



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών
Τομέας Ρευστών
Μονάδα Παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής
& Βελτιστοποίησης

Βελτιστοποίηση μορφής και τοπολογίας αγωγού ροής
στροφής 90° , με τη συνεχή συζυγή μέθοδο

Διπλωματική Εργασία

Ευστάθιος Παναγιώτης Καϊμάρας

Επιβλέποντες: Κυριάκος Χ. Γιαννάκογλου, Καθηγητής ΕΜΠ

Αθήνα, 2026

Ευχαριστίες

Πρωτίστως, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα της εργασίας Κ. Γιαννάκογλου, Καθηγητή ΕΜΠ, για τον χρόνο που αφιέρωσε στην εργασία, πάντα με διάθεση να βοηθήσει, καθώς και για την εκπαιδευτική του στάση στα σχετικά προπτυχιακά μαθήματα που παρακολούθησα.

Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους διδάκτορες Νίκο Γαλανό και Βαγγέλη Παπουτσή για την καθοδήγησή τους όπου χρειάστηκε.

Τέλος, ευχαριστώ την οικογένειά μου και όσους με στήριξαν κατά τη διάρκεια των προπτυχιακών σπουδών μου.



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών
Τομέας Ρευστών
Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών
Μονάδα Παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής
& Βελτιστοποίησης

Βελτιστοποίηση μορφής και τοπολογίας αγωγού ροής στροφής 90° , με τη συνεχή συζυγή μέθοδο

Διπλωματική Εργασία
Ευστάθιος Παναγιώτης Καϊμάρας
Επιβλέπων: Κυριάκος Χ. Γιαννάκογλου, Καθηγητής ΕΜΠ
Αθήνα, 2026

Περίληψη

Αντικείμενο αυτής της διπλωματικής εργασίας είναι ο επανασχεδιασμός-βελτιστοποίηση ενός αγωγού στροφής ροής, για τον οποίο επιδιώκεται η ροή να εξέρχεται όσο το δυνατόν πιο ομοιόμορφα και κάθετα στη διατομή εξόδου. Η ροή θεωρείται διδιάστατη, μόνιμη, ασυμπίεστη και τυρβώδης και οι εξισώσεις που τη διέπουν επιλύθηκαν με το λογισμικό OpenFOAM. Στόχος της βελτιστοποίησης είναι η ελαχιστοποίηση της απόκλισης της κάθετης ταχύτητας από τη μέση τιμή της, κατά μήκος της εξόδου, ποσότητα που εκφράζει την (αν)ομοιομορφία της εξερχόμενης ροής. Παράλληλα, επιβάλλεται κριτήριο για τη μέση τιμή του μέτρου της εφαπτομενικής συνιστώσας της ταχύτητας στην έξοδο. Στις περιπτώσεις που παρουσιάζονται, υπολογίζονται και αξιολογούνται, επίσης, οι απώλειες ολικής πίεσης μεταξύ εισόδου και εξόδου.

Με βάση τα ανωτέρω, η ροϊκή συμπεριφορά ενός αρχικού σχεδιασμού βελτιώθηκε χρησιμοποιώντας αιτιοκρατικές μεθόδους βελτιστοποίησης, αλλά και δημιουργώντας νέες γεωμετρίες ως αρχικοποιήσεις για τις μεθόδους αυτές. Ο υπολογισμός των παραγώγων της αντικειμενικής συνάρτησης έγινε με τη συνεχή συζυγή μέθοδο, χρησιμοποιώντας βιβλιοθήκη του OpenFOAM, η οποία έχει προγραμματιστεί από τη Μονάδα Παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής & Βελτιστοποίησης του ΕΜΠ.

Στην εργασία αυτή παρουσιάζονται διάφορες μελέτες επί του θέματος, χρησιμοποιώντας λογισμικό Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής και αλγόριθμους Βελτιστοποίησης Μορφής (Shape Optimization - ShpO) και Τοπολογίας (Topology Optimization - TopO). Στην

πρώτη περίπτωση, μεταβλητές σχεδιασμού είναι οι συντεταγμένες σημείων ελέγχου που μετακινούν τα τοιχώματα του αγωγού, ενώ στη δεύτερη είναι οι τιμές ενός εικονικού πεδίου πορώδους, η κατανομή των οποίων καθορίζει τις περιοχές με ρευστό και τις περιοχές με στερεό (με μηδενική ταχύτητα πρακτικά). Παρουσιάστηκαν περιπτώσεις όπου αλλάζουν τα τοιχώματα του αγωγού και εισάγονται διατάξεις στο εσωτερικό του. Κάθε γεωμετρία που εξετάστηκε έχει χαρακτηριστικά που την καθιστούν ευκολότερα ή δυσκολότερα υλοποιήσιμη, επηρεάζοντας το κατασκευαστικό της κόστος (με το οποίο, όμως, δεν ασχολείται η εργασία αυτή).

Εκτός από τη βελτιστοποίηση του συγκεκριμένου αγωγού, στην εργασία αυτή έγινε σύγκριση διάφορων παραμέτρων, με στόχο να εξαχθούν όσο δυνατόν γενικότερα συμπεράσματα, για παρόμοιες εφαρμογές. Στη $ShpO$, μεταβλήθηκε ο αριθμός των σημείων ελέγχου και άλλαξε ο τρόπος παραμετροποίησης, ενώ στην περίπτωση εισαγωγής ίσων στοιχείων στροφής ροής εξετάστηκε η επιρροή της θέσης, της γωνίας, του μήκους κάθε στοιχείου, καθώς και του αριθμού τους. Στην $TopO$, εξετάστηκαν η επιρροή της αρχικοποίησης και της οριακής συνθήκης του πεδίου πορώδους, μια παράμετρος του φίλτρου εξομάλυνσης του πεδίου πορώδους, καθώς και η χρήση περιορισμών για το ποσοστό στερεοποίησης του υπολογιστικού χωρίου.



National Technical University of Athens
School of Mechanical Engineering
Fluids Section
Parallel CFD & Optimization Unit

Shape and Topology Optimization of a 90° turning flow duct, using continuous adjoint

Diploma Thesis

Efstathios Panagiotis Kaimaras

Advisor: Kyriakos C. Giannakoglou, Professor NTUA

Athens, 2026

Abstract

The subject of this diploma thesis is the redesign - optimization of a 90° flow turning duct, pursuing the flow to exit as uniform and normal to the outlet boundary as possible. The flow is considered two-dimensional, steady, incompressible and turbulent, and the corresponding equations were solved using OpenFOAM software. The goal of the optimization process is the minimization of the deviation of velocity's normal component around its mean value, along the outlet, which represents the uniformity of the outflow. For the mean value of the magnitude of the tangential velocity in the outlet, a criterion was set. Also, in the cases presented, total pressure losses between inlet and outlet, are computed and evaluated.

In view of the above, the flow characteristics of an initial duct design, were enhanced using gradient-based methods, while also creating new geometries as initializations for these methods. The required sensitivity derivatives were computed using the continuous adjoint method included in the adjointOptimisationFoam library of OpenFOAM, programmed and made publicly available by the Parallel CFD & Optimization Unit of NTUA.

In this thesis, various cases on the subject are presented, using CFD software and shape (ShpO) and topology (TopO) optimization algorithms. In the first case, the design variables are the coordinates of control points that move the duct's boundaries, while in the second one the values of a virtual porosity field were used, implying

which areas are occupied by fluid and which by solid (practically with zero velocity). Among the examined cases, the wall boundaries of the duct were changed, and flow turning devices were installed in its inside. The corresponding manufacturing cost of each geometry depends on the complexity of its characteristics and the processes needed for their implementation (although these were not discussed in this thesis).

Besides the optimization of this specific duct, parameters of the optimization were compared and, when possible, general conclusions were made, which can be taken into account in similar applications. In ShpO, the number of control points and parameterization were altered and in the case of installing straight flow turning devices inside, the influence of their number, position, angle and length were examined. In TopO, the initialization and boundary conditions of the material field, a parameter of the filtering step and the use of constraint for the percentage of solid areas of the duct were examined.

Ακρωνύμια - Συντομογραφίες

ΕΜΠ	Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
ΜΠΥΡ&Β	Μονάδα Παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής & Βελτιστοποίησης
ΥΡΔ	Υπολογιστική Ρευστοδυναμική
2Δ	Διδιάστατος

NTUA	National Technical University of Athens
PCopt	Parallel CFD & Optimization unit
CFD	Computational Fluid Dynamics
ShpO	Shape Optimization
TopO	Topology Optimization
CPs	Control Points

Περιεχόμενα

Περιεχόμενα	i
1 Εισαγωγή	1
1.1 Γενικά περί βελτιστοποίησης	1
1.2 Στόχος εργασίας και μετρικές αξιολόγησης	2
1.3 Παρουσίαση του προβλήματος	3
1.4 Δομή της εργασίας	4
2 Μαθηματική διατύπωση	7
2.1 Το πρωτεύον πρόβλημα	8
2.2 Η συνεχής συζυγής μέθοδος	11
3 Εφαρμογή βελτιστοποίησης μορφής (ShpO)	15
3.1 Περίπτωση αναφοράς	16
3.2 Περιπτώσεις αλλαγής μόνο του κάτω τοιχώματος	18
3.2.1 Περίπτωση 100	18
3.2.2 Περίπτωση 101	19
3.2.3 Περίπτωση 102	21
3.2.4 Περίπτωση 103	23
3.2.5 Περίπτωση 104	26
3.2.6 Περίπτωση 105	28
3.2.7 Περίπτωση 106	30
3.2.8 Σύγκριση αποτελεσμάτων	31
3.3 Περιπτώσεις αλλαγής άνω και κάτω τοιχώματος	33

3.3.1	Περίπτωση 201	33
3.3.2	Περίπτωση 202	35
3.3.3	Σύγκριση αποτελεσμάτων	37
3.4	Περιπτώσεις εισαγωγής διατάξεων στροφής ροής στο εσωτερικό του αγωγού	39
3.4.1	Περίπτωση 301	41
3.4.2	Περίπτωση 302	45
3.4.3	Σύγκριση αποτελεσμάτων	48
4	Εφαρμογή βελτιστοποίησης τοπολογίας (TopO)	51
4.1	Περίπτωση 400	51
4.2	Περίπτωση 401	53
4.3	Περίπτωση 402	57
4.4	Περίπτωση 403	60
4.5	Σύγκριση αποτελεσμάτων	63
5	Ανακεφαλαίωση και συμπεράσματα	67
	Βιβλιογραφία	71

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Η βελτιστοποίηση αποτελεί ένα σημαντικό κλάδο του μηχανικού, και αφορά την εύρεση βέλτιστων παραμέτρων σε ένα πρόβλημα, ενώ ταυτοχρόνως πρέπει να ικανοποιούνται οι περιορισμοί που πιθανόν υπάρχουν. Αρχικά, η διαδικασία αυτή πραγματοποιούνταν κυρίως με τη διαίσθηση και την εμπειρία του μηχανικού και αξιολογούνταν βάσει πειραμάτων. Σταδιακά, και ταυτόχρονα με την ανάπτυξη αντίστοιχων μαθηματικών κλάδων, εδραιώθηκε η χρήση μαθηματικών εργαλείων στη βελτιστοποίηση. Επιπροσθέτως, οι σύγχρονοι υπολογιστές έχουν δυνατότητα ταχέων αριθμητικών υπολογισμών, και έτσι γίνεται στροφή από αναλυτικές και γραφικές μεθόδους, σε υπολογιστικές μεθόδους, βασιζόμενες σε αυτοματοποιημένους αλγόριθμους ανίχνευσης βέλτιστων λύσεων.

1.1 Γενικά περί βελτιστοποίησης

Οι σύγχρονες μέθοδοι βελτιστοποίησης χρησιμοποιούν μαθηματικές διατυπώσεις, με στόχο, είτε την ελαχιστοποίηση ή μεγιστοποίησή τους, είτε την ικανοποίησή τους ως περιορισμούς. Οι περιορισμοί είναι ισότητας ή ανισότητας, και αφορούν ολοκληρωματικές ποσότητες, αλγεβρικές ή διαφορικές εξισώσεις. Οι προς ελαχιστοποίηση ή μεγιστοποίηση, συναρτήσεις καλούνται αντικειμενικές συναρτήσεις (Objective functions) και συνήθως αποτελούνται από ολοκληρωματικές ποσότητες. Σε μηχανολογικές εφαρμογές, αυτές αφορούν την απόδοση του συστήματος ή σχετίζονται με τη γεωμετρία του. Πιο συγκεκριμένα σε εφαρμογές ρευστοδυναμικής, συχνή εφαρμογή βρίσκουν αντικειμενικές συναρτήσεις που εκφράζουν τις απώλειες ολικής πίεσης μεταξύ εισόδου και εξόδου ενός αγωγού, συνιστωσών δυνάμεων, όπως η άνωση και η οπισθέλκουσα (συνήθως σε αδιάστατη διατύπωση), ή ο βαθμός απόδοσης πτερύγωσης στροβιλομηχανής. Σε προβλήματα Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής (ΥΡΔ-CFD), οι μέθοδοι βελτιστοποίησης διακρίνονται σε δύο βασικές κατηγορίες[1][2]:

Στοχαστικές μέθοδοι βελτιστοποίησης (Stochastic methods), στις οποίες γίνεται εισαγωγή και χρήση τυχαιότητας στον αλγόριθμο ανίχνευσης βέλτιστων λύσεων. Η στοχαστικότητα που υπεισέρχεται με αυτόν τον τρόπο, αποτρέπει την παγίδευση

σε τοπικά ακρότατα και δίνει ευκαιρίες ανίχνευσης και άλλων υποπεριοχών του πεδίου ορισμού για την εύρεση της καθολικά βέλτιστης λύσης. Πιο αντιπροσωπευτικοί εκπρόσωποι των μεθόδων αυτών είναι οι Εξελικτικοί Αλγόριθμοι (Evolutionary Algorithms), οι οποίοι μιμούνται την εξελικτική διαδικασία των βιολογικών συστημάτων. Είναι πολύ ευέλικτες μέθοδοι, καθώς οι εξελικτικοί τελεστές που εφαρμόζονται δεν παρεμβαίνουν στον υπολογιστικό κώδικα, και έτσι δεν χρειάζεται πρόσβαση στον πηγαίο κώδικα ενός λογισμικού ΥΡΔ. Ωστόσο, χρειάζεται αρκετά μεγάλος αριθμός αξιολογημένων λύσεων για την εύρεση των βέλτιστων, και ειδικά όταν το λογισμικό αξιολόγησης κάθε λύσης είναι χρονοβόρο όπως αυτά της ΥΡΔ, το υπολογιστικό κόστος αυξάνεται σημαντικά.

