα τα $\widehat{\mathbf{W}}_{ai}$ και τα $\widehat{\mathbf{W}}_{bi}$ λόγω της μη γραμμικότητας της 'αρχικής' σχέσης $\mathbf{R} = \mathbf{R}(\mathbf{W})$ μέσω σχέσης που δεν είναι εύκολο να βρεθεί.

Για να αποφευχθεί αυτή η δυσκολία η μέθοδος HB [17, 7] προτείνει τα εξής:

- Πραγματοποιείται διακριτοποίηση χρονικά της λύσης \mathbf{W} και του υπολοίπου \mathbf{R} σε $N_T = 2N_H + 1$ ισαπέχουσες χρονικές στιγμές μέσα στην περίοδο. Συγκεκριμένα έχουμε:

$$\vec{\mathbf{W}}_{hb} = \begin{pmatrix} \mathbf{W}(t_0) \\ \mathbf{W}(t_0 + \Delta t) \\ \vdots \\ \mathbf{W}(t_0 + T - \Delta t) \end{pmatrix} \quad \vec{\mathbf{R}}_{hb} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}(t_0) \\ \mathbf{R}(t_0 + \Delta t) \\ \vdots \\ \mathbf{R}(t_0 + T - \Delta t) \end{pmatrix}$$

$$\text{όπου } \Delta t = \frac{T}{2N_H + 1} = \frac{2\pi}{2N_H + 1} \cdot \frac{1}{\omega} = \frac{a}{\omega}, \text{ όπου ορίστηκε: } a = \frac{2\pi}{2N_H + 1}$$

- Έτσι είναι δυνατό για κάθε ένα από τα στοιχεία \mathbf{W}_{hb} και \mathbf{R}_{hb} να ικανοποιηθούν οι εξισώσεις της χρονικής σειράς Fourier. Με αυτόν τον τρόπο, δεδομένου του ότι οι άγνωστοι συντελεστές Fourier είναι $2N_H + 1$ σε αριθμό, μπορεί να εκφραστεί κάθε ένας συντελεστής $\widehat{\mathbf{W}}$ και $\widehat{\mathbf{R}}$ συναρτήσει των άγνωστων τιμών των \mathbf{W} και \mathbf{R} αντίστοιχα, στις $2N_H + 1$ χρονικές στιγμές. Ουσιαστικά δηλαδή μέσω ενός διακριτού μετασχηματισμού Fourier (Discrete Fourier Transform (DFT)) πραγματοποιείται σκόπιμη 'επιστροφή' από το πεδίο των συχνοτήτων στο πεδίο του χρόνου.

- Στη συνέχεια, γίνεται αντικατάσταση των εκφράσεων που θα προκύψουν από το δεύτερο βήμα στο σύστημα (Σ0). Με αυτόν τον τρόπο θα προκύψει τελικά ένα νέο σύστημα, διατυπωμένο στο πεδίο του χρόνου, όπου όμως θα συσχετίζεται σε κάθε του εξίσωση τα \mathbf{W} και \mathbf{R} στις $2N_H + 1$ στιγμές μέσα στην περίοδο, για τα οποία όμως υπάρχει γνωστή - διαθέσιμη συσχέτιση $\mathbf{R} = \mathbf{R}(\mathbf{W})$.

Παρακάτω φαίνεται αυτή ακριβώς η διαδικασία που μόλις περιγράφηκε για προσέγγιση της λύσης \mathbf{W} και του υπολοίπου \mathbf{R} με δύο αρμονικές ($N_H = 2$). Μετά θα γίνει γενίκευση των τύπων που θα προκύψουν για περισσότερες αρμονικές.

Για δύο αρμονικές ($N_H = 2$) έχω $\Delta T = \frac{T}{5}$. Άρα η λύση $\mathbf{W}(t)$ μπορεί να γραφτεί βάσει Fourier:

$$\mathbf{W}(t) = \widehat{\mathbf{W}}_0 + \widehat{\mathbf{W}}_{a1} \cos \omega t + \widehat{\mathbf{W}}_{b1} \sin \omega t + \widehat{\mathbf{W}}_{a2} \cos 2\omega t + \widehat{\mathbf{W}}_{b2} \sin 2\omega t$$

από όπου προκύπτει ότι πρέπει να υπολογιστούν 5 άγνωστοι τα $\widehat{\mathbf{W}}_0, \widehat{\mathbf{W}}_{a1}, \widehat{\mathbf{W}}_{b1}, \widehat{\mathbf{W}}_{a2}, \widehat{\mathbf{W}}_{b2}$. Άρα έχουμε $N_T = 5$ τιμές (ή πιο σωστά πεδία τιμών για την εφαρμογή στις εξισώσεις ροής αυτής της εργασίας) μέσα στην περίοδο τις :

$$\vec{\widehat{\mathbf{W}}}_{hb} = [\mathbf{W}(t_0), \mathbf{W}(t_0 + \Delta t), \mathbf{W}(t_0 + 2\Delta t), \mathbf{W}(t_0 + 3\Delta t), \mathbf{W}(t_0 + 4\Delta t)]^T = [\mathbf{W}_0, \mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2, \mathbf{W}_3, \mathbf{W}_4]^T$$

Είναι, ως γνωστόν,

$$\begin{aligned} \cos(\omega t) &= \frac{e^{j\omega\Delta t} + e^{-j\omega\Delta t}}{2} \\ \cos(2\omega t) &= \frac{e^{j2\omega\Delta t} + e^{-j2\omega\Delta t}}{2} \\ \sin(\omega t) &= \frac{e^{j\omega\Delta t} - e^{-j\omega\Delta t}}{2j} = j \cdot \frac{e^{-j\omega\Delta t} - e^{j\omega\Delta t}}{2} \\ \sin(2\omega t) &= j \cdot \frac{e^{-j2\omega\Delta t} + e^{j2\omega\Delta t}}{2} \end{aligned}$$

οπότε:

$$\begin{aligned} \mathbf{W}(t) &= \widehat{\mathbf{W}}_0 + \widehat{\mathbf{W}}_{a1} \cdot \frac{e^{j\omega\Delta t} + e^{-j\omega\Delta t}}{2} + j\widehat{\mathbf{W}}_{b1} \cdot \frac{e^{-j\omega\Delta t} - e^{j\omega\Delta t}}{2} + \\ &+ \widehat{\mathbf{W}}_{a2} \cdot \frac{e^{j2\omega\Delta t} + e^{-j2\omega\Delta t}}{2} + j\widehat{\mathbf{W}}_{b2} \cdot \frac{e^{-j2\omega\Delta t} + e^{j2\omega\Delta t}}{2} \\ &= e^{-j2\omega\Delta t} \left[\frac{\widehat{\mathbf{W}}_{a2} + j\widehat{\mathbf{W}}_{b2}}{2} \right] + e^{-j\omega\Delta t} \left[\frac{\widehat{\mathbf{W}}_{a1} + j\widehat{\mathbf{W}}_{b1}}{2} \right] + \\ &+ \widehat{\mathbf{W}}_0 + e^{j\omega\Delta t} \left[\frac{\widehat{\mathbf{W}}_{a1} - j\widehat{\mathbf{W}}_{b1}}{2} \right] + e^{j2\omega\Delta t} \left[\frac{\widehat{\mathbf{W}}_{a2} - j\widehat{\mathbf{W}}_{b2}}{2} \right] \\ \Rightarrow \mathbf{W}(t) &= \widetilde{\mathbf{W}}_{-2} e^{-j2\omega\Delta t} + \widetilde{\mathbf{W}}_{-1} e^{-j\omega\Delta t} + \widetilde{\mathbf{W}}_0 + \widetilde{\mathbf{W}}_1 e^{j\omega\Delta t} + \widetilde{\mathbf{W}}_2 e^{j2\omega\Delta t} \end{aligned}$$

όπου εμφανίζονται τα μιγαδικά πεδία τιμών $\widetilde{\mathbf{W}}_{-2}, \dots, \widetilde{\mathbf{W}}_2$, οριζόμενα ως

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathbf{W}}_{-2} &= \frac{\widehat{\mathbf{W}}_{a2} + j\widehat{\mathbf{W}}_{b2}}{2}, & \widetilde{\mathbf{W}}_{-1} &= \frac{\widehat{\mathbf{W}}_{a1} + j\widehat{\mathbf{W}}_{b1}}{2} & \text{και } \widetilde{\mathbf{W}}_0 &= \widehat{\mathbf{W}}_0 \\ \widetilde{\mathbf{W}}_1 &= \frac{\widehat{\mathbf{W}}_{a1} - j\widehat{\mathbf{W}}_{b1}}{2}, & \widetilde{\mathbf{W}}_2 &= \frac{\widehat{\mathbf{W}}_{a2} - j\widehat{\mathbf{W}}_{b2}}{2} \end{aligned}$$

Κάθε ένα από τα 5 χρονικά ισαπέχοντα πεδία τιμών: $[\mathbf{W}_0, \mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2, \mathbf{W}_3, \mathbf{W}_4]^T$ πρέπει να ικανοποιεί το άθροισμα Fourier με $N_H = 2$ δύο αρμονικές. Ακόμη, χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορεί να θεωρηθεί για αφετηρία το μηδέν, δηλαδή $t_0 = 0$. Έτσι έχουμε:

$$\begin{cases} [0 \Delta t] : \mathbf{W}_0 = \widetilde{\mathbf{W}}_{-2} + \widetilde{\mathbf{W}}_{-1} + \widetilde{\mathbf{W}}_0 + \widetilde{\mathbf{W}}_1 + \widetilde{\mathbf{W}}_2 \\ [1 \Delta t] : \mathbf{W}_1 = \widetilde{\mathbf{W}}_{-2}e^{-j2\omega\Delta t} + \widetilde{\mathbf{W}}_{-1}e^{-j\omega\Delta t} + \widetilde{\mathbf{W}}_0 + \widetilde{\mathbf{W}}_1e^{j\omega\Delta t} + \widetilde{\mathbf{W}}_2e^{j2\omega\Delta t} \\ [2 \Delta t] : \mathbf{W}_2 = \widetilde{\mathbf{W}}_{-2}e^{-j4\omega\Delta t} + \widetilde{\mathbf{W}}_{-1}e^{-j2\omega\Delta t} + \widetilde{\mathbf{W}}_0 + \widetilde{\mathbf{W}}_1e^{j2\omega\Delta t} + \widetilde{\mathbf{W}}_2e^{j4\omega\Delta t} \\ [3 \Delta t] : \mathbf{W}_3 = \widetilde{\mathbf{W}}_{-2}e^{-j6\omega\Delta t} + \widetilde{\mathbf{W}}_{-1}e^{-j3\omega\Delta t} + \widetilde{\mathbf{W}}_0 + \widetilde{\mathbf{W}}_1e^{j3\omega\Delta t} + \widetilde{\mathbf{W}}_2e^{j6\omega\Delta t} \\ [4 \Delta t] : \mathbf{W}_4 = \widetilde{\mathbf{W}}_{-2}e^{-j8\omega\Delta t} + \widetilde{\mathbf{W}}_{-1}e^{-j3\omega\Delta t} + \widetilde{\mathbf{W}}_0 + \widetilde{\mathbf{W}}_1e^{j4\omega\Delta t} + \widetilde{\mathbf{W}}_2e^{j8\omega\Delta t} \end{cases}$$

Τίθεται $\phi = e^{j\omega\Delta t} = e^{j2\pi\frac{\Delta t}{T}} = \cos\left(\frac{2\pi\Delta t}{T}\right) + j \cdot \sin\left(\frac{2\pi\Delta t}{T}\right)$ Τότε: $e^{j2\omega\Delta t} = \phi^2$, $e^{-j\omega\Delta t} = \phi^{-1}$, $e^{-j2\omega\Delta t} = \phi^{-2}$ κ.ο.κ, και έτσι το σύστημα της παρεμβολής γίνεται:

$$\begin{cases} [0 \Delta t] : \mathbf{W}_0 = \widetilde{\mathbf{W}}_{-2}\phi^0 + \widetilde{\mathbf{W}}_{-1}\phi^0 + \widetilde{\mathbf{W}}_0\phi^0 + \widetilde{\mathbf{W}}_1\phi^0 + \widetilde{\mathbf{W}}_2\phi^0 \\ [1 \Delta t] : \mathbf{W}_1 = \widetilde{\mathbf{W}}_{-2}\phi^{-2} + \widetilde{\mathbf{W}}_{-1}\phi^{-1} + \widetilde{\mathbf{W}}_0\phi^0 + \widetilde{\mathbf{W}}_1\phi^1 + \widetilde{\mathbf{W}}_2\phi^2 \\ [2 \Delta t] : \mathbf{W}_2 = \widetilde{\mathbf{W}}_{-2}\phi^{-4} + \widetilde{\mathbf{W}}_{-1}\phi^{-2} + \widetilde{\mathbf{W}}_0\phi^0 + \widetilde{\mathbf{W}}_1\phi^2 + \widetilde{\mathbf{W}}_2\phi^4 \\ [3 \Delta t] : \mathbf{W}_3 = \widetilde{\mathbf{W}}_{-2}\phi^{-6} + \widetilde{\mathbf{W}}_{-1}\phi^{-3} + \widetilde{\mathbf{W}}_0\phi^0 + \widetilde{\mathbf{W}}_1\phi^3 + \widetilde{\mathbf{W}}_2\phi^6 \\ [4 \Delta t] : \mathbf{W}_4 = \widetilde{\mathbf{W}}_{-2}\phi^{-8} + \widetilde{\mathbf{W}}_{-1}\phi^{-4} + \widetilde{\mathbf{W}}_0\phi^0 + \widetilde{\mathbf{W}}_1\phi^4 + \widetilde{\mathbf{W}}_2\phi^8 \end{cases}$$

Αλλά: $\phi^{-1} = e^{-j\omega\Delta t} = e^{-j2\pi\frac{\Delta t}{T}} = e^{-j2\pi\frac{\Delta t}{T}} \cdot e^{+j2\pi\frac{\Delta t}{T}} = e^{j2\pi\frac{4\Delta t}{T}} = \phi^4$, αφού:
 $e^{j2\pi} = \cos(2\pi) + j \cdot \sin(2\pi) = 1$ και γενικότερα:

$$\phi^{-q} = \phi^{-q \pm \rho(2N_H+1)}$$

άρα εδώ λόγου χάρη:

$$\phi^{-1} = \phi^4, \quad \phi^{-2} = \phi^3, \quad \phi^{-8} = \phi^{-3} = \phi^2 = \phi^7 = \phi^{12}, \quad \text{κ.ο.κ}$$

Τότε το σύστημα γίνεται:

$$\begin{cases} [0 \Delta t] : \mathbf{W}_0 = \widetilde{\mathbf{W}}_0\phi^0 + \widetilde{\mathbf{W}}_1\phi^0 + \widetilde{\mathbf{W}}_2\phi^0 + \widetilde{\mathbf{W}}_{-2}\phi^0 + \widetilde{\mathbf{W}}_{-1}\phi^0 \\ [1 \Delta t] : \mathbf{W}_1 = \widetilde{\mathbf{W}}_0\phi^0 + \widetilde{\mathbf{W}}_1\phi^1 + \widetilde{\mathbf{W}}_2\phi^2 + \widetilde{\mathbf{W}}_{-2}\phi^3 + \widetilde{\mathbf{W}}_{-1}\phi^4 \\ [2 \Delta t] : \mathbf{W}_2 = \widetilde{\mathbf{W}}_0\phi^0 + \widetilde{\mathbf{W}}_1\phi^2 + \widetilde{\mathbf{W}}_2\phi^4 + \widetilde{\mathbf{W}}_{-2}\phi^6 + \widetilde{\mathbf{W}}_{-1}\phi^8 \\ [3 \Delta t] : \mathbf{W}_3 = \widetilde{\mathbf{W}}_0\phi^0 + \widetilde{\mathbf{W}}_1\phi^3 + \widetilde{\mathbf{W}}_2\phi^6 + \widetilde{\mathbf{W}}_{-2}\phi^9 + \widetilde{\mathbf{W}}_{-1}\phi^{12} \\ [4 \Delta t] : \mathbf{W}_4 = \widetilde{\mathbf{W}}_0\phi^0 + \widetilde{\mathbf{W}}_1\phi^4 + \widetilde{\mathbf{W}}_2\phi^8 + \widetilde{\mathbf{W}}_{-2}\phi^{12} + \widetilde{\mathbf{W}}_{-1}\phi^{16} \end{cases}$$

Για λόγους απλότητας στη γραφή υιοθετείται η αλλαγή δεικτών

$$\widetilde{\mathbf{W}}_{-2} \equiv \widetilde{\mathbf{W}}_3 \quad \text{και} \quad \widetilde{\mathbf{W}}_{-1} \equiv \widetilde{\mathbf{W}}_4$$

όπου αξίζει να παρατηρηθεί ότι η διαφορά μεταξύ του δείκτη που ορίστηκε και του κανονικού δείκτη είναι $N_T = 5$. Έτσι το σύστημα μπορεί να γραφτεί σε μητρική μορφή ως εξής

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \phi^1 & \phi^2 & \phi^3 & \phi^4 \\ 1 & \phi^2 & \phi^4 & \phi^6 & \phi^8 \\ 1 & \phi^3 & \phi^6 & \phi^9 & \phi^{12} \\ 1 & \phi^4 & \phi^8 & \phi^{12} & \phi^{16} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \widetilde{\mathbf{W}}_0 \\ \widetilde{\mathbf{W}}_1 \\ \widetilde{\mathbf{W}}_2 \\ \widetilde{\mathbf{W}}_3 \\ \widetilde{\mathbf{W}}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_0 \\ \mathbf{W}_1 \\ \mathbf{W}_2 \\ \mathbf{W}_3 \\ \mathbf{W}_4 \end{bmatrix} \quad (\Sigma 1)$$

Αυτό που πρέπει να παρατηρηθεί στο σύστημα (Σ1) είναι ότι και οι 2 πίνακες του αριστερού μέλους έχουν για στοιχεία μιγαδικούς αριθμούς, ενώ το γινόμενό τους, δηλαδή το δεξί μέλος είναι διάνυσμα που περιέχει πραγματικούς αριθμούς, αφού περιέχει τη λύση \mathbf{W} σε κάθε μία από τις $N_T = 5$ στιγμές.

Σε αυτό το σημείο είναι βασικό να μη χρειαστεί να λυθεί το (Σ1) αλλά να υπολογισθεί ο αντίστροφος του μητρώου -συντελεστή των αγνώστων, έτσι ώστε να διατυπωθεί απ' ευθείας η λύση του συστήματος.

Άρα, η προσπάθεια είναι να βρεθεί έκφραση που να δίνει απ' ευθείας το αντίστροφο μητρώο του \mathcal{M} ,

$$\text{όπου } \mathcal{M} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \phi^1 & \phi^2 & \phi^3 & \phi^4 \\ 1 & \phi^2 & \phi^4 & \phi^6 & \phi^8 \\ 1 & \phi^3 & \phi^6 & \phi^9 & \phi^{12} \\ 1 & \phi^4 & \phi^8 & \phi^{12} & \phi^{16} \end{bmatrix}$$

Για να γίνει αυτό, θα αποδειχθούν πρώτα δύο θεωρήματα ως ακολούθως

Θεώρημα 5.1 Έστω $\phi = e^{j\omega\Delta t} = e^{j2\pi\frac{\Delta t}{T}}$. Τότε ισχύει :

$$\boxed{1 + \phi + \phi^2 + \dots + \phi^{2N_H} = 0}$$

Απόδειξη Γνωρίζουμε ότι οι ταυτότητες που ισχύουν για τους πραγματικούς αριθμούς ισχύουν και για τους μιγαδικούς. Άρα ισχύει:

$$1 + \phi + \phi^2 + \dots + \phi^{2N_H} = \frac{1 - \phi^{2N_H+1}}{1 - \phi}$$

αλλά για $\phi = e^{j2\pi\frac{\Delta t}{T}}$ είναι

$$\phi^{2N_H+1} = e^{j2\pi\frac{(2N_H+1)\Delta t}{T}}$$

και άρα:

$$1 + \phi + \phi^2 + \dots + \phi^{2N_H} = 0 \quad \blacksquare$$

Θεώρημα 5.2 Αν r και q είναι ακέραιοι ($\in \mathcal{Z}$) τότε ισχύει:

$$\sum_{\kappa=0}^{2N_H} \phi^{\kappa \cdot r} = \begin{cases} 0 & \text{αν } r \neq q \cdot (2N_H + 1) \\ 2N_H + 1 & \text{αν } r = q \cdot (2N_H + 1) \end{cases}$$

Απόδειξη

(i) Έστω $r \neq q \cdot (2N_H + 1)$. Έστω μάλιστα $r = 1$. Τότε:

$$\sum_{\kappa=0}^{2N_H} \phi^{\kappa \cdot r} = \sum_{\kappa=0}^{2N_H} \phi^{\kappa} = 1 + \phi + \phi^2 + \dots + \phi^{2N_H} = 0, \text{ λόγω προηγούμενου θεωρήματος}$$

Αν για παράδειγμα $r = 2$, τότε όμοια:

$$\sum_{\kappa=0}^{2N_H} \phi^{2\kappa} = 1 + \phi^2 + \phi^4 + \dots + \phi^{4N_H} \stackrel{N_H=2}{=} 1 + \phi^2 + \phi^4 + \phi^6 + \phi^8$$

όμως $\phi^6 = \phi^{(5-1)} = \phi^1$ και $\phi^8 = \phi^{(8-5)} = \phi^3$ και άρα :

$$1 + \phi^2 + \phi^4 + \phi^6 + \phi^8 = 1 + \phi^2 + \phi^4 + \phi^1 + \phi^3 = 0$$

(ii) Αν $r = q \cdot (2N_H + 1)$ τότε:

$$\sum_{\kappa=0}^{2N_H} \phi^{\kappa \cdot r} = \sum_{\kappa=0}^{2N_H} \phi^{\kappa \cdot q(2N_H+1)} = \sum_{\kappa=0}^{2N_H} \phi^0 = 2N_H + 1$$

ο.ε.δ \blacksquare

Ορίζουμε τον συζυγή μιγαδικό πίνακα του πίνακα \mathcal{M} :

$$\overline{\mathcal{M}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \overline{\phi^1} & \overline{\phi^2} & \overline{\phi^3} & \overline{\phi^4} \\ 1 & \overline{\phi^2} & \overline{\phi^4} & \overline{\phi^6} & \overline{\phi^8} \\ 1 & \overline{\phi^3} & \overline{\phi^6} & \overline{\phi^9} & \overline{\phi^{12}} \\ 1 & \overline{\phi^4} & \overline{\phi^8} & \overline{\phi^{12}} & \overline{\phi^{16}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \overline{\phi^1} & \overline{\phi^2} & \overline{\phi^3} & \overline{\phi^4} \\ 1 & \overline{\phi^2} & \overline{\phi^4} & \overline{\phi^6} & \overline{\phi^8} \\ 1 & \overline{\phi^3} & \overline{\phi^6} & \overline{\phi^9} & \overline{\phi^{12}} \\ 1 & \overline{\phi^4} & \overline{\phi^8} & \overline{\phi^{12}} & \overline{\phi^{16}} \end{bmatrix}$$

όπου η δεύτερη ισότητα φαίνεται εύκολα ότι ισχύει αφού

$$\begin{aligned} \phi &= e^{j2\pi\frac{\Delta t}{T}} = \cos\left(\frac{2\pi\Delta t}{T}\right) + j \cdot \sin\left(\frac{2\pi\Delta t}{T}\right) \\ \Rightarrow \overline{\phi} &= \cos\left(\frac{2\pi\Delta t}{T}\right) - j \cdot \sin\left(\frac{2\pi\Delta t}{T}\right) = e^{-j2\pi\frac{\Delta t}{T}} \end{aligned}$$

Ακόμη μπορεί να παρατηρηθεί ότι

$$\phi^{-1} = \frac{\cos\left(\frac{2\pi\Delta t}{T}\right) - j \cdot \sin\left(\frac{2\pi\Delta t}{T}\right)}{\cos^2\left(\frac{2\pi\Delta t}{T}\right) + j \cdot \sin^2\left(\frac{2\pi\Delta t}{T}\right)} = \bar{\phi}$$

Το παραπάνω μπορεί εύκολα να γενικευτεί και για $\frac{2\pi\Delta t}{T}$, $\frac{2\pi 2\Delta t}{T}$, $\frac{2\pi 3\Delta t}{T}$ κ.λ.π $\Rightarrow \boxed{\bar{\phi}^\lambda = \phi^{-\lambda}}$ με $\lambda \in \mathcal{Z}$.

Οπότε εύκολα δείχνεται ότι:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \phi^1 & \phi^2 & \phi^3 & \phi^4 \\ 1 & \phi^2 & \phi^4 & \phi^6 & \phi^8 \\ 1 & \phi^3 & \phi^6 & \phi^9 & \phi^{12} \\ 1 & \phi^4 & \phi^8 & \phi^{12} & \phi^{16} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \bar{\phi}^1 & \bar{\phi}^2 & \bar{\phi}^3 & \bar{\phi}^4 \\ 1 & \bar{\phi}^2 & \bar{\phi}^4 & \bar{\phi}^6 & \bar{\phi}^8 \\ 1 & \bar{\phi}^3 & \bar{\phi}^6 & \bar{\phi}^9 & \bar{\phi}^{12} \\ 1 & \bar{\phi}^4 & \bar{\phi}^8 & \bar{\phi}^{12} & \bar{\phi}^{16} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Απόδειξη

Είναι προφανές ότι ο γενικός τύπος για τα στοιχεία του \mathcal{M} είναι: $\mathcal{M}_{i,j} = \phi^{(i-1) \cdot (j-1)}$, όπου $i, j \in \mathcal{N}$ με $1 \leq i, j \leq N_T$ και ομοίως $\bar{\mathcal{M}}_{i,j} = \bar{\phi}^{(i-1) \cdot (j-1)}$. Άρα:

(i) πολλαπλασιασμός της i γραμμής \times την i στήλη:

$$\sum_{\kappa=1}^{N_T} \phi^{(i-1) \cdot (\kappa-1)} \cdot \bar{\phi}^{(\kappa-1) \cdot (i-1)} = \sum_{\kappa=1}^{N_T} (\phi \cdot \bar{\phi})^{(i-1) \cdot (\kappa-1)} = N_T = 2N_H + 1 \stackrel{N_H=2}{=} 5$$

(ii) πολλαπλασιασμός της i γραμμής \times την j στήλη:

$$\sum_{\kappa=1}^{N_T} \phi^{(i-1) \cdot (\kappa-1)} \cdot \bar{\phi}^{(\kappa-1) \cdot (j-1)} = \sum_{\kappa=1}^{N_T} \phi^{(i-1) \cdot (\kappa-1)} \cdot \phi^{(\kappa-1) \cdot (-j+1)} = \sum_{\kappa=1}^{N_T} \phi^{(\kappa-1) \cdot (i-j)} = \sum_{\kappa=0}^{2N_H} \phi^{\kappa \cdot (i-j)} = 0$$

λόγω προηγούμενου θεωρήματος και επειδή $|i - j| < N_T$ και άρα $(i - j) \neq q \cdot (2N_H + 1) \forall q \in \mathcal{Z}$. ■

Άρα είναι προφανές ότι:

$$\boxed{\mathcal{M}^{-1} = \frac{1}{5} \bar{\mathcal{M}}} \quad \text{ή γενικότερα} \quad \boxed{\mathcal{M}^{-1} = \frac{1}{N_T} \bar{\mathcal{M}}}$$

Άρα τα $\bar{\mathbf{W}}_0, \dots, \bar{\mathbf{W}}_4$ μπορούν να βρεθούν εύκολα ως :

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{W}}_0 \\ \bar{\mathbf{W}}_1 \\ \bar{\mathbf{W}}_2 \\ \bar{\mathbf{W}}_3 \\ \bar{\mathbf{W}}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \phi^{-1} & \phi^{-2} & \phi^{-3} & \phi^{-4} \\ 1 & \phi^{-2} & \phi^{-4} & \phi^{-6} & \phi^{-8} \\ 1 & \phi^{-3} & \phi^{-6} & \phi^{-9} & \phi^{-12} \\ 1 & \phi^{-4} & \phi^{-8} & \phi^{-12} & \phi^{-16} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{W}_0 \\ \mathbf{W}_1 \\ \mathbf{W}_2 \\ \mathbf{W}_3 \\ \mathbf{W}_4 \end{bmatrix} \quad (\Sigma 2)$$

Με αντίστοιχη γραφή για τα χωρικά υπόλοιπα προκύπτει

$$\mathbf{R}(t) \approx \widehat{\mathbf{R}}_0 + \sum_{n=1}^{N_H} \left(\widehat{\mathbf{R}}_{an} \cos(\omega n t) + \widehat{\mathbf{R}}_{bn} \sin(\omega n t) \right)$$

και ονομάζω αντίστοιχα

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathbf{R}}_3 &= \frac{\widehat{\mathbf{R}}_{a2} + j\widehat{\mathbf{R}}_{b2}}{2} , & \widetilde{\mathbf{R}}_4 &= \frac{\widehat{\mathbf{R}}_{a1} + j\widehat{\mathbf{R}}_{b1}}{2} \\ \widetilde{\mathbf{R}}_1 &= \frac{\widehat{\mathbf{R}}_{a1} - j\widehat{\mathbf{R}}_{b1}}{2} , & \widetilde{\mathbf{R}}_2 &= \frac{\widehat{\mathbf{R}}_{a2} - j\widehat{\mathbf{R}}_{b2}}{2} \end{aligned} \quad \text{και } \widetilde{\mathbf{R}}_0 = \widehat{\mathbf{R}}_0$$

Αν τώρα ακολουθηθεί η ίδια ακριβώς διαδικασία με τα \mathbf{W}_i , μπορεί να γραφεί και για τα χωρικά υπόλοιπα \mathbf{R}_i το αντίστοιχο του (Σ2)

$$\begin{bmatrix} \widetilde{\mathbf{R}}_0 \\ \widetilde{\mathbf{R}}_1 \\ \widetilde{\mathbf{R}}_2 \\ \widetilde{\mathbf{R}}_3 \\ \widetilde{\mathbf{R}}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \phi^{-1} & \phi^{-2} & \phi^{-3} & \phi^{-4} \\ 1 & \phi^{-2} & \phi^{-4} & \phi^{-6} & \phi^{-8} \\ 1 & \phi^{-3} & \phi^{-6} & \phi^{-9} & \phi^{-12} \\ 1 & \phi^{-4} & \phi^{-8} & \phi^{-12} & \phi^{-16} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{R}_0 \\ \mathbf{R}_1 \\ \mathbf{R}_2 \\ \mathbf{R}_3 \\ \mathbf{R}_4 \end{bmatrix} \quad (\Sigma 3)$$

Άρα: Με γνωστά τα $\vec{\mathbf{W}} = (\mathbf{W}_0, \mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2, \mathbf{W}_3, \mathbf{W}_4)^T$ και τα $\vec{\mathbf{R}} = (\mathbf{R}_0, \mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \mathbf{R}_3, \mathbf{R}_4)$ και προφανώς και το $\phi = e^{j\frac{2\pi}{N_T}}$ επιλύονται τα (Σ2) και (Σ3) και υπολογίζονται τα μιγαδικά πεδία $\widetilde{\mathbf{W}}_i$ και $\widetilde{\mathbf{R}}_i$. Χωρίζοντάς τους τώρα σε πραγματικό και φανταστικό μέρος βρίσκουμε τα

$$\widehat{\vec{\mathbf{W}}} = (\widehat{\mathbf{W}}_0, \widehat{\mathbf{W}}_{a1}, \widehat{\mathbf{W}}_{b1}, \widehat{\mathbf{W}}_{a2}, \widehat{\mathbf{W}}_{b2})^T \quad \text{και} \quad \widehat{\vec{\mathbf{R}}} = (\widehat{\mathbf{R}}_0, \widehat{\mathbf{R}}_{a1}, \widehat{\mathbf{R}}_{b1}, \widehat{\mathbf{R}}_{a2}, \widehat{\mathbf{R}}_{b2})^T$$

Στη συνέχεια θα διατυπωθούν δύο συστήματα που θα δίνουν απ' ευθείας τα $\widehat{\vec{\mathbf{W}}}$ και $\widehat{\vec{\mathbf{R}}}$ της παρακάτω μορφής

$$\widehat{\vec{\mathbf{W}}} = \mathbf{E} \cdot \vec{\mathbf{W}} \quad , \quad \widehat{\vec{\mathbf{R}}} = \mathbf{E} \cdot \vec{\mathbf{R}}$$

Σχόλια : Για $N_H = 2$, το μιγαδικό σύστημα (Σ2) θα δώσει 5 μιγαδικούς $\widetilde{\mathbf{W}}_i$. Όμως για να βρεθούν τα $\widehat{\mathbf{W}}_{a2}, \widehat{\mathbf{W}}_{b2}$ χρειάζονται δύο εξισώσεις, ενώ διατίθενται 4 από τα πραγματικά και φανταστικά μέλη των $\widetilde{\mathbf{W}}_2$ και $\widetilde{\mathbf{W}}_3$, αφού

$$\widetilde{\mathbf{W}}_3 = \frac{\widehat{\mathbf{W}}_{a2} + j\widehat{\mathbf{W}}_{b2}}{2} \quad , \quad \widetilde{\mathbf{W}}_2 = \frac{\widehat{\mathbf{W}}_{a2} - j\widehat{\mathbf{W}}_{b2}}{2}$$

Τίθεται όμως το ερώτημα αν είναι αυτές συμβατές μεταξύ τους, δηλαδή αν για παράδειγμα είτε με το $\widetilde{\mathbf{W}}_2$ είτε με το $\widetilde{\mathbf{W}}_3$ καταλήγουμε στα ίδια $\widehat{\mathbf{W}}_{a2}$ και $\widehat{\mathbf{W}}_{b2}$, δηλαδή αν οι $\widetilde{\mathbf{W}}_2$ και $\widetilde{\mathbf{W}}_3$ έχουν ίδιο πραγματικό μέρος και αντίθετο φανταστικό.