Αιτιοκρατικές μέθοδοι βελτιστοποίησης (Deterministic), οι οποίες ξεκινούν από μια αρχική γεωμετρία, και τη βελτιώνουν βασιζόμενες σε πληροφορίες από τις παραγώγους της αντικειμενικής συνάρτησης ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού, γνωστές και ως παράγωγοι ευαισθησίας (Sensitivity Derivatives). Καθώς ο αλγόριθμος βασίζεται σε πληροφορίες που αναμένεται να βελτιώσουν την αρχική γεωμετρία, κάθε κύκλος βελτιστοποίησης αναμένεται να βελτιώσει την εξεταζόμενη γεωμετρία. Με κατάλληλες μεθόδους υπολογισμού των παραγώγων ευαισθησίας, το υπολογιστικό κόστος κάθε κύκλου είναι πολύ μικρότερο από το αντίστοιχο ενός κύκλου στοχαστικής βελτιστοποίησης. Μειονεκτήματά τους είναι ότι υπάρχει πιθανότητα εγκλωβισμού σε τοπικά ακρότατα, και ότι απαιτείται παρέμβαση στο λογισμικό αξιολόγησης (ΥΡΔ), η οποία δεν είναι πάντα δυνατή.

1.2 Στόχος εργασίας και μετρικές αξιολόγησης

Στην εργασία μελετάται ένας υπάρχων αγωγός, ο ρόλος του οποίου είναι η οδήγηση της ροής σε χώρο όπου το εργαζόμενο μέσο χρησιμοποιείται προς θέρμανση ή ξήρανση (Σχ. 1.1). Προκειμένου οι διεργασίες να διεκπεραιώνονται όσο περισσότερο ομοιόμορφα γίνεται, επιδιώκεται η ροή να εξέρχεται από τον αγωγό όσο το δυνατόν περισσότερο ομοιόμορφα και κατακόρυφα. Παράλληλα, οι ιδέες που προτείνονται και η συμπεριφορά των αλγορίθμων βελτιστοποίησης χρησιμοποιούνται για την εξαγωγή όσο το δυνατόν γενικότερων συμπερασμάτων.



Σχήμα 1.1: Παρουσίαση του αγωγού ενταγμένου σε ένα μηχανολογικό σύστημα.

Για την ομοιομορφία αρκεί η ελαχιστοποίηση της απόκλισης της κάθετης συνιστώσας της ταχύτητας από τη μέση τιμή της, κατά μήκος της διατομής εξόδου. Ορίζεται η βαθμωτή αντικειμενική συνάρτηση

$$J = \frac{1}{2} \frac{\int_{S_{out}} (v_i n_i - \bar{v})^2 dS}{\int_{S_{out}} dS} \quad (1.1)$$

$$\bar{v} = \frac{\int_{S_{out}} v_i n_i dS}{\int_{S_{out}} dS}$$

όπου v_i η ταχύτητα, n_i το μοναδιαίο κάθετο προς τα έξω διάνυσμα, στην πλευρά του κελιού i , και S_{out} η επιφάνεια εξόδου. Καλύτερη θεωρείται η γεωμετρία με μικρότερη τιμή αντικειμενικής συνάρτησης.

Ταυτόχρονα, η μέση τιμή του μέτρου της εφαπτομενικής συνιστώσας της ταχύτητας στην έξοδο, πρέπει να μην αυξάνεται πάνω από 30% από την τιμή αυτής για τον υπάρχοντα σχεδιασμό του αγωγού. Αποδεκτές θεωρούνται οι γεωμετρίες, που ικανοποιούν το κριτήριο

$$C = \frac{\int_{S_{out}} |v_i t_i| dS}{\int_{S_{out}} dS} < 1.3C_0 = 0.4 [m/s] \quad (1.2)$$

όπου t_i το μοναδιαίο εφαπτομενικό διάνυσμα στην πλευρά του κελιού i .

Επιπροσθέτως, είναι σημαντικό να εξετασθεί πώς μεταβάλλονται οι απώλειες ολικής πίεσης μεταξύ εισόδου και εξόδου, σε διαφορετικές περιπτώσεις. Σε αυτήν την εργασία, η ποσότητα αυτή δεν αποτελεί στόχο ή περιορισμό της βελτιστοποίησης, ωστόσο είναι μια χρήσιμη μετρική αξιολόγησης σε μηχανολογικά προβλήματα που περιέχουν ρευστά

$$p_{tLosses} = - \int_{S_{in,out}} (p + \frac{1}{2} v_k^2) v_i n_i dS \quad (1.3)$$

όπου S_{in} η επιφάνεια εισόδου και p η στατική πίεση διαιρεμένη με τη σταθερή πυκνότητα.

1.3 Παρουσίαση του προβλήματος

Η εργασία αφορά έναν 2Δ αγωγό (οι εξισώσεις της ροής δεν επιλύονται στην διεύθυνση z) με κατακόρυφη είσοδο (κάθετα στον άξονα x) και οριζόντια έξοδο (κάθετα στον άξονα y), και η ροή θεωρείται χρονικά μόνιμη. Το εργαζόμενο μέσο είναι αέρας (αμελητέα η βαρύτητα), και οι ταχύτητες του πεδίου ροής είναι σημαντικά μικρότερες της ταχύτητας του ήχου, οπότε η ροή θεωρείται ασυμπίεστη.

Το χαρακτηριστικό μήκος είναι αυτό του αγωγού στη διεύθυνση x και η χαρακτηριστική ταχύτητα είναι αυτή της εισόδου. Λόγω του υψηλού αριθμού Reynolds, η ροή θεωρείται τυρβώδης. Στην είσοδο η κατανομή της ταχύτητας είναι ομοιόμορφη. Περισσότερες πληροφορίες δίνονται στο Σχήμα 1.2 και στον Πίνακα 1.1.



Σχήμα 1.2: Αρχικός σχεδιασμός της μορφής του αγωγού και συντεταγμένες βασικών σημείων της γεωμετρίας.

Για την πρόλεξη των ροών, αλλά και τη βελτιστοποίηση του αγωγού, χρησιμοποιείται το λογισμικό OpenFOAM (Open source Field Operation And Manipulation). Είναι ένα λογισμικό ανοικτού κώδικα, το οποίο επιλύει αριθμητικά μερικές διαφορικές εξισώσεις, και χρησιμοποιείται ευρέως για προβλήματα ΥΡΔ. Είναι γραμμένο σε C++, αξιοποιώντας πλήρως τα αντικειμενοστραφή (Object-oriented) χαρακτηριστικά της [3]. Η Μονάδα Παράλληλης ΥΡΔ & Βελτιστοποίησης (ΜΠΥΡ&Β) του ΕΜΠ έχει αναπτύξει και εντάξει στο περιβάλλον του OpenFOAM τη βιβλιοθήκη adjointOptimisationFoam [4], η οποία υπολογίζει τις παραγώγους ευαισθησίας της αντικειμενικής συνάρτησης, χρησιμοποιώντας τη συνεχή συζυγή μέθοδο, και τις εντάσσει σε αλγορίθμους βελτιστοποίησης.

Πίνακας 1.1: Αριθμητικά δεδομένα

Μέγεθος	Τιμή	[Μονάδες]
Κινηματική συνεκτικότητα	1.5×10^{-5}	$[m^2/s]$
Μήκος εισόδου	0.4	$[m]$
Μήκος εξόδου	3	$[m]$
Ταχύτητα εισόδου	(0.5, 0, 0)	$([m/s], [m/s], [m/s])$
Χαρακτηριστικό μήκος	4	$[m]$
Χαρακτηριστική ταχύτητα	0.5	$[m/s]$
Αριθμός Reynolds	1.49×10^5	$[-]$

1.4 Δομή της εργασίας

Η παρούσα εργασία δομείται ως εξής:

- Στο Κεφάλαιο 2 διατυπώνεται μαθηματικά το πρόβλημα βελτιστοποίησης, και παρουσιάζονται οι πρωτεύουσες εξισώσεις. Στη συνέχεια, διατυπώνονται και οι συζυγείς πεδιακές εξισώσεις, οι συζυγείς οριακές συνθήκες και οι παράγωγοι ευαισθησίας. Τέλος, αναγράφονται οι παράγωγοι της αντικειμενικής συνάρτησης ως προς τις πρωτεύουσες μεταβλητές, που χρειάζονται στις συζυγείς οριακές συνθήκες.
- Στο Κεφάλαιο 3 αρχικά αναφέρονται οι πιθανοί τρόποι παραμετροποίησης μιας γεωμετρίας για ShpO. Εφαρμόζεται ShpO στην αρχική γεωμετρία του αγωγού, και μετά σε γεωμετρίες όπου έχουν αλλάξει τα τοιχώματα (άνω ή κάτω) του αγωγού, ή ακόμα έχουν προστεθεί διατάξεις στροφής ροής στο εσωτερικό του.

- Στο Κεφάλαιο 4 εφαρμόζεται TopO στην υπάρχουσα γεωμετρία, και στις δύο καλύτερες του Κεφαλαίου 3 (δηλαδή ως αποτελέσματα ShpO). Εξετάζεται η επιρροή στη βελτιστοποίηση διαφόρων παραμέτρων, όπως οι οριακές συνθήκες του πεδίου πορώδους (αρχικές και οριακές), μια παράμετρος του φίλτρου που εφαρμόζεται σε αυτό, καθώς και η χρήση περιορισμών για το ποσοστό στερεοποίησης του υπολογιστικού χωρίου.
- Στο Κεφάλαιο 5 συνοψίζονται τα αποτελέσματα της εργασίας και εξάγονται συμπεράσματα.

Κεφάλαιο 2

Μαθηματική διατύπωση

Στην εργασία αυτή, μεταβλητές σχεδιασμού είναι, είτε οι συντεταγμένες ορισμένων σημείων ελέγχου, τα οποία μετακινούνται και κατ' επέκταση μετακινούνται και κάποια όρια του υπολογιστικού χωρίου¹, είτε οι τιμές ενός πεδίου πορώδους ($0 \leq \alpha \leq 1$), η κατανομή του οποίου καθορίζει σε ποιά κελιά το υλικό είναι ρευστό ($\alpha = 0$) και σε ποιά στερεό ($\alpha = 1$). Στην πρώτη περίπτωση, η βελτιστοποίηση καλείται μορφής (Shape Optimisation - ShpO) και γίνεται παραμετροποίηση των ορίων του υπολογιστικού χωρίου, είτε με καμπύλες Bezier [5] με τις οποίες ταυτίζονται, είτε με κουτιά μορφοποίησης από ογκομετρικές B-Splines [6] που περιβάλλουν τα όρια. Στη δεύτερη περίπτωση, η βελτιστοποίηση καλείται τοπολογίας (Topology Optimisation - TopO).

Για την ελαχιστοποίηση της αντικειμενικής συνάρτησης χρησιμοποιούνται αιτιοκρατικές μέθοδοι βελτιστοποίησης, με τις μεταβλητές σχεδιασμού να ανανεώνονται ως:

$$b_i^{new} = b_i^{old} + \eta p_i \quad (2.1)$$

όπου \vec{b} είναι οι μεταβλητές σχεδιασμού, \vec{p} η κατεύθυνση ανανέωσης και η το βήμα ανανέωσης. Για τη ShpO χρησιμοποιείται ο αλγόριθμος BFGS [7], ενώ για την TopO χρησιμοποιείται η Μέθοδος των Κινούμενων Ασύμπτωτων [8], η οποία είναι κατάλληλη να χειριστεί τα όρια των μεταβλητών σχεδιασμού ($\alpha \in [0, 1]$). Ανεξαρτήτως των συγκεκριμένων μεθόδων όμως, η κατεύθυνση ανανέωσης υπολογίζεται βάσει πληροφοριών² από την παράγωγο της αντικειμενικής συνάρτησης ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού $\frac{\delta J}{\delta b_n}$.

Η συζυγής μέθοδος (υπολογισμού του $\frac{\delta J}{\delta b_n}$) πλεονεχτεί έναντι άλλων, λόγω της πρακτικής ανεξαρτησίας του υπολογιστικού της κόστους από τον αριθμό των μεταβλητών σχεδιασμού. Ουσιαστικά το πρόβλημα αντιμετωπίζεται ως η ελαχιστοποίηση της α-

¹Το πλέγμα προσαρμόζεται επιλύοντας μια διαφορική εξίσωση τύπου Laplace για τη μετατόπιση.

²Σε κάποιες μεθόδους χρειάζονται πληροφορίες και από την εσσιανή (δεύτερες παράγωγοι) της αντικειμενικής συνάρτησης $\frac{\delta^2 J}{\delta b_i \delta b_j}$, είτε από την ακριβή, είτε από προσέγγισή της.

ντικειμενικής συνάρτησης, υπό περιορισμούς ισότητας, οι οποίοι είναι οι διαφορικές εξισώσεις που διέπουν το φυσικό πρόβλημα: οι εξισώσεις της μηχανικής των ρευστών στην προκειμένη περίπτωση.

Ορίζεται μια επαυξημένη αντικειμενική συνάρτηση (Lagrangian) προσθέτοντας στην J τα υπόλοιπα των διαφορικών εξισώσεων, πολλαπλασιασμένα με μεταβλητές που καλούνται συζυγείς, σε ολοκληρωματική μορφή. Παραγωγίζοντας ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού, και ομαδοποιώντας κατάλληλα τους όρους που προκύπτουν, επιλέγονται προς μηδενισμό, ολοκληρωματικές ποσότητες, που περιέχουν παραγώγους των πρωτευουσών μεταβλητών ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού. Αυτές που αφορούν το εσωτερικό του υπολογιστικού χωρίου, οδηγούν στις Συζυγείς Πεδιακές Εξισώσεις (Field Adjoint Equations), ενώ αυτές που αφορούν τα όρια του χωρίου οδηγούν στις Συζυγείς Οριακές Συνθήκες (Adjoint Boundary Conditions - ABC). Οι όροι που απομένουν αποτελούν τις παραγώγους ευαισθησίας της J και, βάσει πληροφοριών από αυτές, υπολογίζεται η κατεύθυνση ανανέωσης \vec{p} .

2.1 Το πρωτεύον πρόβλημα

Οι εξισώσεις της ροής είναι οι Reynolds-Averaged-Navier-Stokes (RANS), με επιπλέον τις παραδοχές ασυμπίεστης και μόνιμης ροής. Γίνεται η υπόθεση Boussinesq και η χρήση του μοντέλου τύρβης Spalart-Allmaras. Οι εξισώσεις της ροής αποτελούν το πρωτεύον πρόβλημα.

Για συνοπτική παρουσίαση των πρωτευουσών εξισώσεων σε ενιαία μορφή, είτε χρησιμοποιούνται στον αλγόριθμο ShpO, είτε στον αλγόριθμο TopO, ορίζεται η παράμετρος

$$\lambda = \begin{cases} 0, & \text{if ShpO} \\ 1, & \text{if TopO} \end{cases}$$

και οι εξισώσεις γράφονται [9]:

$$R^p = -\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2.2)$$

$$R^{v_i} = \frac{\partial(v_j v_i)}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \lambda I(\beta) v_i = 0, \quad i = 1, 2 \quad (2.3)$$

όπου p είναι η πίεση του ρευστού διαιρεμένη με τη σταθερή πυκνότητα, v_i είναι οι καρτεσιανές συνιστώσες της ταχύτητας, $\tau_{ij} = (\nu + \nu_t)(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i})$ ο τανυστής τάσεων, με ν και ν_t να είναι η μοριακή και τυρβώδης συνεκτικότητα, αντίστοιχα. Η ποσότητα $I(\beta)$ εκφράζει την αδιαπερατότητα λόγω του εικονικού πεδίου πορώδους και αναλύεται παρακάτω.

Το μοντέλο τύρβης Spalart-Allmaras[10] επιλύεται ως προς $\tilde{\nu}$:

$$R^{\tilde{\nu}} = \frac{\partial(v_j \tilde{\nu})}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\nu + \tilde{\nu}}{\sigma} \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} \right) - \frac{c_{b2}}{\sigma} \left(\frac{\partial \tilde{\nu}}{x_i} \right)^2 - \tilde{\nu}(\mathcal{P}(\tilde{\nu}, Y) - \mathcal{D}(\tilde{\nu}, y)) + \lambda I(\beta) \tilde{\nu} = 0 \quad (2.4)$$

Πίνακας 2.1: Οριακές συνθήκες για τα πεδία του πρωτεύοντος προβλήματος.

	Είσοδος	Έξοδος	Στερεά τοιχώματα
p	$\frac{\partial p}{\partial x_j} n_j = 0$	$p = 0$	$\frac{\partial p}{\partial x_j} n_j$
v_i	$v_i = -0.5 n_i$	$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} n_j = 0$	$v_i = 0$
$\tilde{\nu}$	$\tilde{\nu} = 0.000279$	$\frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} n_j = 0$	$\tilde{\nu} = 0$
y	$\frac{\partial y}{\partial x_j} n_j = 0$	$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} n_j = 0$	$y = 0$

Οι όροι παραγωγής και καταστροφής του μοντέλου είναι

$$\mathcal{P}(\tilde{\nu}, y) = c_{b1} \tilde{S}, \quad \mathcal{D}(\tilde{\nu}, y) = c_{w1} f_w \frac{\tilde{\nu}}{y^2} \quad (2.5)$$

και οι συναρτήσεις του μοντέλου είναι

$$\chi = \frac{\tilde{\nu}}{\nu}, \quad f_{v1} = \frac{\chi^3}{\chi^3 + c_{w3}^3}, \quad f_{v2} = 1 - \frac{\chi}{1 + \chi f_{v1}}, \quad \tilde{S} = S + \frac{f_{v2} \tilde{\nu}}{\kappa^2 y^2}, \quad S = \sqrt{2} \left\| \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \right\|$$

$$f_w = g \left[\frac{1 + c_{w3}^6}{g^6 + c_{w3}^6} \right]^{\frac{1}{6}}, \quad g = r + c_{w2} (r^6 - r), \quad r = \frac{\tilde{\nu}}{\tilde{S} \kappa^2 y^2}$$

όπου y είναι η απόσταση του κέντρου κάθε κελιού από το κοντινότερο στερεό τοίχωμα. Οι σταθερές του μοντέλου είναι $c_{b1} = 0.1355$, $c_{b2} = 0.622$, $\sigma = 2/3$, $\kappa = 0.41$, $c_{w1} = \frac{c_{b1}}{\kappa^2} + \frac{1+c_{b2}}{\sigma}$, $c_{w2} = 0.3$, $c_{w3} = 2$ και $c_{v1} = 7.1$. Το πεδίο των αποστάσεων y υπολογίζεται επιλύοντας τη διαφορική εξίσωση Hamilton-Jacobi [11] γραμμένη ως εξίσωση μεταφοράς-διάχυσης

$$R^y = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial y}{\partial x_j} y \right) - (1 + \epsilon) y \frac{\partial^2 y}{\partial x_j^2} - 1 + \lambda I(\beta) y = 0 \quad (2.6)$$

στην οποία ο όρος διάχυσης πολλαπλασιάζεται με $(1 + \epsilon)$ με $\epsilon = 0.1$ για αυξημένη αριθμητική ευστάθεια. Τέλος, η τυρβώδης συνεκτικότητα εκφράζεται ως προς το $\tilde{\nu}$

$$\nu_t = f_{v1} \tilde{\nu} \quad (2.7)$$

Στα στερεά τοιχώματα η τυρβώδης συνεκτικότητα ν_t υπολογίζεται με την τεχνική συ-

νάρτησης τοίχου [12][13][14]:

$$\nu_t = \frac{u_\tau^2}{\left| \frac{\partial u_i}{\partial x_j} n_j \right|} - \nu \quad (2.8)$$

όπου u_τ είναι η ταχύτητα τριβής υπολογιζόμενη από τον τύπο του Spalding[15]

$$f_{WF} = y^+ - v^+ - \frac{1}{E} \left(e^{\kappa v^+} - q - \kappa v^+ - \frac{1}{2}(\kappa v^+)^2 - \frac{1}{6}(\kappa v^+)^3 \right) \quad (2.9)$$

όπου $E = 9.8$ και η αδιάστατη ταχύτητα και απόσταση είναι αντίστοιχα

$$y^+ = \frac{u_\tau y_P}{\nu}, \quad v^+ = \frac{\|v_i^P\|}{u_\tau} \quad (2.10)$$

με y_P και v_i^P να είναι η απόσταση και οι συνιστώσες της ταχύτητας του κέντρου του κελιού P δίπλα στο στερεό τοίχωμα.

Το OpenFOAM λύνει τις εξισώσεις με τη μέθοδο SIMPLE (Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equation)[16] για τη σύζευξη ταχύτητας πίεσης, και επιβάλλονται οι οριακές συνθήκες του Πίνακα 2.1.

Επιπλέον στην TopO, το πεδίο πορώδους φιλτράρεται και υπολογίζεται ένα ομαλότερο πεδίο $\tilde{\alpha}$, επιλύοντας μια διαφορική εξίσωση τύπου Helmholtz [17]

$$R^F(\tilde{\alpha}, \alpha) = - \left(\frac{r}{2\sqrt{3}} \right)^2 \frac{\partial^2 \tilde{\alpha}}{\partial x_j^2} + \tilde{\alpha} - \alpha = 0 \quad (2.11)$$

όπου r η ακτίνα οριζόμενη ως πολλαπλάσιο της μέσης τιμής των ακμών των κελιών του πλέγματος. Προκειμένου η διεπιφάνεια μεταξύ ρευστού και στερεού (Fluid Solid Interface -FSI) να είναι ευδιάκριτη, χρησιμοποιείται μια συνάρτηση προβολής τύπου Heaviside [18]

$$\beta(\tilde{\alpha}) = \frac{\tanh(\eta b) + \tanh(b(\tilde{\alpha} - \eta))}{\tanh(\eta b) + \tanh(b(1 - \eta))} \quad (2.12)$$

γύρω από την κεντρική τιμή $\eta = 0.5$, και παράμετρο b που αντιπροσωπεύει πόσο απότομη θα είναι η προβολή (μεγάλες τιμές τείνουν προς δυαδικά πεδία β), της οποίας η τιμή τίθεται διπλάσια της τιμής της ακτίνας r (Εξ. 2.11).

Έτσι, η αδιαπερατότητα σε κάθε κελί εκφράζεται εν τέλει από το πεδίο β και κατ' επέκταση βάσει αυτού υπολογίζεται ο όρος ποινής [19] στις Εξ. 2.3, 2.4 και 2.6

$$I(\beta) = \beta_{max} \frac{\beta}{1 + d(1 - \beta)} \quad (2.13)$$

με d παράμετρο που εκφράζει πόσο απότομη είναι η $I(\beta)$, $\beta_{max} = \frac{\nu}{L^2 Da}$ όπου ο αριθμός Darcy $Da = 10^{-5}$, και L το χαρακτηριστικό μήκος (Πίνακας 1.1).

2.2 Η συνεχής συζυγής μέθοδος

Αρχικά ορίζεται η επαυξημένη αντικειμενική συνάρτηση (Lagrangian) ως [9]

$$\mathcal{L} = J + \int_{\Omega} q R^p d\Omega + \int_{\Omega} u_i R^{v_i} d\Omega + \int_{\Omega} \tilde{\nu}_{\alpha} R_{\tilde{\nu}} d\Omega + \int_{\Omega} y_{\alpha} R^y d\Omega \quad (2.14)$$

όπου $q, u_i, \tilde{\nu}_{\alpha}, y_{\alpha}$ είναι τα συζυγή πεδία, των πεδίων πίεσης, ταχύτητας, του $\tilde{\nu}$ και απόστασης, και R^{Φ} το υπόλοιπο της διαφορικής εξίσωσης που αφορά το βαθμωτό πεδίο Φ . Παραγωγίζοντας ως προς b_n και απαιτώντας τον μηδενισμό των ποσοτήτων που εμπεριέχουν παραγώγους των πρωτευουσών μεταβλητών ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού, προκύπτουν οι συζυγείς πεδριακές εξισώσεις[9]:

$$R^q = -\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned} R^{u_i} &= -\frac{\partial v_j u_i}{\partial x_j} - v_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial q}{\partial x_i} - \frac{\partial \tau_{ij}^{\alpha}}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\tilde{\nu}_{\alpha} \nu \frac{C_S}{S} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right) \\ &- \tilde{\nu} \frac{\partial \tilde{\nu}_{\alpha}}{\partial x_i} + \lambda I(\beta) u_i = 0, \quad i = 1, 2 \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned} R^{\tilde{\nu}_{\alpha}} &= -\frac{\partial (v_j \tilde{\nu}_{\alpha})}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\nu + \tilde{\nu} \frac{\partial \tilde{\nu}_{\alpha}}{\partial x_j}}{\sigma} \right) + \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} + 2 \frac{c_{b_2}}{\sigma} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\tilde{\nu}_{\alpha} \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} \right) \\ &- \tilde{\nu}_{\alpha} (\mathcal{P}(\tilde{\nu}, y) - \mathcal{D}(\tilde{\nu}, y)) - \tilde{\nu}_{\alpha} \tilde{\nu} C_{\tilde{\nu}} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \nu}{\partial \tilde{\nu}} + \lambda I(\beta) \tilde{\nu}_{\alpha} = 0 \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$R^{y_{\alpha}} = -2 \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial y}{\partial x_j} y_{\alpha} \right) - C_y \tilde{\nu}_{\alpha} \tilde{\nu} + \lambda I(\beta) y_{\alpha} = 0 \quad (2.18)$$