Για παράδειγμα (αντίστοιχα ισχύουν και για τα $\widetilde{\mathbf{W}}_1$ και $\widetilde{\mathbf{W}}_4$):

$$\begin{aligned} 5\widetilde{\mathbf{W}}_2 &= \mathbf{W}_0 + \mathbf{W}_1\phi^{-2} + \mathbf{W}_2\phi^{-4} + \mathbf{W}_3\phi^{-6} + \mathbf{W}_4\phi^{-8} \\ 5\widetilde{\mathbf{W}}_3 &= \mathbf{W}_0 + \mathbf{W}_1\phi^{-3} + \mathbf{W}_2\phi^{-6} + \mathbf{W}_3\phi^{-9} + \mathbf{W}_4\phi^{-12} \end{aligned}$$

Αφού $5a = 2\pi$ είναι:

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Re}(5\mathbf{W}_2) &= \mathbf{W}_0 + \mathbf{W}_1 \cos(-2a) + \mathbf{W}_2 \cos(-4a) + \mathbf{W}_3 \cos(-6a) + \mathbf{W}_4 \cos(-8a) = \\
 &= \mathbf{W}_0 + \mathbf{W}_1 \cos(3a) + \mathbf{W}_2 \cos(6a) + \mathbf{W}_3 \cos(9a) + \mathbf{W}_4 \cos(12a) = \\
 &= \mathbf{W}_0 + \mathbf{W}_1 \cos(-3a) + \mathbf{W}_2 \cos(-6a) + \mathbf{W}_3 \cos(-9a) + \mathbf{W}_4 \cos(-12a) = \operatorname{Re}(5\widetilde{\mathbf{W}}_3) \\
 \operatorname{Im}(5\mathbf{W}_2) &= +\mathbf{W}_1 \sin(-2a) + \mathbf{W}_2 \sin(-4a) + \mathbf{W}_3 \sin(-6a) + \mathbf{W}_4 \sin(-8a) = \\
 &= +\mathbf{W}_1 \sin(3a) + \mathbf{W}_2 \sin(6a) + \mathbf{W}_3 \sin(9a) + \mathbf{W}_4 \sin(12a) = \\
 &= -\mathbf{W}_1 \sin(-3a) - \mathbf{W}_2 \sin(-6a) - \mathbf{W}_3 \sin(-9a) - \mathbf{W}_4 \sin(-12a) = -\operatorname{Im}(5\widetilde{\mathbf{W}}_3)
 \end{aligned}$$

Οπότε θα χρησιμοποιηθούν τελικά οι 3 πρώτες εξισώσεις του (Σ2), δηλαδή, στη γενική περίπτωση, οι $N_H + 1$ πρώτες εξισώσεις.

Έτσι εύκολα προκύπτει η παρακάτω σχέση:

$$\begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{W}}_0 \\ \widehat{\mathbf{W}}_{a1} \\ \widehat{\mathbf{W}}_{b1} \\ \widehat{\mathbf{W}}_{a2} \\ \widehat{\mathbf{W}}_{b2} \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 \cos(a) & 2 \cos(2a) & 2 \cos(3a) & 2 \cos(4a) \\ 0 & 2 \sin(a) & 2 \sin(2a) & 2 \sin(3a) & 2 \sin(4a) \\ 2 & 2 \cos(2a) & 2 \cos(4a) & 2 \cos(6a) & 2 \cos(8a) \\ 0 & 2 \sin(2a) & 2 \sin(4a) & 2 \sin(6a) & 2 \sin(8a) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{W}_0 \\ \mathbf{W}_1 \\ \mathbf{W}_2 \\ \mathbf{W}_3 \\ \mathbf{W}_4 \end{bmatrix}$$

όπου ορίζεται:

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 \cos(a) & 2 \cos(2a) & 2 \cos(3a) & 2 \cos(4a) \\ 0 & 2 \sin(a) & 2 \sin(2a) & 2 \sin(3a) & 2 \sin(4a) \\ 2 & 2 \cos(2a) & 2 \cos(4a) & 2 \cos(6a) & 2 \cos(8a) \\ 0 & 2 \sin(2a) & 2 \sin(4a) & 2 \sin(6a) & 2 \sin(8a) \end{bmatrix}$$

Το (Σ0) γράφεται ως :

$$\left. \begin{aligned} 0 &= \mathbf{R}_0 \\ -\omega \widehat{\mathbf{W}}_{b1} &= \widehat{\mathbf{R}}_{a1} \\ \omega \widehat{\mathbf{W}}_{a1} &= \widehat{\mathbf{R}}_{b1} \\ -2\omega \widehat{\mathbf{W}}_{b2} &= \widehat{\mathbf{R}}_{a2} \\ 2\omega \widehat{\mathbf{W}}_{a2} &= \widehat{\mathbf{R}}_{b2} \end{aligned} \right\}$$

ή μητρικά

$$\omega A \cdot \widehat{\mathbf{W}} = \widehat{\mathbf{R}}$$

όπου

$$\widehat{\mathbf{W}} = (\widehat{\mathbf{W}}_0, \widehat{\mathbf{W}}_{a1}, \widehat{\mathbf{W}}_{b1}, \widehat{\mathbf{W}}_{a2}, \widehat{\mathbf{W}}_{b2})^T \quad \text{και} \quad \widehat{\mathbf{R}} = (\widehat{\mathbf{R}}_0, \widehat{\mathbf{R}}_{a1}, \widehat{\mathbf{R}}_{b1}, \widehat{\mathbf{R}}_{a2}, \widehat{\mathbf{R}}_{b2})^T$$

και

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{Είναι: } \widehat{\vec{W}} &= E\vec{W} \text{ και όμοια } \widehat{\vec{R}} = E\vec{R} \text{ και } \omega A\vec{W} = \vec{R} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \omega A E\vec{W} = E\vec{R} \Rightarrow \omega \underbrace{E^{-1}AE}_{-D} \vec{W} = \vec{R} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \boxed{\vec{R} + \omega D\vec{W} = 0} \end{aligned} \quad (5.3)$$

Η εξίσωση (5.3) είναι η *εξίσωση ισορροπίας των αρμονικών* (*harmonic balance equation*), αντίστοιχη των αρχικών εξισώσεων (5.1) για προσέγγιση με δύο αρμονικές ($N_H = 2$). Τώρα απομένει ο προσδιορισμός των μητρώων E^{-1} και D . Λόγω του τύπου (5.2) γραμμένου για 2 αρμονικές, είναι προφανή τα στοιχεία που αποτελούν τον E^{-1} . Συγκεκριμένα έχουμε (με $a = \frac{2\pi}{T}\Delta t$):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{W}_0 \\ \mathbf{W}_1 \\ \mathbf{W}_2 \\ \mathbf{W}_3 \\ \mathbf{W}_4 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & \cos(a) & \sin(a) & \cos(2a) & \sin(2a) \\ 1 & \cos(2a) & \sin(2a) & \cos(4a) & \sin(4a) \\ 1 & \cos(3a) & \sin(3a) & \cos(6a) & \sin(6a) \\ 1 & \cos(4a) & \sin(4a) & \cos(8a) & \sin(8a) \end{bmatrix}}_{E^{-1}} \cdot \begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{W}}_0 \\ \widehat{\mathbf{W}}_{a1} \\ \widehat{\mathbf{W}}_{b1} \\ \widehat{\mathbf{W}}_{a2} \\ \widehat{\mathbf{W}}_{b2} \end{bmatrix}$$

Τότε:

$$E^{-1}A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & \sin(a) & -\cos(a) & 2\sin(2a) & -2\cos(2a) \\ 0 & \sin(2a) & -\cos(2a) & 2\sin(4a) & -2\cos(4a) \\ 0 & \sin(3a) & -\cos(3a) & 2\sin(6a) & -2\cos(6a) \\ 0 & \sin(4a) & -\cos(4a) & 2\sin(8a) & -2\cos(8a) \end{bmatrix}$$

Στην απόδειξη της εξίσωσης (5.3) είχε οριστεί

$$\boxed{D = -E^{-1}AE} \quad (5.4)$$

Τα στοιχεία του D επομένως θα είναι:

* $D_{1,1} = 0$

* $D_{1,2} = \frac{-1}{5} [-2\sin(a) - 4\sin(2a)] = \frac{2}{5} [\sin(a) + 2\sin(2a)]$

$$* D_{1,3} = \frac{-1}{5} [-2 \sin(2a) - 4 \sin(4a)] = \frac{2}{5} [\sin(2a) + 2 \sin(4a)]$$

$$* D_{1,4} = \frac{-1}{5} [-2 \sin(3a) - 4 \sin(6a)] = \frac{2}{5} [\sin(3a) + 2 \sin(6a)]$$

$$* D_{1,5} = \frac{-1}{5} [-2 \sin(4a) - 4 \sin(8a)] = \frac{2}{5} [\sin(4a) + 2 \sin(8a)]$$

$$* D_{2,2} = \frac{-1}{5} [2 \sin(a) \cos(a) - 2 \sin(a) \cos(a) + 4 \sin(2a) \cos(2a) - 4 \sin(2a) \cos(2a)] = 0$$

$$\begin{aligned} * D_{3,4} &= \frac{-1}{5} [2 \sin(2a) \cos(3a) - 2 \sin(3a) \cos(2a) + 4 \sin(4a) \cos(6a) - 4 \sin(6a) \cos(4a)] = \\ &= \frac{-1}{5} [2 \sin(2a) \cos(2a) + 2 \sin(2a) \cos(2a) - 4 \sin(a) \cos(a) - 4 \sin(a) \cos(a)] = \\ &= \frac{-2}{5} [2 \sin(2a) \cos(2a) - 4 \sin(a) \cos(a)] = \frac{-2}{5} [\sin(4a) - 2 \sin(2a)] = \\ &= \frac{2}{5} [\sin(a) + 2 \sin(2a)] \end{aligned}$$

Έτσι , υπολογίζουμε και τα υπόλοιπα στοιχεία του μητρώου D , και παρατηρούμε ότι υπακούουν τον γενικό τύπο για $N_H = 2$:

$$D_{i,j} = \frac{2}{5} [\sin \{a(j-i)\} + 2 \sin \{2a(j-i)\}]$$

Γενίκευση για $N_H > 2$

Κάνοντας γενίκευση από τα παραπάνω για περισσότερες απο 2 αρμονικές προκύπτουν οι παρακάτω γενικοί τύποι (για $t_0 = 0$) :

$$E^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 1 & \cos(a) & \sin(a) & \dots & \cos(N_H \cdot a) & \sin(N_H \cdot a) \\ 1 & \cos(2a) & \sin(2a) & \dots & \cos(N_H \cdot 2a) & \sin(N_H \cdot 2a) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cos\{(N_T - 1)a\} & \sin\{(N_T - 1)a\} & \dots & \cos\{N_H(N_T - 1)a\} & \sin\{N_H(N_T - 1)a\} \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

Και

$$E = \frac{1}{N_T} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 2 & 2 \cos(a) & 2 \cos(2a) & \dots & 2 \cos\{(N_T - 1)a\} \\ 0 & 2 \sin(a) & 2 \sin(2a) & \dots & 2 \sin\{(N_T - 1)a\} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 \cos(N_H \cdot a) & 2 \cos(2N_H \cdot a) & \dots & 2 \cos\{(N_T - 1)N_H \cdot a\} \\ 0 & 2 \sin(N_H \cdot a) & 2 \sin(2N_H \cdot a) & \dots & 2 \sin\{(N_T - 1)N_H \cdot a\} \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

Ενώ για τα στοιχεία του D ισχύει:

$$D_{i,j} = \frac{2}{N_T} \sum_{\kappa=1}^{N_H} \kappa \sin(a\kappa(j-i)) \quad (5.7)$$

και για το A :

$$\text{για } n \in \mathcal{N} \text{ με } 1 \leq n \leq N_H \quad A_{2n,2n+1} = -n, \quad A_{2n+1,2n} = n \text{ και αλλού } A = 0. \quad (5.8)$$

Συμπέρασμα

Σύμφωνα με τη μέθοδο της *ισοροπίας των αρμονικών*, αντί για τις χρονικά μη-μόνιμες εξισώσεις (5.1) θα λύνεται η:

$$\frac{d\vec{W}}{d\tau} + \omega D \vec{W} + \vec{R} = 0 \quad (5.9)$$

όπου έχει προστεθεί επιπλέον μια ψευδοχρονική παράγωγος για λόγους σύγκλισης (τ : ψευδοχρόνος).

Από την παραπάνω διαδικασία ουσιαστικά αποδείχτηκε ότι αν το \mathbf{W} μπορεί να προσεγγιστεί με πεπερασμένους όρους σειράς Fourier (προφανής προϋπόθεση η περιοδικότητα του φαινομένου στο χρόνο), τότε ισχύει προσεγγιστικά για την παράγωγό του \mathbf{W} ως προς τον πραγματικό χρόνο (t):

$$\frac{d\mathbf{W}}{dt} = \omega D \mathbf{W}, \quad \text{με } \omega = \frac{2\pi}{T} \text{ όπου } T \text{ η περίοδος.} \quad (5.10)$$

Ακόμη, να παρατηρηθεί και η σημασία του μητρώου E (σχέση (5.6)), μέσω του οποίου γίνεται η μετάβαση από το πεδίο του χρόνου στο πεδίο των συχνοτήτων. Συγκεκριμένα, η πρακτική που θα ακολουθηθεί έτσι ώστε να υπολογιστεί το πεδίο \mathbf{W} σε κάθε χρονική στιγμή θα είναι η εξής:

- Επίλυση της εξίσωσης της ισοροπίας των αρμονικών (εξίσωση (5.9)) και υπολογισμός του \vec{W} (δηλαδή του πεδίου \mathbf{W} στις N_T στιγμές).
- Πολλαπλασιασμός του \vec{W} με το E και υπολογισμός των συντελεστών Fourier $\widehat{\vec{W}}$ σύμφωνα με τον τύπο:

$$\widehat{\vec{W}} = E \cdot \vec{W} \quad (5.11)$$

- Εύρεση του πεδίου \vec{W} σε όποια χρονική στιγμή μέσα στην περίοδο είναι επιθυμητό βάσει του τύπου Fourier για τις N_H αρμονικές (σχέση (5.2)).

Αυτή η διαδικασία θα γίνεται πάντα, έτσι ώστε να είναι υπολογίσιμα τα αποτελέσματα σε κάθε χρονική στιγμή της περιόδου και θα αναφέρεται στη συνέχεια ‘αναδόμηση’ της σειράς *Fourier*.

Παρατηρήσεις

- Ενώ ουσιαστικά οι εξισώσεις είναι γραμμένες στο πεδίο των συχνοτήτων, η αριθμητική τους επίλυση γίνεται στο πεδίο του χρόνου. Η μετάβαση αυτή έγινε αφού πρώτα, μέσω μαθηματικής απόδειξης, γράφτηκαν οι εξισώσεις στο πεδίο των συχνοτήτων, αλλά με χρήση των μεταβλητών στο πεδίο του χρόνου σε N_T ισαπέχουσες στιγμές μέσα στην περίοδο.
- Σύμφωνα με τη μέθοδο και αυτό που αποδείχτηκε προηγουμένως στην εξίσωση (5.10) μας δείχνει ότι λογικά οι μεγαλύτερες συχνότητες για να προσεγγιστούν καλύτερα χρειάζονται περισσότερες αρμονικές αφού το κομμάτι το οποίο αλλάζει στην εξίσωση, όταν εφαρμόζεται η μέθοδος *HB* είναι η χρονική παράγωγος. Όταν λοιπόν το \mathbf{W} προσεγγίζεται από την (5.2) αναμένεται οι υψηλές συχνότητες που ‘κόβονται’ (συχνότητες μεγαλύτερες από το $N_H \cdot f$), με $f = T^{-1}$ τη συχνότητα διέγερσης να παίζουν τόσο σημαντικότερο ρόλο στην χρονική παράγωγο που προσεγγίζεται όσο μεγαλύτερη είναι η βασική συχνότητα f (αφού βγαίνει ως παράγοντας το f έξω από τα ημίτονα και τα συνιμήτονα όταν παραγωγίζεται η σειρά *Fourier*). Με άλλα λόγια, όσο μεγαλύτερη είναι η συχνότητα, τόσο μεγαλύτερη είναι η απόκλιση της παραγώγου που λαμβάνεται από τον τύπο (5.10) από την ακριβή τιμή της.
- Ακόμη αξίζει να παρατηρηθεί ότι το άθροισμα των στοιχείων του D σε μία γραμμή ισούται με 0, πράγμα που σημαίνει ότι οριακά η σχέση (5.10) μπορεί να εφαρμοστεί και για σταθερές συναρτήσεις θεωρούμενες οριακά περιοδικές και να δώσει σωστά $\frac{d\mathbf{W}}{dt} = 0$.
- Επιπλέον να παρατηρηθεί η ‘κυκλικότητα’ στα στοιχεία του D , κάτι το αναμενόμενο, δεδομένου του ότι δεν υπάρχει λόγος για διαφορετικές στιγμές η παράγωγος ως προς το χρόνο να δίνεται από διαφορετικό τύπο συναρτήσεων των προηγούμενων και των επόμενων στιγμών. Έτσι, ουσιαστικά η σχέση (5.10) αποδεικνύει ότι η παράγωγος στην i χρονική στιγμή θα είναι:

$$\frac{d\mathbf{W}^i}{dt} = \omega D_{1,2} \mathbf{W}^{i+1} + \omega D_{1,3} \mathbf{W}^{i+2} + \dots + \omega D_{1,N_T} \mathbf{W}^{i+N_T-1} \quad (5.12)$$

Προφανώς στην παραπάνω εξίσωση \mathbf{W}^{i+N_T-1} εννοούμε τη λύση \mathbf{W} τη στιγμή που βρίσκεται χρονικά $(N_T - 1) \cdot \Delta t$ μπροστά από την i ή $-\Delta t$ πίσω από αυτή (λόγω περιοδικότητας αυτά τα δύο είναι ακριβώς ίδια). Με αυτήν την παρατήρηση ουσιαστικά τονίζεται ότι μόνο μία γραμμή από τον πίνακα D αρκεί για τη γνώση όλου του πίνακα.

Κεφάλαιο 6

Διατύπωση και επίλυση των εξισώσεων Euler σύμφωνα με τη μέθοδο της Ισορροπίας των Αρμονικών

Σε αυτό το κεφάλαιο θα εξηγηθεί ο τρόπος με τον οποίο εφαρμόστηκε η μέθοδος της **Ισορροπίας των Αρμονικών** (Harmonic Balance method) στις εξισώσεις ροής μη συνεκτικού ρευστού Euler, και πώς αυτές επιλύθηκαν αριθμητικά.

6.1 Σχηματισμός των εξισώσεων

Στο κεφάλαιο που εξηγείται η μέθοδος της Ισορροπίας των Αρμονικών ουσιαστικά έχει αποδειχτεί ότι αν το \vec{W} μπορεί να προσεγγιστεί από άθροισμα πεπερασμένων όρων σειράς *Fourier*, τότε ισχύει

$$\frac{d\vec{W}}{dt} = \omega D\vec{W}, \quad \text{με } \omega = \frac{2\pi}{T}. \quad (6.1)$$

όπου σκόπιμα το \mathbf{W} είναι με έντονα γράμματα, για να υποδηλώνει ότι το \mathbf{W} θα μπορούσε κάλλιστα να είναι ένα πεδίο και όχι μόνο μία μεταβλητή. Στην (6.1) το μητρώο D διάστασης $N_T \times N_T$, με N_T τον αριθμό των ισαπεχουσών χρονικών στιγμών που θεωρώ μέσα στην περίοδο, δίνεται από τον τύπο

$$D_{i,j} = \frac{2}{N_T} \sum_{\kappa=1}^{N_H} \kappa \sin(\kappa(j-i)) \quad (6.2)$$

με $N_H = \frac{N_T - 1}{2}$ τον αριθμό των αρμονικών. Υπενθυμίζουμε ότι η διακριτοποιημένη μορφή των ολοκληρωμένων εξισώσεων ροής *Euler* σε μία κυψέλη ελέγχου, γραμμένη σε έναν κόμβο,

έστω P , κάποια δεδομένη χρονική στιγμή, είναι

$$\left(\frac{\partial \vec{W}}{\partial t} \right)_P A_{cell} + \sum_{Q \in \text{neigh}(P)} \vec{\Phi}_{PQ} = 0 \quad (6.3)$$

Να παρατηρηθεί η διαφορά στην έκφραση των (6.1) και (6.3), όπου στην πρώτη το σύμβολο του διανύσματος υποδηλώνει τις N_T διαφορετικές εικόνες του πεδίου ροής και στην δεύτερη το ίδιο σύμβολο υποδηλώνει την ‘τετράδα’ των μεταβλητών ροής σε έναν κόμβο, κάποια δεδομένη χρονική στιγμή.

Μπορεί να παρατηρηθεί από το κεφάλαιο όπου αναπτύσσονται οι εξισώσεις της μεθόδου HB ότι το πρώτο βήμα είναι ο χωρισμός της λύσης \mathbf{W} σε N_T χρονικά ισαπέχουσες εικόνες της. Επόμενο είναι ότι και οι εξισώσεις ροής θα γραφτούν N_T φορές για κάθε μία από αυτές τις στιγμές. Έτσι ουσιαστικά οι εξισώσεις καταλήγουν σε σύστημα $4N_s \cdot N_T$ εξισώσεων με ίδιο αριθμό αγνώστων (N_s ο αριθμός των κόμβων), οι οποίες αναγκαστικά θα λυθούν όλες μαζί (γι’ αυτό εξάλλου ονομάστηκε ‘σύστημα’), με άλλα λόγια θα απουσιάζει εντελώς η λογική της χρόνο-προέλασης όπου η λύση προκύπτει διαδοχικά πρώτα για τις προηγούμενες στιγμές και μετά για τις επόμενες. Αφού χωριστεί η λύση σε N_T χρονικές εικόνες (πεδία) τότε σε κάθε κόμβο P έχουμε $4N_T$ αγνώστους για τα διδιάστατα προβλήματα ροής αυτής της διπλωματικής.

Να παρατηρηθεί ακόμη ότι το αντίστοιχο χωρικό υπόλοιπο R στο κεφάλαιο που εξηγείται η μέθοδος HB είναι το χρονικά μόνιμο (*steady*) μέρος της εξίσωσης, δηλαδή το $\sum_{Q \in \text{neigh}(P)} \vec{\Phi}_{PQ}$.

Παρακάτω θα εφαρμοστεί τανυστικός συμβολισμός όπου κάθε επαναλαμβανόμενος δείκτης σημαίνει άθροισμα. Πιο συγκεκριμένα οι δείκτες it και jt θα αναφέρονται στο χρόνο και, άρα, θα παίρνουν τιμές από το 1 μέχρι και το N_T και οι δείκτες iv και jv θα αναφέρονται στη συντηριτική μεταβλητή της ροής, δηλαδή μία από τις $[\rho, \rho u, \rho v, E]^T$ και, άρα, θα παίρνουν τιμή από 1 μέχρι και 4. Τώρα, αν αντικαταστήσουμε την εξίσωση (6.1) στην (6.3) τότε παίρνουμε την εξίσωση της ισορροπίας των αρμονικών των εξισώσεων *Euler*. Έτσι έχουμε

$$A_{cell} \cdot \omega D_{it,jt} W_{iv,jt} + \sum_{Q \in \text{neigh}(P)} \Phi_{PQ}^{iv,it} = 0 \quad (6.4)$$

Η παραπάνω είναι η ‘ iv ’ από τις 4 εξισώσεις της ροής (η πρώτη είναι η εξίσωση συνέχειας, η δεύτερη και η τρίτη η εξίσωση ορμής κατά x και y αντίστοιχα και η τέταρτη η εξίσωση ενέργειας), γραμμένη την ‘ it ’ (από τις N_T) χρονική στιγμή.

Αν τώρα γίνει εισαγωγή μία ψευδοχρονικής παραγώγου για τη βελτίωση της σύγκλισης, η προηγούμενη εξίσωση γίνεται

$$A_{cell} \frac{dW_{iv,it}}{dt_{ps}} + A_{cell} \cdot \omega D_{it,jt} W_{iv,jt}^{k+1} + \sum_{Q \in \text{neigh}(P)} \Phi_{PQ}^{iv,it,k+1} = 0 \quad (6.5)$$

όπου ο δείκτης $k + 1$ αναφέρεται στον ψευδοχρόνο.

Και εδώ θα εφαρμοστεί η Δ -διατύπωση (Δ – *formulation*) για την αριθμητική επίλυση των εξισώσεων. Άρα, ορίζεται ότι

$$\vec{W}^{k+1} = \vec{W}^k + \Delta \vec{W}^{k+1} \quad (6.6)$$

Και εδώ ο όρος $\sum_{Q \in \text{neigh}(P)} \vec{\Phi}_{PQ}^{k+1}$ γραμμικοποιείται ως εξής έτσι ώστε να εφαρμοστεί για την επίλυση η Δ -διατύπωση (ίδια ακριβώς γραμμικοποίηση με το χρονικά μόνιμο (*steady*) πρόβλημα):

$$\sum_{Q \in \text{neigh}(P)} \vec{\Phi}_{PQ}^{k+1} = \sum_{Q \in \text{neigh}(P)} \vec{\Phi}_{PQ}^k + \sum_{Q \in \text{neigh}(P)} \left. \frac{\partial \vec{\Phi}_{PQ}}{\partial \vec{W}} \right|^k \cdot \Delta \vec{W}^{k+1} \quad (6.7)$$

Ο όρος $\sum_{Q \in \text{neigh}(P)} \left. \frac{\partial \vec{\Phi}_{PQ}}{\partial \vec{W}} \right|^{n+1,k} \cdot \Delta \vec{W}^{n+1,k+1}$ της παραπάνω εξίσωσης εξαρτάται από τα \vec{W}_P και τα \vec{W}_Q δηλαδή οι εξισώσεις ροής γραμμένες στον κόμβο P περιέχουν πληροφορία από το ίδιο το P και από όλους τους γείτονές του, Q . Με αυτή την λογική ο συγκεκριμένος όρος γίνεται

$$\sum_{Q \in \text{neigh}(P)} \left. \frac{\partial \vec{\Phi}_{PQ}}{\partial \vec{W}} \right|^k \cdot \Delta \vec{W}^{k+1} = [\text{diag}]_P \cdot \Delta \vec{W}_P^{k+1} + \sum_{Q \in \text{neigh}(P)} [\text{zm}]_Q \cdot \Delta \vec{W}_Q^{k+1} \quad (6.8)$$

Στην παραπάνω εξίσωση είναι το $[\text{diag}]$ και το $[\text{zm}]$ πίνακες 4×4 των οποίων οι τιμές είναι συνάρτηση των \vec{W}_P και \vec{W}_Q αντίστοιχα (εννοείται ότι οι τιμές τους αντλούνται από το πιο πρόσφατο ψευδοχρονικό βήμα ,δηλαδή από το W^k).

Αν ληφθεί υπόψη ότι $\frac{dW}{dt_{ps}} = \frac{W^{k+1} - W^k}{\Delta t_{ps}} = \frac{\Delta W^{k+1}}{\Delta t_{ps}}$ καθώς και οι εξισώσεις (6.6) μέχρι (6.8) και αντικατασταθούν οι ανάλογοι όροι της (6.5), αυτή γίνεται

$$A_{\text{cell}} \frac{\Delta W_{iv,it}}{\Delta t_{ps}} + A_{\text{cell}} \cdot \omega D_{it,jt} (W_{iv,jt} + \Delta W_{iv,jt}) + \sum_{Q \in \text{neigh}(P)} \Phi_{PQ}^{iv,it} + [\text{diag}]_P^{iv,jv,it} \cdot \Delta W_P^{jv} + \sum_{Q \in \text{neigh}(P)} [\text{zm}]_Q^{iv,jv,it} \cdot \Delta W_Q^{jv} = 0 \quad (6.9)$$

Στην παραπάνω εξίσωση χρησιμοποιείται τανυστικός συμβολισμός και ο επαναλαμβανόμενος δείκτης σημαίνει άθροιση. Ακόμη, οι δείκτες του ψευδοχρόνου έχουν παραλειφθεί, για να μην γίνει πολύπλοκη η έκφραση και επειδή είναι αυτονόητοι. Ακόμη ο δείκτης it στα $[\text{zm}]$, $[\text{diag}]$ μπήκε για να τονιστεί ότι αυτά υπολογίζονται στην it χρονική στιγμή και προφανώς πολλαπλασιάζονται με τα ΔW της αντίστοιχης στιγμής. Η παραπάνω εξίσωση είναι η iv από τις 4 εξισώσεις ροής, γραμμένη τη χρονική στιγμή it από τις N_T χρονικές στιγμές και γραμμένη στον κόμβο P του πλέγματος. Αν σε κάθε κόμβο, για κάθε μία από τις N_T στιγμές γραφτούν οι 4 εξισώσεις ροής, προκύπτει το σύστημα το οποίο τελικά πρέπει να επιλυθεί. Οι άγνωστοι είναι τα $\Delta W_{iv,it,iv}$, για όλα τα iv , is , it (ο δείκτης is ‘δείχνει’ τον κόμβο). Όλες οι άλλες μεταβλητές που εμφανίζονται είναι γνωστές ($[\text{zm}]$, $[\text{diag}]$), αφού αναφέρονται στην πιο πρόσφατη ψευδοχρονική στιγμή (k) που έχει βρεθεί η λύση W και είναι συναρτήσεις του W , άρα υπολογίσιμες.

Σε αυτό το σημείο αξίζει να παρατηρηθεί, πώς αλληλοεξαρτώνται οι μεταβλητές της ροής στην εξίσωση (6.9). Συγκεκριμένα:

- Μέσω του μητρώου D εμπλέκεται μία μεταβλητή της ροής, σε μία συγκεκριμένη θέση, με την ίδια μεταβλητή, στην ίδια θέση σε όλες τις N_T στιγμές (εκτός της στιγμής που είναι γραμμένη η εξίσωση, δεδομένου ότι τα διαγώνια στοιχεία του D είναι μηδενικά).
- Μέσω του μητρώου $[diag]$ εμπλέκεται μία μεταβλητή της ροής σε μία συγκεκριμένη θέση και σε μία συγκεκριμένη χρονική στιγμή με τις υπόλοιπες μεταβλητές της ροής του συγκεκριμένου κόμβου, τη συγκεκριμένη στιγμή. Δηλαδή, μέσω του $[diag]$ δεν υπάρχει ούτε χρονική, ούτε χωρική σύνδεση.
- Μέσω του μητρώου $[zm]$, πιο σωστά μέσω του όρου της εξίσωσης $\sum_{Q \in \text{neigh}(P)} [zm]_Q^{iv,jv,it} \cdot \Delta W_Q^{jv}$, εισάγεται στην εξίσωση η εξάρτηση από τους γειτονικούς κόμβους του κόμβου στον οποίο αναφέρεται η εξίσωση (δηλαδή από τις τετράδες των μεταβλητών ροής των γειτονικών κόμβων), τη συγκεκριμένη στιγμή στην οποία είναι γραμμένη η εξίσωση. Με άλλα λόγια, μέσω του συγκεκριμένου όρου δεν εισάγεται χρονική εξάρτηση στην εξίσωση, ούτε εξάρτηση από τον κόμβο P .

Χωρίζοντας τώρα την (6.8) σε δεξί και αριστερό μέλος (στο δεξί κρατάμε τους αγνώστους ΔW) έχουμε

$$A_{cell} \frac{\Delta W_{iv,it}}{\Delta t_{ps}} + A_{cell} \cdot \omega D_{it,jt} \Delta W_{iv,jt} + [diag]_P^{iv,jv,it} \cdot \Delta W_P^{jv} + \sum_{Q \in \text{neigh}(P)} [zm]_Q^{iv,jv,it} \cdot \Delta W_Q^{jv} = res_{it,iv}^P \quad (6.10)$$

όπου

$$res_{it,iv}^P = - \left[A_{cell} \cdot \omega D_{it,jt} W_{iv,jt} + \sum_{Q \in \text{neigh}(P)} \Phi_{PQ}^{iv,it} \right] \quad (6.11)$$

Το δεξί μέρος ($res_{it,iv}^P$) εκφράζει τη φυσική του προβλήματος και είναι ουσιαστικά η διακριτοποιημένη έκφραση της ισορροπίας των αρμονικών των ολοκληρωμένων και μετά διακριτοποιημένων εξισώσεων *Euler*. Αν αυτό είναι αρκούντως κοντά στο 0, τότε ουσιαστικά έχουμε βρεί τη ζητούμενη λύση.

6.2 Αλγόριθμος επαναληπτικής επίλυσης των εξισώσεων ροής

Ο συνολικός αλγόριθμος επαναληπτικής επίλυσης των εξισώσεων ροής παρουσιάζεται παρακάτω:

1. Αρχικοποίηση (αυτή η διαδικασία θα εξηγηθεί πιο κάτω): $\mathbf{W} = \mathbf{W}_{init}$, όπου \mathbf{W} το σύνολο των αγνώστων ποσοτήτων της ροής των οποίων τον υπολογισμό επιθυμούμε, δηλαδή η τετράδα των ροϊκών μεταβλητών σε κάθε κόμβο και για κάθε χρονική στιγμή)

2. $k = 1$ (ο δείκτης k αναφέρεται στον ψευδοχρόνο)
3. Σχηματισμός για κάθε κόμβο και για κάθε μία από τις N_T χρονικές στιγμές των μητρώων $[diag]_{4 \times 4}$, $[zm]_{4 \times 4}$, $[res]_{4 \times 1}$ καθώς και του ψευδο-χρονικού βήματος Δt_{ps} .
4. Επίλυση της (6.10) με επιλύτη τύπου *Jacobi* (η επίλυση με *Jacobi* εξηγείται πιο κάτω σε αυτό το κεφάλαιο), υπολογισμός δηλαδή των $\Delta \mathbf{W}^k$ και των $\mathbf{W}^k = \mathbf{W} + \Delta \mathbf{W}^k$.
5. Ανανέωση: $\mathbf{W} = \mathbf{W}^k$
6. $k \leftarrow k + 1$
7. Αν δεν ικανοποιείται το κριτήριο σύγκλισης επιστροφή στο βήμα 3.
8. Τέλος.

6.2.1 Αρχικοποίηση

Ως αρχικές τιμές, προκειμένου να ξεκινήσει το πρόγραμμα σε κάθε κόμβο τίθενται οι παρακάτω ποσότητες

$$\begin{bmatrix} \varrho \\ \varrho u \\ \varrho v \\ E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varrho_{far} \\ \varrho_{far} V_{far} \cos(a_1) \\ \varrho_{far} V_{far} \sin(a_1) \\ \frac{P_{out}}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} \varrho_{far} |\vec{V}_{far}|^2 \end{bmatrix} \quad (6.12)$$

Να τονιστεί ακόμη ότι η αρχικοποίηση δεν έχει σχέση με την αρχική συνθήκη η οποία στον κώδικα είναι το πεδίο ροής για μόνιμο (*steady*) φαινόμενο. Η αρχική συνθήκη στην επίλυση με τη μέθοδο της ισορροπίας των αρμονικών είναι αδιάφορη, αφού, όπως έχει εξηγηθεί, αυτή η μέθοδος αφορά το περιοδικό φαινόμενο. Με άλλα λόγια, λόγω περιοδικότητας, προκύπτει η συνθήκη της ισότητας των συντηρητικών μεταβλητών του πεδίου ροής για $t = T$ και $t = 0$ η οποία και εφαρμόζεται από τη στιγμή που γίνεται η προσέγγιση με σειρά *Fourier*. Στην επίλυση με χρονο-προέλαση θεωρήθηκε ως αρχική συνθήκη το χρονικά μόνιμο πεδίο για γωνία της επ' άπειρον ροής ίση με τη γωνία την $t = 0$. Δηλαδή, πρώτα επιλύεται το *steady* πρόβλημα με αρχικοποίηση επίσης από τον τύπο (6.12).

Να τονιστεί ότι για το *HB* στη εξίσωση (6.12) η γωνία πάρθηκε ανάλογα με τη χρονική στιγμή. Δηλαδή είναι σαν να έγινε αρχικοποίηση για N_T χρονικά μόνιμα προβλήματα. Πολλές φορές δε, οι πρώτες λίγες επαναλήψεις στον ψευδο-χρόνο γίνονταν χωρίς τον μη-μόνιμο όρο. Μετά από μικρό αριθμό επαναλήψεων στον ψευδοχρόνο (20) και προφανώς πολύ πριν ολοκληρωθούν τα N_T ξεχωριστά χρονικά μόνιμα προβλήματα (για να επιλυθεί το χρονικά μόνιμο πρόβλημα απαιτούνται περίπου 1100 βήματα στον ψευδοχρόνο) ξεκίνησε να εισάγεται στην εξίσωση και η χρονική παράγωγος, γραμμένη φυσικά σύμφωνα με τη μέθοδο της ισορροπίας των αρμονικών. Παρατηρήθηκε ότι αυτό το σημείο δεν επηρεάζει και τόσο

την σύγκλιση και ότι ακόμα και οι ίδιες τιμές να εισάγονταν ως αρχικοποίηση για κάθε χρονική στιγμή, ή ακόμα και από την αρχή απευθείας με τις τιμές της (6.12) να ξεκίναγε η επίλυση της ισορροπίας των αρμονικών δεν χειροτέρευε η σύγκλιση.

6.2.2 Ψευδοχρονικό βήμα Δt_{ps}

Όπως έχει αναφερθεί η ψευδο-χρονική παράγωγος έχει εισαχθεί προκειμένου να συγκλίνει η αριθμητική μέθοδος που χρησιμοποιείται για να λυθούν οι εξισώσεις. Στην μέθοδο αυτή, ο τύπος που χρησιμοποιήθηκε για το ψευδοχρονικό βήμα είναι ο ίδιος με αυτόν της μεθόδου χρονοπροέλασης. Το ψευδοχρονικό βήμα εξαρτάται από τις 4 μεταβλητές ροής του κόμβου, το εμβαδό της στοιχειώδους κυψέλης και έναν παράγοντα CFL του οποίου την τιμή την επιλέγουμε εμείς και ο οποίος στα πρώτα βήματα αυξάνεται και από όταν πάρει μία συγκεκριμένη τιμή και μετά, παραμένει σταθερός. Έτσι είναι αυτονόητο λοιπόν ότι το ψευδοχρονικό βήμα διαφέρει από κόμβο σε κόμβο αλλά και από στιγμή σε στιγμή. Ο τύπος που το δίνει, όπως αναφέρθηκε και περιγραφικά πιο πάνω είναι της μορφής :

$$\Delta t_{ps} = CFL \cdot \frac{A_{cell}}{f(\vec{W}_P)} \quad \text{με } \vec{W}_P \text{ τα μεγέθη της ροής στον κόμβο } P. \quad (6.13)$$

6.2.3 Κριτήριο σύγκλισης

Η ποσότητα που εξετάζεται έτσι ώστε να γίνει αντιληπτή η σύγκλιση είναι όπως προαναφέρθηκε το $res_{it,iv}^P$, το οποίο λαμβάνεται από την εξίσωση (6.11). Ουσιαστικά ελέγχεται να τείνει στο 0 ο μέσος (χρονικά) όρος του αθροίσματος των τετραγώνων των $[res]$ σε κάθε κόμβο για κάθε μία από τις 4 εξισώσεις της ροής ξεχωριστά. Πιο συγκεκριμένα ελέγχεται να ‘μειωθεί’ όσες τάξεις μεγέθους δηλωθούν ως δεδομένο στο πρόγραμμα (συνήθως 20) σε σχέση με την τιμή της σε κάποιο από τα πρώτα ‘ψευδο-χρονικά’ βήματα, η παρακάτω ποσότητα

$$R_{iv} = \frac{1}{N_T} \sum_{it=1}^{N_T} \sum_{is=1}^{N_S} (res_{it,iv}^{is})^2 \quad iv = 1 \dots 4 \quad (6.14)$$

6.3 Επαναληπτική επίλυση με σχήμα Jacobi

Το προφανές που οπωσδήποτε θα γίνει εδώ (για τους ίδιους λόγους και όπως ακριβώς έγινε στη μέθοδο χρονοπροέλασης), είναι να μεταφερθούν οι όροι που περιέχουν $[zm]$ στο δεξί μέλος, έτσι ώστε να αποφευχθεί η αντιστροφή υπερβολικά μεγάλων μητρώων καταλήγοντας έτσι σε μία επαναληπτική επίλυση, κατά την οποία θα αντιστρέφονται περισσότερες από μία φορές μητρώα πολύ μικρότερων διαστάσεων, οδηγώντας έτσι σε κέρδος υπολογιστικού χρόνου. Να τονιστεί ότι τώρα σε αντιδιαστολή με τη μέθοδο χρονοπροέλασης, τα προς επίλυση μητρώα είναι πολύ μεγαλύτερα, αφού οι άγνωστοι, δηλαδή τα ΔW που πρέπει να υπολογιστούν για τη

μετάβαση στην επόμενη ψευδοχρονική στιγμή, είναι όσα ήταν προηγουμένως επί N_T , όπου N_T ο αριθμός των χρονικών στιγμών με $N_T = 2N_H + 1$, με N_H τον αριθμό των αρμονικών που επαρκούν για την προσέγγιση της λύσης W . Για παράδειγμα, σε ένα αραιό πλέγμα 3000 κόμβων για προσέγγιση με $N_H = 2$ αρμονικές, πρέπει κάθε φορά να επιλύεται σύστημα με $5 \cdot 3000 \cdot 4 = 60000$ αγνώστους, με άλλα λόγια 5 φορές παραπάνω από το αντίστοιχο σύστημα που επιλύοταν με τη μέθοδο της χρονο-προέλασης. (Βέβαια αυτές οι 60000 τιμές είναι ικανές να αναπαραγάγουν χρονικά το πεδίο, κάτι το οποίο για να γίνει με το TM χρειάζονται 60 περίπου στιγμές μέσα στην περίοδο άρα δωδεκαπλάσιος αριθμός χρονικών εικόνων της λύσης.)

Έτσι, πηγαίνοντας τα $[zm]$ της εξίσωσης (6.10) στο δεξί μέλος έχουμε:

$$A_{cell} \frac{\Delta W_{iv,it}}{\Delta t_{ps}} + A_{cell} \cdot \omega D_{it,jt} \Delta W_{iv,jt} + [diag]_P^{iv,jv,it} \cdot \Delta W_P^{jv} = res_{it,iv}^P - \sum_{Q \in neigh(P)} [zm]_Q^{iv,jv,it} \cdot \Delta W_Q^{jv} \quad (6.15)$$

όπου το $res_{it,iv}^P$ δίνεται από την εξίσωση (6.11).

Στην παραπάνω εξίσωση αξίζει να παρατηρηθεί καταρχήν ότι είναι η γενική μορφή της iv εξίσωσης της ροής, γραμμένης στον κόμβο P τη χρονική στιγμή it . Ακόμη σε αυτή την εξίσωση αριστερά έχει μείνει ότι έχει σχέση με τον κόμβο P , δηλαδή οι 4 μεταβλητές στις N_T χρονικές στιγμές. Μια τέτοια διατύπωση είναι προφανές ότι θα οδηγούσε σε μία *Jacobi* στην οποία θα έπρεπε να αντιστραφεί για κάθε κόμβο ένα μητρώο $4N_T \times 4N_T$. Αυτό δεν είναι όμως σωστή αντιμετώπιση επειδή σε αυτό το μητρώο δεν εξαρτώνται όλα τα στοιχεία από όλα και έτσι είναι ένα αραιό μητρώο με πολλά μηδενικά στοιχεία. Για να γίνει κατανοητό αυτό αρκεί να παρατηρηθεί ότι διαφορετικές μεταβλητές της ροής συνδέονται μεταξύ τους μόνο 'πάνω' στην ίδια χρονική στιγμή, όπως και το ότι κάθε μεταβλητή συνδέεται με τις άλλες χρονικές στιγμές μόνο μέσω του εαυτού της (πχ. το Q την χρονική στιγμή 1 συνδέεται με τις άλλες μεταβλητές ροής τη χρονική στιγμή 1 μέσω του $[diag]$ και στις άλλες χρονικές στιγμές μόνο με την πυκνότητα μέσω του D). Ακόμη μία τέτοια θεώρηση θα αύξανε υπερβολικά τις απαιτήσεις σε αποθήκευση επειδή το D πρακτικά είναι ένα σταθερό μητρώο, ανεξάρτητο από μεταβλητές ροής και κόμβο και έτσι θα θέλαμε να αποθηκευτεί μία μόνο φορά (με αυτή τη θεώρηση θα αποθηκευόταν περίπου $4 \cdot N_s$ φορές).

Για τους παραπάνω λόγους, αποφασίζεται να μεταφερθεί στο δεξί μέρος της εξίσωσης στην οποία θα βασιστεί η επίλυση *Jacobi* και ο όρος που περιέχει το D . Έτσι η εξίσωση γίνεται ως εξής

$$A_{cell} \frac{\Delta W_{iv,it}}{\Delta t_{ps}} + [diag]_P^{iv,jv,it} \cdot \Delta W_P^{jv} = res_{it,iv}^P - \sum_{Q \in neigh(P)} [zm]_Q^{iv,jv,it} \cdot \Delta W_Q^{jv} - A_{cell} \cdot \omega D_{it,jt} \Delta W_{iv,jt} \quad (6.16)$$

όπου το $res_{it,iv}^P$ δίνεται από την εξίσωση (6.11) ή επιστρέφοντας σε συμβολισμό με πίνακες

$$[DIAG]_{4 \times 4} \cdot \Delta \vec{W}_{4 \times 1} = [RES]_{4 \times 1} \quad (6.17)$$

$$\text{και} \quad [DIAG] = \left[[diag]_p^{it} + \frac{A_{cell}}{\Delta t_{ps}} \cdot I_{4 \times 4} \right] \quad (6.18)$$

Ακόμη, στην εξίσωση (6.17), ισχύει για τα στοιχεία του $[RES]$ (έστω iv)

$$RES_{iv} = res_{it,iv}^P - \sum_{Q \in neigh(P)} [zm]_Q^{iv,jv,it} \cdot \Delta W_Q^{jv} - A_{cell} \cdot \omega D_{it,jt} \Delta W_{iv,jt} \quad (6.19)$$

όπου το $res_{it,iv}^P$ δίνεται από την εξίσωση (6.11).

Στην παραπάνω εξίσωση κάθε επαναλαμβανόμενος δείκτης σημαίνει άθροιση. Ακόμη ο δείκτης it στο $[diag]_{4 \times 4}$ και στα $[zm]_{4 \times 4}$ τοποθετήθηκε για να τονίσει ότι με βάση τα W τη στιγμή it σχηματίζονται αυτά τα μητρώα και προφανώς πολλαπλασιάζονται με τα ΔW της ίδιας στιγμής.

Η εξίσωση (6.17) αναφέρεται στη στιγμή it στον κόμβο P και στην τετράδα των μεταβολών των μεταβλητών ροής ($\Delta \vec{W}$) του κόμβου αυτού. Άρα προφανώς, προκειμένου να υπολογιστούν οι 'διορθώσεις' (ΔW) έτσι ώστε να προχωρήσει η επίλυση στο επόμενο ψευδοχρονικό βήμα, γράφεται η (6.17) $N_T \cdot N_s$ φορές σε κάθε κόμβο και σε κάθε χρονική στιγμή.

Άρα, τελικά, ο αλγόριθμος *Jacobi* διαμορφώνεται ως εξής:

1. Τίθεται $\Delta \vec{W}^{old} = 0$ (με *new* συμβολίζονται οι πιο «πρόσφατες» τιμές για τα $\Delta \vec{W}$ και με *old* αυτές της αμέσως προηγούμενης επανάληψης του αλγορίθμου)
2. $n \leftarrow 1$
3. Επιλύεται η (6.17) \forall κόμβο P και για καθεμιά χρονική στιγμή N_T (Στην (6.17) τα $[zm]$ και το D πολλαπλασιάζονται με το $\Delta \vec{W}^{old}$). Με αυτόν τον τρόπο υπολογίζονται τα $\Delta \vec{W}^{new}$ για όλους τους κόμβους και τις στιγμές (δηλαδή τα $\Delta \vec{W}$ που βρίσκονται αριστερά στην (6.17)).
4. $\Delta \vec{W}^{old} \leftarrow \Delta \vec{W}^{new}$
5. Αν $n < n_{jacobi}$, τότε : $n \leftarrow n + 1$ και επιστροφή στο 3.
6. $\mathbf{W}^k = \Delta \mathbf{W} + \mathbf{W}$, όπου $\Delta \mathbf{W}$ είναι όλοι οι άγνωστοι οι οποίοι έχουν υπολογιστεί από τους n_{jacobi} κύκλους που έγιναν ακριβώς προηγουμένως και \mathbf{W} είναι οι πιο πρόσφατες λύσεις που έχουν βρεθεί από το αμέσως προηγούμενο ψευδοχρονικό βήμα.
7. Τέλος.

Το n_{jacobi} είναι ένας αριθμός που έχει καθορισθεί από το χρήστη. Με άλλα λόγια δεν υπάρχει κάποιο κριτήριο σύγκλισης αλλά εκτελούνται οι επαναλήψεις στην *Jacobi* συγκεκριμένο αριθμό φορών (στην δική μας περίπτωση περίπου 15). Αξίζει να σημειωθεί ότι λόγω της ύπαρξης των ψευδοχρονικών βημάτων δεν είναι αναγκαία η ‘με απόλυτη ακρίβεια’ επίλυση του γραμμικού συστήματος που επιλύεται με τη μέθοδο *Jacobi*, αφού οι ‘κανονικές’ διορθώσεις (ΔW) που θα προέρχονταν από τη *Jacobi* αν δεν υπήρχε ο ψευδοχρόνος που δεν έχει εξάλλου και φυσικό νόημα είναι μεγαλύτερες από αυτές που υπολογίζονται αφού τώρα έχει προστεθεί στον παρονομαστή τους ο όρος $\frac{A_{cell}}{\Delta t}$. (η εισαγωγή της ψευδο-χρονικής παραγώγου ουσιαστικά παίζει ένα ρόλο υποχαλάρωσης).

Στην πράξη, σε αυτήν την εργασία δεν εφαρμόστηκε ακριβώς ο παραπάνω αλγόριθμος επειδή παρατηρήθηκε ελαφρώς καλύτερη σύγκλιση αν εφαρμοστεί η μέθοδος *Gauss – Seidel* ως προς το χρόνο. Πιο συγκεκριμένα ο αλγοριθμος που εφαρμόστηκε είναι ο εξής:

1. Τίθεται $\Delta \vec{W}^{old} = 0$, $\Delta \vec{W}^{new} = 0$
2. $n \leftarrow 1$
3. $itime \leftarrow 1$
4. Επιλύεται η (6.17) \forall κόμβο P τη χρονική στιγμή $itime$. Στην (6.17) τα $[zm]$ πολλαπλασιάζονται με το $\Delta \vec{W}^{old}$, και το \mathbf{D} με το $\Delta \vec{W}^{new}$ (Γι’ αυτό το ονομάστηκε *Gauss – Seidel* ως προς το χρόνο, αφού μόνο στον όρο που συνδέει μεταξύ τους τις διάφορες χρονικές στιγμές εισάγουμε την πιο ‘πρόσφατη λύση’). Με αυτόν τον τρόπο υπολογίζονται τα $\Delta \vec{W}^{new}$ που αναφέρονται στην χρονική στιγμή $itime \forall$ κόμβο P (δηλαδή τα $\Delta \vec{W}$ που βρίσκονται αριστερά στην (6.17)). Συγκεκριμένα, τα στοιχεία του $[RES]$ της (6.17) υπολογίζονται ως εξής

$$RES_{iv} = res_{it,iv}^P - \sum_{Q \in neigh(P)} [zm]_Q^{iv,jv,it} \cdot \Delta W_Q^{old,jv} - A_{cell} \cdot \omega D_{it,jt} \Delta W_{iv,jt}^{new}$$

5. $itime \leftarrow itime + 1$
6. Επιστροφή στο βήμα 4, αν $itime \leq N_T$.
7. Για κάθε χρονική στιγμή και σε κάθε κόμβο: $\Delta \vec{W}^{old} \leftarrow \Delta \vec{W}^{new}$
8. Αν $n < n_{jacobi}$, τότε: $n \leftarrow n + 1$ και επιστροφή στο 3.
9. $\mathbf{W}^k = \Delta \mathbf{W} + \mathbf{W}$, όπου $\Delta \mathbf{W}$ είναι όλοι οι άγνωστοι οι οποίοι έχουν υπολογιστεί από τους n_{jacobi} κύκλους που έγιναν ακριβώς προηγουμένως και \mathbf{W} είναι οι πιο πρόσφατες λύσεις που έχουν βρεθεί από το αμέσως προηγούμενο ψευδοχρονικό βήμα.

10. Τέλος.

Κεφάλαιο 7

Υπολογισμοί με τη μέθοδο χρονο-προέλασης

Σε αυτό το κεφάλαιο, παρουσιάζονται τα αποτελέσματα με τη μέθοδο χρονοπροέλασης (*TM*). Τα αποτελέσματα αυτά προέκυψαν από τη χρήση κώδικα επίλυσης της ροής που έχει αναπτυχθεί από το Εργαστήριο Θερμικών στροβιλομηχανών του ΕΜΠ. Γενικά, η περίπτωση που μελετήθηκε είναι περιοδική (αφού η νέα προτεινόμενη μέθοδος με την οποία συγκρίνουμε το *TM* και ονομάζεται *ισορροπία των αρμονικών* επιλύει μόνο περιοδικά φαινόμενα). Θα μελετηθεί μεμονωμένη αεροτομή και συγκεκριμένα η *NACA 4415*. Σαν χρονική διέγερση θα μεταβάλλεται η γωνία εισόδου α_1 στην αεροτομή με ημιτονοειδή τρόπο (γωνία εισόδου και γωνία επ' άπειρον ροής στην μεμονωμένη αεροτομή είναι το ίδιο και εδώ οι συμβολισμοί α_∞ και α_1 θα χρησιμοποιούνται χωρίς διάκριση). Συγκεκριμένα:

$$\alpha_1(t) = \alpha_{1,0} + amp \cdot \sin(\omega \cdot t) \quad (7.1)$$

όπου τέθηκε $\alpha_{1,0} = 5^0$ και το ευρος μεταβολής της $amp = 3^0$. Σε αυτό το κεφάλαιο θα διακριθούν 2 περιπτώσεις μία με σχετικά 'μικρή' ανηγμένη συχνότητα και μία με σχετικά μεγάλη (αυτή θα αποτελεί τη μοναδική διαφορά μεταξύ των δύο περιπτώσεων με τα υπόλοιπα δεδομένα να παραμένουν ίδια). Υπενθυμίζεται ότι η ανηγμένη συχνότητα (reduced frequency) δίνεται από τον παρακάτω τύπο

$$f_r = \frac{\omega C}{2V_\infty} \quad (7.2)$$

όπου $\omega = \frac{2\pi}{T}$, με T την περίοδο μεταβολής της γωνίας α_1 , C τη χορδή της αεροτομής και V_∞ την επ' άπειρο ταχύτητα. Επειδή, όπως εξηγήθηκε και σε προηγούμενο κεφάλαιο το μήκος αδιαστατοποίησης ισούται με τη χορδή της αεροτομής $L_{ref} = C$ και η ταχύτητα αδιαστατοποίησης με την επ' άπειρο ταχύτητα $U_{ref} = V_\infty$, ο χρόνος αδιαστατοποίησης θα είναι $t_{ref} = \frac{L_{ref}}{U_{ref}} = \frac{C}{V_\infty}$. Έτσι, η ανηγμένη συχνότητα, με δεδομένη την αδιαστατοποίηση που

έχει γίνει, μπορεί να διατυπωθεί συναρτήσει μόνο των αδιάστατων μεγεθών ως εξής

$$f_r = \frac{\pi}{\frac{T}{V_\infty/C}} = \frac{\pi}{\check{T}} \quad (7.3)$$

όπου \check{T} η αδιάστατη περίοδος, δηλαδή η περίοδος διαιρεμένη με τον αδιάστατο χρόνο. Να παρατηρηθεί ότι στον τύπο μεταβολής της γωνίας εισόδου με το χρόνο (7.1), μέσα στο ημίτονο μπορούν να χρησιμοποιηθούν αντί για τις ‘πραγματικές’ τιμές και οι αδιάστατες τιμές όσων αφορά στο χρόνο και το ω , με $\check{\omega} = \frac{2\pi}{\check{T}}$.

Στόχος του κεφαλαίου αυτού είναι να γίνει αντιληπτό πόσα περίπου σημεία χρειάζονται για κάθε μία από τις 2 συχνότητες έτσι ώστε να προσεγγιστεί με την επιθυμητή ακρίβεια το πεδίο ροής. Ακόμη, να δούμε για κάθε μία από τις 2 συχνότητες που θα δοκιμαστούν πόσες περίοδοι πρέπει να περάσουν από την $t = 0$ όπου ξεκινάει ο κώδικας την επίλυση μέχρι να περάσει το μεταβατικό φαινόμενο έτσι ώστε να πάρθούν τα ‘τελικά’ αποτελέσματα για το περιοδικό φαινόμενο που απασχολεί αυτήν την εργασία. Να σημειωθεί ότι ως αρχική συνθήκη έχει θεωρηθεί το χρονικά μόνιμο πεδίο για γωνία εισόδου αυτή που αντιστοιχεί στην $t = 0$. Ως μέτρο σύγκρισης για όλα αυτά θα έχουμε τον συντελεστή άνωσης C_L το οποίο είναι ένα μέγεθος που για να βρεθεί ολοκληρώνεται η πίεση πάνω στην αεροτομή και εξαρτάται άμεσα από τα συντηρητικά μεγέθη της ροής στους κόμβους που βρίσκονται πάνω στην αεροτομή. Επειδή όμως αυτοί με τη σειρά τους εξαρτώνται από τους υπόλοιπους κόμβους του πλέγματος θεωρείται το C_L ως ένα αξιόπιστο μέσο έτσι ώστε να γίνει αντιληπτό πόσο ‘καλή’ ή ‘κακή’ προσέγγιση της ροής έχει γίνει. Το C_L δίνεται από τον τύπο

$$C_L = \frac{L}{\frac{1}{2}\rho V_\infty^2 \cdot C} \quad (7.4)$$

όπου στην παραπάνω εξίσωση είναι L η άνωση ανά μονάδα βάθους (2-διάστατο πρόβλημα), και C η χορδή της αεροτομής. Να παρατηρηθεί ότι, στον παρονομαστή του C_L , το μέγεθος $\frac{1}{2}\rho V_\infty^2$ εκφράζει τη δυναμική πίεση της επ’ άπειρον ροής. Για την άνωση L ισχύει

$$L = \vec{F} \cdot \vec{n}_L \quad (7.5)$$

όπου \vec{F} η δύναμη που ασκείται πάνω στην αεροτομή και \vec{n}_L το μοναδιαίο διάνυσμα στην κατεύθυνση της άνωσης, δηλαδή σε κατεύθυνση **κάθετη** της εκάστοτε επ’ άπειρον ροής (η κατεύθυνση της επ’ άπειρον ροής είναι χρονικά μεταβαλλόμενη στις περιπτώσεις που μελετώνται σε αυτή την διπλωματική, αφού ως διέγερση μεταβάλλεται με τον χρόνο αυτή ακριβώς η κατεύθυνση). Η δύναμη στην αεροτομή \vec{F} υπολογίζεται μέσω αριθμητικής ολοκλήρωσης των δυνάμεων από πιέσεις πάνω στο περίγραμμα της αεροτομής, σύμφωνα με τον παρακάτω τύπο

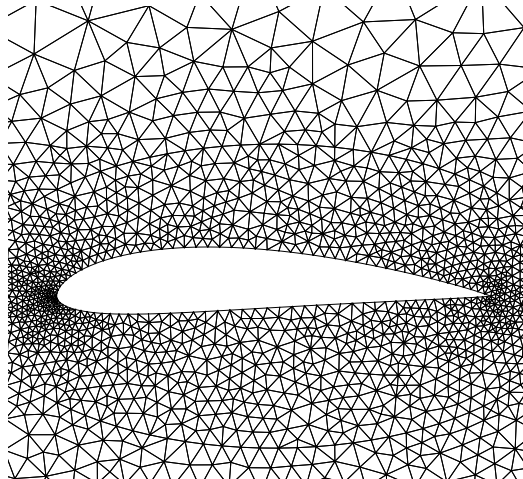
$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{N_{seg}} p_{seg} \vec{\Delta S} \quad (7.6)$$

όπου N_{seg} ο αριθμός των *segments* που ανήκουν πάνω στην αεροτομή, (*segment* ονομάζεται το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει δύο κόμβους του πλέγματος), p_{seg} η πίεση σε κάθε *segment* (το p_{seg} λαμβάνεται ίσο με το μέσο όρο της πίεσης στους αντίστοιχους κόμβους) και $\vec{\Delta S}$ διάνυσμα με μέτρο το μήκος του κάθε *segment* και κατεύθυνση κάθετη σε αυτό και φορά αυτήν της δύναμης λόγω πίεσης, προς τα 'έξω' δηλαδή του πλέγματος. Δεδομένου ότι η πίεση αδιαστατοποιείται με την ποσότητα ρV_∞^2 και ότι χαρακτηριστικό μήκος είναι η χορδή της αεροτομής ο συντελεστής άνωσης μπορεί να γραφεί συναρτήσει των αδιάστατων μεγεθών ως εξής (λαμβάνοντας υπόψη τις (7.4), (7.5), (7.6))

$$C_L = \frac{\sum_{i=1}^{N_{seg}} \check{p}_{seg} \vec{\Delta S} \cdot \vec{n}_L}{\frac{1}{2}} \quad (7.7)$$

Ακόμα ο αριθμός *Mach* της επ' άπειρον ροής τέθηκε και στις 2 περιπτώσεις $M_\infty = 0.4$.

Στο σχήμα 7.1 φαίνεται η αεροτομή και το πλέγμα σε μεγέθυνση στην περιοχή γύρω από αυτήν (όπως έχει αναφερθεί και φαίνεται καθαρά και στο σχήμα, χρησιμοποιήθηκε πλέγμα αποτελούμενο από τριγωνικά στοιχεία).



Σχήμα 7.1: Αεροτομή NACA 4415 και πλέγμα γύρω από αυτήν σε μεγέθυνση.

7.1 Αποτελέσματα για ‘χαμηλή’ ανηγμένη συχνότητα

Σε αυτό το σημείο η ανηγμένη συχνότητα τέθηκε ίση με 0.1. Όπως αναφέρθηκε και ανωτέρω, υπολογίστηκε ο συντελεστής άνωσης C_L , σε κάθε μία από τις χρονικές στιγμές στις οποίες χωρίστηκε η περίοδος. Αρχικά, ο κώδικας ‘έτρεξε’ για διάφορους αριθμούς χρονικών βημάτων στην περίοδο από 65 μέχρι και 195. Τα αποτελέσματα φαίνονται στον πίνακα 7.1 (προφανώς στον πίνακα φαίνονται τα αποτελέσματα σε 13 χρονικά ισαπέχοντες τιμές μέσα στην περίοδο και ενώ έχει ‘περάσει’ το μεταβατικό φαινόμενο). Με αυτόν τον τρόπο, γίνεται αντιληπτό πόσα περίπου σημεία χρειάζονται για την προσέγγιση του C_L που επιθυμεί ο χρήστης. Εδώ, βάσει των αποτελεσμάτων του πίνακα 7.1 θα θεωρηθούν ως επαρκή τα σημεία με αριθμό από 91 μέχρι και 104 με τα οποία παίρνουμε προσέγγιση της ‘πιο σωστής’ λύσης των 195 χρονικών βημάτων στην περίοδο καλύτερη από περίπου 4×10^{-4} και 3×10^{-4} αντίστοιχα (για το C_L εννοείται). Μεγαλύτερος αριθμός σημείων κρίνεται ότι ‘καθυστερεί’ άσκοπα την επίλυση, χωρίς να δίνει αποτελέσματα πολύ μεγαλύτερης ακρίβειας. Εξάλλου θα γίνει φανερό αργότερα ότι η μέθοδος της ισοροπίας των αρμονικών την οποία συγκρίνουμε με τη μέθοδο χρονο-προέλασης δίνει γενικά λίγο χαμηλότερη ακρίβεια.