όπου

$$C_S = \left(c_{b_1} + c_{w_1} C \frac{r}{\tilde{S}} \right) \quad (2.19)$$

$$C_{\tilde{\nu}} = \left(c_{b_1} + c_{w_1} C \frac{r}{\tilde{S}} \right) \left(\frac{f_{v_2}}{\kappa^2 y^2} + \frac{\tilde{\nu}}{\kappa^2 y^2} \frac{\partial f_{v_2}}{\partial \tilde{\nu}} \right) - c_{w_1} C \frac{r}{\tilde{\nu}} - c_{w_1} \frac{f_w}{y^2} \quad (2.20)$$

$$C_y = -\frac{2}{y^3} \left(\left(c_{b_1} + c_{w_1} C \frac{r}{\tilde{S}} \right) \frac{f_{v_2} \tilde{\nu}}{\kappa^2} - c_{w_1} f_w \tilde{\nu} - c_{w_1} C r y^2 \right) \quad (2.21)$$

$$C = \frac{\tilde{\nu}}{y^2} \frac{c_{w_3}^6}{g^6 + c_{w_3}^6} \left[\frac{1 + c_{w_3}^6}{g^6 + c_{w_3}^6} \right]^{\frac{1}{6}} [1 + c_{w_2}(6r^5 - 1)] \quad (2.22)$$

Οι οριακές συνθήκες του συζυγούς προβλήματος παρουσιάζονται στον Πίνακα 2.2, έτσι ώστε να μηδενίζονται οι ποσότητες με παραγώγους των πρωτευουσών μεταβλητών ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού στα ολοκληρώματα κατά μήκος των ορίων του υπολογιστικού χωρίου, έχοντας θέσει τους όρους:

$$BC^{u_{(t)}} = v_j n_j u_{(t)} + (\nu + \nu_t) \left(\frac{\partial u_{(t)}}{\partial n} + \frac{\partial u_{(n)}}{\partial t} \right) - \tilde{\nu}_\alpha \tilde{\nu} \frac{C_S}{S} \left(\frac{\partial u_{(t)}}{\partial n} - \frac{\partial u_{(n)}}{\partial t} \right) + \frac{\partial J}{\partial v_i} n_k \quad (2.23)$$

$$BC^q = q - v_j n_j u_{(n)} + v_j u_j + 2(\nu + \nu_t) \frac{\partial u_{(n)}}{\partial n} + \tilde{\nu} \tilde{\nu}_\alpha + \frac{\partial J}{\partial v_i} n_i n_k \quad (2.24)$$

$$BC^{\tilde{\nu}_\alpha} = v_j n_j \tilde{\nu}_\alpha + \frac{\nu + \tilde{\nu}}{\sigma} \frac{\partial \tilde{\nu}_\alpha}{\partial x_j} n_j \quad (2.25)$$

Πίνακας 2.2: Οριακές συνθήκες για τα πεδία του συζυγούς προβλήματος [9]. Ο δείκτης $l = \{n, t\}$ υποδηλώνει την κάθετη και την εφαπτομενική διεύθυνση αντίστοιχα.

	Είσοδος	Έξοδος	Στερεά τοιχώματα
q	$\frac{\partial q}{\partial x_j} n_j = 0$	$BC^q = 0$	$\frac{\partial q}{\partial x_j} n_j = 0$
$u_{(n)}$	$u_{(n)} = 0$	$\frac{\partial u_{(n)}}{\partial x_j} n_j = 0$	$u_{(n)} = 0$
$u_{(t)}$	$u_{(t)} = 0$	$BC^{u_{(t)}} = 0$	$u_{(t)} = 0$
$\tilde{\nu}_\alpha$	$\tilde{\nu}_\alpha = 0$	$BC^{\tilde{\nu}_\alpha} = 0$	$\tilde{\nu}_\alpha = 0$
y_α	$y_\alpha = 0$	$y_\alpha = 0$	$\frac{\partial y_\alpha}{\partial x_j} n_j = 0$

Οι όροι που απομένουν μετά την ικανοποίηση των πεδιακών εξισώσεων και οριακών συνθηκών του συζυγούς προβλήματος, εκφράζουν την παράγωγο της επαυξημένης συνάρτησης, η οποία ταυτίζεται με την παράγωγο της πραγματικής αντικειμενικής συνάρτησης, ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού γράφονται ως:

$$\begin{aligned} \frac{\delta J}{\delta b_n} = & \underbrace{\int_{\Omega} \left(q \frac{\partial v_j}{\partial x_k} - u_i v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_k} - u_j \frac{\partial p}{\partial x_k} + u_i \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_k} - \tau_{ij}^\alpha \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \Theta_{jk} \right) \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\delta x_k}{\delta b_n} \right) d\Omega}_{\text{ShpO}} \\ & + \lambda \underbrace{\int_{\Omega} (u_i v_i + \tilde{\nu}_\alpha \tilde{\nu} + y_\alpha y) \frac{\partial I(\beta)}{\partial \beta} \frac{\partial \tilde{\alpha}}{\partial b_n} d\Omega}_{\text{TopO}} \end{aligned} \quad (2.26)$$

όπου

$$\begin{aligned} \Theta_{jk} = & -\tilde{\nu}_\alpha \frac{\partial(v_j \tilde{\nu})}{\partial x_k} + \tilde{\nu}_\alpha \frac{\partial}{\partial} \left(\frac{\nu + \nu_t}{\sigma} \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} \right) - \frac{\nu + \nu_t}{\sigma} \frac{\partial \tilde{\nu}_\alpha}{\partial x_j} \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_k} + 2 \frac{c_{b2}}{\sigma} \tilde{\nu}_\alpha \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_k} \\ & + \tilde{\nu}_\alpha \tilde{\nu} \frac{C_S}{S} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial v_i}{\partial x_k} - 2 y_\alpha \frac{\partial y}{\partial x_j} \frac{\partial y}{\partial x_k} \end{aligned} \quad (2.27)$$

Στη ShpO ($\lambda = 0$), μηδενίζεται ο δεύτερος όρος που σχετίζεται με το πεδίο πορώδους (οποιοσδήποτε με $\alpha, \tilde{\alpha}, \beta$), ενώ στην TopO οι μεταβλητές σχεδιασμού (οι τιμές του πεδίου πορώδους) δεν μετακινούν το πλέγμα, οπότε $\frac{\delta x_k}{\delta b_n} = 0$, και έτσι μηδενίζεται ο πρώτος όρος. Επίσης, εάν τεθεί ως

$$\Psi_{\tilde{\alpha}} = (u_i v_i + \tilde{\nu}_\alpha \tilde{\nu} + y_\alpha y) \frac{\partial I(\beta)}{\partial \beta} \quad (2.28)$$

προκύπτει [9] η συζυγής εξίσωση της Εξ. 2.11, με συζυγή μεταβλητή την Ψ_α

$$R_F(\Psi_\alpha, \Psi_{\tilde{\alpha}}) = -r^2 \frac{\partial^2 \Psi_\alpha}{\partial x_j^2} + \Psi_\alpha - \Psi_{\tilde{\alpha}} = 0 \quad (2.29)$$

η οποία επιλύεται με οριακή συνθήκη $\frac{\partial \Psi_\alpha}{\partial x_j} n_j = 0$ σε όλα τα όρια του υπολογιστικού χωρίου, και έτσι ο τελευταίος όρος της Εξ. 2.26 (υπογεγραμμένος με TopO) εν τέλει γράφεται ως $\Psi_\alpha^P \Omega^P$, όπου Ω^P ο όγκος του κελιού P .

Σε προβλήματα ΥΡΔ τα πλέγματα είναι πυκνά, με αποτέλεσμα ο αριθμός των τιμών του πεδίου πορώδους που λειτουργούν ως μεταβλητές σχεδιασμού να είναι αρκετά μεγάλος³. Στην TopO συνεπώς, αναδεικνύεται το πλεονέκτημα της συζυγούς μεθόδου να υπολογίζει τις παραγώγους ευαισθησίας με υπολογιστικό κόστος πρακτικά ανεξάρτητο από το πλήθος των μεταβλητών σχεδιασμού.

Όροι που περιέχουν παραγώγους της αντικειμενικής συνάρτησης, ως προς τις πρωτεύουσες μεταβλητές, εμφανίζονται στις οριακές συνθήκες του συζυγούς προβλήματος. Ο υπολογισμός των όρων αυτών έγινε βάσει της ήδη υπάρχουσας αντικειμενικής συνάρτησης της βιβλιοθήκης `adjointOptimisationFoam`, η οποία αφορά την ομοιομορφία του μέτρου της ταχύτητας. Οι όροι αυτοί είναι οι παράγωγοι $\frac{\partial J}{\partial v_{(l)}}$, για κάθε κελί, όπου l είναι, είτε η εφαπτομενική, είτε η κάθετη διεύθυνση. Αυτές υπολογίζονται με κατάλληλες προβολές, βάσει της

$$\frac{\partial J}{\partial v_k} = \frac{1}{2} \frac{(v_k n_k - \bar{v}) \Delta S_k n_k}{S_{out}} \quad (2.30)$$

όπου $S_{out} = \int_S dS = \sum_i \Delta S_i$, και ΔS_k το εμβαδό της πλευράς του κελιού που συνεισφέρει στην έξοδο (εκεί ορίζεται η αντικειμενική συνάρτηση).

³Στην Ενότητα 3.1 αναφέρεται ότι για την αρχική γεωμετρία το πλέγμα αποτελείται από περίπου 10^5 κελιά

Κεφάλαιο 3

Εφαρμογή βελτιστοποίησης μορφής (ShpO)

Η ομοιομορφία της ταχύτητας στην έξοδο του αγωγού, μπορεί να βελτιωθεί, είτε με αλγόριθμους (ShpO και TopO), είτε με την αλλαγή της αρχικοποίησης αυτών των αλγορίθμων δημιουργώντας νέες γεωμετρίες. Στο κεφάλαιο αυτό, σε κάθε περίπτωση εφαρμόζεται ShpO και παρουσιάζεται ο αγωγός πριν και μετά τη βελτιστοποίηση για την εκάστοτε γεωμετρία. Όπως αναφέρθηκε, η παραμετροποίηση της γεωμετρίας έγινε με καμπύλες Bezier, και με κουτιά μορφοποίησης (Morphing Boxes) από ογκομετρικές B-Splines.



Σχήμα 3.1: Περίγραμμα υπάρχοντος αγωγού.

Αρχικά, παρουσιάζεται η περίπτωση αναφοράς στην οποία εξετάζεται η υπάρχουσα γεωμετρία. Αυτή παραμετροποιείται και βελτιστοποιείται, οδηγώντας σε μια νέα γεωμετρία που παρουσιάζεται στην περίπτωση 100. Στις υπόλοιπες περιπτώσεις του κεφαλαίου, οι αρχικές τους γεωμετρίες δημιουργούνται εκ νέου, με την είσοδο και την έξοδο του αγωγού να είναι σταθερές στο χώρο, και να διαφέρουν τα τοιχώματα (Σχήμα 3.1). Αυτές παραμετροποιούνται και βελτιστοποιούνται. Πιο συγκεκριμένα, στις πρώτες περιπτώσεις, το άνω τοίχωμα μένει ίδιο με την υπάρχουσα γεωμετρία και αλλαγές γίνονται μόνο στο κάτω τοίχωμα. Αργότερα αλλάζει και το άνω τοίχωμα, ενώ στο τέλος εισάγονται και διατάξεις στο εσωτερικό του αγωγού. Σε όλες τις περιπτώσεις που παρουσιάζονται στην εργασία, ο δείκτης *opt* δηλώνει τη βελτιστοποιημένη (τελική) γεωμετρία κάθε περίπτωσης.

Στις περιπτώσεις που χρησιμοποιούνται καμπύλες Bezier, το πρώτο και το τελευταίο

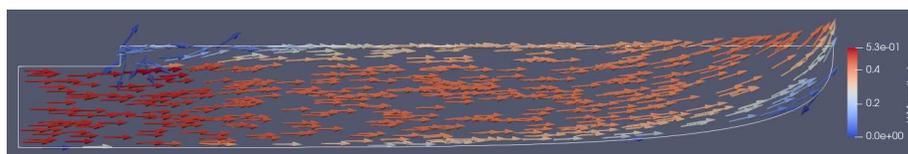
από τα σημεία ελέγχου (Control Points, CPs) αυτής της καμπύλης είναι σταθερά στο χώρο και δεν επιτρέπεται η μετατόπισή τους. Οι ταυσιτές $\left. \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \right|_A^k$, όπου i είναι η συντεταγμένη του κόμβου k, j η συντεταγμένη του σημείου ελέγχου A της καμπύλης Bezier, χρειάζονται στη διαδικασία της βελτιστοποίησης. Αυτοί έχουν μη μηδενικές τιμές μόνο στη διαγωνίο του ταυσιτή, λόγω της ανεξαρτησίας των εκφράσεων που παράγουν τις συντεταγμένες κάθε σημείου της καμπύλης Bezier, και λόγω της ομοιότητας αυτών, οι τιμές της διαγωνίου είναι όλες ίδιες [5].

Στις περιπτώσεις που χρησιμοποιούνται κουτιά μορφοποίησης (Morphing Boxes) από ογκομετρικές B-Splines, τα οριακά σημεία, καθώς και κάποιες σειρές και στήλες σημείων δίπλα στα οριακά, είναι σταθερά στο χώρο και δεν επιτρέπεται η μετακίνησή τους.

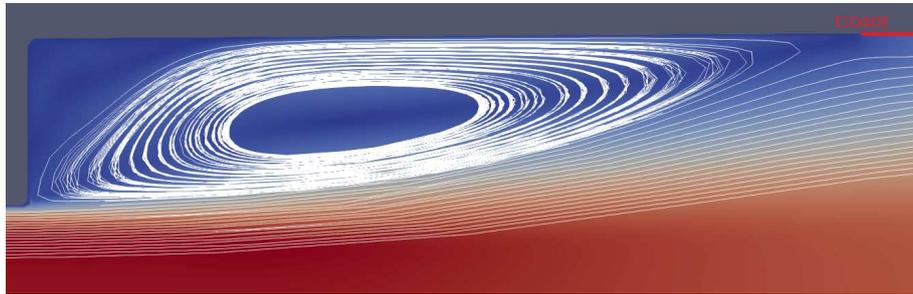
Ο περιορισμός μετατόπισης των κόμβων του πλέγματος εφαρμόζεται αφενός για προστασία του, και αφετέρου για χειρισμό του αγωγού ως 2Δ . Σε όλες τις περιπτώσεις του κεφαλαίου αυτού, οι μεταβλητές σχεδιασμού είναι οι συντεταγμένες (x, y) των ελεύθερα κινούμενων σημείων, είτε αυτά είναι τα CPs μιας καμπύλης Bezier, είτε τα σημεία ενός κουτιού μορφοποίησης.

3.1 Περίπτωση αναφοράς

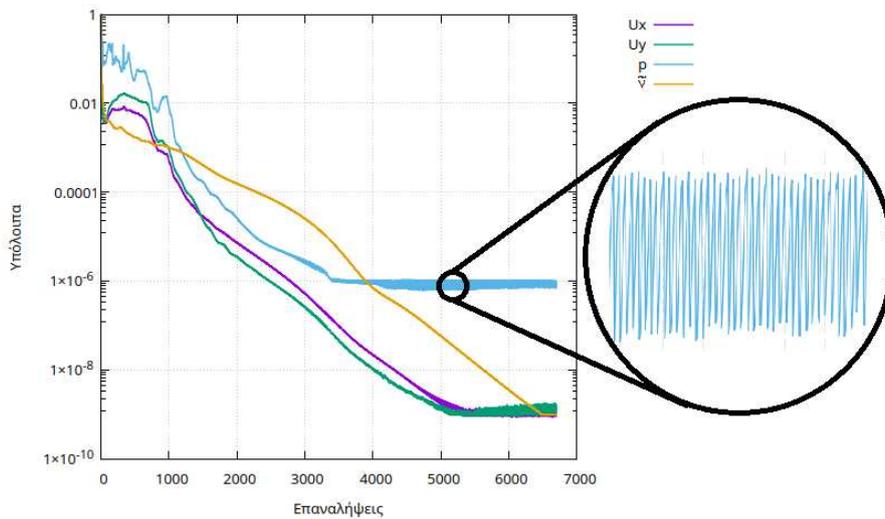
Ως περίπτωση αναφοράς θεωρείται η υπάρχουσα γεωμετρία και για την πρόλεξη της ροής, κατασκευάστηκε πλέγμα με 116827 κελιά. Χρειάστηκαν 547 [s] για τη σύγκλιση των εξισώσεων που φαίνεται στο Σχήμα 3.4, με τα υπόλοιπα να πέφτουν τουλάχιστον κατά 2 τάξεις μεγέθους. Η υπολογιστική διαδικασία έγινε, χωρίζοντας το υπολογιστικό χωρίο σε 24 υποχωρία και με την κατάλληλη ανταλλαγή πληροφορίας μεταξύ τους, παράλληλα σε 24 επεξεργαστές (CPUs). Οι αρκετά πυκνές ταλαντώσεις των υπολοίπων (Σχ. 3.4) οφείλονται στην πρόλεξη μιας ροής, στην οποία υπάρχει αποκόλληση και ανακυκλοφορία της ροής (κατάντι του βήματος του άνω τοιχώματος όπως φαίνεται στα Σχήματα 3.3 και 3.2). Η ανακυκλοφορία είναι ένα μη μόνιμο φυσικό φαινόμενο, και όταν ο επιλύτης αντιμετωπίζει τη ροή ως μόνιμη, αποτέλεσμα είναι τα υπόλοιπα να ταλαντώνονται. Για καλύτερη εποπτεία αποτελεσμάτων, καθώς και καλύτερης ακρίβειας πεδία πρωτεύουσών μεταβλητών που χρησιμοποιούνται στη συζυγή μέθοδο, χρησιμοποιείται η μέση τιμή των πεδίων των τελευταίων 1000 επαναλήψεων. Οι μετρικές παρουσιάζονται στον Πίνακα 3.1.



Σχήμα 3.2: Περίπτωση αναφοράς: Προσανατολισμός διανυσμάτων ταχύτητας με χρωματική διαβάθμιση για το μέτρο της.



Σχήμα 3.3: Περίπτωση αναφοράς: Γραμμές ροής κοντά στο άνω τοίχωμα για την αρχική γεωμετρία.



Σχήμα 3.4: Περίπτωση αναφοράς: Σύγκλιση εξισώσεων της ροής για την αρχική γεωμετρία.

Πίνακας 3.1: Περίπτωση αναφοράς: Μετρικές (Μετρική για (αν)ομοιομορφία κάθετης ταχύτητας στην έξοδο (Αντικειμενική συνάρτηση), Απώλειες ολικής πίεσης, Μετρική για κριτήριο εφαπτομενικής ταχύτητας).

	$J[m^2/s^2]$	$p_{tLosses}[m^5/s^3]$	$C[m/s]$
Αναφοράς	0.00443464	0.00305292	0.31

3.2 Περιπτώσεις αλλαγής μόνο του κάτω τοιχώματος

3.2.1 Περίπτωση 100

Η υπάρχουσα γεωμετρία παραμετροποιείται χρησιμοποιώντας μια καμπύλη Bezier με 7 CPs (Σχήμα 3.5) η οποία αναπαριστά προσεγγιστικά το κάτω τοίχωμα. Υπενθυμίζεται η αντικειμενική συνάρτηση, Εξ. 1.1, για την οποία ο στόχος είναι να ελαχιστοποιηθεί. Όσον αφορά τις απώλειες ολικής πίεσης (Εξ. 1.3) και τη μετρική για την εφαπτομενική ταχύτητα (Εξ. 1.2), επίσης επιδιώκονται μικρές τιμές, χωρίς ωστόσο να αποτελούν κάποιο στόχο στον αλγόριθμο βελτιστοποίησης.

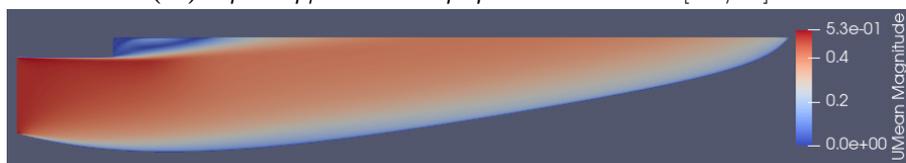


Σχήμα 3.5: Περίπτωση 100: Παραμετροποίηση με καμπύλη Bezier από 7 CPs στο κάτω τοίχωμα.

Η σύγκριση αρχικής και τελικής γεωμετρίας φαίνεται στο Σχήμα 3.7, τα πεδία του μέτρου ταχύτητας που τους αντιστοιχούν στο Σχήμα 3.6. Οι μετρικές παρουσιάζονται στον Πίνακα 3.2 και η κατανομή των κάθετων ταχυτήτων στην έξοδο στο Σχήμα 3.8.



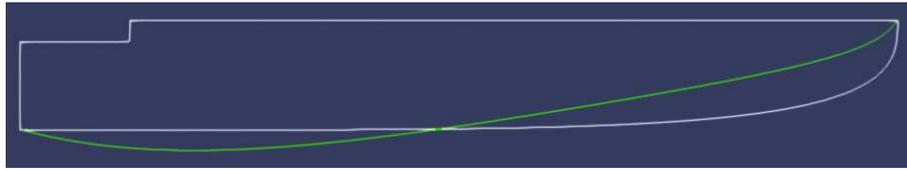
(α') Πριν τη βελτιστοποίηση: $J = 0.00443464[m^2/s^2]$.



(β') Μετά τη βελτιστοποίηση (με Bezier): $J = 0.00040877[m^2/s^2]$.

Σχήμα 3.6: Περίπτωση 100: Πεδία μέτρου ταχύτητας.

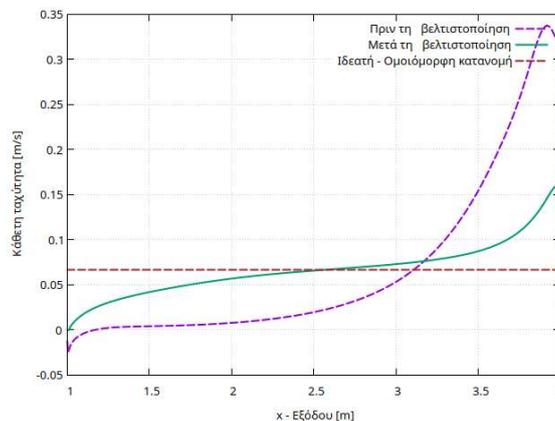
Με τη βελτιστοποίηση η αντικειμενική συνάρτηση μειώνεται κατά μία τάξη μεγέθους, περίπου στο 10% της αρχικής τιμής, οι απώλειες πίεσης στο 66%, ενώ η μετρική για την εφαπτομενική ταχύτητα στην έξοδο αυξάνεται λίγο (9%), ωστόσο ικανοποιεί ακόμη το κριτήριο.



Σχήμα 3.7: Περίπτωση 100: Περίγραμμα αγωγού πριν (άσπρο) και μετά (πράσινο) τη βελτιστοποίηση.

Πίνακας 3.2: Περίπτωση 100: Μετρικές (Μετρική για (αν)ομοιομορφία κάθετης ταχύτητας στην έξοδο (Αντικειμενική συνάρτηση), Απώλειες ολικής πίεσης, Μετρική για κριτήριο εφαιπτομενικής ταχύτητας).

	$J[m^2/s^2]$	$p_{tLosses}[m^5/s^3]$	$C[m/s]$
Αναφοράς	0.00443464	0.00305292	0.31
Μετά τη βελτιστοποίηση	0.00040877	0.00200463	0.34



Σχήμα 3.8: Περίπτωση 100: Σύγκριση κατανομών της κάθετης ταχύτητας στην έξοδο.

3.2.2 Περίπτωση 101

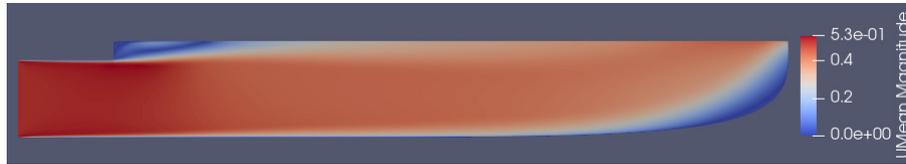
Παίρνοντας ως βάση τη διάταξη των CPs που παραμετροποιούν την αρχική γεωμετρία της περίπτωσης αναφοράς, δημιουργείται μια νέα καμπύλη Bezier με περισσότερα CPs (12), η οποία αναπαριστά το κάτω τοίχωμα και ταυτόχρονα χρησιμοποιείται για την παραμετροποίηση της νέας γεωμετρίας (Σχήμα 3.9). Η σύγκριση αρχικής και τελικής



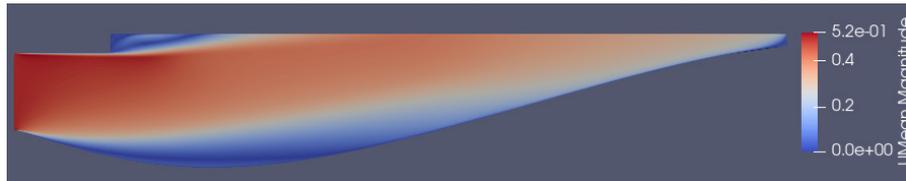
Σχήμα 3.9: Περίπτωση 101: Δημιουργία γεωμετρίας και παραμετροποίηση με καμπύλη Bezier από 12 CPs στο κάτω τοίχωμα.

γεωμετρίας φαίνεται στο Σχήμα 3.11, και τα πεδία του μέτρου ταχύτητας που τους

αντιστοιχούν στο Σχήμα 3.10. Οι μετρικές παρουσιάζονται στον Πίνακα 3.3 και η κατανομή των κάθετων ταχυτήτων στην έξοδο στο Σχήμα 3.12.



(α') Πριν τη βελτιστοποίηση: $J = 0.00479689[m^2/s^2]$.



(β') Μετά τη βελτιστοποίηση (με Bezier): $J = 0.00029558[m^2/s^2]$.

Σχήμα 3.10: Περίπτωση 101: Πεδία μέτρου ταχύτητας.