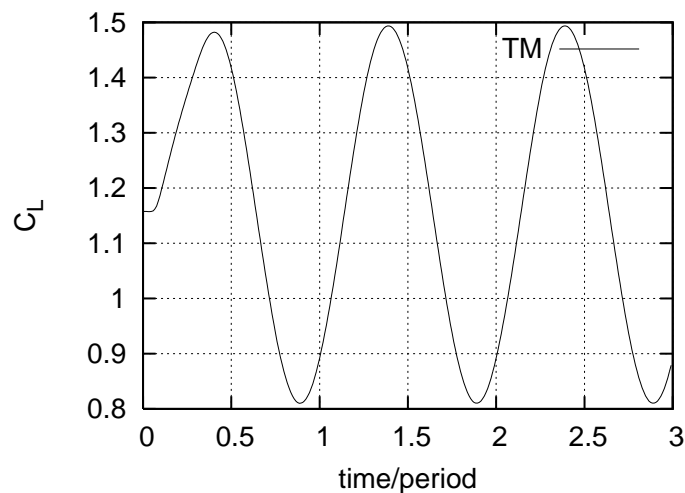
Ακόμη, στο σχήμα 7.2 φαίνεται η επίλυση με χρονο-προέλαση από την $t = 0$ μέχρι τρεις περιόδους μετά, από όπου φαίνεται και το μεταβατικό φαινόμενο που συμβαίνει αρχικά. Στο σχήμα 7.3 φαίνονται η δεύτερη και η τρίτη περίοδος τοποθετημένες η μία πάνω στην άλλη ώστε να γίνει φανερό ότι πρακτικά δεν διαφέρουν. Από το δεξί διάγραμμα του σχήματος 7.3 φαίνεται ότι όσο περνάει ο χρόνος το φαινόμενο σταθεροποιείται και έτσι ολόένα και περισσότερα δεκαδικά στο C_L σταθεροποιούνται μεταξύ δύο διαδοχικών περιόδων. Επίσης από το ίδιο διάγραμμα συμπεραίνουμε ότι, αφού από την αρχή της δεύτερης περιόδου έχουν σταθεροποιηθεί ήδη τα τέσσερα πρώτα δεκαδικά ψηφία και με τα 91 ή 104 σημεία που έχουν επιλεγεί έτσι και αλλιώς το πολύ τόσα ψηφία είναι ακριβή, πρακτικά οι λύσεις της δεύτερης περιόδου του προβλήματος μπορούν να θεωρηθούν οι ‘μόνιμες’ περιοδικές λύσεις.

Πίνακας 7.1: Τιμές που προέκυψαν για τα C_L με TM για διάφορους αριθμούς χρονικών βημάτων ανά περίοδο. (ο δείκτης στο TM δείχνει τον αριθμό των χρονικών βημάτων).

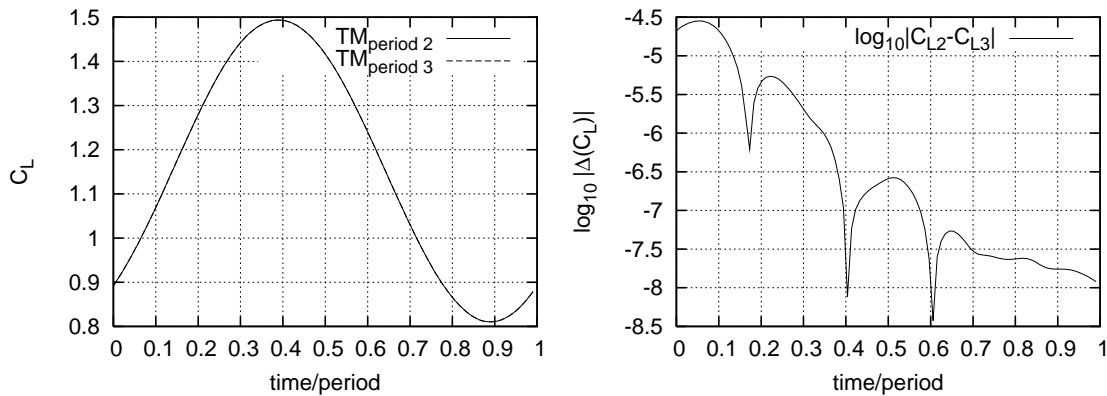
$\frac{t}{T}$	TM_{65}	TM_{91}	TM_{104}	TM_{143}	TM_{195}
0	0.89153	0.89198	0.89209	0.89225	0.89232
0.0769	1.02291	1.02312	1.02316	1.02323	1.02326
0.1538	1.18269	1.18317	1.18329	1.18348	1.18358
0.2308	1.33775	1.33837	1.33852	1.33871	1.33878
συνεχίζεται στην επόμενη σελίδα					

Πίνακας 7.1 – συνεχίζεται από την προηγούμενη σελίδα

$\frac{t}{T}$	TM ₆₅	TM ₉₁	TM ₁₀₄	TM ₁₄₃	TM ₁₉₅
0.3077	1.45042	1.4508	1.45089	1.45102	1.45109
0.3846	1.49333	1.49345	1.49347	1.49351	1.49353
0.4615	1.4602	1.46008	1.46005	1.45998	1.45994
0.5385	1.35807	1.35778	1.35769	1.35755	1.35747
0.6154	1.20878	1.2084	1.2083	1.20817	1.2081
0.6923	1.04674	1.04626	1.04613	1.04594	1.04584
0.7692	0.90754	0.90706	0.90695	0.90678	0.9067
0.8462	0.82415	0.82378	0.82368	0.82353	0.82344
0.9231	0.81818	0.8181	0.81806	0.81799	0.81793



Σχήμα 7.2: Ροή γύρω από μεμονωμένη αεροτομή, με ημιτονοειδή μεταβολή της γωνίας εισόδου a_1 και με ανηγμένη συχνότητα ίση με 0.1: Συντελεστής άνωσης συναρτήσεως του χρόνου $\left(\frac{t}{T}\right)$ όπως προέκυψε από τη μέθοδο της χρονοπροέλασης, υπολογισμένος στις τρεις πρώτες περιόδους, θεωρώντας ως αρχική συνθήκη το χρονικά μόνιμο πεδίο με $a_1 = 5^\circ$, με ‘ανάλυση’ της τάξεως των 104 χρονικών βημάτων ανά περίοδο.



Σχήμα 7.3: Ροή γύρω από μεμονωμένη αεροτομή, με ημιτονοειδή μεταβολή της γωνίας εισόδου a_1 και με ανηγμένη συχνότητα ίση με 0.1: Συντελεστής άνωσης συναρτήσει του χρόνου $\left(\frac{t}{T}\right)$ όπως προέκυψε από τη μέθοδο της χρονοπροέλασης, με ‘ανάλυση’ της τάξεως των 104 χρονικών βημάτων ανά περίοδο, θεωρώντας ως αρχική συνθήκη το χρονικά μόνιμο πεδίο με $a_1 = 5^\circ$ και υπολογισμένος στη δεύτερη ($TM_{2\text{period}}$) και την τρίτη ($TM_{3\text{period}}$) περίοδο (αριστερά) και δεκαδικός λογάριθμος της διαφοράς των C_L στις αντίστοιχες χρονικές στιγμές της δεύτερης και της τρίτης περιόδου ($\log_{10} |\Delta C_L|$).

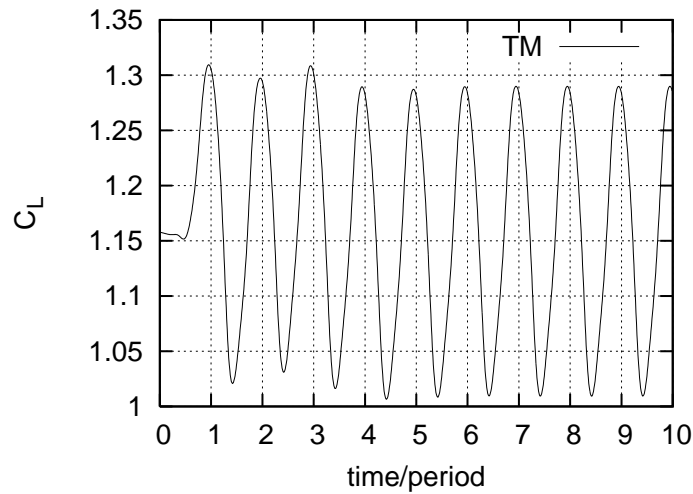
7.2 Αποτελέσματα για ‘υψηλή’ ανηγμένη συχνότητα

Εδώ η ανηγμένη συχνότητα τέθηκε δεκαπλάσια από πριν και ίση με 1. Ο πίνακας 7.2 περιέχει τον συντελεστή άνωσης C_L σε 9 ισαπέχουσες χρονικές στιγμές μέσα στην περίοδο (για κάποια περίοδο που σίγουρα έχει περάσει το μεταβατικό φαινόμενο) με επίλυση με τη μέθοδο της χρονο-προέλασης και ‘ανάλυση’ της τάξης των 45, 63, 99, 135 χρονικών βημάτων μέσα στην περίοδο. Από τον πίνακα 7.2 παρατηρούμε ότι ισχύει για τα χρονικά βήματα ανά περίοδο κάτι αντίστοιχο με αυτό που ίσχυε στην $f_r = 0.1$. Δηλαδή εδώ τα 99 σημεία δίνουν μία πολύ καλή ακρίβεια και απόκλιση από τις τιμές των 135 σημείων που θεωρούνται ‘ορθές’ μικρότερη από του 8×10^{-4} κάτι που είναι ελαφρώς χειρότερο από την προσέγγιση των 104 χρονικών βημάτων για $f_r = 0.1$. Βέβαια, και με τα 63 σημεία επιτυγχάνεται μία αξιοπρεπής ακρίβεια καλύτερη του 3×10^{-3} . Εξάλλου η επιλογή των σημείων εξαρτάται από την ακρίβεια που επιθυμεί ο χρήστης. Εδώ θα χρησιμοποιηθούν οι λύσεις με τα 63 και τα 99 σημεία. Να παρατηρηθεί ότι τα χρονικά βήματα σε αυτή την περίοδο είναι μικρότερα σε τιμή, αφού είναι ίδια σε αριθμο και η περίοδος είναι υποδεκαπλάσια. Αυτό είναι φυσικό αφού τώρα οι μεταβολές ως προς το χρόνο είναι πιο γρήγορες.

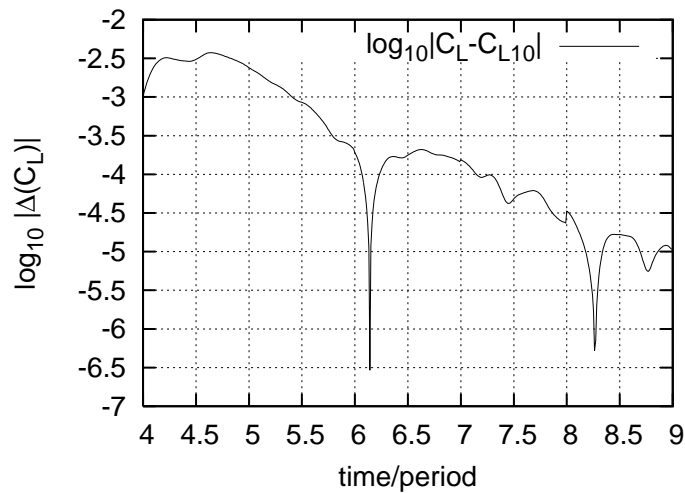
Πίνακας 7.2: Τιμές που προέκυψαν για τα C_L με TM για διάφορους αριθμούς χρονικών βημάτων ανά περίοδο. (ο δείκτης στο TM δείχνει τον αριθμό των χρονικών βημάτων).

$\frac{t}{T}$	TM_{45}	TM_{63}	TM_{99}	TM_{135}
0	1.28453	1.28387	1.28358	1.28351
0.1111	1.23683	1.23609	1.23569	1.23559
0.2222	1.15102	1.14981	1.14905	1.14879
0.3333	1.0452	1.04136	1.03901	1.03837
0.4444	1.00952	1.01078	1.01173	1.01198
0.5556	1.05491	1.05652	1.0575	1.05778
0.6667	1.12174	1.12156	1.12138	1.12132
0.7778	1.20961	1.21233	1.2145	1.21528
0.8889	1.28187	1.28271	1.28282	1.28278

Στο σχήμα 7.4 φαίνεται ο συντελεστής άνωσης στις 10 πρώτες περιόδους. Οπτικά διακρίνεται εύκολα ότι το μεταβατικό φαινόμενο διαρκεί τουλάχιστον κατά τις 4 πρώτες περιόδους. Για να αποφασιστεί πόσες περιόδους ακριβώς θα θεωρηθεί ότι διαρκεί, σχεδιάσθηκε το σχήμα 7.5 που είναι η γραφική παράσταση του δεκαδικού λογαρίθμου της απόλυτης τιμής της διαφοράς των C_L των περιόδων 5 έως 9 με το C_L της δέκατης περιόδου στις αντίστοιχες χρονικές στιγμές. Στο σχήμα αυτό είναι φανερό ότι με την πάροδο του χρόνου ‘σταθεροποιούνται’ ολοένα και περισσότερα δεκαδικά ψηφία δεδομένου της γενικότερης φθίνουσας πορείας της καμπύλης. Δεδομένου ότι και τα 99 σημεία δίνουν σφάλμα μέχρι 8×10^{-4} επιλέγεται να κρατηθούν ως περιοδικές οι λύσεις της έβδομης περιόδου δεδομένου ότι εκεί η διαφορά με την τελευταία (δέκατη) περίοδο που έχει υπολογιστεί είναι μικρότερη από περίπου $10^{-3.7} \approx 2 \times 10^{-4}$.



Σχήμα 7.4: Ροή γύρω από μεμονωμένη αεροτομή, με ημιτονοειδή μεταβολή της γωνίας εισόδου α_1 και με ανηγμένη συχνότητα $f_r = 1$: Συντελεστής άνωσης συναρτήσει του χρόνου $\left(\frac{t}{T}\right)$ όπως προέκυψε από τη μέθοδο της χρονοπροέλασης, υπολογισμένος στις δέκα πρώτες περιόδους, θεωρώντας ως αρχική συνθήκη το χρονικά μόνιμο πεδίο με $\alpha_1 = 5^\circ$, με ‘ανάλυση’ της τάξεως των 99 χρονικών βημάτων ανά περίοδο.



Σχήμα 7.5: Ροή γύρω από μεμονωμένη αεροτομή, με ημιτονοειδή μεταβολή της γωνίας εισόδου α_1 και με ανηγμένη συχνότητα $f_r = 1$: Δεκαδικός λογάριθμος της διαφοράς των C_L των περιόδων 5 έως και 9, δηλαδή για $4 \leq t/T \leq 9$ με το C_L της δέκατης περιόδου, C_{L10} . (Τα C_L προήλθαν από επίλυση με τη μέθοδο της χρονοπροέλασης, για χρονική διάρκεια 10 περιόδων με ‘ανάλυση’ της τάξεως των 99 χρονικών βημάτων ανά περίοδο, θεωρώντας ως αρχική συνθήκη το χρονικά μόνιμο πεδίο με $\alpha_1 = 5^\circ$.)

Συμπέρασμα

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι βασική διαφορά μεταξύ των υψηλών και χαμηλών συχνοτήτων αποτελεί το μεταβατικό φαινόμενο το οποίο για παράδειγμα διαρκεί για $f_r = 0.1$ μία περίοδο και για $f_r = 1$ έξι περιόδους. Δηλαδή μπορεί να παρατηρηθεί ότι όσο πιο υψηλή είναι η συχνότητα διέγερσης τόσο εντονότερο και μεγαλύτερο σε διάρκεια είναι το μεταβατικό φαινόμενο. Ακόμη, και για τις δύο ανηγμένες συχνότητες ίδιος αριθμός χρονικών βημάτων δίνει περίπου ίδια ακρίβεια. Εννοείται ότι ίδιος αριθμός χρονικών βημάτων στη δεκαπλάσια συχνότητα σημαίνει υποδεκαπλάσιο σε διάρκεια χρονικό βήμα.

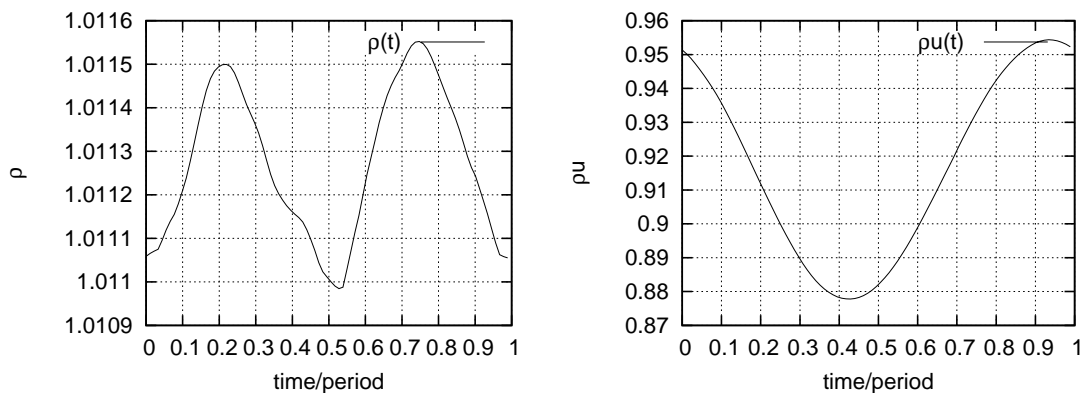
Κεφάλαιο 8

Έλεγχος για την ταυτότητα των σχέσεων της Ισορροπίας των Αρμονικών

Σε αυτό το κεφάλαιο ελέγχεται το κατά πόσον ισχύουν οι εξισώσεις *Euler* γραμμένες στη μορφή της ισορροπίας των αρμονικών όπως προέκυψαν σε προηγούμενο κεφάλαιο. Πιο συγκεκριμένα, επιλύθηκαν οι εξισώσεις *Euler* γύρω από μεμονωμένη αεροτομή μέσω της μεθόδου χρονο-προέλασης και έπειτα ελέγχθηκε το κατά πόσον οι λύσεις από τη χρονο-προέλαση επαληθεύουν τις εξισώσεις της ισορροπίας των αρμονικών. Και εδώ, διακρίθηκαν οι δύο περιπτώσεις της μικρής και της μεγάλης ανηγμένης συχνότητας. Κατά τα υπόλοιπα όλα τα αποτελέσματα που θα εμφανιστούν σε αυτό το κεφάλαιο προέρχονται από τη μέθοδο της χρονο-προέλασης με την περίπτωση που έχει μελετηθεί να είναι ίδια με το κεφάλαιο 7 (ίδια αεροτομή, ίδιο πλέγμα, ημιτονοειδής διέγερση, ίδιος M_∞).

Είναι φανερό ότι με τη μέθοδο *HB* προσεγγίζονται οι λύσεις από ένα άθροισμα *Fourier* που περιέχει N_H αρμονικές δηλαδή N_H ημιτονοειδείς όρους με διαφορετική αρχική φάση ο κάθε ένας από αυτούς, έστω ϕ , και συχνότητας $f, 2f, \dots, N_H f$. Όπως είναι γνωστό από τη θεωρία των σειρών *Fourier* όσο πιο ‘ομαλή’ είναι η χρονική μεταβολή των μεγεθών, χωρίς απότομες γωνίες στη γραφική παράσταση τόσο λιγότεροι συντελεστές *Fourier* απαιτούνται. Προφανώς λιγότεροι συντελεστές σημαίνει λιγότερες αρμονικές και επίλυση με χαμηλότερο $N_T = 2N_H + 1$, δηλαδή με λιγότερες χρονικές στιγμές μέσα στην περίοδο και άρα μικρότερο υπολογιστικό κόστος. Έτσι, αρχικά το πρώτο που έγινε είναι για κάποιες μεταβλητές σε κάποιους κόμβους να γίνει γραφική παράσταση των τιμών τους ως προς το χρόνο, έτσι όπως προέκυψαν με τη μέθοδο της χρονο-προέλασης. Από αυτή τη διαδικασία το βασικό συμπέρασμα που προέκυψε είναι, όπως άλλωστε είναι και φυσικό, ότι δεν χρειάζονται όλες οι

άγνωστες μεταβλητές (ως άγνωστες μεταβλητές θεωρούνται οι $4N_s$ ποσότητες του πεδίου, με N_s τον αριθμό των κόμβων και με το 4 προφανώς να προέρχεται από τις συντηρητικές μεταβλητές της ροής σε διδιάστατο πρόβλημα) τον ίδιο αριθμό αρμονικών για να προσεγγιστούν σωστά ως προς το χρόνο. Αυτό είναι γενικά αρνητικό για τον τρόπο με τον οποίο εφαρμόζεται η μέθοδος αφού επιλέγεται ενιαίος αριθμός αρμονικών για όλες τις μεταβλητές. Στο σχήμα 8.1 φαίνεται η μεταβολή της μεταβλητής ρ σε κάποιον κόμβο που βρίσκεται πάνω στην αεροτομή και της μεταβλητής ρu σε έναν εσωτερικό κόμβο, για $f_r = 0.1$ (ενδεικτικά και μόνο επιλέχθηκαν αυτοί οι κόμβοι και αυτές οι μεταβλητές ως ενδεικτικά παραδείγματα). Από το συγκεκριμένο σχήμα μπορεί να παρατηρηθεί ότι η πρώτη μεταβλητή ροής (πυκνότητα στον συγκεκριμένο κόμβο) απαιτεί περισσότερες αρμονικές για να προσεγγιστεί σωστά από την άλλη μεταβλητή ροής. Οι περισσότερες μεταβλητές πάντως είχαν μια πιο ομαλή περιοδική μεταβολή ως προς το χρόνο με αποτέλεσμα να απαιτούνται λίγοι σχετικά συντελεστές *Fourier* για την ακριβή προσέγγισή τους. Εξάλλου, αν για παράδειγμα ενδιαφέρει ο υπολογισμός του συντελεστή άνωσης χρειάζεται στους περισσότερους κόμβους να έχει γίνει σωστή προσέγγιση των μεταβλητών ροής και δεν θα χαθεί ακρίβεια αν λίγοι μόνο κόμβοι δεν προσεγγιστούν και τόσο καλά.



Σχήμα 8.1: Αδιάστατη πυκνότητα συναρτήσεως του χρόνου σε κάποιον κόμβο στην αεροτομή που παρατηρήθηκε ότι χρειάζονται περισσότεροι συντελεστές *Fourier* (αριστερά) και αδιάστατο ρu σε κάποιον εσωτερικό κόμβο επιλεγμένο τυχαία (δεξιά).

Σε αυτό το σημείο υπενθυμίζεται ότι στις εξισώσεις που τελικά θα επιλυθούν σύμφωνα με τη μέθοδο της ισοροπίας των αρμονικών αν γραφτούν σε συγκεκριμένη χρονική στιγμή και συγκεκριμένο κόμβο, πρακτικά αλλάζει μόνο ο τρόπος έκφρασης (διακριτοποίησης) της χρονικής παραγώγου, σε σχέση με τις σχέσεις της χρονο-προέλασης. Συγκεκριμένα, στη μέθοδο της χρονο-προέλασης εκφράζεται η παράγωγος με σχήμα πεπερασμένων διαφορών ακρίβειας δεύτερης τάξης, όπου η παράγωγος τη χρονική στιγμή $n + 1$ εξαρτάται από τις 2

προηγούμενες, δηλαδή

$$\left(\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t}\right)^{n+1} = \frac{3\mathbf{W}^{n+1} - 4\mathbf{W}^n + \mathbf{W}^{n-1}}{2\Delta t} + O(\Delta t)^2 \quad (8.1)$$

Με τη μέθοδο της ισορροπίας των αρμονικών η χρονική παράγωγος έστω τη χρονική στιγμή i γράφεται, με τη χρήση μίας έκφρασης που έχει αποδειχθεί και περιέχει τη λύση \mathbf{W} στις N_T χρονικές στιγμές που έχουν θεωρηθεί, ως εξής

$$\left(\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t}\right)^i = \omega D^{i,j} \mathbf{W}^j \quad (8.2)$$

με $i, j = 1, \dots, N_T$. Να σημειωθεί ότι στην (8.2) εφαρμόζεται τανυστική λογική και ο επαναλαμβανόμενος δείκτης σημαίνει άθροιση. Ακόμη υπενθυμίζεται ότι το μητρώο D διάστασης $N_T \times N_T$ δίνεται από τον τύπο

$$D_{i,j} = \frac{2}{N_T} \sum_{\kappa=1}^{N_H} \kappa \sin(a\kappa(j-i)) \quad (8.3)$$

Άρα εδώ κρίθηκε σκόπιμο να ελεγχθεί κατά πόσον οι δύο διακριτοποιήσεις για τη χρονική παράγωγο δίνουν ίδια αποτελέσματα. Έτσι, από τα αποτελέσματα που προέκυψαν από την χρονοπροέλαση με διάφορα χρονικά βήματα σχηματίστηκαν οι χρονικές παράγωγοι σε κάθε χρονική στιγμή που θεωρήθηκε στην περίοδο βάσει του τύπου πεπερασμένων διαφορών (εξίσωση (8.1)). Ακόμη, βρέθηκε η χρονική παράγωγος σύμφωνα με τον τύπο που χρησιμοποιείται στην ισορροπία των αρμονικών (εξίσωση (8.2)) για προσέγγιση με διάφορες αρμονικές μέσα στην περίοδο. Ενδεικτικά παρατίθεται εδώ ο πίνακας 8.1, ο οποίος περιέχει την παράγωγο που προκύπτει με τη μέθοδο της ισορροπίας των αρμονικών για προσέγγιση με 6 αρμονικές και την παράγωγο που προκύπτει με τις πεπερασμένες διαφορές για προσέγγιση με διάφορους αριθμούς χρονικών βημάτων για τρέξιμο με ανηγμένη συχνότητα $f_r = 0.1$ για την μεταβλητή (αδιάστατη) ρu στον ίδιο εσωτερικό κόμβο που είχε θεωρηθεί και πιο πάνω στο δεξί διάγραμμα του σχήματος 8.1. Ακόμη, από τον πίνακα 8.1 μπορεί να παρατηρηθεί ότι η έκφραση για την παράγωγο με $N_H = 6$ αρμονικές (HB_{13}) είναι σαν ακρίβεια συγκρίσιμη και ίσως και οριακά καλύτερη από την έκφραση με πεπερασμένες διαφορές για 91 βήματα στην περίοδο. Πάντως, όλα αυτά σε αυτό το σημείο μόνο ως ενδεικτικά μπορούν να λειτουργήσουν έτσι ώστε να ‘υποψιαστούμε’ τί περίπου συμβαίνει. Στην πράξη δεν μπορούν όλες οι μεταβλητές να προσεγγιστούν το ίδιο καλά όπως αυτή που επιλέχθηκε (οι περισσότερες πάντως μπορούν). Έτσι τα 91 σημεία με τη μέθοδο της χρονοπροέλασης θα δούμε ότι δίνουν σαφώς καλύτερη προσέγγιση στο C_L , αφού μεταβλητές που δεν μπορούν να προσεγγιστούν καλά με τις ‘λίγες’ αρμονικές που συνήθως χρησιμοποιούνται τις προσεγγίζονται καλύτερα με πεπερασμένες διαφορές.

Πίνακας 8.1: Αδιάστατο $\frac{d(\rho u)}{dt}$ σε έναν εσωτερικό κόμβο με την έκφραση παραγωγίσις της ισοροπίας των αρμονικών για $N_T = 13$ (HB_{13}) και με εκφράσεις πεπερασμένων διαφορών για 65, 91 και 143 χρονικά βήματα ανά περίοδο. (Στον τύπο (8.2) τέθηκαν οι πιο ακριβείς διατιθέμενες τιμές από το TM με 143 χρονικά βήματα)

α/α	TM_{65}	TM_{91}	TM_{143}	HB_{13}
1	-0.0021911	-0.00243	-0.0027181	-0.0027681
2	-0.0054175	-0.0054078	-0.0055543	-0.0057894
3	-0.0076347	-0.0077153	-0.0077401	-0.0076266
4	-0.0077026	-0.0076459	-0.0076302	-0.0076558
5	-0.0061055	-0.0059559	-0.0058153	-0.0057675
6	-0.002747	-0.0024982	-0.0023013	-0.0023104
7	0.0010226	0.001234	0.0014544	0.0014422
8	0.0044981	0.0046627	0.0048253	0.0048771
9	0.0068039	0.0068817	0.0069172	0.0068642
10	0.0074009	0.0072861	0.0072636	0.0074371
11	0.0066296	0.0064979	0.0064306	0.0063924
12	0.0041938	0.0040163	0.0038837	0.0039345
13	0.0013609	0.0011507	0.0009143	0.0009702

Ακόμη ελέγχθηκε το κατά πόσον, για καθεμιά από τις δύο ανηγμένες συχνότητες που δοκιμάστηκαν $f_r = 1$ και $f_r = 0.1$ οι λύσεις που προέρχονται από τη χρονο-προέλαση ικανοποιούν τις εξισώσεις της ισοροπίας των αρμονικών για διάφορους αριθμούς αρμονικών. Όπως έχει αναφερθεί σε προηγούμενο κεφάλαιο, για τη σύγκλιση ελέγχεται να τείνουν στο 0 οι παρακάτω 4 ποσότητες (μία για κάθε μεταβλητή της ροής)

$$R_{iv} = \frac{1}{N_T} \sum_{it=1}^{N_T} \sum_{is=1}^{N_s} (res_{it,iv}^{is})^2 \quad iv = 1 \dots 4 \quad (8.4)$$

Το $res_{it,iv}^{is}$ είναι το υπόλοιπο της εξίσωσης της ισοροπίας των αρμονικών των ολοκληρωμένων και διακριτοποιημένων εξισώσεων *Euler* σε αυτή την εργασία (δεξί μέλος της εξίσωσης κατά την αριθμητική επίλυση) και δίνεται από τον τύπο (6.11). Δηλαδή, σε αυτό το σημείο ουσιαστικά ελέγχθηκαν τα υπόλοιπα που δίνει η εξίσωση της ισοροπίας των αρμονικών γραμμένη για διάφορους αριθμούς αρμονικών αν σε αυτή τεθούν οι περιοδικές λύσεις του ίδιου προβλήματος με επίλυση με τη μέθοδο της χρονο-προέλασης.

Ανηγμένη συχνότητα $f_r = 0.1$

Από τη διαδικασία που περιγράφηκε ακριβώς πιο πάνω χρησιμοποιώντας αποτελέσματα από τη μέθοδο της χρονο-προέλασης με 'ανάλυση' 91 χρονικών βημάτων ανά περίοδο, αντικαθιστώντας στην εξίσωση ισορροπίας των αρμονικών για προσέγγιση με 3, 6 και 45 αρμονικές (με τις περισσότερες δυνατές σύμφωνα με τα αποτελέσματα που υπήρχαν $91 = 2 \cdot 45 + 1$) και υπολογίζοντας σύμφωνα με την εξίσωση (8.4) τα υπόλοιπα συμπληρώνεται ο πίνακας 8.2 (στον συγκεκριμένο πίνακα φαίνεται ο δεκαδικός λογάριθμος των υπολοίπων με το R_1 να αναφέρεται στην εξίσωση της συνέχειας, τα R_2, R_3 στην εξίσωση ορμής κατά x και y αντίστοιχα και το R_4 στην εξίσωση ενέργειας). Ακόμη, κάνοντας ακριβώς την ίδια διαδικασία χρησιμοποιώντας αποτελέσματα με τη μέθοδο της χρονο-προέλασης για 143 χρονικά βήματα στην περίοδο συμπληρώνεται ο πίνακας 8.3. Από τη σύγκριση-συνδυασμό των δύο πινάκων παρατηρείται το αναμενόμενο, ότι δηλαδή με την αύξηση του αριθμού των αρμονικών πετυχαίνεται καλύτερη ικανοποίηση των εξισώσεων της ισορροπίας των αρμονικών. Ακόμη να παρατηρηθεί ότι οι λίγο διαφορετικές τιμές της επίλυσης με TM_{91} και TM_{143} όταν τέθηκαν στις εξισώσεις HB για 6 αρμονικές, έδωσαν όπως αναμενόταν πρακτικά ίδια υπόλοιπα.

Πίνακας 8.2: Δεκαδικός λογάριθμος των υπολοίπων των εξισώσεων ισορροπίας των αρμονικών για 3, 6, 45 αρμονικές, αν τεθούν σε αυτές οι λύσεις με τη μέθοδο της χρονο-προέλασης με 91 χρονικά βήματα ανά περίοδο.