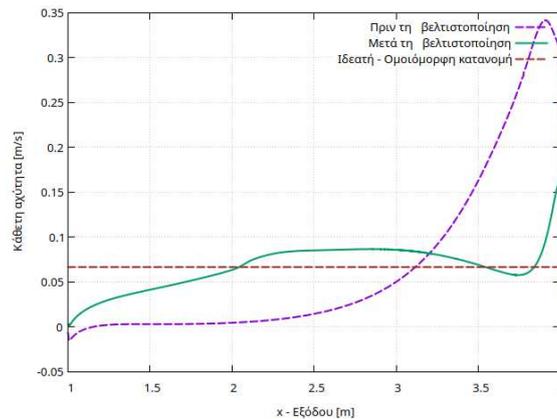
Σχήμα 3.11: Περίπτωση 101: Περιγράμμα αγωγού πριν (άσπρο) και μετά (πράσινο) τη βελτιστοποίηση.

Πίνακας 3.3: Περίπτωση 101: Μετρικές (Μετρική για (αν)ομοιομορφία κάθετης ταχύτητας στην έξοδο (Αντικειμενική συνάρτηση), Απώλειες ολικής πίεσης, Μετρική για κριτήριο επαπτομενικής ταχύτητας).

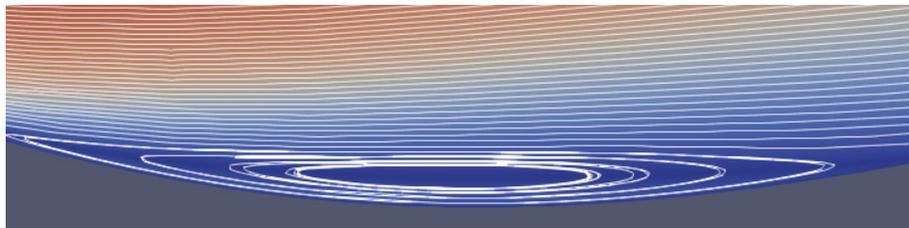
	$J[m^2/s^2]$	$p_{tLosses}[m^5/s^3]$	$C[m/s]$
Αναφοράς	0.00443464	0.00305292	0.31
Πριν τη βελτιστοποίηση	0.00479689	0.00299759	0.303
Μετά τη βελτιστοποίηση	0.00029558	0.00300115	0.327

Σε σύγκριση με τη γεωμετρία αναφοράς, η αρχική γεωμετρία (της περίπτωσης 101) είναι λίγο χειρότερη, αλλά με τη βελτιστοποίηση η τελική γεωμετρία είναι καλύτερη από την αντίστοιχη της περίπτωσης 100 (περίπου κατά 30%) και, παράλληλα, έχει και μικρότερη μετρική για την επαπτομενική ταχύτητα στην έξοδο. Η ως εδώ καλύτερη γεωμετρία, είναι η 101opt με αντικειμενική συνάρτηση ίση με 6.5% της τιμής της αρχικής γεωμετρίας αναφοράς.

Στη βελτιστοποιημένη γεωμετρία, κοντά στο κάτω τοίχωμα παρατηρείται αποκόλληση και αναστροφή της ροής (Σχήμα 3.13).



Σχήμα 3.12: Περίπτωση 101: Σύγκριση κατανομών της κάθετης ταχύτητας στην έξοδο.



Σχήμα 3.13: Περίπτωση 101: Γραμμές ροής κοντά στο κάτω τοίχωμα.

3.2.3 Περίπτωση 102

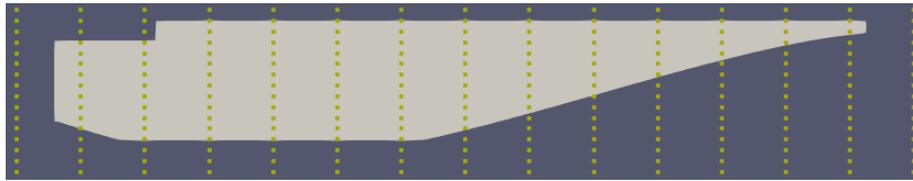
Παίρνοντας ως βάση τη 101opt, προστίθεται ένα ευθύγραμμο τμήμα ως στερεό όριο, ενδιάμεσα στο κάτω τοίχωμα του αγωγού (Σχήμα 3.14), ώστε να εξαφανιστεί η περιοχή όπου παρατηρούνταν έντονη αποκόλληση και αναστροφή της ροής. Η παραμετροποίηση γίνεται με κουτιά μορφοποίησης από ογκομετρικές B-Splines (Σχήμα 3.15).



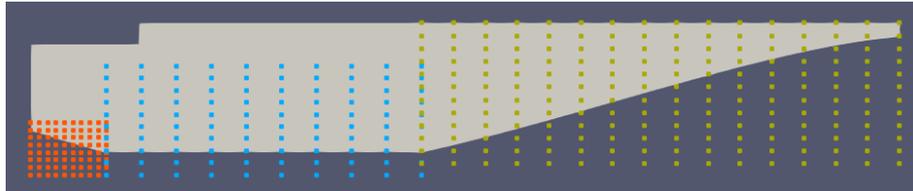
Σχήμα 3.14: Περίπτωση 102: Δημιουργία γεωμετρίας εμπνευσμένης από τη βελτιστοποιημένη γεωμετρία της περίπτωσης 101.

Η σύγκριση αρχικής και τελικής γεωμετρίας φαίνεται στο Σχήμα 3.17, και τα πεδία του μέτρου ταχύτητας που τους αντιστοιχούν στο Σχήμα 3.16. Οι μετρικές παρουσιάζονται στον Πίνακα 3.4 και η κατανομή των κάθετων ταχυτήτων στην έξοδο στο Σχήμα 3.18.

Η αρχική γεωμετρία της περίπτωσης αυτής είναι λίγο χειρότερη (όσον αφορά την αντικειμενική συνάρτηση) σε σχέση με την 101opt, από την οποία είναι εμπνευσμένη,

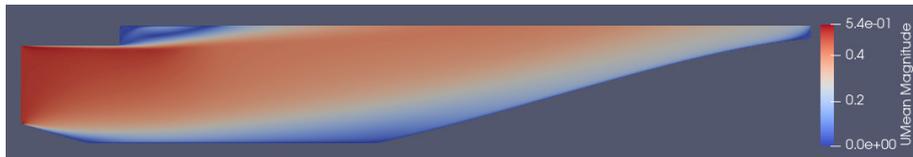


(α') Για τη βελτιστοποίηση A: 1 κουτί μορφοποίησης.

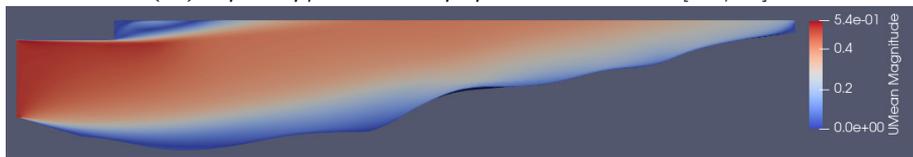


(β') Για τη βελτιστοποίηση B: 3 κουτιά μορφοποίησης.

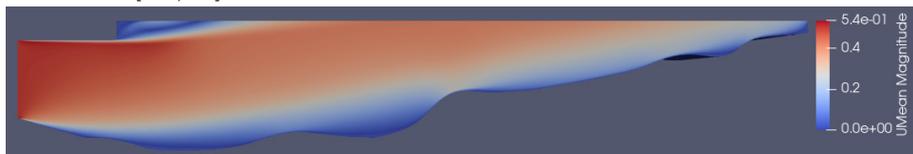
Σχήμα 3.15: Περίπτωση 102: Παραμετροποίηση γεωμετρίας.



(α') Πριν τη βελτιστοποίηση: $J = 0.00035119[m^2/s^2]$.

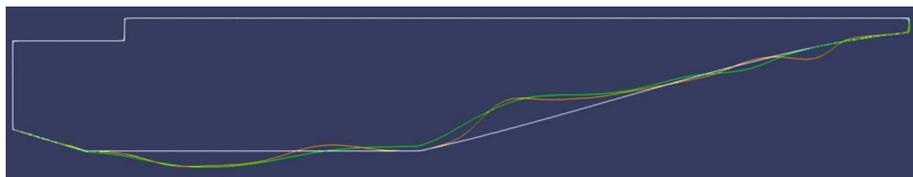


(β') Μετά τη βελτιστοποίηση A (με 1 κουτί μορφοποίησης): $J = 0.00015327[m^2/s^2]$.



(γ') Μετά τη βελτιστοποίηση B (με 3 κουτιά μορφοποίησης): $J = 0.00012814[m^2/s^2]$.

Σχήμα 3.16: Περίπτωση 102: Πεδία μέτρου ταχύτητας.

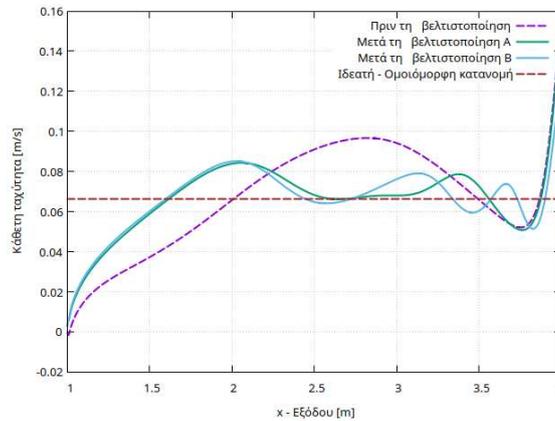


Σχήμα 3.17: Περίπτωση 102: Περιγράμμα αγωγού πριν (άσπρο) και μετά (πράσινο) τη βελτιστοποίηση.

Πίνακας 3.4: Περίπτωση 102: Μετρικές (Μετρική για (αν)ομοιομορφία κάθετης ταχύτητας στην έξοδο (Αντικειμενική συνάρτηση), Απώλειες ολικής πίεσης, Μετρική για κριτήριο εφαπτομενικής ταχύτητας).

	$J[m^2/s^2]$	$p_{tLosses}[m^5/s^3]$	$C[m/s]$
Αναφοράς	0.00443464	0.00305292	0.31
Πριν τη βελτιστοποίηση	0.00035119	0.00215473	0.323
Μετά τη βελτιστοποίηση A	0.00015327	0.00228724	0.334
Μετά τη βελτιστοποίηση B	0.00012814	0.00235938	0.334

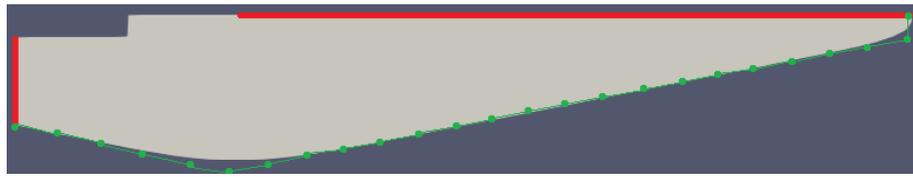
αλλά με μικρότερες απώλειες ολικής πίεσης (μείωση περίπου 30%). Ωστόσο, οι τελικές γεωμετρίες της περίπτωσης (102optA και 102optB) είναι οι καλύτερες ως εδώ, με τιμές περίπου στο 3% της τιμής της αρχικής γεωμετρίας αναφοράς.



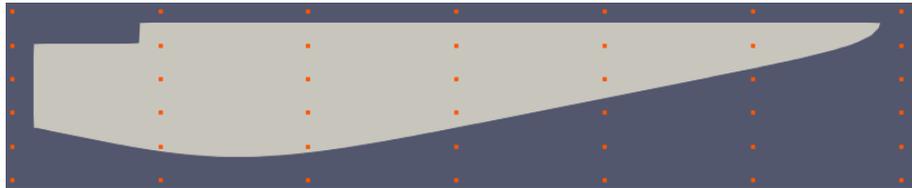
Σχήμα 3.18: Περίπτωση 102: Σύγκριση κατανομών της κάθετης ταχύτητας στην έξοδο.

3.2.4 Περίπτωση 103

Στην περίπτωση αυτή, το κάτω τοίχωμα δημιουργείται από μια καμπύλη Bezier εμπνευσμένη από τις 100opt και 101opt (Σχήματα 3.7 και 3.11). Πιο συγκεκριμένα, γίνεται προσπάθεια δημιουργίας του κάτω τοιχώματος με διεύρυνση του αγωγού κοντά στην είσοδο που παρατηρείται στα αποτελέσματα των περιπτώσεων που αναφέρθηκαν. Αυτό επιτυγχάνεται αλλάζοντας τη διάταξη των CPs: αντί να διατάσσονται κατά μήκος δύο κάθετων μεταξύ τους ευθύγραμμων τμημάτων προσανατολισμένων με τους άξονες των καρτεσιανών συντεταγμένων, διατάσσονται κατά μήκος δύο ευθύγραμμων τμημάτων, που σχηματίζουν αμβλεία γωνία περίπου στο 25% του μήκους του αγωγού (Σχήμα 3.19 α'). Για την παραμετροποίηση της βελτιστοποίησης A χρησιμοποιήθηκε η καμπύλη Bezier από 25 CPs διατεταγμένα έτσι όπως περιγράφηκε, ενώ για την παραμετροποίηση της βελτιστοποίησης B χρησιμοποιήθηκε 1 κουτί μορφοποίησης από ογκομετρικές B-Splines (Σχήμα 3.19).



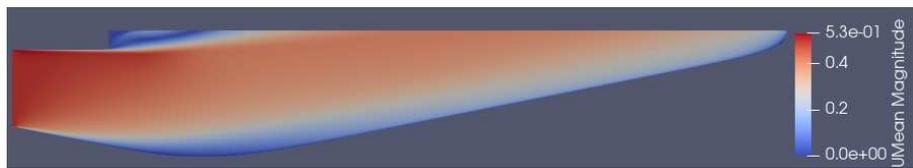
(α') Δημιουργία κάτω τοιχώματος και για τη βελτιστοποίηση A παραμετροποίηση με καμπύλη Bezier από 25 CPs για το κάτω τοίχωμα.



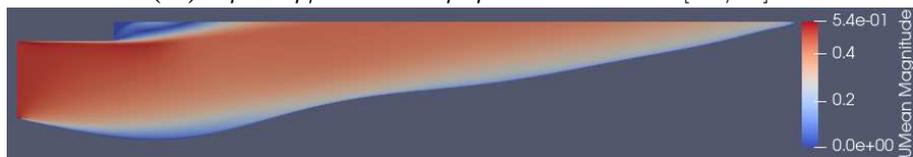
(β') Για τη βελτιστοποίηση B: 1 κουτί μορφοποίησης.

Σχήμα 3.19: Περίπτωση 103: Δημιουργία κάτω τοιχώματος και παραμετροποίηση γεωμετρίας.

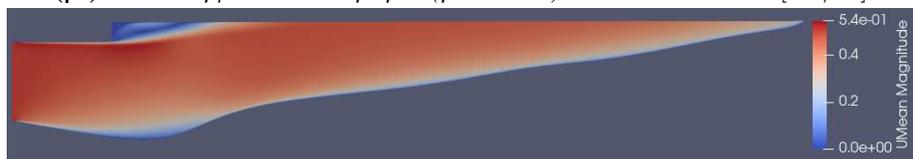
Η σύγκριση αρχικής και τελικής γεωμετρίας φαίνεται στο Σχήμα 3.21, και τα πεδία του μέτρου ταχύτητας που τους αντιστοιχούν στο Σχήμα 3.20. Οι μετρικές παρουσιάζονται στον Πίνακα 3.5 και η κατανομή των κάθετων ταχυτήτων στην έξοδο στο Σχήμα 3.22.



(α') Πριν τη βελτιστοποίηση: $J = 0.00032582[m^2/s^2]$.



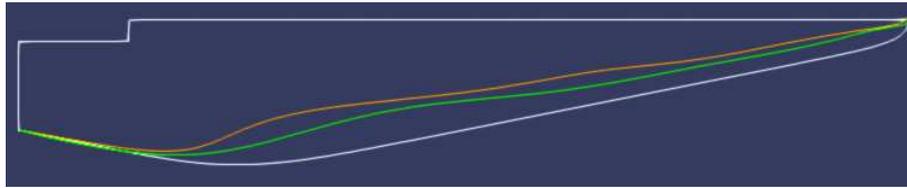
(β') Μετά τη βελτιστοποίηση A (με Bezier): $J = 4.9005e - 05[m^2/s^2]$.



(γ') Μετά τη βελτιστοποίηση B (με 1 κουτί μορφοποίησης): $J = 4.8778e - 05[m^2/s^2]$.

Σχήμα 3.20: Περίπτωση 103: Πεδία μέτρου ταχύτητας.

Η αρχική γεωμετρία είναι καλύτερη από τις αντίστοιχες αρχικές των προηγούμενων περιπτώσεων, και οι τελικές γεωμετρίες (103optA και 103optB) είναι οι καλύτερες ως εδώ με τιμές περίπου στο 1.1% της τιμής της αρχικής γεωμετρίας αναφοράς. Ε-

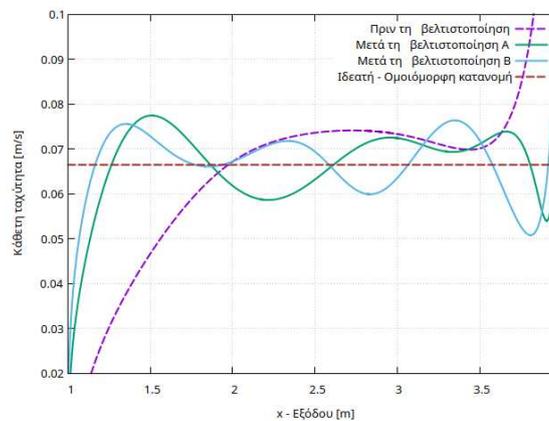


Σχήμα 3.21: Περίπτωση 103: Περίγραμμα αγωγού πριν (άσπρο), μετά τη βελτιστοποίηση A (πράσινο) και μετά τη βελτιστοποίηση B (πορτοκαλί).

Πίνακας 3.5: Περίπτωση 103: Μετρικές (Μετρική για (αν)ομοιομορφία κάθετης ταχύτητας στην έξοδο (Αντικειμενική συνάρτηση), Απώλειες ολικής πίεσης, Μετρική για κριτήριο εφαπτομενικής ταχύτητας).

	$J[m^2/s^2]$	$p_{tLosses}[m^5/s^3]$	$C[m/s]$
Αναφοράς	0.00443464	0.00305292	0.31
Πριν τη βελτιστοποίηση	0.00032582	0.00203129	0.325
Μετά τη βελτιστοποίηση A	4.9005e-05	0.002054034	0.371
Μετά τη βελτιστοποίηση B	4.8778e-05	0.00238716	0.417

πίσης, συνοδεύονται από σχετικά χαμηλές απώλειες ολικής πίεσης, αλλά οι μετρικές για την εφαπτομενική ταχύτητα στην έξοδο είναι σχετικά υψηλές, με τη 103optB να μην ικανοποιεί το κριτήριο. Οπότε, η καλύτερη αποδεκτή γεωμετρία ως εδώ είναι η 103optA



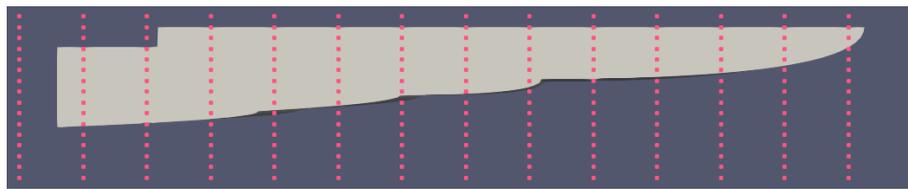
Σχήμα 3.22: Περίπτωση 103: Σύγκριση κατανομών της κάθετης ταχύτητας στην έξοδο.

Στο σημείο αυτό σημειώνεται ότι, βάσει των προηγούμενων περιπτώσεων, φαίνεται ότι η αύξηση των αριθμών των σημείων ελέγχου οδηγεί σε καλύτερα αποτελέσματα. Ενώ η ιδέα για περαιτέρω αύξηση φαίνεται γόνιμη, δοκιμάστηκε σε περιπτώσεις που δεν συμπεριλήφθηκαν, και η τοπική ανεξαρτησία των κόμβων του ορίου ήταν αρκετά μεγάλη, οδηγώντας σε μεγάλες παραμορφώσεις - οξείες γωνίες, για τις οποίες, ήταν αδύνατη η προσαρμογή του πλέγματος, σταματώντας έτσι τη διαδικασία βελτιστοποίησης πολύ νωρίς. Ωστόσο, βάσει αυτής της παθογένειας, στις επόμενες δύο περιπτώσεις

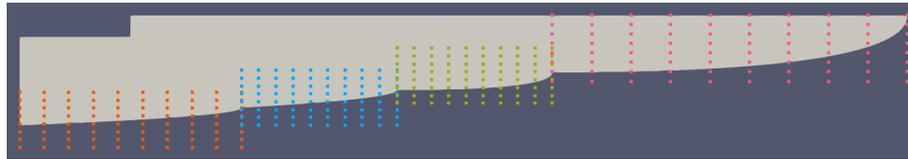
προτείνεται η εκ κατασκευής ύπαρξη γωνιών στο κάτω τοίχωμα.

3.2.5 Περίπτωση 104

Στην περίπτωση αυτή, το κάτω τοίχωμα αντί να δημιουργείται από μια καμπύλη που χρησιμοποιήθηκε στις προηγούμενες περιπτώσεις, δημιουργείται από περισσότερες (4), οι οποίες στα σημεία που ενώνονται μεταξύ τους, σχηματίζουν γωνίες που τείνουν να προσανατολίσουν τη ροή κατακόρυφα. Η παραμετροποίηση γίνεται με κουτιά μορφοποίησης από ογκομετρικές B-Splines (Σχήμα 3.23).



(α') Για τη βελτιστοποίηση A: 1 κουτί μορφοποίησης.



(β') Για τη βελτιστοποίηση B: 4 κουτιά μορφοποίησης.

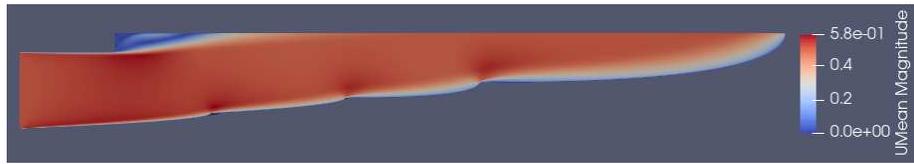
Σχήμα 3.23: Περίπτωση 104: Παραμετροποίηση γεωμετρίας.

Η σύγκριση αρχικής και τελικής γεωμετρίας φαίνεται στο Σχήμα 3.25, και τα πεδία του μέτρου ταχύτητας που τους αντιστοιχούν στο Σχήμα 3.24. Οι μετρικές παρουσιάζονται στον Πίνακα 3.6 και η κατανομή των κάθετων ταχυτήτων στην έξοδο στο Σχήμα 3.26.

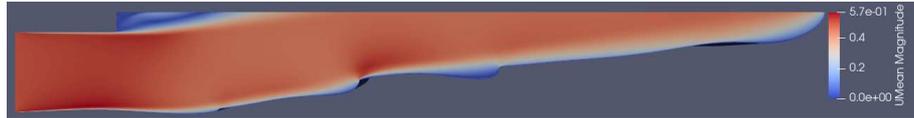
Πίνακας 3.6: Περίπτωση 104: Μετρικές (Μετρική για (αν)ομοιομορφία κάθετης ταχύτητας στην έξοδο (Αντικειμενική συνάρτηση), Απώλειες ολικής πίεσης, Μετρική για κριτήριο εφαπτομενικής ταχύτητας).

	$J[m^2/s^2]$	$p_{tLosses}[m^5/s^3]$	$C[m/s]$
Αναφοράς	0.00443464	0.00305292	0.31
Πριν τη βελτιστοποίηση	0.00146102	0.00427198	0.448
Μετά τη βελτιστοποίηση A	0.00075699	0.00370883	0.416
Μετά τη βελτιστοποίηση B	0.00044327	0.00382331	0.455

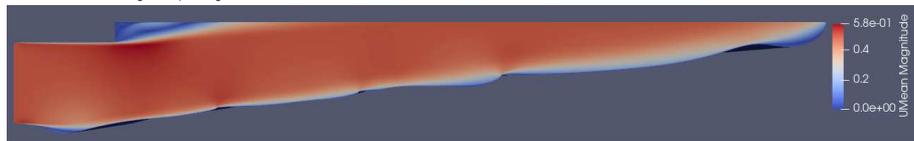
Η ύπαρξη γωνιών οδήγησε σε γεωμετρίες με τιμές αντικειμενικής συνάρτησης μιας τάξης μεγέθους μεγαλύτερες από την καλύτερη ως εδώ γεωμετρία (103optA). Ταυτόχρονα συνοδεύονται από σχετικά αυξημένες απώλειες ολικής πίεσης, ενώ δεν ικανοποιούν το κριτήριο για την εφαπτομενική ταχύτητα.



(α') Πριν τη βελτιστοποίηση: $J = 0.00146102[m^2/s^2]$.

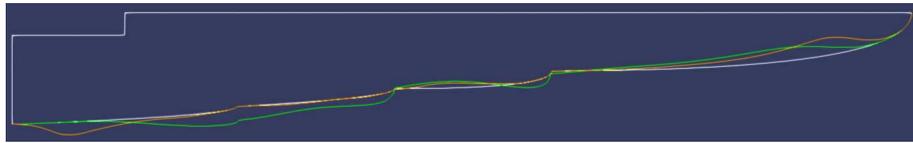


(β') Μετά τη βελτιστοποίηση A (με 1 κουτί μορφοποίησης): $J = 0.00075699[m^2/s^2]$.

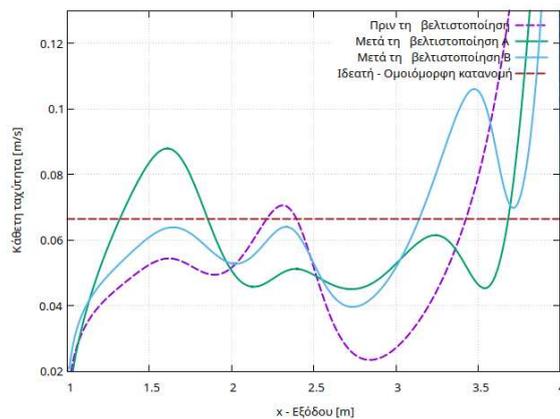


(γ') Μετά τη βελτιστοποίηση B (με 3 κουτιά μορφοποίησης): $J = 0.00044327[m^2/s^2]$.

Σχήμα 3.24: Περίπτωση 104: Πεδία μέτρου ταχύτητας.