Υπόλοιπο	HB₃	HB₆	HB₄₅
$\log_{10}(R_1)$	-6.376530367	-6.534102549	-8.159501243
$\log_{10}(R_2)$	-5.501355045	-5.86897102	-7.520986178
$\log_{10}(R_3)$	-5.390198221	-5.790768698	-7.145027777
$\log_{10}(R_4)$	-3.9412044	-4.106388662	-5.722194566

Πίνακας 8.3: Δεκαδικός λογάριθμος των υπολοίπων των εξισώσεων ισορροπίας των αρμονικών για 5, 6, 71 αρμονικές, αν τεθούν σε αυτές οι λύσεις με τη μέθοδο της χρονο-προέλασης με 143 χρονικά βήματα ανά περίοδο.

Υπόλοιπο	HB₅	HB₆	HB₇₁
$\log_{10}(R_1)$	-6.447439144	-6.511425858	-8.635399791
$\log_{10}(R_2)$	-5.737265205	-5.853612424	-8.012166208
$\log_{10}(R_3)$	-5.628295479	-5.773287399	-7.748770793
$\log_{10}(R_4)$	-4.025272362	-4.086318002	-6.191866399

Ανηγμένη συχνότητα $f_r = 1$

Με την ίδια ακριβώς διαδικασία με αυτή για την $f_r = 0.1$, θέτοντας δηλαδή τις λύσεις

της χρονο-προέλασης για $f_r = 1$ με ανάλυση 135 χρονικών βημάτων στις εξισώσεις HB για διάφορες αρμονικές συμπληρώνεται ο πίνακας 8.4. Στον πίνακα 8.4 μπορεί να παρατηρηθεί η μείωση των υπολοίπων με την αύξηση των αρμονικών, κάτι το φυσιολογικό δεδομένου του ότι αύξηση των αρμονικών σημαίνει αύξηση της ακρίβειας. Ακόμη από την σύγκριση των πινάκων 8.2 και 8.4 μπορεί να παρατηρηθεί η καλύτερη ικανοποίηση των εξισώσεων της ισορροπίας των αρμονικών για τη χαμηλότερη συχνότητα. Αυτό το γεγονός μας προϊδεάζει το χρήστη ότι οι υψηλές συχνότητες απαιτούν περισσότερες αρμονικές σε σχέση με τις χαμηλές για τη σωστή προσέγγισή τους.

Πίνακας 8.4: Δεκαδικός λογάριθμος των υπολοίπων των εξισώσεων ισορροπίας των αρμονικών για 3, 6, 45 αρμονικές, αν τεθούν σε αυτές οι λύσεις με τη μέθοδο της χρονο-προέλασης με 135 χρονικά βήματα ανά περίοδο.

Υπόλοιπο	HB₂	HB₄	HB₇	HB₆₇
$\log_{10}(R_1)$	-3.365759018	-4.12888756	-4.927843181	-6.140971031
$\log_{10}(R_2)$	-2.649567911	-3.427206516	-4.274205634	-4.762673776
$\log_{10}(R_3)$	-2.64305596	-3.407361696	-4.174908393	-4.380843686
$\log_{10}(R_4)$	-0.902787657	-1.671860631	-2.483562694	-3.934503287

Κεφάλαιο 9

Αποτελέσματα

Σε αυτό το κεφάλαιο, αφού επιλύθηκαν αριθμητικά οι εξισώσεις *Euler* (ευθύ πρόβλημα) με τη μέθοδο της χρονο-προέλασης, επιλύθηκαν και με τη μέθοδο της ισορροπίας των αρμονικών. Η περίπτωση που μελετήθηκε αρχικά είναι αυτή της μικρότερης ανηγμένης συχνότητας από τις δύο που αναφέρθηκαν πιο πάνω στο κεφάλαιο με τα αποτελέσματα της μεθόδου της χρονοπροέλασης. Και εδώ μελετήθηκε η ίδια ακριβώς αεροτομή, στις ίδιες συνθήκες, με περιοδική μεταβολή της γωνίας εισόδου της ροής και με ανηγμένη συχνότητα $f_r = 0.1$. Διακρίθηκαν δε, τρεις διαφορετικές περιπτώσεις (τρόποι) μεταβολής της γωνίας της επ' άπειρον ροής α_1 μια ημιτονοειδής, μία πολυωνυμική και μία κάπως πιο σύνθετη, παρόμοια με την πολυωνυμική που μόλις αναφέρθηκε. Αυτή η μεταβολή αποτελεί και τη διέγερση του μη-μόνιμου φαινομένου.

Μετά συγκρίθηκαν τα αποτελέσματα που ελήφθησαν με τις δύο αυτές μεθόδους και ως μέσο για αυτή τη σύγκριση χρησιμοποιήθηκε ο συντελεστής άνωσης της αεροτομής C_L , ($C_L = \frac{L}{\frac{1}{2}\rho V_\infty^2 \cdot C}$). Προφανώς τα αποτελέσματα της *HB* που υπολογίζει κατευθείαν το περιοδικό φαινόμενο συγκρίνονται με την πρώτη περίοδο του *TM* μετά το πέρας του μεταβατικού φαινομένου, από την οποία και έπειτα το φαινόμενο μπορεί να θεωρηθεί περιοδικό.

Τέλος, μελετήθηκε και η περίπτωση με την υψηλότερη ανηγμένη συχνότητα, $f_r = 1$ και με ημιτονοειδή μεταβολή της γωνίας εισόδου και συγκρίθηκαν τα αποτελέσματα με τη μέθοδο της χρονο-προέλασης.

9.1 Περίπτωση 1: ημιτονοειδής μεταβολή της γωνίας εισόδου της αεροτομής

Η πρώτη συνάρτηση που εφαρμόστηκε είναι ένα απλό ημίτονο, και συγκεκριμένα είναι η: $\alpha_1(t) = \alpha_{1,0} + amp \cdot \sin(\omega t)$ όπου: $\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T}$ με T την περίοδο του φαινομένου, $\alpha_{1,0}$ η μέση γωνία και amp το εύρος μεταβολής της.

Συγκεκριμένα η διέγερση, δηλαδή η συνάρτηση μεταβολής της γωνίας a_1 με το χρόνο μπορεί να γραφτεί (με χρήση αδιάστατων μεγεθών)

$$\alpha_1(t) = \alpha_{1,0} + amp \cdot \sin(\tilde{\omega}t) \quad (9.1)$$

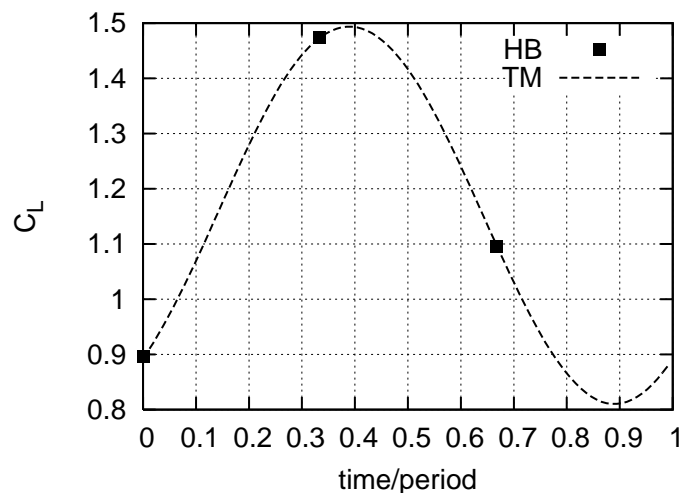
όπου, αφού $t_{ref} = \frac{C}{V_\infty}$, θα είναι

$$\tilde{\omega} = \frac{2\pi}{\tilde{T}} \quad \text{με } \tilde{T} = \frac{\pi}{f_r} = 10\pi \quad (9.2)$$

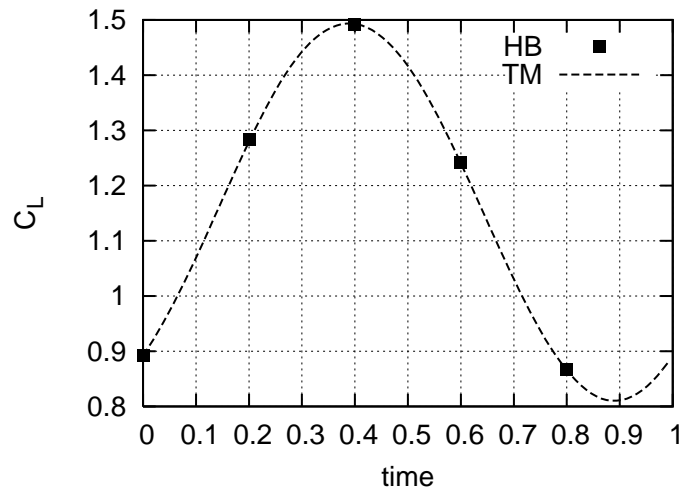
Άρα προφανώς η ‘διαστατή’ περίοδος (που επειδή επιλύει ο κώδικας αδιάστατο πρόβλημα δεν εμφανίζεται πουθενά) είναι

$$T = 10\pi \cdot \frac{C}{V_\infty}$$

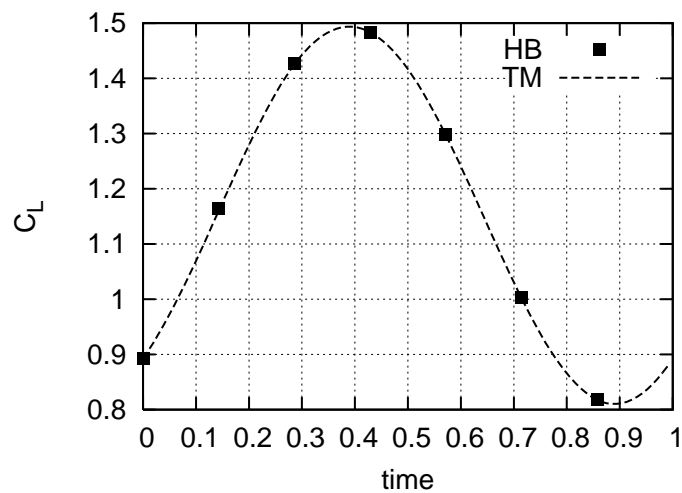
Στα σχήματα 9.1 έως και 9.4 φαίνονται η λύση αυτής της περίπτωσης (case) με την μέθοδο χρονο-προέλασης (με 104 χρονικά βήματα στην περίοδο όπως εξηγήθηκε σε προηγούμενο κεφάλαιο), καθώς και η προσέγγισή τους με την ισορροπία των αρμονικών, χρησιμοποιώντας διάφορες αρμονικές N_H (από μία μέχρι και τέσσερις αρμονικές), όπου ως γνωστόν $N_T = 2 \cdot N_H + 1$, με N_T τον αριθμό των χρονικών στιγμών που υπολογίζονται μέσα στην περίοδο.



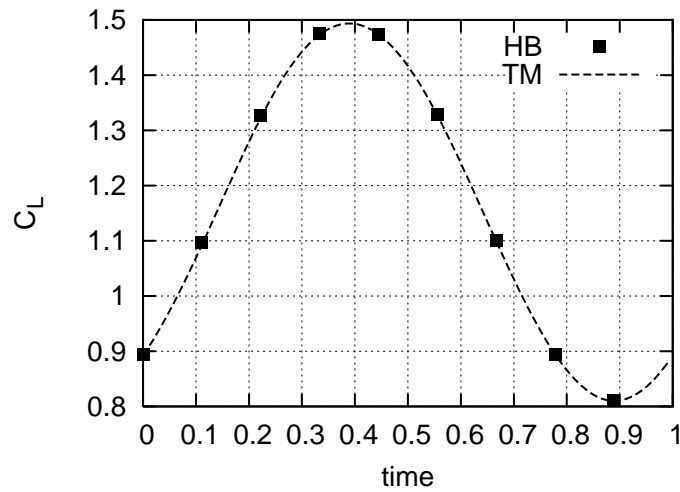
Σχήμα 9.1: Περίπτωση 1 : C_L με επίλυση με χρονο-προέλαση με 104 χρονικά βήματα στην περίοδο και με την προτεινόμενη μέθοδο της ισορροπίας των αρμονικών σε 3 στιγμές, άρα με προσέγγιση 1 αρμονικής.



Σχήμα 9.2: Περίπτωση 1 : C_L με επίλυση με χρονο-προέλαση με 104 χρονικά βήματα στην περίοδο και με την προτεινόμενη μέθοδο της ισορροπίας των αρμονικών σε 5 στιγμές, άρα με προσέγγιση 2 αρμονικών.



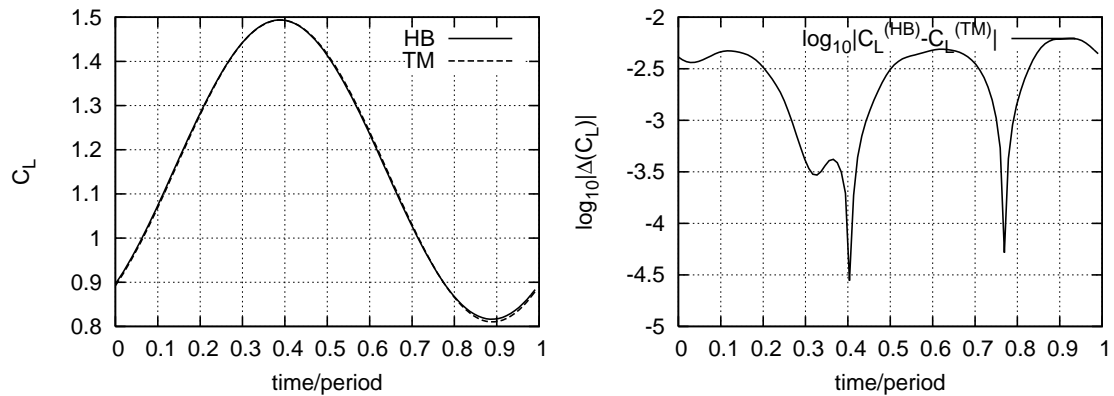
Σχήμα 9.3: Περίπτωση 1 : C_L με επίλυση με χρονο-προέλαση με 104 χρονικά βήματα στην περίοδο και με την προτεινόμενη μέθοδο της ισορροπίας των αρμονικών σε 7 στιγμές, άρα με προσέγγιση 3 αρμονικών.



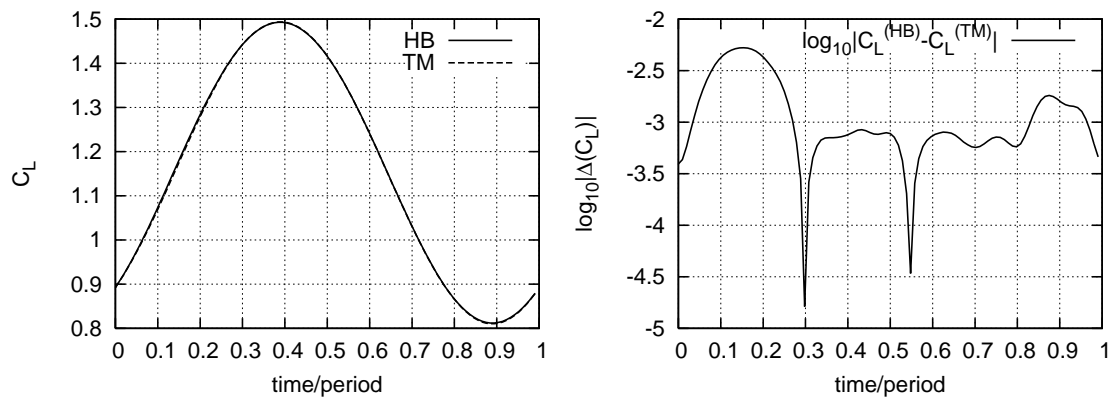
Σχήμα 9.4: Περίπτωση 1 : C_L με επίλυση με χρονο-προέλαση με 104 χρονικά βήματα στην περίοδο και με την προτεινόμενη μέθοδο της ισορροπίας των αρμονικών σε 9 στιγμές, άρα με προσέγγιση 4 αρμονικών.

Στη συνέχεια, για κάποιες από τις λύσεις, έχοντας βρεί τη ροή σε κάποιες χρονικές στιγμές μέσα στην περίοδο με την ισορροπία των αρμονικών, βρέθηκαν οι συντελεστές *Fourier* για όλες τις N_H αρμονικές (με έναν διακριτό μετασχηματισμό *Fourier*), οι οποίοι είναι σε αριθμό N_T (2 συντελεστές για κάθε αρμονική και ένας για τη μέση τιμή). Έπειτα, χρησιμοποιώντας τον τύπο *Fourier* έγινε μία 'χρονική αναδόμηση' του πεδίου ροής και έτσι βρέθηκαν τα μεγέθη της ροής σε κάθε μία από τις χρονικές στιγμές στις οποίες αυτά είχαν βρεθεί με τη μέθοδο χρονο-προέλασης. Έτσι υπολογίστηκε ο συντελεστής άνωσης, C_L για εκείνες ακριβώς τις στιγμές. Η σύγκριση φαίνεται στα σχήματα 9.5 έως και 9.8. Επίσης, στα ίδια σχήματα έχει σχεδιαστεί και ο δεκαδικός λογάριθμος της διαφοράς των C_L που προκύπτουν από τις δύο μεθόδους στις αντίστοιχες χρονικές στιγμές, δηλαδή το : $\log_{10}|C_L^{(HB)} - C_L^{(TM)}|$.

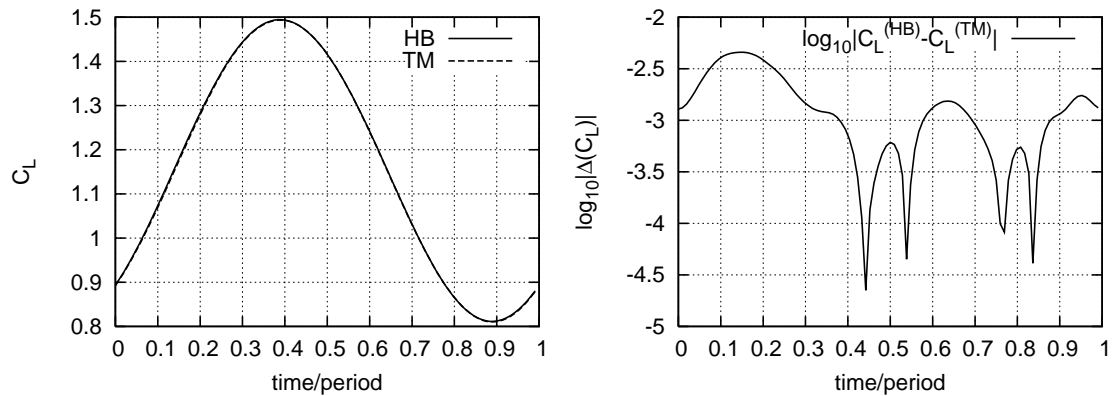
9.1. Περίπτωση 1: ημιτονοειδής μεταβολή της γωνίας εισόδου της αεροτομής



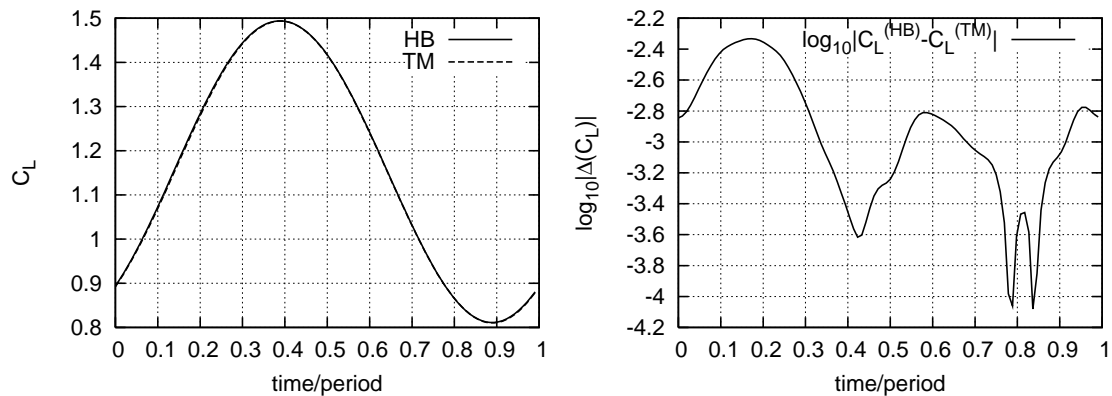
Σχήμα 9.5: Περίπτωση 1 : C_L με επίλυση με χρονο-προέλαση με 104 χρονικά βήματα στην περίοδο και με την προτεινόμενη μέθοδο της ισορροπίας των αρμονικών έχοντας ‘αναδομήσει’ τη χρονική σειρά των τιμών του C_L μέσω αναπτύγματος *Fourier* με βάση μία αρμονική (αριστερά) και λογάριθμος της διαφοράς των C_L : $(\log_{10}|C_L^{(HB)} - C_L^{(TM)}|)$ (δεξιά).



Σχήμα 9.6: Περίπτωση 1 : C_L με επίλυση με χρονο-προέλαση με 104 χρονικά βήματα στην περίοδο και με την προτεινόμενη μέθοδο της ισορροπίας των αρμονικών έχοντας ‘αναδομήσει’ τη χρονική σειρά των τιμών του C_L μέσω αναπτύγματος *Fourier* με βάση δύο αρμονικές (αριστερά) και λογάριθμος της διαφοράς των C_L : $(\log_{10}|C_L^{(HB)} - C_L^{(TM)}|)$ (δεξιά).



Σχήμα 9.7: Περίπτωση 1 : C_L με επίλυση με χρονο-προέλαση με 104 χρονικά βήματα στην περίοδο και με την προτεινόμενη μέθοδο της ισορροπίας των αρμονικών έχοντας ‘αναδομήσει’ τη χρονική σειρά των τιμών του C_L μέσω αναπτύγματος *Fourier* με βάση τρεις αρμονικές (αριστερά) και λογάριθμος της διαφοράς των C_L : $(\log_{10}|C_L^{(HB)} - C_L^{(TM)}|)$ (δεξιά).



Σχήμα 9.8: Περίπτωση 1 : C_L με επίλυση με χρονο-προέλαση με 104 χρονικά βήματα στην περίοδο και με την προτεινόμενη μέθοδο της ισορροπίας των αρμονικών έχοντας ‘αναδομήσει’ τη χρονική σειρά των τιμών του C_L μέσω αναπτύγματος *Fourier* με βάση τέσσερις αρμονικές (αριστερά) και λογάριθμος της διαφοράς των C_L : $(\log_{10}|C_L^{(HB)} - C_L^{(TM)}|)$ (δεξιά).

Στον πίνακα 9.1 περιέχονται οι τιμές που προέκυψαν για τα C_L σε 13 ισαπέχουσες χρονικές στιγμές μέσα στην περίοδο T από TM και από την ισορροπία των αρμονικών με προσέγγιση διαφόρων αριθμών αρμονικών. Εννοείται ότι για να προκύψουν αυτές οι συγκεκριμένες στιγμές με τη μέθοδο HB έγινε μία αναδόμηση της χρονικής σειράς *Fourier* χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα που προέκυψαν.

Πίνακας 9.1: Τιμές που προέκυψαν για τα C_L με TM και με HB για διάφορες αρμονικές. (ο δείκτης στο HB δείχνει με πόσες αρμονικές έγινε η προσέγγιση).

$\frac{t}{T}$	TM	HB_1	HB_2	HB_3	HB_4	HB_5	HB_6
0	0.89209	0.8962	0.89249	0.89338	0.89352	0.89395	0.89403
0.0769	1.02316	1.02738	1.02626	1.02644	1.02629	1.02652	1.0263
0.1538	1.18329	1.18776	1.18857	1.18786	1.18787	1.18757	1.18782
0.2308	1.33852	1.34071	1.34145	1.34156	1.34238	1.34278	1.34287
0.3077	1.45089	1.45123	1.45063	1.45227	1.45247	1.45323	1.45346
0.3846	1.49347	1.49379	1.49275	1.49443	1.49394	1.49463	1.49516
0.4615	1.46005	1.45848	1.45928	1.45981	1.4605	1.46113	1.46141
0.5385	1.35769	1.3536	1.35749	1.35765	1.35875	1.35897	1.35917
0.6154	1.2083	1.20342	1.20909	1.20977	1.20974	1.20963	1.20981
0.6923	1.04613	1.04229	1.04671	1.04715	1.04706	1.04696	1.04688
0.7692	0.90695	0.90689	0.90762	0.90686	0.90725	0.90723	0.90704
0.8462	0.82368	0.82817	0.82509	0.82394	0.82382	0.82339	0.82366
0.9231	0.81806	0.82428	0.8195	0.81948	0.81924	0.81881	0.81846

Στον πίνακα 9.2 φαίνεται η μέση τιμή του $\log_{10}|C_L^{(HB)} - C_L^{(TM)}|$ μέσα στην περίοδο για προσέγγιση με διάφορες αρμονικές. Ακόμη, στον πίνακα 9.3 φαίνεται ο δεκαδικός λογάριθμος της μέγιστης διαφοράς των C_L μέσα στην περίοδο.

Πίνακας 9.2: Μέση τιμή μέσα στην περίοδο του $\log_{10}|C_L^{(HB)} - C_L^{(TM)}|$ για διάφορες αρμονικές.

HB_1	HB_2	HB_3	HB_4	HB_5	HB_6
-2.6602	-3.0089	-2.9996	-2.9610	-2.9034	-2.9332

Πίνακας 9.3: Μέγιστη τιμή μέσα στην περίοδο του $\log_{10}|C_L^{(HB)} - C_L^{(TM)}|$ για διάφορες αρμονικές.

HB_1	HB_2	HB_3	HB_4	HB_5	HB_6
-2.2064	-2.2774	-2.3398	-2.3324	-2.3476	-2.3138

Από τα σχήματα και τους πίνακες αυτού του κεφαλαίου συμπεραίνουμε ότι στην περίπτωση αυτή μία αρμονική είναι ικανή να δώσει με πολύ καλή ακρίβεια το C_L μέσα στην περίοδο. Αυτό οπτικά μπορεί να φανεί στο σχήμα 9.5. Συγκεκριμένα η μέγιστη απόκλιση από τις σωστές τιμές για τη μία αρμονική είναι σύμφωνα με τον πίνακα 9.3 $10^{-2.2064} \approx 6.2 \times 10^{-3}$ και η μέση απόκλιση είναι σύμφωνα με τον πίνακα 9.2 $10^{-2.6602} \approx 2.2 \times 10^{-3}$. Επίσης για $N_H = 2$

αρμονικές, όπως φαίνεται από το σχήμα 9.6 ουσιαστικά έχουμε πάρα πολύ καλή προσέγγιση της λύσης με μέγιστη απόκλιση από τις σωστές τιμές να είναι $10^{-2.2774} \approx 5.3 \times 10^{-3}$ και η μέση απόκλιση $10^{-3.0089} < 10^{-3}$. Ακόμη, παρατηρούμε ότι πρακτικά πάνω από $N_H = 2$ αρμονικές δεν έχει νόημα να χρησιμοποιηθούν αφού η λύση ούτε βελτιώνεται αλλά ούτε και χειροτερεύει, απλά σε κάποιες χρονικές στιγμές στην περίοδο είναι καλύτερη η προσέγγιση και σε άλλες χειρότερη. Ο λογάριθμος της μέγιστης και της μέσης διαφοράς των C_L μέσα στην περίοδο είναι απλά ενδεικτικά μεγέθη αφού εδώ ενδιαφερόμαστε για καλή προσέγγιση σε όλες τις στιγμές της περιόδου. Όπως θα φανεί και πιο κάτω, υπάρχουν περιπτώσεις όπου μπορεί η μέση τιμή του λογαρίθμου της διαφοράς των C_L μέσα στην περίοδο να είναι σχετικά μεγάλη κατ' απόλυτο τιμή και ταυτόχρονα η προσέγγιση να μην είναι ακριβής για ορισμένες στιγμές.

9.2 Περίπτωση 2: πολυωνυμική μεταβολή της γωνίας εισόδου της αεροτομής

Μετά έγινε το ίδιο με πριν, αλλά έχοντας ως διέγερση ένα πολυώνυμο τετάρτου βαθμού, στο οποίο έγινε περιοδική επέκταση, δηλαδή ορίστηκε η συνάρτηση για $0 \leq t \leq T$ και στις υπόλοιπες χρονικές στιγμές για $t > T$, επεκτάθηκε έτσι ώστε να είναι περιοδικό, δηλαδή έτσι ώστε να ισχύει η σχέση:

$$\alpha_1(t) = \alpha_1(t - \kappa T) \quad \text{για } t > T \text{ και με } \kappa \in \mathcal{N}, \text{ τέτοιο ώστε } 0 \leq t - \kappa T \leq T. \quad (9.3)$$

Ο τύπος που δίνει την επ' άπειρον γωνία της αεροτομής σε μία περίοδο είναι:

$$\alpha_1(t_*) = \alpha_{1,0} + B_4 t_*^4 + B_3 t_*^3 + B_2 t_*^2 + B_1 t_* \quad , \quad 0 \leq t_* \leq 1 \quad (9.4)$$

Γενικά είναι:

$$B_4 = \beta_4 \cdot T^4$$

$$B_3 = \beta_3 \cdot T^3$$

$$B_2 = \beta_2 \cdot T^2$$

$$B_1 = \beta_1 \cdot T$$

όπου $t_* = \frac{t}{T}$, δηλαδή ο χρόνος αδιαστατοποιημένος με την περίοδο. Το πολυώνυμο αυτό είναι τέτοιο ώστε $\alpha_1(0) = \alpha_1(1) = \alpha_{1,0}$ και $\alpha_1'(0) = \alpha_1'(1)$ Για να συμβαίνει αυτό θα πρέπει να ισχύει:

- $B_3 = 2B_1 - 2B_4$

- $B_2 = B_4 - 3B_1$

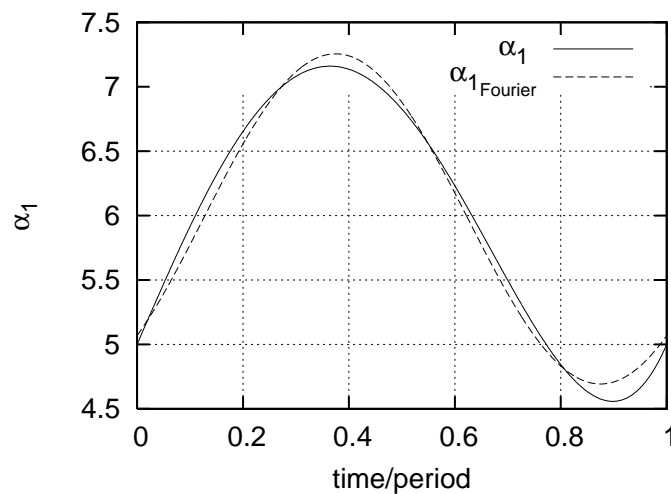
Εδώ θέσαμε: $\beta_4 = 3 \times 10^{-5}$ και $\beta_1 = 3 \times 10^{-1}$, ανηγμένη συχνότητα $f_r = 0.1$ και αδιάστατη περίοδο $\tilde{T} = \frac{\pi}{f_r} \approx 31.4$

Άρα τελικά:

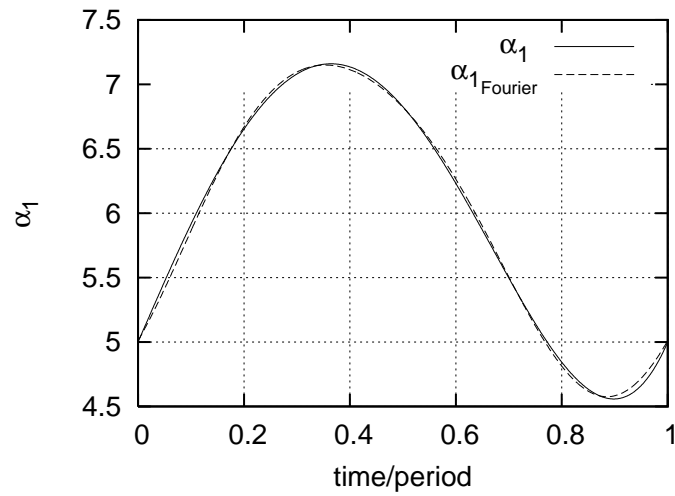
$B_4 = 29,223$, $B_3 = -39,596$, $B_2 = 0,948$, $B_1 = 9,425$.

Αρχικά, βρέθηκε πόσες αρμονικές είναι απαραίτητες για να προσεγγιστεί σωστά η διέγερση. Στα σχήματα 9.9 έως 9.12 φαίνεται η διέγερση (excitation), δηλαδή η μεταβολή της επ' άπειρον γωνίας με το χρόνο, καθώς και η προσέγγισή της μέσω σειρών Fourier.

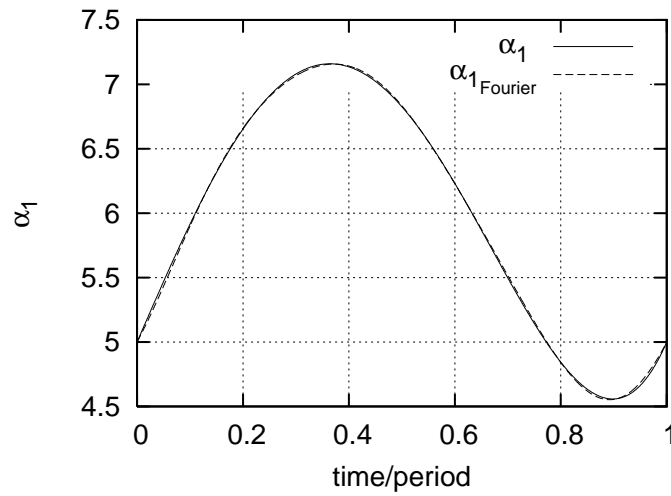
Από αυτά τα σχήματα γίνεται φανερό ότι βελτιώνεται η προσέγγιση της διέγερσης με την αύξηση των αρμονικών. Είναι φανερό πως σε αυτήν την περίπτωση επαρκούν τρεις αρμονικές για τη σωστή προσέγγιση της διέγερσης. Αυτή η παρατήρηση προειδοάζει ήδη το χρήστη της μεθόδου έτσι ώστε να «υποψιαστεί» τον αριθμό αρμονικών που θα χρειαστεί η μέθοδος της ισορροπίας των αρμονικών για να δώσει αξιόπιστα αποτελέσματα. Πάντως, αυτός ο αριθμός των αρμονικών δίνει απλά μια ένδειξη του απαιτούμενου αριθμού αρμονικών για να προσεγγιστεί η ροή και δεν ισούται με αυτόν, αφού το φαινόμενο δεν είναι γραμμικό (θα μπορούσε να είναι και μικρότερος και μεγαλύτερος).



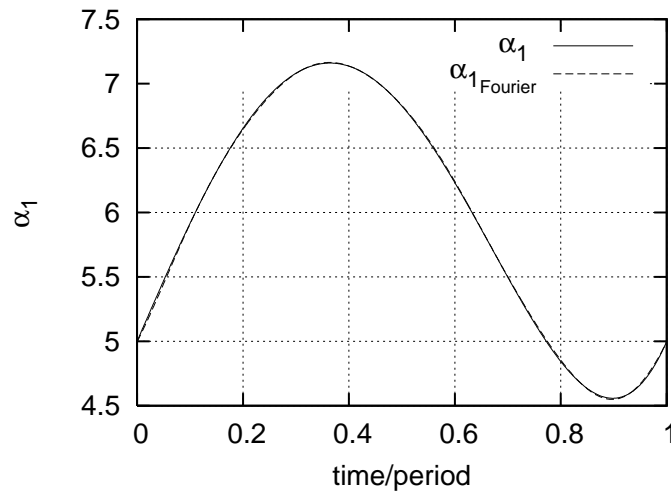
Σχήμα 9.9: Ροή γύρω από μεμονωμένη αεροτομή, με πολυωνυμική περιοδική μεταβολή της γωνίας εισόδου της ροής a_1 . Με a_1 συμβολίζεται η περιοδική διέγερση που επιβάλλεται και με $a_{1_{Fourier}}$ η ίδια διέγερση, όταν αναδομηθεί χρονικά μέσω ενός συνεχούς μετασχηματισμού *Fourier* με ανάλυση με μία αρμονική.



Σχήμα 9.10: Ροή γύρω από μεμονωμένη αεροτομή, με πολυωνυμική περιοδική μεταβολή της γωνίας εισόδου της ροής a_1 . Με a_1 συμβολίζεται η περιοδική διέγερση που επιβάλλεται και με $a_{1, Fourier}$ η ίδια διέγερση, όταν αναδομηθεί χρονικά μέσω ενός συνεχούς μετασχηματισμού *Fourier* με ανάλυση με δύο αρμονικές.

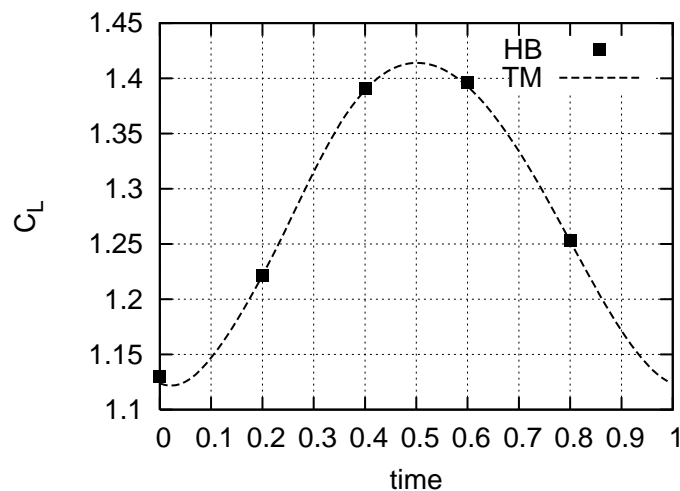


Σχήμα 9.11: Ροή γύρω από μεμονωμένη αεροτομή, με πολωνυμική περιοδική μεταβολή της γωνίας εισόδου της ροής a_1 . Με a_1 συμβολίζεται η περιοδική διέγερση που επιβάλλεται και με $a_{1\text{Fourier}}$ η ίδια διέγερση, όταν αναδομηθεί χρονικά μέσω ενός συνεχούς μετασχηματισμού *Fourier* με ανάλυση με τρεις αρμονικές.

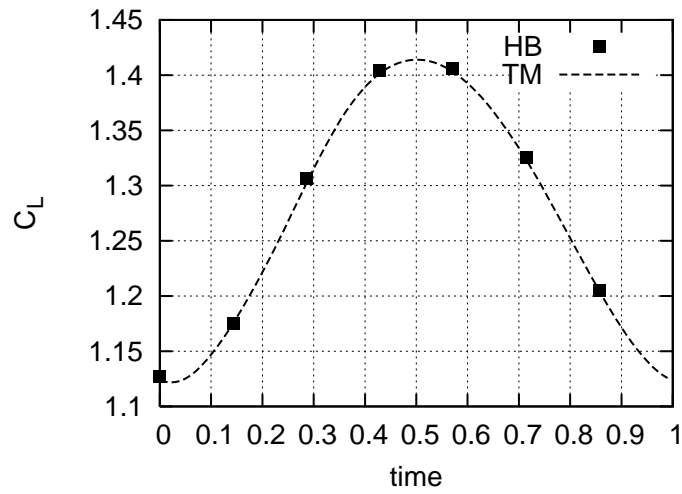


Σχήμα 9.12: Ροή γύρω από μεμονωμένη αεροτομή, με πολωνυμική περιοδική μεταβολή της γωνίας εισόδου της ροής a_1 . Με a_1 συμβολίζεται η περιοδική διέγερση που επιβάλλεται και με $a_{1\text{Fourier}}$ η ίδια διέγερση, όταν αναδομηθεί χρονικά μέσω ενός συνεχούς μετασχηματισμού *Fourier* με ανάλυση με τέσσερις αρμονικές.

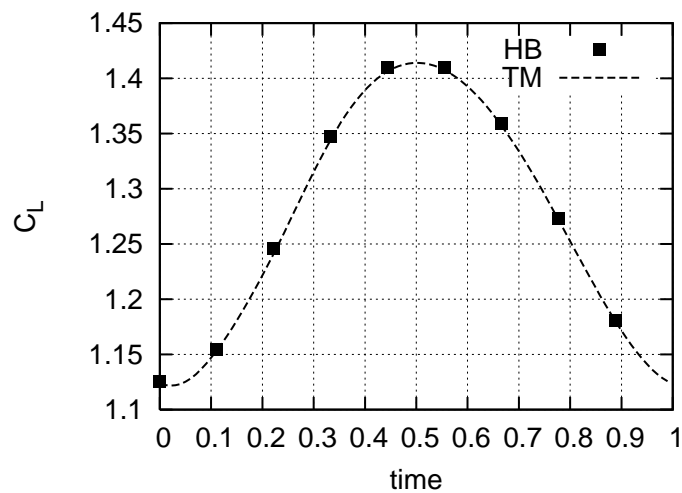
Στα σχήματα 9.13 έως 9.15 φαίνεται ο συντελεστής άνωσης C_L σε κάθε χρονική στιγμή μέσα στην περίοδο, υπολογισμένος με χρονο-προέλαση και ο ίδιος υπολογισμένος με τη μέθοδο της ισορροπίας των αρμονικών χρησιμοποιώντας προσέγγιση N_H αρμονικών σε $N_T = 2N_H + 1$ διακριτές χρονικές στιγμές. Επίσης, στα σχήματα 9.16 έως 9.18 φαίνεται ο συντελεστής άνωσης C_L , όπως έχει υπολογιστεί με τη μέθοδο της ισορροπίας των αρμονικών και στις άλλες χρονικές στιγμές της περιόδου, αφού πρώτα έχει γίνει χρονική αναδόμηση του πεδίου ροής με χρήση αναπτύγματος *Fourier* με βάση τις N_H πρώτες αρμονικές που προέκυψαν από την επίλυση με τη μέθοδο *HB*.



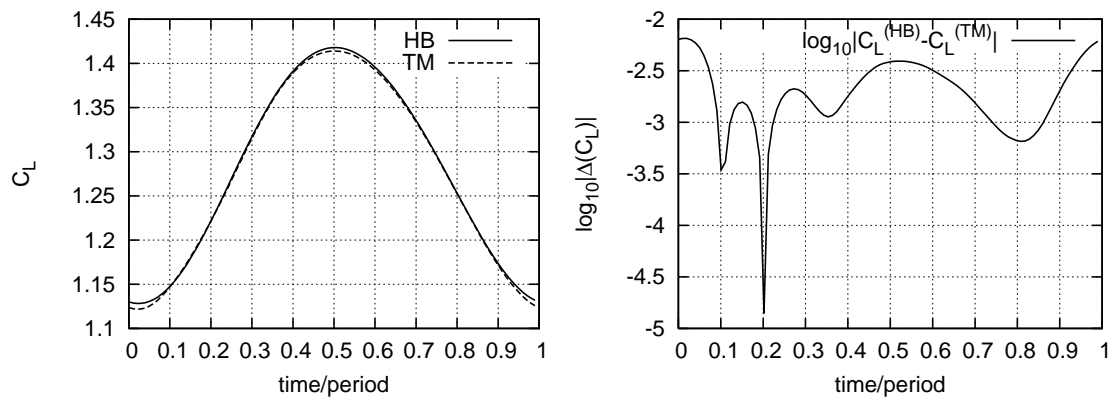
Σχήμα 9.13: Περίπτωση 2 : C_L με επίλυση με χρονο-προέλαση με 99 χρονικά βήματα στην περίοδο και με την προτεινόμενη μέθοδο της ισορροπίας των αρμονικών σε 5 στιγμές, άρα με προσέγγιση $N_H = 2$ αρμονικών.



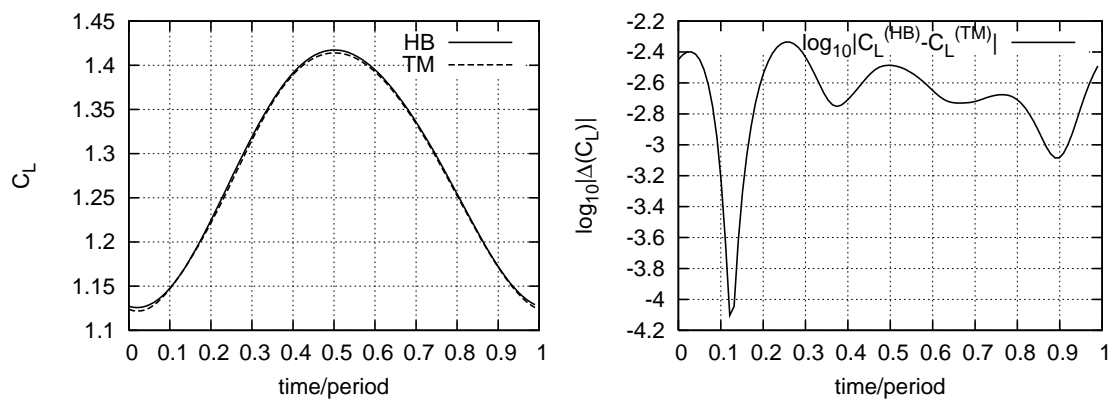
Σχήμα 9.14: Περίπτωση 2 : C_L με επίλυση με χρονο-προέλαση με 99 χρονικά βήματα στην περίοδο και με την προτεινόμενη μέθοδο της ισορροπίας των αρμονικών σε 7 στιγμές, άρα με προσέγγιση $N_H = 3$ αρμονικών.



Σχήμα 9.15: Περίπτωση 2 : C_L με επίλυση με χρονο-προέλαση με 99 χρονικά βήματα στην περίοδο και με την προτεινόμενη μέθοδο της ισορροπίας των αρμονικών σε 9 στιγμές, άρα με προσέγγιση $N_H = 4$ αρμονικών.

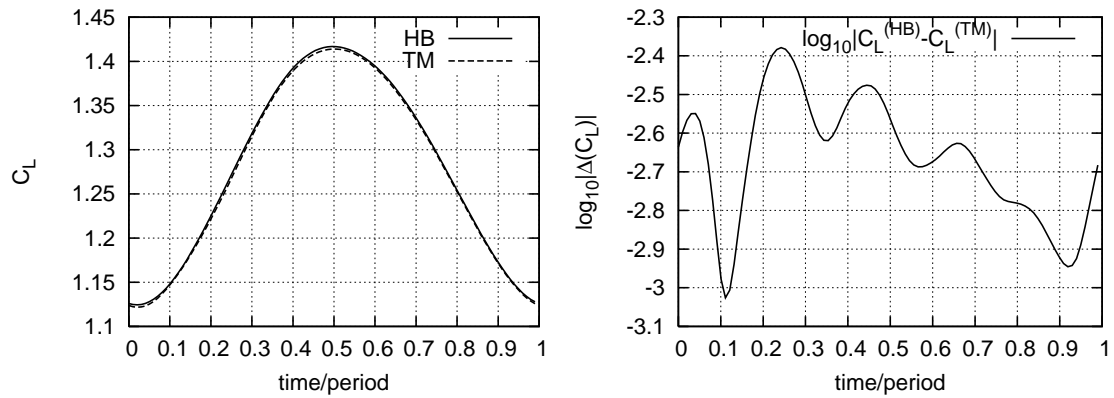


Σχήμα 9.16: Περίπτωση 2 : C_L με επίλυση με χρονο-προέλαση με 99 χρονικά βήματα στην περίοδο και με την προτεινόμενη μέθοδο της ισορροπίας των αρμονικών έχοντας ‘αναδομήσει’ τη χρονική σειρά των τιμών του C_L μέσω αναπτύγματος *Fourier* με βάση $N_H = 2$ αρμονικές (αριστερά) και λογάριθμος της διαφοράς των C_L : $(\log_{10}|C_L^{(HB)} - C_L^{(TM)}|)$ (δεξιά).



Σχήμα 9.17: Περίπτωση 2 : C_L με επίλυση με χρονο-προέλαση με 99 χρονικά βήματα στην περίοδο και με την προτεινόμενη μέθοδο της ισορροπίας των αρμονικών έχοντας ‘αναδομήσει’ τη χρονική σειρά των τιμών του C_L μέσω αναπτύγματος *Fourier* με βάση $N_H = 3$ αρμονικές (αριστερά) και λογάριθμος της διαφοράς των C_L : $(\log_{10}|C_L^{(HB)} - C_L^{(TM)}|)$ (δεξιά).

9.2. Περίπτωση 2: πολωνυμική μεταβολή της γωνίας εισόδου της αεροτομής



Σχήμα 9.18: Περίπτωση 2 : C_L με επίλυση με χρονο-προέλαση με 99 χρονικά βήματα στην περίοδο και με την προτεινόμενη μέθοδο της ισορροπίας των αρμονικών έχοντας ‘αναδομήσει’ τη χρονική σειρά των τιμών του C_L μέσω αναπτύγματος *Fourier* με βάση $N_H = 4$ αρμονικές (αριστερά) και λογάριθμος της διαφοράς των C_L : $(\log_{10}|C_L^{(HB)} - C_L^{(TM)}|)$ (δεξιά).

Στον πίνακα 9.4 περιέχονται οι τιμές που προέκυψαν για τα C_L σε 11 ισαπέχουσες χρονικές στιγμές μέσα στην περίοδο T από TM και από HB με προσέγγιση διαφόρων αριθμών αρμονικών. Εννοείται ότι για να προκύψουν αυτές οι συγκεκριμένες στιγμές με τη μέθοδο της ισορροπίας των αρμονικών έγινε μία αναδόμηση της χρονικής σειράς *Fourier* χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα που προέκυψαν.

Πίνακας 9.4: Τιμές που προέκυψαν για τα C_L με TM και με HB για διάφορες αρμονικές. (ο δείκτης στο HB δείχνει με πόσες αρμονικές έγινε η προσέγγιση).

$\frac{t}{T}$	TM	HB_2	HB_3	HB_4
0	1.12365	1.13003	1.12721	1.12596
0.0909	1.14189	1.14317	1.143	1.1432
0.1818	1.20599	1.2051	1.20784	1.20878
0.2727	1.28938	1.2915	1.29388	1.29323
0.3636	1.36765	1.36882	1.36947	1.37012
0.4545	1.40892	1.41211	1.41183	1.41225
0.5455	1.40958	1.41344	1.41256	1.41172
0.6364	1.37497	1.37757	1.37688	1.37727
0.7273	1.31324	1.31439	1.31525	1.31515
0.8182	1.23689	1.23755	1.23863	1.23852
0.9091	1.16526	1.16763	1.16614	1.16641

Στον πίνακα 9.5 φαίνεται η μέση τιμή του $\log_{10}|C_L^{(HB)} - C_L^{(TM)}|$ μέσα στην περίοδο για προσέγγιση με διάφορες αρμονικές, ενώ στον πίνακα 9.6 ο δεκαδικός λογάριθμος της μέγιστης διαφοράς των C_L μέσα στην περίοδο.

Πίνακας 9.5: Μέση τιμή μέσα στην περίοδο του $\log_{10}|C_L^{(HB)} - C_L^{(TM)}|$ για διάφορες αρμονικές.

HB ₂	HB ₃	HB ₄
-2.73754	-2.70991	-2.66464

Πίνακας 9.6: Μέγιστη τιμή μέσα στην περίοδο του $\log_{10}|C_L^{(HB)} - C_L^{(TM)}|$ για διάφορες αρμονικές.

HB ₂	HB ₃	HB ₄
-2.18569	-2.33535	-2.37882

Στα σχήματα 9.16 έως 9.18 φαίνεται (κυρίως από τα αριστερά σχήματα) ότι βελτιώνεται η προσέγγιση με την αύξηση των αρμονικών. Αξίζει ακόμα να παρατηρηθεί από τον πίνακα 9.5 ότι η μέση τιμή του $\log_{10}|C_L^{(HB)} - C_L^{(TM)}|$ μένει πρακτικά σταθερή και μειώνεται λίγο κατ' απόλυτο τιμή με την αύξηση των αρμονικών από δύο σε τέσσερις. Αυτό οφείλεται στο ότι, για παράδειγμα, για δύο αρμονικές υπάρχουν διαστήματα με πολύ καλή προσέγγιση και διαστήματα με όχι και τόσο καλή όπως στο $t/T \in (0, 0.1)$ και στο $t/T \in (0.9, 1)$ (σχήμα 9.16). Αυτό οφείλεται στο ότι με τις περισσότερες αρμονικές βελτιώνεται η προσέγγιση σημείων που πριν δεν προσεγγίζονταν τόσο σωστά, αλλά και πιθανώς χειροτερεύει η προσέγγιση κάποιων σημείων. Αυτό φαίνεται και στον πίνακα 9.6, από τον οποίο συμπεραίνουμε ότι για $N_H = 2, 3, 4$ έχουμε καλύτερη προσέγγιση από δηλαδή το 'σφάλμα' σε σχέση με το TM στο σημείο που προσεγγίζεται χειρότερα είναι αντίστοιχα 6.52×10^{-3} , 4.62×10^{-3} , 4.18×10^{-3} .

9.3 Περίπτωση 3: μία πιο σύνθετη μεταβολή της γωνίας εισόδου της ροής

Σε αυτό το σημείο έγινε λίγο πιο σύνθετη η συνάρτηση διέγερσης με μικρή αλλαγή από πρίν. Ο τύπος που δίνει τη γωνία προσβολής της αεροτομής σε μία περίοδο είναι:

$$\alpha_1(t_*) = \alpha_{1,0} + (B_4 t_*^4 + B_3 t_*^3 + B_2 t_*^2 + B_1 t_*) \cdot C, \quad 0 \leq t_* \leq 1 \quad (9.5)$$

$$\text{όπου } C = (\exp(t_*) * \cos(2 \cdot \pi \cdot t_*) + \exp(1 - t_*) * \cos(2 \cdot \pi \cdot t_*))/6$$

Για $t_* > 1$ επεκτείνεται η συνάρτηση $\alpha_1(t_*)$ βάσει του κανόνα της περιοδικότητας.

Πάλι είναι:

$$B_4 = \beta_4 \cdot T^4$$

$$B_3 = \beta_3 \cdot T^3$$

9.3. Περίπτωση 3: μία πιο σύνθετη μεταβολή της γωνίας εισόδου της ροής

$$B_2 = \beta_2 \cdot T^2$$

$$B_1 = \beta_1 \cdot T$$

όπου $t_* = \frac{t}{T}$, δηλαδή ο χρόνος αδιαστατοποιημένος με την περίοδο.

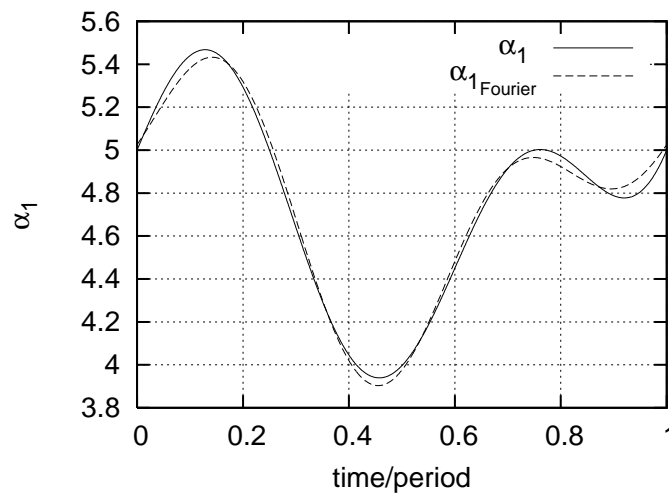
Πάλι ισχύει $\alpha_1(0) = \alpha_1(1) = \alpha_{1,0}$ και $\alpha_1'(0) = \alpha_1'(1)$, (περιοδικότητα και συνέχεια πρώτης παραγώγου) αφού ισχύει:

- $B_3 = 2B_1 - 2B_4$

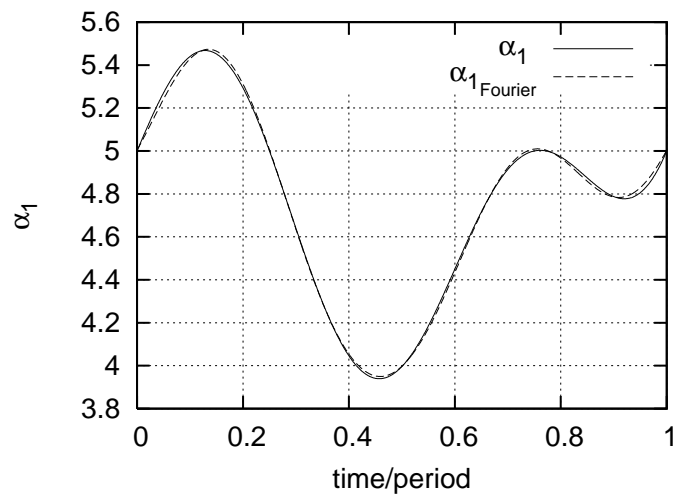
- $B_2 = B_4 - 3B_1$

Και εδώ τέθηκε $\beta_4 = 3 \times 10^{-5}$ και $\beta_1 = 3 \times 10^{-1}$ και περίοδο $\check{T} = \pi/f_r$, $f_r = 1 \times 10^{-1}$, όπου f_r είναι ένα η ανηγμένη συχνότητα (*reduced frequency*), $f_r = \frac{\omega C}{2V_\infty}$.

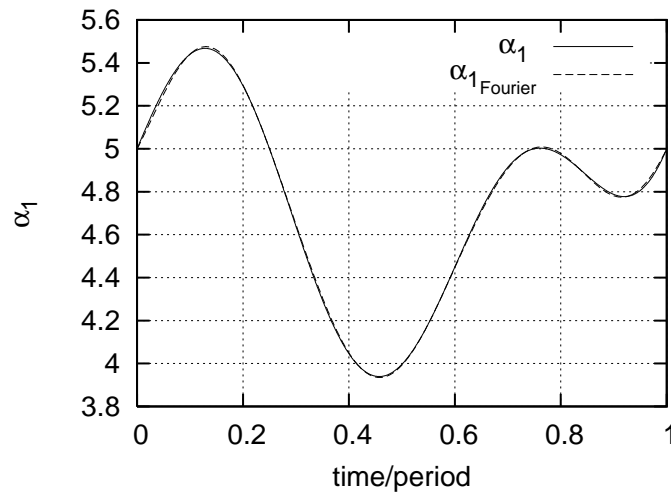
Στα σχήματα από 9.19 μέχρι 9.21 φαίνεται η διέγερση δηλαδή η μεταβολή της γωνίας εισόδου με το χρόνο, καθώς και η προσέγγισή της μέσω σειρών Fourier. Από αυτά τα σχήματα μπορεί να παρατηρηθεί ότι 3 αρμονικές δίνουν μία αρκετά καλή προσέγγιση της διέγερσης (με 2 η προσέγγιση είναι λιγότερο καλή και με 4 πάρα πολύ καλή).



Σχήμα 9.19: Ροή γύρω από μεμονωμένη αεροτομή, με πιο σύνθετη περιοδική μεταβολή της γωνίας εισόδου της ροής α_1 . Με α_1 συμβολίζεται η περιοδική διέγερση που επιβάλλεται και με $\alpha_{1_{Fourier}}$ η ίδια διέγερση, όταν αναδομηθεί χρονικά μέσω ενός συνεχούς μετασχηματισμού *Fourier* με ανάλυση με δύο αρμονικές.

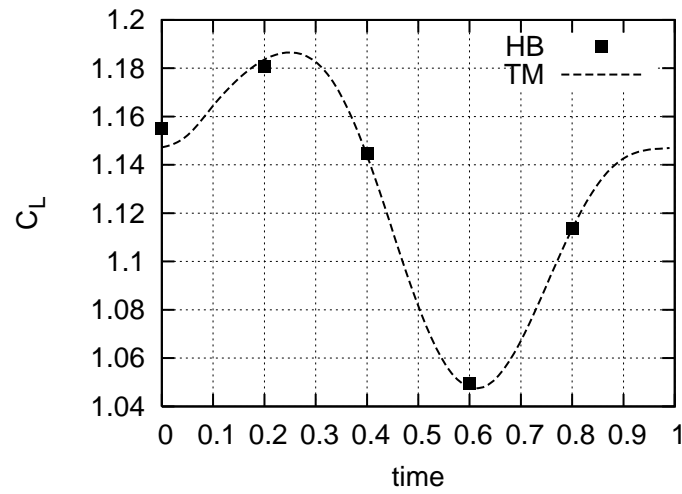


Σχήμα 9.20: Ροή γύρω από μεμονωμένη αεροτομή, με πιο σύνθετη περιοδική μεταβολή της γωνίας εισόδου της ροής a_1 . Με a_1 συμβολίζεται η περιοδική διέγερση που επιβάλλεται και με $a_{1_Fourier}$ η ίδια διέγερση, όταν αναδομηθεί χρονικά μέσω ενός συνεχούς μετασχηματισμού *Fourier* με ανάλυση με τρεις αρμονικές.

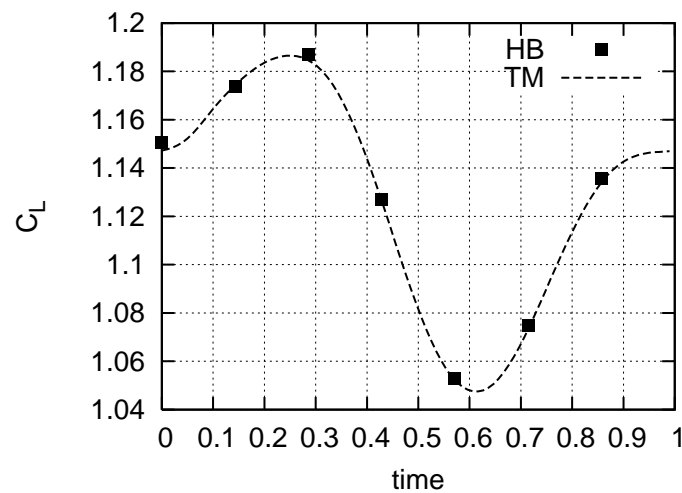


Σχήμα 9.21: Ροή γύρω από μεμονωμένη αεροτομή, με πιο σύνθετη περιοδική μεταβολή της γωνίας εισόδου της ροής a_1 . Με a_1 συμβολίζεται η περιοδική διέγερση που επιβάλλεται και με $a_{1_{Fourier}}$ η ίδια διέγερση, όταν αναδομηθεί χρονικά μέσω ενός συνεχούς μετασχηματισμού *Fourier* με ανάλυση με τέσσερις αρμονικές.

Στα σχήματα 9.22 μέχρι και 9.27 φαίνεται ο συντελεστής άνωσης C_L σε κάθε χρονική στιγμή μέσα στην περίοδο, υπολογισμένος με τη μέθοδο χρονο-προέλασης και ο ίδιος υπολογισμένος με τη μέθοδο της ισορροπίας των αρμονικών χρησιμοποιώντας προσέγγιση N_H αρμονικών σε $N_T = 2N_H + 1$ διακριτές χρονικές στιγμές. Επίσης έχει υπολογιστεί το C_L και στις άλλες χρονικές στιγμές της περιόδου, αφού έχει γίνει πρώτα εύρεση των συντελεστών *Fourier* των μεταβλητών ροής για τις N_H πρώτες αρμονικές και μετά χρήση του αναπτύγματος *Fourier*, το οποίο φαίνεται στα σχήματα από 9.28 μέχρι και 9.33 μαζί με το δεκαδικό λογάριθμο της απόλυτης τιμής του σφάλματος του C_L μεταξύ *TM* και *HB*.

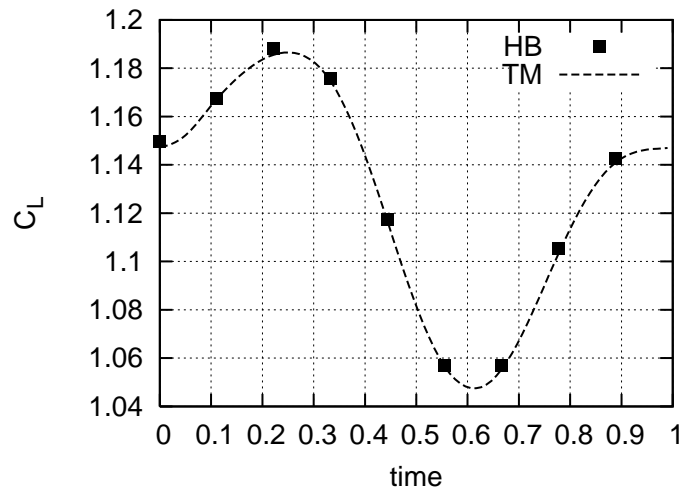


Σχήμα 9.22: Περίπτωση 3 : C_L με επίλυση με χρονο-προέλαση με 99 χρονικά βήματα στην περίοδο και με την προτεινόμενη μέθοδο της ισορροπίας των αρμονικών σε 5 στιγμές, άρα με προσέγγιση $N_H = 2$ αρμονικών.

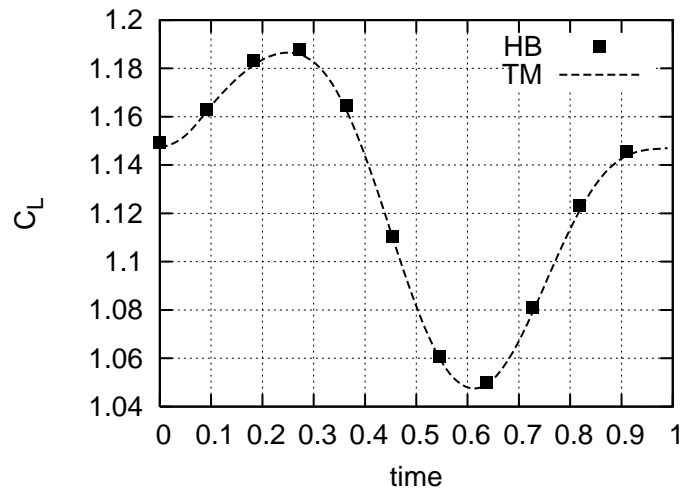


Σχήμα 9.23: Περίπτωση 3 : C_L με επίλυση με χρονο-προέλαση με 99 χρονικά βήματα στην περίοδο και με την προτεινόμενη μέθοδο της ισορροπίας των αρμονικών σε 7 στιγμές, άρα με προσέγγιση $N_H = 3$ αρμονικών.

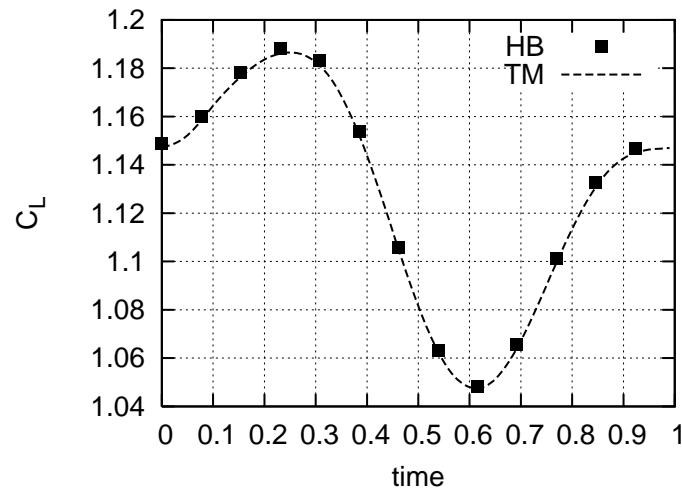
9.3. Περίπτωση 3: μία πιο σύνθετη μεταβολή της γωνίας εισόδου της ροής



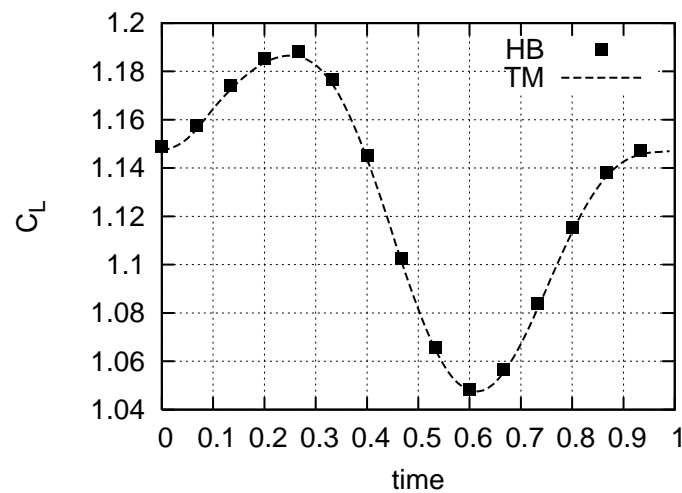
Σχήμα 9.24: Περίπτωση 3 : C_L με επίλυση με χρονο-προέλαση με 99 χρονικά βήματα στην περίοδο και με την προτεινόμενη μέθοδο της ισορροπίας των αρμονικών σε 9 στιγμές, άρα με προσέγγιση $N_H = 4$ αρμονικών.



Σχήμα 9.25: Περίπτωση 3 : C_L με επίλυση με χρονο-προέλαση με 99 χρονικά βήματα στην περίοδο και με την προτεινόμενη μέθοδο της ισορροπίας των αρμονικών σε 11 στιγμές, άρα με προσέγγιση $N_H = 5$ αρμονικών.

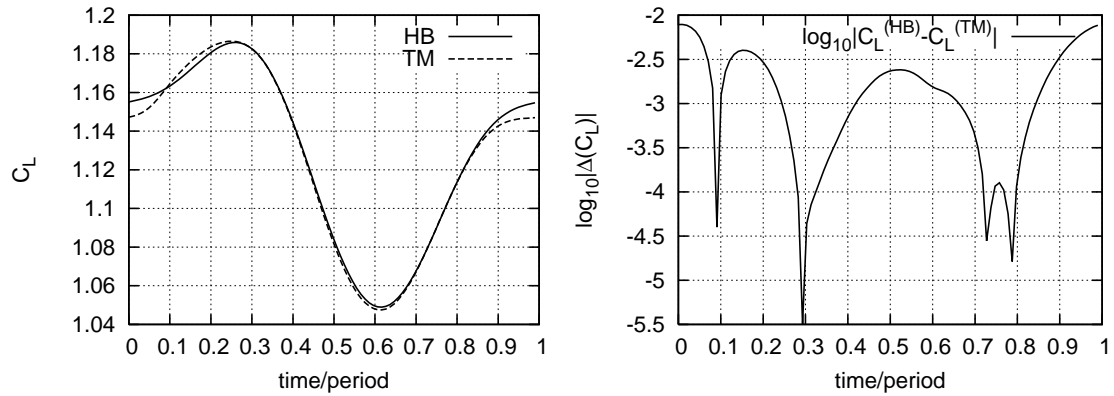


Σχήμα 9.26: Περίπτωση 3 : C_L με επίλυση με χρονο-προέλαση με 99 χρονικά βήματα στην περίοδο και με την προτεινόμενη μέθοδο της ισορροπίας των αρμονικών σε 13 στιγμές, άρα με προσέγγιση $N_H = 6$ αρμονικών.

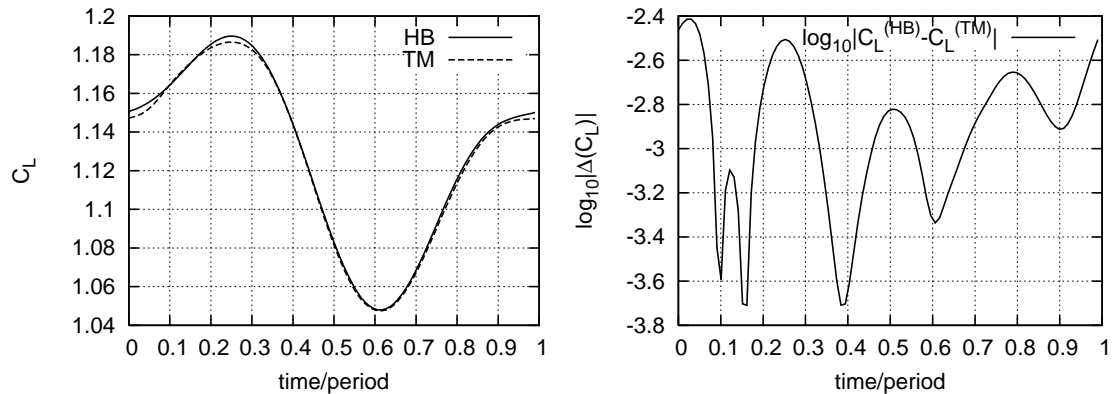


Σχήμα 9.27: Περίπτωση 3 : C_L με επίλυση με χρονο-προέλαση με 99 χρονικά βήματα στην περίοδο και με την προτεινόμενη μέθοδο της ισορροπίας των αρμονικών σε 15 στιγμές, άρα με προσέγγιση $N_H = 7$ αρμονικών.

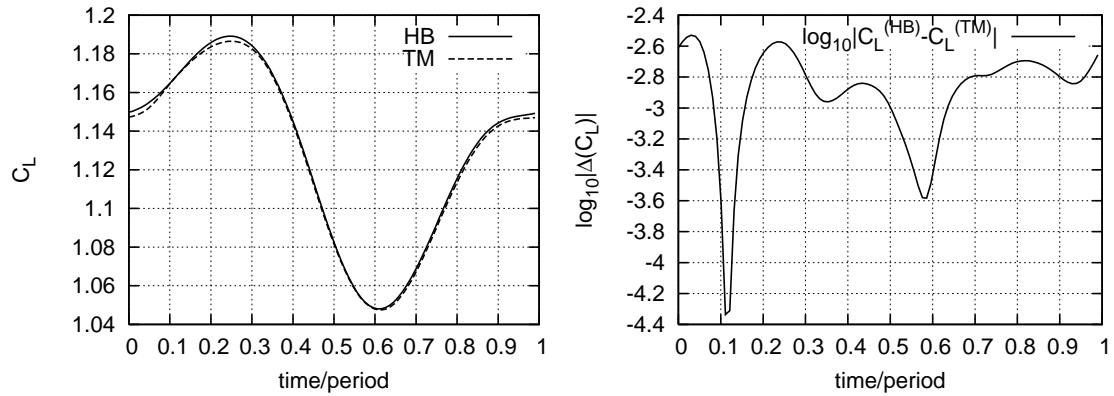
9.3. Περίπτωση 3: μία πιο σύνθετη μεταβολή της γωνίας εισόδου της ροής



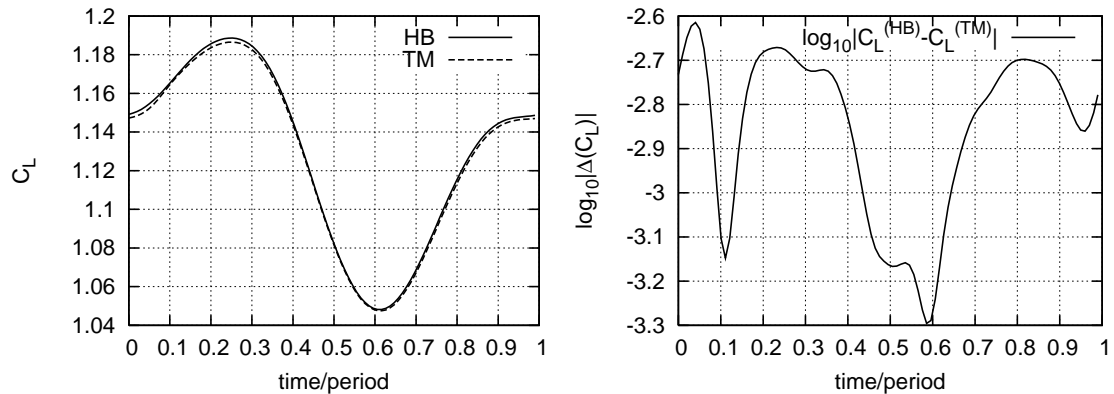
Σχήμα 9.28: Περίπτωση 3 : C_L με επίλυση με χρονο-προέλαση με 99 χρονικά βήματα στην περίοδο και με την προτεινόμενη μέθοδο της ισορροπίας των αρμονικών έχοντας ‘αναδομήσει’ τη χρονική σειρά των τιμών του C_L μέσω αναπτύγματος *Fourier* με βάση $N_H = 2$ αρμονικές (αριστερά) και λογάριθμος της διαφοράς των C_L : $(\log_{10}|C_L^{(HB)} - C_L^{(TM)}|)$ (δεξιά).



Σχήμα 9.29: Περίπτωση 3 : C_L με επίλυση με χρονο-προέλαση με 99 χρονικά βήματα στην περίοδο και με την προτεινόμενη μέθοδο της ισορροπίας των αρμονικών έχοντας ‘αναδομήσει’ τη χρονική σειρά των τιμών του C_L μέσω αναπτύγματος *Fourier* με βάση $N_H = 3$ αρμονικές (αριστερά) και λογάριθμος της διαφοράς των C_L : $(\log_{10}|C_L^{(HB)} - C_L^{(TM)}|)$ (δεξιά).

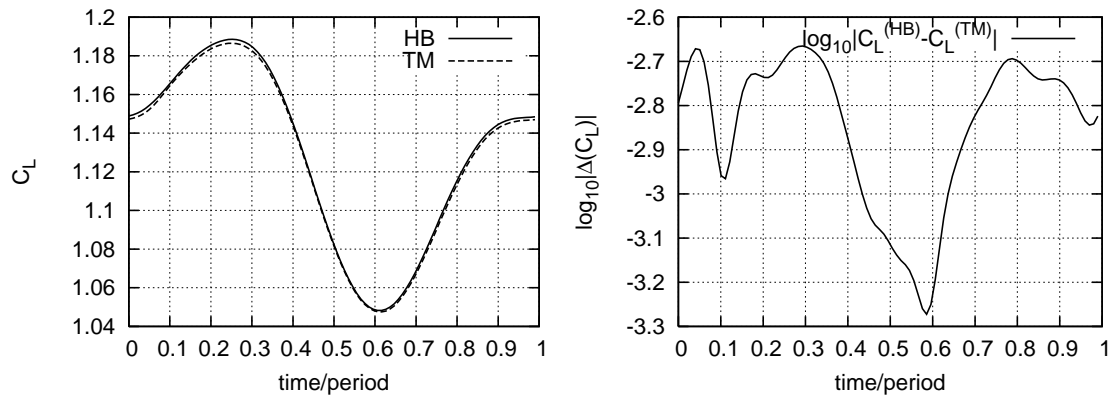


Σχήμα 9.30: Περίπτωση 3 : C_L με επίλυση με χρονο-προέλαση με 99 χρονικά βήματα στην περίοδο και με την προτεινόμενη μέθοδο της ισορροπίας των αρμονικών έχοντας ‘αναδομήσει’ τη χρονική σειρά των τιμών του C_L μέσω αναπτύγματος *Fourier* με βάση $N_H = 4$ αρμονικές (αριστερά) και λογάριθμος της διαφοράς των C_L : $(\log_{10}|C_L^{(HB)} - C_L^{(TM)}|)$ (δεξιά).

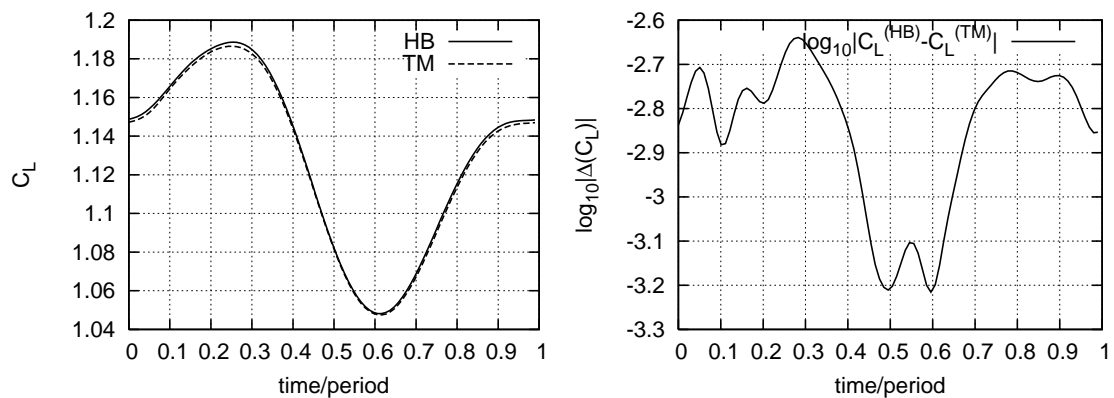


Σχήμα 9.31: Περίπτωση 3 : C_L με επίλυση με χρονο-προέλαση με 99 χρονικά βήματα στην περίοδο και με την προτεινόμενη μέθοδο της ισορροπίας των αρμονικών έχοντας ‘αναδομήσει’ τη χρονική σειρά των τιμών του C_L μέσω αναπτύγματος *Fourier* με βάση $N_H = 5$ αρμονικές (αριστερά) και λογάριθμος της διαφοράς των C_L : $(\log_{10}|C_L^{(HB)} - C_L^{(TM)}|)$ (δεξιά).

9.3. Περίπτωση 3: μία πιο σύνθετη μεταβολή της γωνίας εισόδου της ροής



Σχήμα 9.32: Περίπτωση 3 : C_L με επίλυση με χρονο-προέλαση με 99 χρονικά βήματα στην περίοδο και με την προτεινόμενη μέθοδο της ισορροπίας των αρμονικών έχοντας ‘αναδομήσει’ τη χρονική σειρά των τιμών του C_L μέσω αναπτύγματος *Fourier* με βάση $N_H = 6$ αρμονικές (αριστερά) και λογάριθμος της διαφοράς των C_L : $(\log_{10}|C_L^{(HB)} - C_L^{(TM)}|)$ (δεξιά).



Σχήμα 9.33: Περίπτωση 3 : C_L με επίλυση με χρονο-προέλαση με 99 χρονικά βήματα στην περίοδο και με την προτεινόμενη μέθοδο της ισορροπίας των αρμονικών έχοντας ‘αναδομήσει’ τη χρονική σειρά των τιμών του C_L μέσω αναπτύγματος *Fourier* με βάση $N_H = 7$ αρμονικές (αριστερά) και λογάριθμος της διαφοράς των C_L : $(\log_{10}|C_L^{(HB)} - C_L^{(TM)}|)$ (δεξιά).

Ο πίνακας 9.7 περιέχει τις τιμές που προέκυψαν για τα C_L σε 11 ισαπέχουσες χρονικές στιγμές μέσα στην περίοδο T από TM και από HB με προσέγγιση διαφόρων αριθμών αρμονικών. Εννοείται ότι για να προκύψουν αυτές οι συγκεκριμένες στιγμές με τη μέθοδο HB έγινε μία αναδόμηση της χρονικής σειράς *Fourier* χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα που προέκυψαν.

Πίνακας 9.7: Τιμές που προέκυψαν για τα C_L με TM και με HB για διάφορες αρμονικές. (ο δείκτης στο HB δείχνει με πόσες αρμονικές έγινε η προσέγγιση).

$\frac{t}{T}$	TM	HB_2	HB_3	HB_4	HB_5	HB_6	HB_7
0	1.14728	1.15514	1.15072	1.14975	1.14914	1.14889	1.14874
0.0909	1.16209	1.16213	1.16244	1.16272	1.16311	1.16333	1.16349
0.1818	1.18118	1.1776	1.18225	1.18299	1.18315	1.18305	1.18287
0.2727	1.1858	1.18558	1.1887	1.18807	1.18782	1.18794	1.18808
0.3636	1.16277	1.16307	1.16313	1.16389	1.16461	1.16455	1.16453
0.4545	1.10963	1.11131	1.11058	1.11103	1.11044	1.11051	1.11041
0.5455	1.05995	1.06226	1.06122	1.06044	1.06064	1.06062	1.06074
0.6364	1.049	1.0503	1.04962	1.05003	1.04992	1.05	1.04989
0.7273	1.0793	1.07933	1.08092	1.08093	1.08094	1.08098	1.08105
0.8182	1.12104	1.12145	1.12311	1.12306	1.12304	1.12297	1.12291
0.9091	1.14375	1.14759	1.14498	1.14527	1.14543	1.14553	1.14561

Στον πίνακα 9.8 φαίνεται η μέση τιμή του $\log_{10}|C_L^{(HB)} - C_L^{(TM)}|$ μέσα στην περίοδο για προσέγγιση με διάφορες αρμονικές N_H , ενώ στον πίνακα 9.9 ο δεκαδικός λογάριθμος της μέγιστης διαφοράς των C_L μέσα στην περίοδο.

Πίνακας 9.8: Μέση τιμή μέσα στην περίοδο του $\log_{10}|C_L^{(HB)} - C_L^{(TM)}|$ για διάφορες αρμονικές.

HB_2	HB_3	HB_4	HB_5	HB_6	HB_7
-2.99066	-2.92041	-2.90332	-2.85754	-2.84738	-2.84809

Πίνακας 9.9: Μέγιστη τιμή μέσα στην περίοδο του $\log_{10}|C_L^{(HB)} - C_L^{(TM)}|$ για διάφορες αρμονικές.

HB_2	HB_3	HB_4	HB_5	HB_6	HB_7
-2.10429	-2.41404	-2.52927	-2.61456	-2.66537	-2.63922

Και εδώ παρατηρούμε και από τα σχήματα και από τους πίνακες που αφορούν αυτή την περίπτωση ότι με την αύξηση των αρμονικών πετυχαίνουμε ολοένα και καλύτερη προσέγγιση, μέχρι τις $N_H = 6$ αρμονικές. Τα αποτελέσματα για $N_H = 6$ και για $N_H = 7$ διαφέρουν πολύ λίγο, όπως φαίνεται και από τους τρεις πίνακες (9.7 έως 9.9). Ακόμη το ότι για $N_H = 2$ αρμονικές έχουμε πολύ καλό μέσο $\log_{10}|C_L^{(HB)} - C_L^{(TM)}|$ δεν σημαίνει κάτι, αφού, όπως φαίνεται και από το σχήμα 9.28, υπάρχουν στιγμές μέσα στην περίοδο με πολύ καλή προσέγγιση και άλλες με όχι και τόσο καλή. Ακόμη από τον πίνακα 9.9 βλέπουμε ότι για πολλές αρμονικές επιτυγχάνεται προσέγγιση στο C_L καλύτερη από περίπου $10^{-2.63922} \approx 2.3 \times 10^{-3}$.

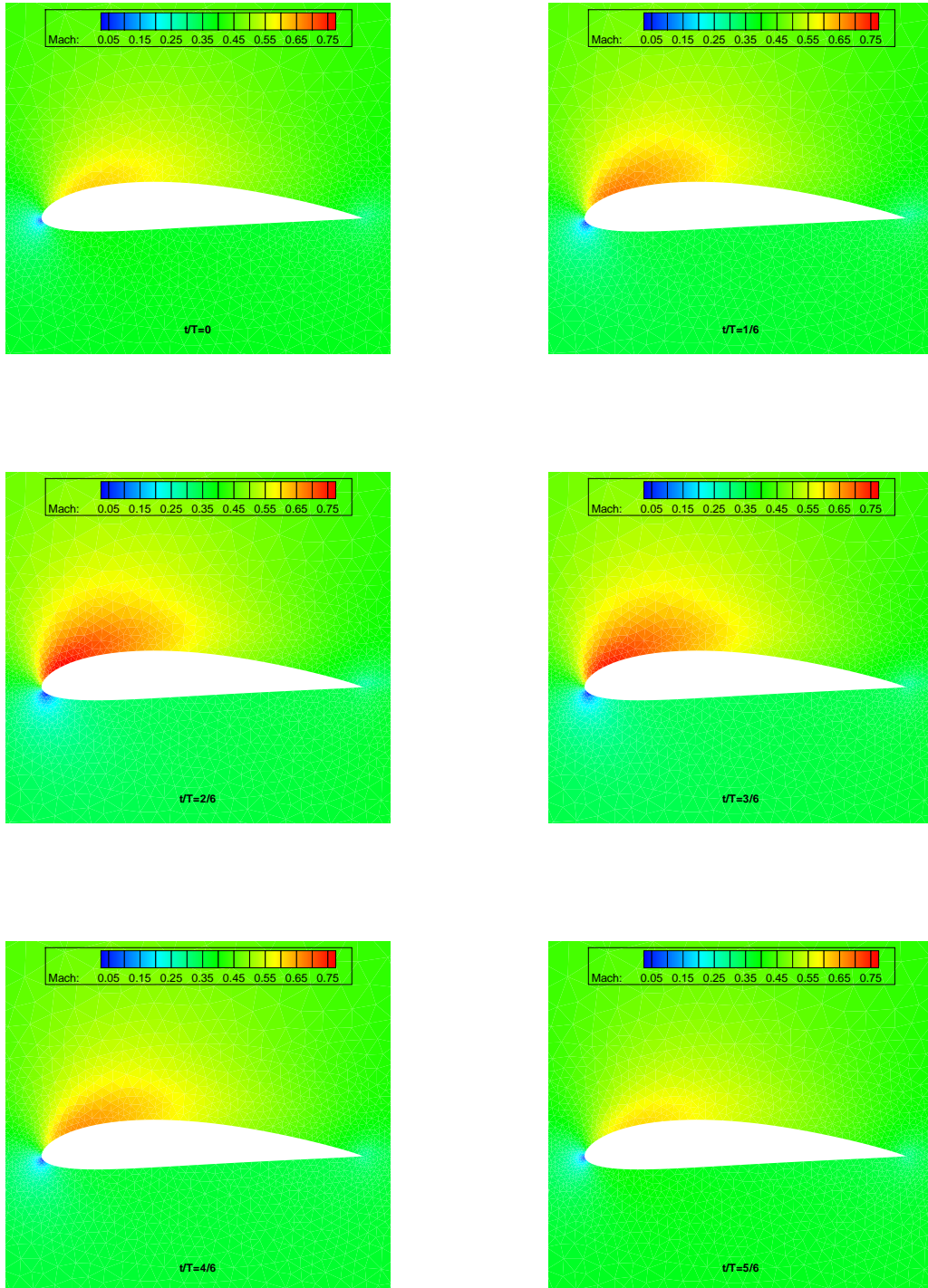
9.4 Εικόνες της ροής σε μερικές χρονικές στιγμές μέσα στην περίοδο

Εδώ, ενδεικτικά για την περίπτωση 1 θα δοθούν κάποιες εικόνες της ροής και με επίλυση με TM και με HB . Στο σχήμα 9.34 φαίνεται η ροή γύρω από την αεροτομή (NACA 4415) και συγκεκριμένα ο αριθμός $Mach$, υπολογισμένος σε 6 ισαπέχουσες χρονικά στιγμές της περιόδου μετά από επίλυση της περίπτωσης 1 (ημιτονοειδής μεταβολή της γωνίας εισόδου) με τη μέθοδο της χρονο-προέλασης και με τη χρήση 96 χρονικών βημάτων (έχει γίνει μεγέθυνση προκειμένου να φαίνεται η περιοχή που ενδιαφέρει αφού έτσι και αλλιώς μακριά από την αεροτομή είναι $Mach \approx M_\infty = 0.4$). Ακόμη, στο σχήμα 9.35 φαίνεται ο αριθμός $Mach$ γύρω από την αεροτομή σε 6 ισαπέχουσες στιγμές στην περίοδο στην περίπτωση 1, επιλυμένη αυτή τη φορά όμως με HB και με προσέγγιση 2 αρμονικών, που όπως είδαμε παραπάνω σε αυτή την περίπτωση έδωσαν το C_L με ικανοποιητική ακρίβεια. Προφανώς για να υπολογιστεί η λύση σε αυτές τις έξι στιγμές έγινε πρώτα αναδόμηση με χρήση τύπου $Fourier$, διαδικασία που έχει εξηγηθεί. Μπορεί να παρατηρηθεί λοιπόν η ομοιότητα στα σχήματα 9.34 και 9.35, κάτι το αναμενόμενο με δεδομένη την ομοιότητα στους συντελεστές άνωσης.

9.5 Σύγκλιση των εξισώσεων της ισορροπίας των αρμονικών-Χρόνοι υπολογισμού

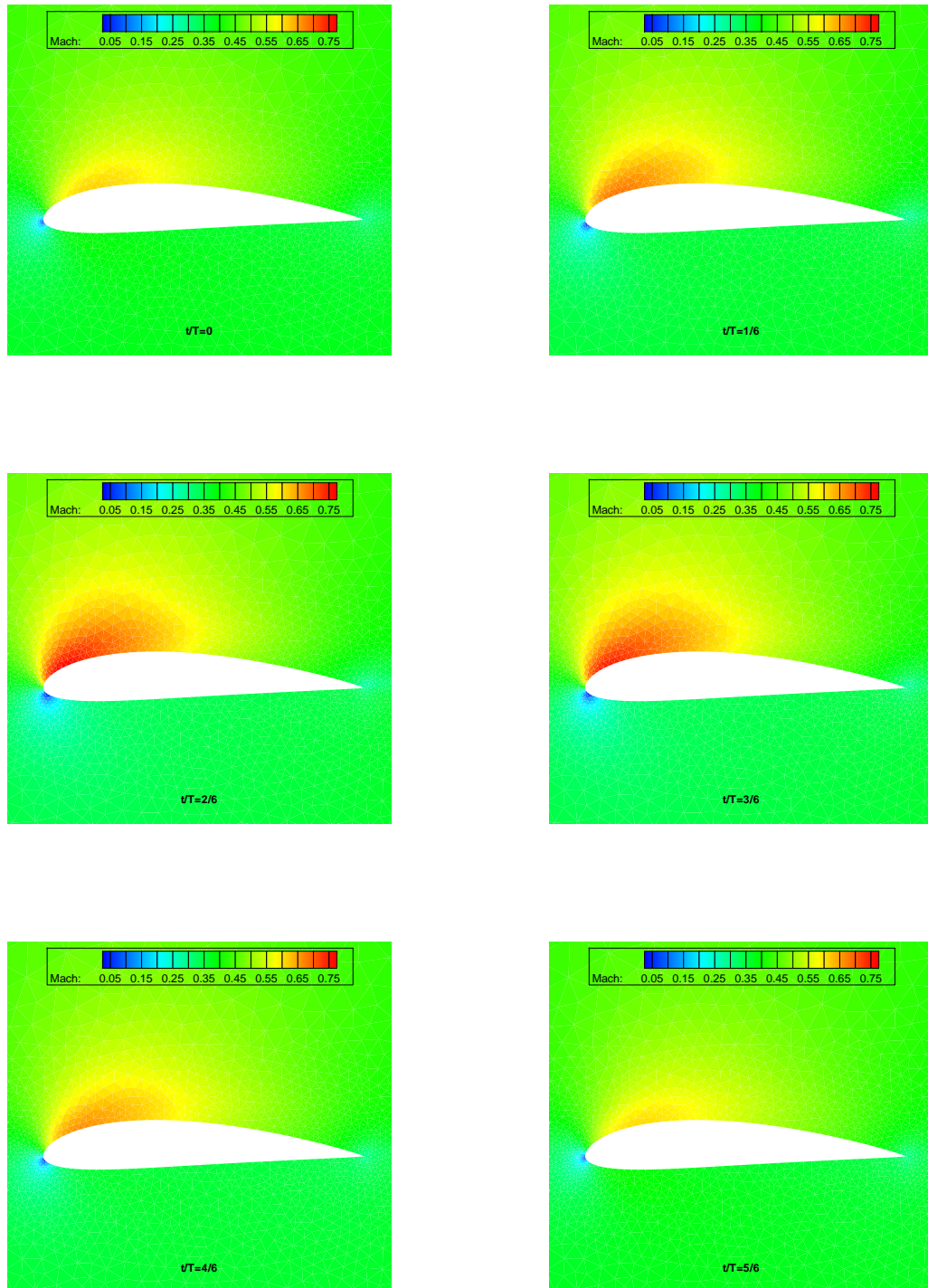
Η σύγκλιση για όλες τις περιπτώσεις που εξετάστηκαν με $f_r = 0.1$ ήταν πολύ καλή. Η μέθοδος για να συγκλίνει χρειαζόταν συνήθως 1000 περίπου επαναλήψεις στον ψευδοχρόνο όσες περίπου χρειάζεται και ένα χρονικά μόνιμο πρόβλημα. Επίσης δοκιμάστηκε αντί για το $[zm]$ να 'τρέξει' ο κώδικας και με ένα χρονικά μέσο $[zm]$. Αυτό δεν επηρέασε καθόλου αρνητικά τη σύγκλιση σε όσες περιπτώσεις δοκιμάστηκαν με αυτή τη συχνότητα. Υπενθυμίζεται ότι το $[zm]$ είναι αποθηκευμένο σαν ένας πίνακας $4 \times 4 \times 2 \times N_{seg}$, με N_{seg} τον αριθμό των ευθυγράμμων τμημάτων που ενώνουν τους κόμβους ($segments$) (το 4×4 στη διάσταση έχει εξηγηθεί, το 2 οφείλεται στους 2 κόμβους που ορίζουν την ακμή). Στην ισορροπία των αρμονικών η διάσταση αυτή του $[zm]$ πολλαπλασιάζεται επί N_T (αποθηκεύονται $N_T [zm]$) και έτσι αν τοποθετηθεί το μέσο χρονικά $[zm]$ και υπάρχει σύγκλιση εξοικονομείται χώρος και συγκεκριμένα ο χώρος των $(N_T - 1)[zm]$. Να παρατηρηθεί ότι ο λόγος που δεν 'απαγορεύεται' να δοκιμαστεί αυτό είναι ότι το $[zm]$ βρίσκεται στο αριστερό μέλος της εξίσωσης. Στο σχήμα 9.36 φαίνεται ο ρυθμός σύγκλισης για κανονικό και μέσο $[zm]$, ενδεικτικά για την περίπτωση 1 και με προσέγγιση μίας αρμονικής από όπου βλέπουμε ότι δεν υπάρχει πρακτική διαφορά (ουσιαστικά περίπου το ίδιο σχήμα προκύπτει και σε όλες τις άλλες περιπτώσεις).

Στον πίνακα 9.10 φαίνεται ο χρόνος υπολογισμού με την ισορροπία των αρμονικών εκφρα-



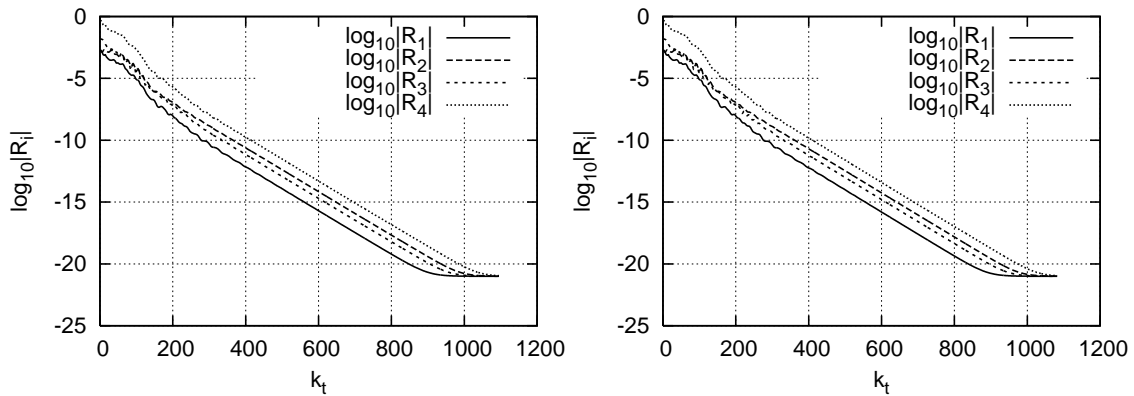
Σχήμα 9.34: Περίπτωση 1: Πεδίο του αριθμού *Mach* γύρω από την μεμονωμένη αεροτομή, προερχόμενο από επίλυση των εξισώσεων *Euler* με μέθοδο χρονο-προέλασης με 96 χρονικά βήματα ανά περίοδο, σε 6 ισαπέχουσες χρονικές στιγμές μέσα στην περίοδο.

9.5. Σύγκλιση των εξισώσεων της ισοροπίας των αρμονικών-Χρόνοι υπολογισμού



Σχήμα 9.35: Περίπτωση 1: Πεδίο του αριθμού *Mach* γύρω από την μεμονωμένη αεροτομή, προερχόμενο από επίλυση με τη μέθοδο *HB* με χρήση 5 αρμονικών, σε 6 ισαπέχουσες χρονικές στιγμές μέσα στην περίοδο.

σμένος σε σχέση με αυτόν του μόνιμου προβλήματος (t^*). Μπορεί να παρατηρηθεί ότι οι χρόνοι είναι για χρήση N_H αρμονικών της τάξης μεγέθους των $2N_H + 1$ μόνιμων προβλημάτων. Να σημειωθεί ότι ο χρόνος επίλυσης για την $f_r = 0.1$ με τη χρονοπροέλαση του μη-μόνιμου προβλήματος, για 91 χρονικά βήματα στην περίοδο ισοδυναμεί με περίπου 30 μόνιμα προβλήματα (για την ακρίβεια 34). Ο χρόνος εδώ εκτιμήθηκε με τη διαίρεση των συνολικών βημάτων στον ψευδο-χρόνο για το μη-μόνιμο πρόβλημα διά τον αντίστοιχο αριθμό του μόνιμου προβλήματος.



Σχήμα 9.36: Περίπτωση 1: Ρυθμός σύγκλισης της ισορροπίας των αρμονικών για προσέγγιση με μία αρμονική με χρήση του ακριβούς $[zm]$ (αριστερά) και του μέσου $[zm]$ (δεξιά).

Πίνακας 9.10: Χρόνοι υπολογισμού της ροής με τη μέθοδο της ισορροπίας των αρμονικών σε σχέση με το χρόνο υπολογισμού του μόνιμου προβλήματος t^* για προσέγγιση με διάφορες αρμονικές.

HB ₁	HB ₂	HB ₃	HB ₄
2.8552 t^*	4.865 t^*	6.9481 t^*	9.0902 t^*

9.6 Περίπτωση 4: Αποτελέσματα για υψηλότερη ανηγμένη συχνότητα με ημιτονοειδή μεταβολή της γωνίας εισόδου στην αεροτομή

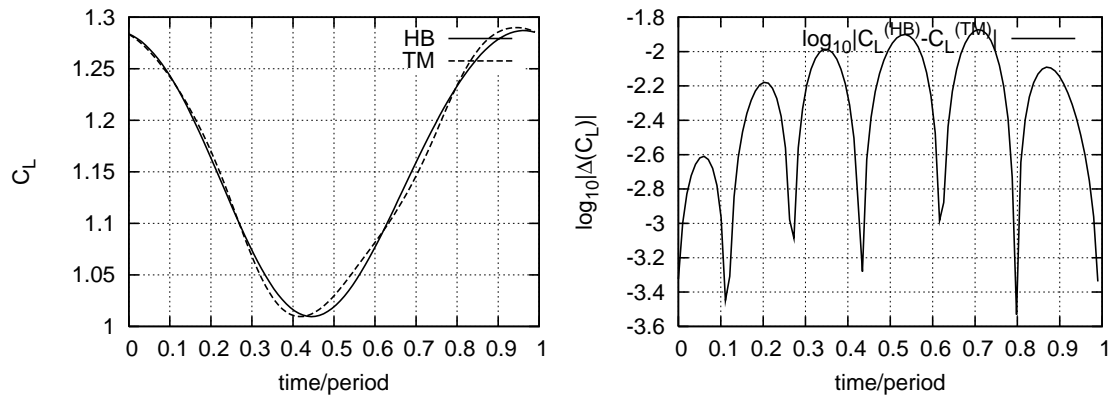
Σε αυτό το σημείο τέθηκε η ανηγμένη συχνότητα $f_r = 1$ και ως διέγερση θεωρήθηκε ημιτονοειδής μεταβολή της γωνίας εισόδου στην αεροτομή α_1 , δηλαδή $\alpha_1(t) = \alpha_{1,0}(t) + amp \cdot \sin(\omega t)$, ή με αδιάστατα μεγέθη:

$$\alpha_1(t) = \alpha_{1,0} + amp \sin(\omega t) \quad (9.6)$$

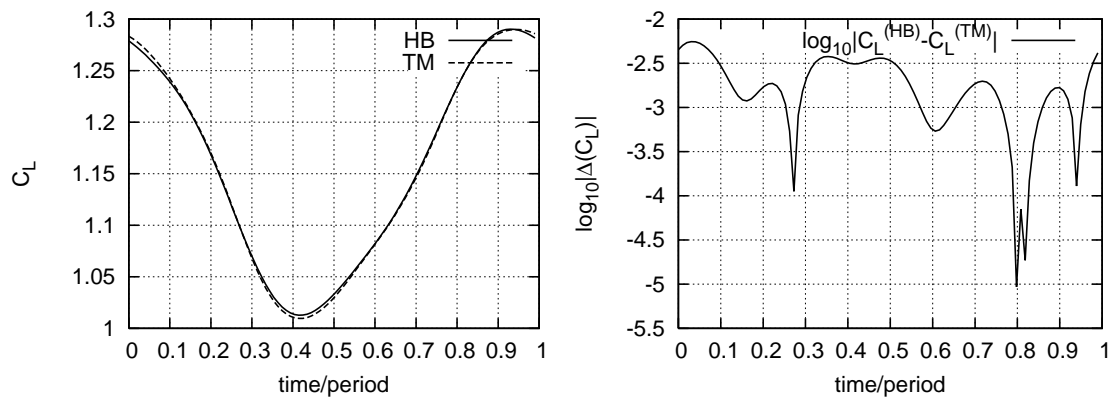
9.6. Περίπτωση 4: Αποτελέσματα για υψηλότερη ανηγμένη συχνότητα με ημιτονοειδή μεταβολή της γωνίας εισόδου στην αεροτομή

όπου: $\alpha_{1,0} = 5^0$, $amp = 3^0$, και $\check{\omega} = 2\pi\check{f} = 2\pi\frac{f_r}{\pi} = 2f_r = 2$. Τα υπόλοιπα μεγέθη κρατήθηκαν ίδια με αυτά των προηγούμενων περιπτώσεων, δηλαδή ίδιο πλέγμα, αεροτομή και $Mach_\infty = 0.4$. Με άλλα λόγια, η περίπτωση 4 που εξετάζεται εδώ, έχει ως μοναδική διαφορά με την περίπτωση 1 που έχει εξεταστεί παραπάνω σε αυτό το κεφάλαιο το ότι η ανηγμένη συχνότητα είναι δεκαπλάσια.

Στα σχήματα 9.37 μέχρι και 9.40 μπορεί να φανεί η σύγκριση των αποτελεσμάτων που λαμβάνονται για αυτήν την περίπτωση με τη μέθοδο της Ισοροπίας των Αρμονικών για προσέγγιση με αριθμό αρμονικών από $N_H = 2$ μέχρι και $N_H = 5$ και της χρονοπροέλασης. Και εδώ, ως μέσο για αυτήν τη σύγκριση χρησιμοποιήθηκε ο συντελεστής άνωσης της αεροτομής C_L . Επιπλέον, σε όλα αυτά τα σχήματα έχει γίνει χρονική αναδόμηση των τιμών του C_L μέσω του τύπου *Fourier* με N_H αρμονικές. Στον πίνακα 9.11 φαίνεται η μέση τιμή του δεκαδικού λογάριθμου της διαφοράς των C_L στην περίοδο που έχουν υπολογιστεί με *TM* με 99 χρονικές στιγμές στην περίοδο και με *HB* με διάφορους αριθμούς αρμονικών. Ακόμη, στον πίνακα 9.12 μπορεί να φανεί ο δεκαδικός λογάριθμος της μέγιστης διαφοράς των συντελεστών άνωσης C_L μέσα στην περίοδο. Από αυτόν τον πίνακα μπορεί να παρατηρηθεί το αναμενόμενο, ότι δηλαδή μειώνεται η μέγιστη απόκλιση μεταξύ των C_L που έχουν υπολογιστεί από *HB* και *TM*, με την αύξηση του αριθμού των αρμονικών. Από τη σύγκριση των αποτελεσμάτων με την Περίπτωση 1, σε σχέση με την οποία το μόνο που αλλάζει είναι η ανηγμένη συχνότητα μπορεί να φανεί ότι με μικρό αριθμό αρμονικών (2, οπότε πρωφανώς και για μία), για $f_r = 1$, επιτυγχάνεται χειρότερη προσέγγιση σε σχέση με τον ίδιο αριθμό αρμονικών για $f_r = 0.1$. Αυτό είναι φανερό και από τη σύγκριση των σχημάτων 9.5 και 9.37 από όπου παρατηρείται ότι στην $f_r = 0.1$ με μία αρμονική προσεγγίζεται ικανοποιητικά το C_l (σχήμα 9.5) κάτι το οποίο δεν συμβαίνει ούτε για τις 2 αρμονικές στην $f_r = 1$ (σχήμα 9.37). Πάντως, για μεγαλύτερους αριθμούς αρμονικών (τέσσερις και πέντε αρμονικές) μπορεί να παρατηρηθεί ότι και στις 2 περιπτώσεις η ακρίβεια με την οποία το C_L προσεγγίζεται είναι πρακτικά η ίδια. Άρα συμπεραίνεται ότι για ανηγμένη συχνότητα $f_r = 1$, χρειάζονται τρεις ή τέσσερις αρμονικές για ακριβή προσέγγιση του C_L .

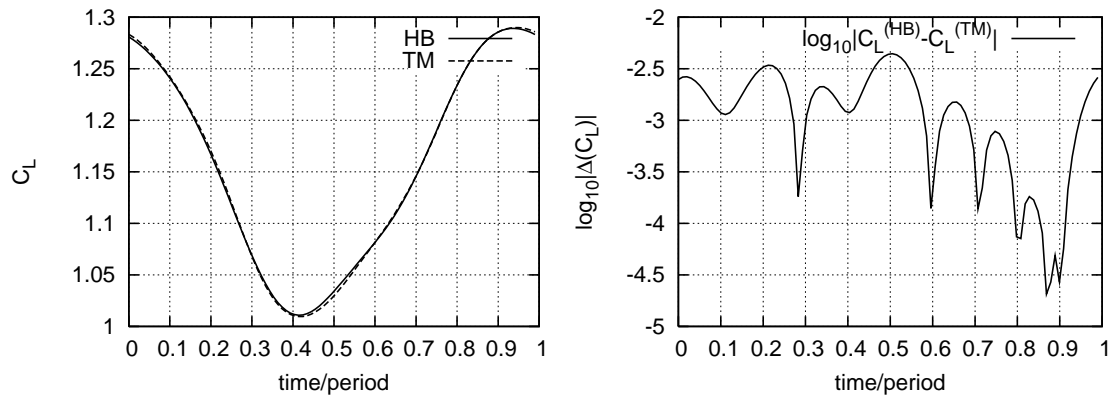


Σχήμα 9.37: Περίπτωση 4: C_L με επίλυση με χρονο-προέλαση με 99 χρονικά βήματα στην περίοδο και με την προτεινόμενη μέθοδο της ισορροπίας των αρμονικών έχοντας ‘αναδομήσει’ τη χρονική σειρά των τιμών του C_L μέσω αναπτύγματος *Fourier* με βάση $N_H = 2$ αρμονικές (αριστερά) και λογάριθμος της διαφοράς των C_L : $(\log_{10}|C_L^{(HB)} - C_L^{(TM)}|)$ (δεξιά).

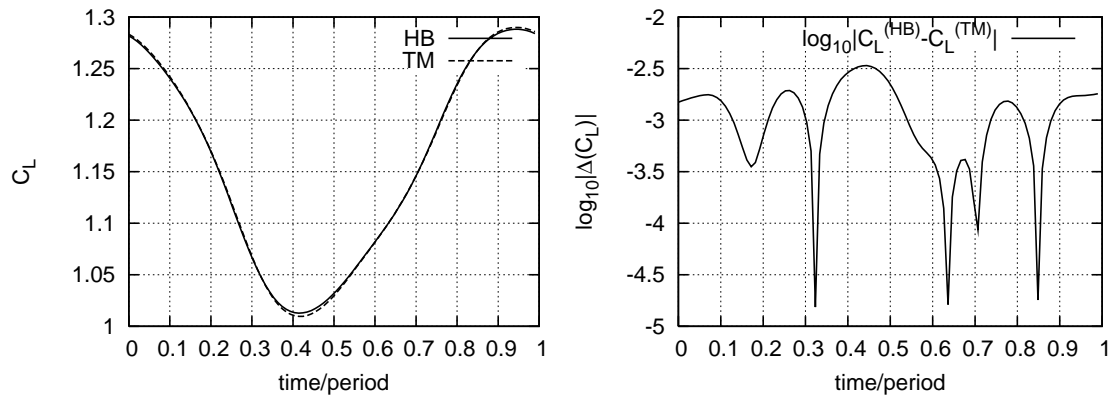


Σχήμα 9.38: Περίπτωση 4: C_L με επίλυση με χρονο-προέλαση με 99 χρονικά βήματα στην περίοδο και με την προτεινόμενη μέθοδο της ισορροπίας των αρμονικών έχοντας ‘αναδομήσει’ τη χρονική σειρά των τιμών του C_L μέσω αναπτύγματος *Fourier* με βάση $N_H = 3$ αρμονικές (αριστερά) και λογάριθμος της διαφοράς των C_L : $(\log_{10}|C_L^{(HB)} - C_L^{(TM)}|)$ (δεξιά).

9.6. Περίπτωση 4: Αποτελέσματα για υψηλότερη ανηγμένη συχνότητα με ημιτονοειδή μεταβολή της γωνίας εισόδου στην αεροτομή



Σχήμα 9.39: Περίπτωση 4: C_L με επίλυση με χρονο-προέλαση με 99 χρονικά βήματα στην περίοδο και με την προτεινόμενη μέθοδο της ισορροπίας των αρμονικών έχοντας ‘αναδομήσει’ τη χρονική σειρά των τιμών του C_L μέσω αναπτύγματος *Fourier* με βάση $N_H = 4$ αρμονικές (αριστερά) και λογάριθμος της διαφοράς των C_L : $(\log_{10}|C_L^{(HB)} - C_L^{(TM)}|)$ (δεξιά).



Σχήμα 9.40: Περίπτωση 4: C_L με επίλυση με χρονο-προέλαση με 99 χρονικά βήματα στην περίοδο και με την προτεινόμενη μέθοδο της ισορροπίας των αρμονικών έχοντας ‘αναδομήσει’ τη χρονική σειρά των τιμών του C_L μέσω αναπτύγματος *Fourier* με βάση $N_H = 5$ αρμονικές (αριστερά) και λογάριθμος της διαφοράς των C_L : $(\log_{10}|C_L^{(HB)} - C_L^{(TM)}|)$ (δεξιά).

Πίνακας 9.11: Μέση τιμή μέσα στην περίοδο του $\log_{10}|C_L^{(HB)} - C_L^{(TM)}|$ για διάφορες αρμονικές. Ο δείκτης στο *HB* εκφράζει τον αριθμό των αρμονικών που χρησιμοποιήθηκαν για την προσέγγιση.

HB₂	HB₃	HB₄	HB₅
-2.3744	-2.83234	-3.00929	-3.02733

Πίνακας 9.12: Μέγιστη τιμή μέσα στην περίοδο του $\log_{10}|C_L^{(HB)} - C_L^{(TM)}|$ για διάφορες αρμονικές. Ο δείκτης στο HB εκφράζει τον αριθμό των αρμονικών που χρησιμοποιήθηκαν για την προσέγγιση.

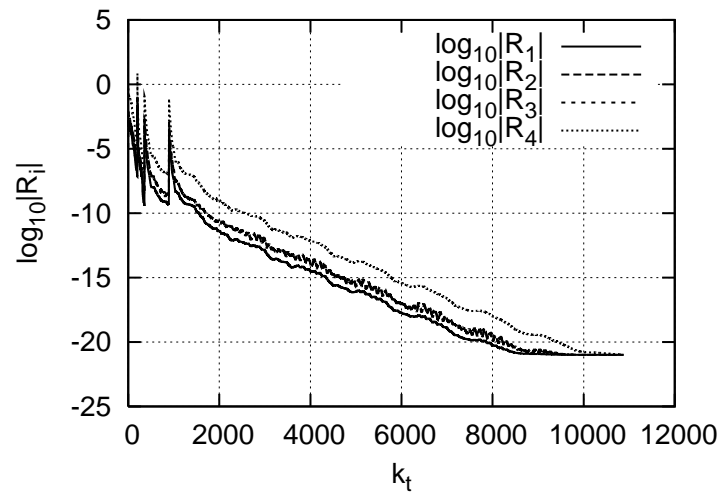
HB_2	HB_3	HB_4	HB_5
-1.87265	-2.2546	-2.35468	-2.47122

Σύγκλιση

Ο ρυθμός σύγκλισης σε αυτή την περίπτωση δεν ήταν ικανοποιητικός με αποτέλεσμα την μείωση του αναμενόμενου κέρδους σε υπολογιστικό χρόνο. Όμως και πάλι το γεγονός ότι το μεταβατικό φαινόμενο σε αυτήν την συχνότητα διαρκεί έξι περιόδους άρα ο κώδικας της χρονο-προέλασης ‘τρέχει’ για επτά περιόδους σε αντίθεση με τις δύο περιόδους που ‘τρέχει’ στην $f_r = 0.1$, όπου το μεταβατικό φαινόμενο συμβαίνει κατά τη διάρκεια της πρώτης περιόδου αντισταθμίζει εν μέρει αυτή την καθυστέρηση. Ακόμη, παρατηρήθηκε βελτίωση της σύγκλισης όταν ο κώδικας ξεκίνησε να ‘τρέχει’ στην αρχή για μικρότερο αριθμό αρμονικών και στην πορεία αυτός ο αριθμός αυξανόταν. Αυτό δοκιμάστηκε επειδή παρατηρήθηκε ότι με αύξηση των αρμονικών καθυστερούσε η σύγκλιση αρχικά. Στην αρχή, πρίν ξεκινήσει η επίλυση του HB , έγινε μικρός αριθμός επαναλήψεων στον ψευδοχρόνο για το μόνιμο πρόβλημα και για τη μέση γωνία εισόδου. Μετά από τις επαναλήψεις αυτές η λύση ‘αντιγράφηκε’ σε όλες τις υπόλοιπες χρονικές στιγμές ως αρχικοποίηση για την μέθοδο της Ισορροπίας των Αρμονικών της οποίας η επίλυση ξεκίνησε αμέσως μετά. Ακόμη, για την μετάβαση από τον έναν αριθμό αρμονικών στον άλλον έγινε αναδόμηση των τιμών των αγνώστων μέσω του αθροίσματος *Fourier*, χρησιμοποιώντας τις ‘τρέχουσες’ λύσεις.

Στο σχήμα 9.41 φαίνεται ο ρυθμός σύγκλισης για τις τέσσερις εξισώσεις της ροής κατά την επίλυση με τρεις αρμονικές. Στα σημεία της γραφικής παράστασης όπου γίνονται απότομες μεταβολές είναι επειδή σε εκείνα τα σημεία γίνεται μετάβαση στο πρώτο από το μόνιμο στο μη-μόνιμο πρόβλημα, και, στα επόμενα δύο, από τη μία στις δύο και από τις δύο στις τρεις αρμονικές αντίστοιχα.

9.6. Περίπτωση 4: Αποτελέσματα για υψηλότερη ανηγμένη συχνότητα με ημιτονοειδή μεταβολή της γωνίας εισόδου στην αεροτομή



Σχήμα 9.41: Περίπτωση 4 ($f_r = 1$): Ρυθμός σύγκλισης της ισορροπίας των αρμονικών με χρήση τριών αρμονικών ($N_H = 3$).

Κεφάλαιο 10

Ανακεφαλαίωση-Συμπεράσματα

Σε αυτήν τη διπλωματική ουσιαστικά εξετάστηκε η χρήση της μεθόδου της Ισοροπίας των Αρμονικών, η οποία εφαρμόζεται σε μη-μόνιμα, περιοδικά πεδία ροής. Αφού πρώτα εξηγήθηκε η κεντρική της ιδέα και ο τρόπος εφαρμογής της, έγινε ο προγραμματισμός της στην επίλυση διδιάστατου, περιοδικού πεδίου ροής μη συνεκτικού ρευστού (εξισώσεις *Euler*) γύρω από μεμονωμένη αεροτομή. Τα αποτελέσματα της μεθόδου συγκρίθηκαν με αυτά της μεθόδου της χρονο-προέλασης που είναι μία γενική μέθοδος η οποία εφαρμόζεται στην επίλυση χρονικά μη-μόνιμων ροών. Ακόμη ελέγχθηκαν δύο συχνότητες διέγερσης, στη μία εκ των οποίων και συγκεκριμένα την χαμηλή με $f_r = 0.1$ ελέγχθηκαν τρεις περιπτώσεις μεταβολής της διέγερσης η οποία επιλέχθηκε να είναι η γωνία της επ' άπειρον ροής (γωνία εισόδου στην μεμονωμένη αεροτομή). Από αυτήν την διαδικασία προέκυψαν τα παρακάτω συμπεράσματα:

- Κατ' αρχήν παρατηρήθηκε με την αύξηση του αριθμού των αρμονικών και συγκεκριμένα με τη χρήση επαρκούς αριθμού αρμονικών ταύτιση των αποτελεσμάτων των δύο μεθόδων. Ο αριθμός των αρμονικών που αρκούν για την ακριβή προσέγγιση του πεδίου ροής στις διάφορες χρονικές στιγμές της περιόδου αυξάνεται με την αύξηση της συχνότητας της διέγερσης, καθώς και με την πολυπλοκότητα αυτής όπως άλλωστε ήταν και αναμενόμενο. Όσο πιο λίγες αρμονικές χρειάζονται για την προσέγγιση της διέγερσης τόσο λιγότερες χρειάζονται κατά κανόνα για τον υπολογισμό του πεδίου ροής. Αυτό γίνεται φανερό στις τρεις πρώτες περιπτώσεις που ελέγχθηκαν με την 'χαμηλή' ανηγμένη συχνότητα $f_r = 0.1$, όπου για πολυπλοκότερη διέγερση απαιτούνταν περισσότερες αρμονικές. Πάντως, η πολυπλοκότητα της διέγερσης δίνει απλά μία ένδειξη καθώς το φαινόμενο δεν είναι γραμμικό και έτσι, για παράδειγμα, ημιτονοειδής διέγερση είναι πιθανό να δίνει απόκριση περισσότερων αρμονικών (όπως για παράδειγμα στην περίπτωση με την $f_r = 1$).
- Το κύριο πλεονέκτημα της μεθόδου είναι το κέρδος σε υπολογιστικό χρόνο, το οποίο κυρίως οφείλεται στο ότι αποφεύγεται ο υπολογισμός του μεταβατικού φαινομένου

με τη χρήση της μεθόδου *HB*. Συγκεκριμένα, το υπολογιστικό κόστος ισοδυναμεί με εκείνο των $N_T = 2N_H + 1$ χρονικά μόνιμων προβλημάτων. Για συχνότητες που η σύγκλιση δεν είναι ικανοποιητική απόλυτα (υψηλότερες) αντισταθμίζεται εν μέρει το αυξημένο κόστος από το αυξημένο κόστος της χρονο-προέλασης λόγω του μεγαλύτερου σε διάρκεια μεταβατικού φαινομένου.

- Η μέθοδος αυτή μπορεί να ενσωματωθεί σε διαδικασία βελτιστοποίησης και έτσι να υπάρξει όφελος σε χόνο υπολογισμού. Εδώ, σε αυτήν τη διπλωματική επιλύθηκε μέσω αυτής της μεθόδου το ευθύ πρόβλημα το οποίο έτσι και αλλιώς επιλύεται πολλές φορές σε μία διαδικασία βελτιστοποίησης, όποια μέθοδος και αν εφαρμόζεται. Αν επιπλέον εφαρμοστεί αιτιοκρατική μέθοδος με χρήση συζυγών μεθόδων για τον υπολογισμό των παραγώγων ευαισθησίας τότε η μέθοδος αυτή μπορεί να εφαρμοστεί και στην επίλυση των εξισώσεων του συζυγούς προβλήματος το οποίο είναι και αυτό περιοδικό, αν είναι και το ευθύ περιοδικό. Ακόμη σημαντικό είναι το ότι στη συζυγή μέθοδο λόγω της μεταφοράς της πληροφορίας ανάποδα ως προς το χρόνο απαιτείται να είναι γνωστό το πεδίο ροής σε όλες τις χρονικές στιγμές της περιόδου και έτσι με τη μέθοδο της χρονο-προέλασης πρέπει να αποθηκευτούν στη μνήμη όλες οι χρονικές στιγμές που έχουν υπολογιστεί (περίπου 100 σαν τάξη μεγέθους). Αντίθετα, αν το ευθύ έχει λυθεί με την *HB* αρκούν N_T στιγμές για την αναπαραγωγή στο χρόνο του πεδίου ροής. Έτσι, με την έκφραση των αποτελεσμάτων του ευθέως προβλήματος στο πεδίο των συχνοτήτων υπάρχει κέρδος σε μνήμη κατά την επίλυση του συζυγούς προβλήματος. Να παρατηρηθεί ότι και με τη μέθοδο της χρονο-προέλασης θα μπορούσε εκ των υστέρων να εφαρμοστεί ένας μετασχηματισμός *Fourier* και έτσι να κρατηθούν πάλι N_T στιγμές στη μνήμη.
- Τέλος, μειονέκτημα της μεθόδου αυτής αποτελεί η μεγαλύτερη δέσμευση μνήμης κατά την επίλυση σε σχέση με τη μέθοδο χρονο-προέλασης. Αυτό συμβαίνει γιατί ουσιαστικά στη μέθοδο της ισορροπίας των αρμονικών όλοι οι 'άγνωστοι' υπολογίζονται ταυτόχρονα και όχι από τη μία στιγμή στην επόμενη όπως συμβαίνει στη μέθοδο της χρονο-προέλασης. Αυτό κατ' επέκταση σημαίνει ότι κατά την επίλυση ουσιαστικά πρέπει να επιλυθεί ένα σύστημα N_T φορές μεγαλύτερο από το αντίστοιχο που επιλύεται σε κάθε χρονική στιγμή με τη μέθοδο της χρονο-προέλασης (Βέβαια στο *TM* το σύστημα που επιλύεται, επιλύεται πολλές φορές κάτι το οποίο προφανώς κοστίζει σε υπολογιστικό χρόνο μόνο και όχι σε μνήμη). Έτσι, η μέθοδος της Ισορροπίας των Αρμονικών δεσμεύει κατά την επίλυση μνήμη τάξης μεγέθους N_T επί την αντίστοιχη του *TM*, αφού οι άγνωστοι και όλοι οι πίνακες των συντελεστών τους έχουν διάσταση επί N_T . Κανονικά η μνήμη του *HB* είναι λιγότερη από N_T φορές αυτήν του *TM*, αφού κάποιες μεταβλητές δεν αποθηκεύονται σε κάθε στιγμή και υπολογίζονται όπου χρειάζονται (π.χ. η πίεση), ή και αφού όταν η χρονική παράγωγος είναι γραμμική με πεπερασμέ-

νες διαφορές ακρίβειας δεύτερης τάξης κρατούνται επιπλέον και οι δύο προηγούμενες στιγμές.

Βιβλιογραφία

- [1] Κ.Χ.Γιαννάκογλου: *Συνεκτικές ροές στις στροβιλομηχανές*, ΕΜΠ, 2004.
- [2] Κ.Χ.Γιαννάκογλου: *Μέθοδοι Βελτιστοποίησης στην Αεροδυναμική*, ΕΜΠ, 2005.
- [3] Γ.Μπεργελές: *Υπολογιστική Ρευστομηχανική*, εκδόσεις Συμεών, 2006.
- [4] Δ.Γ.Κουμπογιάννης: *Αριθμητική επίλυση των εξισώσεων Navier – Stokes με χρήση μη δομημένων πλεγμάτων σε περιβάλλον παράλληλης επεξεργασίας*, Διδακτορική διατριβή, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών, Τομέας Ρευστών, Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών. 1998.
- [5] Ξ.Τρομπούκης: *Υπολογιστική ανάλυση και παραμετρική διερεύνηση της τεχνικής συνεχούς αναρρόφησης για τον έλεγχο οριακών στρωμάτων*. Διπλωματική Εργασία, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών, Τομέας Ρευστών, Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών. 2007.
- [6] Θ.Ζερβογιάννης: *Μέθοδοι βελτιστοποίησης στην αεροδυναμική και τις στροβιλομηχανές με χρήση συζυγών τεχνικών, υβριδικών πλεγμάτων και του ακριβούς εσσιανού μητρώου*, Διδακτορική διατριβή, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών, Τομέας Ρευστών, Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών. 2011.
- [7] A.Da Ronch, M. Ghoreysky, K.J. Badcock S.Görtz M. Widhalm R.P. Dwight: *Linear frequency domain and harmonic balance predictions of dynamic derivatives*. 2006.
- [8] Arathi K. Gopinath, Edwin van der Weide, Juan J. Alonso Antony Jameson Kivanc Ekici and Kenneth C. Hall: *Three-Dimensional Unsteady Multi-stage Turbomachinery simulations using the Harmonic Balance Technique*.
- [9] D.Im, S. Choi, H. Kwon S.H. Park and J.H. Kwon: *Rotor Flow Analysis using Animplicit Harmonic Balance Method*. 2011.
- [10] Eleanor Chu, Alan George: *Inside the FFT Black Box: Serial and Parallel FFT Algorithms*, CRC Press, 2000.

- [11] F. Blanc, F. X. Roux and J. C. Jouhaud: *Harmonic Balance-Based Code-Coupling Strategy for the Calculation of Aeroelastic System Response to Forced Excitation*.
- [12] Frédéric Sicot, Guillaume Puigt, Marc Montagnac: *Block-Jacobi Implicit Algorithms for the Time Spectral Method*.
- [13] Frédéric Sicot, Guillaume Dufour, Nicolas Gourdain: *A Time-Domain Harmonic Balance Method for Rotor/Stator Interactions*.
- [14] Jeffrey P. Thomas, Earl H. Dowell and Kenneth C. Hall: *A Harmonic Balance approach for modeling three-Dimensional Nonlinear Unsteady Aerodynamics and Aeroelasticity*. 2002.
- [15] Kenneth C. Hall, Jeffrey P. Thomas and W.S. Clark: *Computation of Unsteady Nonlinear Flows in Cascades Using a Harmonic Balance Technique*. AIAA Journal, Vol. 40, No.5, May 2002.
- [16] Osgood, Brad: *Lecture Notes for The Fourier Transform and its Applications, Electrical Engineering Department, Stanford University*.
- [17] Siva K. Nadarajah, Matthew S. McMullen and Antony Jameson: *Non-linear frequency domain based optimum shape design for unsteady three-dimensional flows*. 2006.