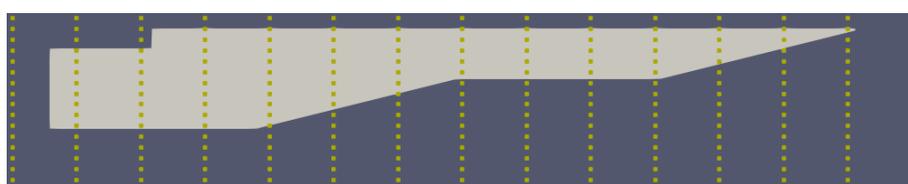
Σχήμα 3.25: Περίπτωση 104: Περίγραμμα αγωγού πριν (άσπρο), μετά τη βελτιστοποίηση A (πράσινο) και μετά τη βελτιστοποίηση B (πορτοκαλί).



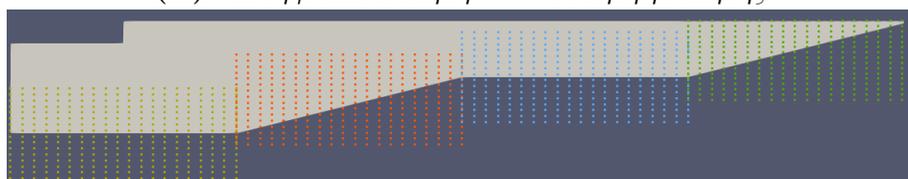
Σχήμα 3.26: Περίπτωση 104: Σύγκριση κατανομών της κάθετης ταχύτητας στην έξοδο.

3.2.6 Περίπτωση 105

Στην περίπτωση αυτή, το κάτω τοίχωμα σχεδιάζεται χρησιμοποιώντας 4 ευθύγραμμα τμήματα, αντί για 4 καμπύλες Bezier που χρησιμοποιήθηκαν στην περίπτωση 104, τα οποία, στα σημεία που ενώνονται μεταξύ τους, σχηματίζουν γωνίες που τείνουν να προσανατολίσουν τη ροή κατακόρυφα. Ενώ καμπύλα τμήματα, διαπισθητικά, είναι πιο πιθανόν να ενισχύσουν την ομοιομορφία στην έξοδο, ο αλγόριθμος βελτιστοποίησης μπορεί να ευνοηθεί από μια τέτοια αρχικοποίηση (με ευθύγραμμα τμήματα) και να οδηγήσει σε καλύτερες γεωμετρίες, που δεν μπορούν να προβλεφθούν εκ των προτέρων. Η παραμετροποίηση γίνεται με κουτιά μορφοποίησης από ογκομετρικές B-Splines (Σχήμα 3.27).



(α') Για τη βελτιστοποίηση A: 1 κουτιά μορφοποίησης.



(β') Για τη βελτιστοποίηση B: 4 κουτιά μορφοποίησης.

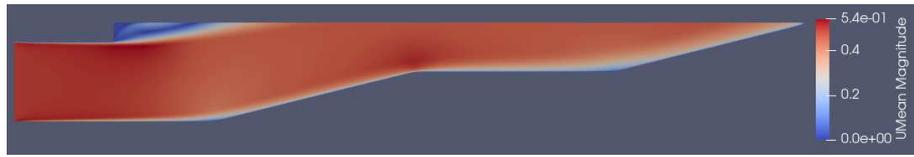
Σχήμα 3.27: Περίπτωση 105: Παραμετροποίηση γεωμετρίας.

Η σύγκριση αρχικής και τελικής γεωμετρίας φαίνεται στο Σχήμα 3.29, και τα πεδία του μέτρου ταχύτητας που τους αντιστοιχούν στο Σχήμα 3.28. Οι μετρικές παρουσιάζονται στον Πίνακα 3.7 και η κατανομή των κάθετων ταχυτήτων στην έξοδο στο Σχήμα 3.30.

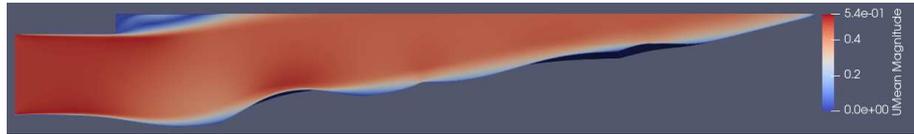
Πίνακας 3.7: Περίπτωση 105: Μετρικές (Μετρική για (αν)ομοιομορφία κάθετης ταχύτητας στην έξοδο (Αντικειμενική συνάρτηση), Απώλειες ολικής πίεσης, Μετρική για κριτήριο επαπτομενικής ταχύτητας).

	$J[m^2/s^2]$	$p_{tLosses}[m^5/s^3]$	$C[m/s]$
Αναφοράς	0.00443464	0.00305292	0.31
Πριν τη βελτιστοποίηση	0.00060945	0.002934032	0.426
Μετά τη βελτιστοποίηση A	8.12335e-05	0.002815634	0.414
Μετά τη βελτιστοποίηση B	0.000307227	0.003119659	0.427

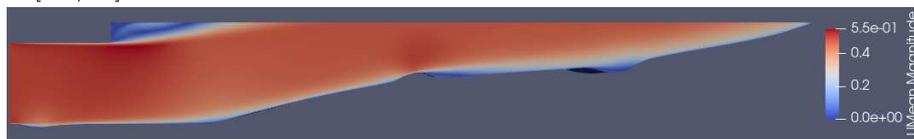
Τα αποτελέσματα είναι καλύτερα από την περίπτωση 104, και η 105optA έχει αντικειμενική συνάρτηση ίδιας τάξης μεγέθους με την ως εδώ καλύτερη γεωμετρία (103optA). Ωστόσο, δεν ικανοποιείται το κριτήριο για την επαπτομενική ταχύτητα στην έξοδο.



(α') Πριν τη βελτιστοποίηση: $J = 0.00060945[m^2/s^2]$.

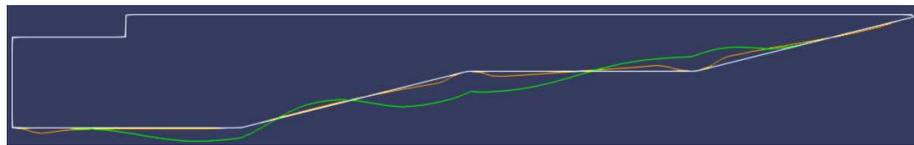


(β') Μετά τη βελτιστοποίηση A (με 1 κουτί μορφοποίησης): $J = 8.12335e - 05[m^2/s^2]$.

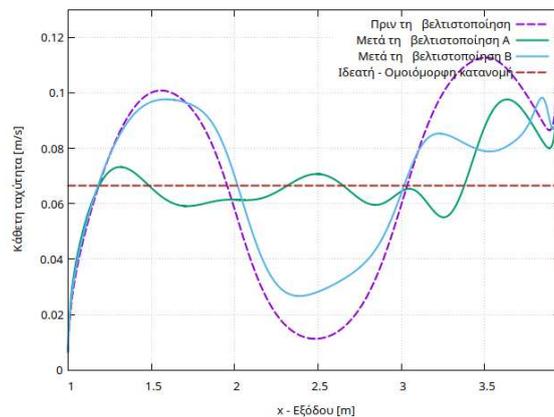


(γ') Μετά τη βελτιστοποίηση B (με 4 κουτιά μορφοποίησης): $J = 0.000307227[m^2/s^2]$.

Σχήμα 3.28: Περίπτωση 105: Πεδία μέτρου ταχύτητας.



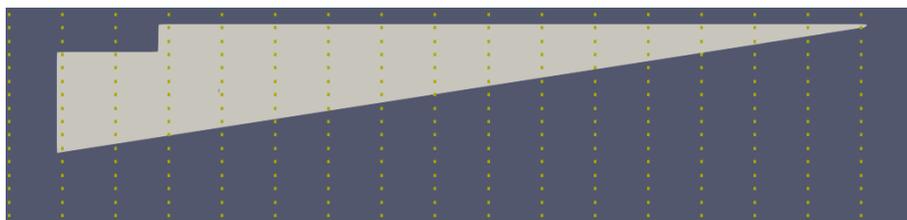
Σχήμα 3.29: Περίπτωση 105: Περιγραφή αγωγού πριν (άσπρο), μετά τη βελτιστοποίηση A (πράσινο) και μετά τη βελτιστοποίηση B (πορτοκαλί).



Σχήμα 3.30: Περίπτωση 105: Σύγκριση κατανομών της κάθετης ταχύτητας στην έξοδο.

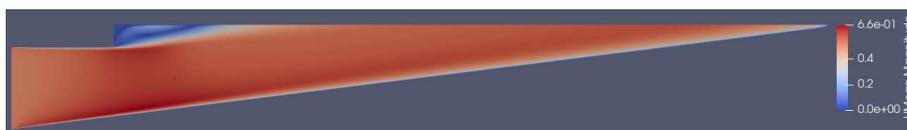
3.2.7 Περίπτωση 106

Στην περίπτωση αυτή, το κάτω τοίχωμα δημιουργείται με 1 ευθύγραμμο τμήμα αντί για 4, όπως στην περίπτωση 105. Αυτή είναι η πιο εύκολη κατασκευαστικά περίπτωση. Η παραμετροποίηση γίνεται με κουτί μορφοποίησης από ογκομετρικές B-Splines (Σχήμα 3.31).

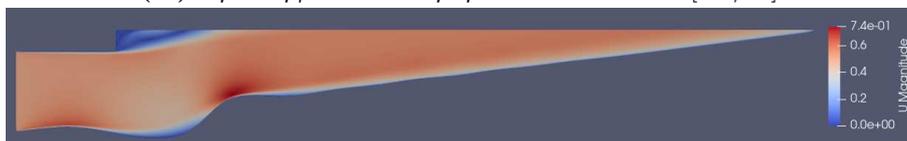


Σχήμα 3.31: Περίπτωση 106: Παραμετροποίηση γεωμετρίας με 1 κουτί μορφοποίησης.

Η σύγκριση αρχικής και τελικής γεωμετρίας φαίνεται στο Σχήμα 3.33, και τα πεδία του μέτρου ταχύτητας που τους αντιστοιχούν στο Σχήμα 3.32. Οι μετρικές παρουσιάζονται στον Πίνακα 3.8 και η κατανομή των κάθετων ταχυτήτων στην έξοδο στο Σχήμα 3.34.

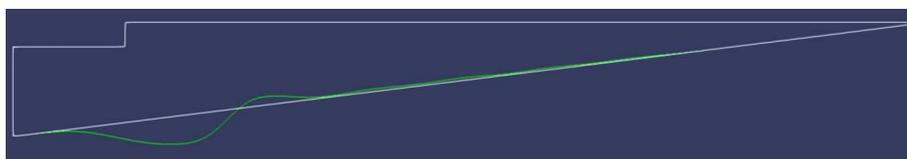


(α') Πριν τη βελτιστοποίηση: $J = 5.3766e - 05[m^2/s^2]$.



(β') Μετά τη βελτιστοποίηση (με 1 κουτί μορφοποίησης): $J = 1.9550e - 05[m^2/s^2]$.

Σχήμα 3.32: Περίπτωση 106: Πεδία μέτρου ταχύτητας.



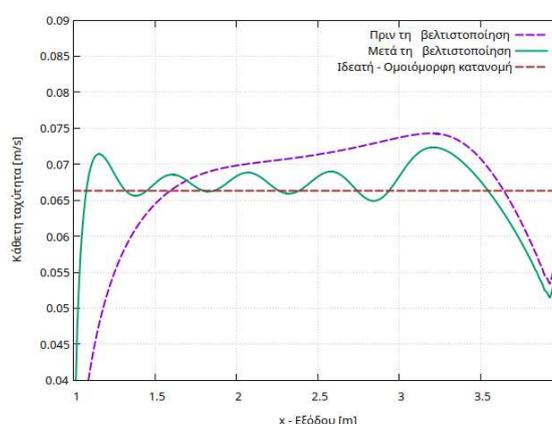
Σχήμα 3.33: Περίπτωση 106: Περιγράμματα αγωγού πριν (άσπρο) και μετά (πράσινο) τη βελτιστοποίηση.

Η αρχική γεωμετρία είναι πολύ καλύτερη από όλες τις άλλες αρχικές, και η τελική έχει αντικειμενική συνάρτηση περίπου υποδιπλάσια από την ως εδώ καλύτερη γεωμετρία (103optA). Ωστόσο, καμία από τις δυο γεωμετρίες της περίπτωσης αυτής (106) δεν

Πίνακας 3.8: Περίπτωση 106: Μετρικές (Μετρική για (αν)ομοιομορφία κάθετης ταχύτητας στην έξοδο (Αντικειμενική συνάρτηση), Απώλειες ολικής πίεσης, Μετρική για κριτήριο εφαπτομενικής ταχύτητας).

	$J[m^2/s^2]$	$p_{tLosses}[m^5/s^3]$	$C[m/s]$
Αναφοράς	0.00443464	0.00305292	0.31
Πριν τη βελτιστοποίηση	5.3766e-05	0.00529472	0.502
Μετά τη βελτιστοποίηση	1.9550e-05	0.00490810	0.515

ικανοποιεί το κριτήριο για την εφαπτομενική ταχύτητα, με τιμές αρκετά μεγαλύτερες από το όριο. Επίσης, συνοδεύονται από σχετικά μεγάλες απώλειες ολικής πίεσης.

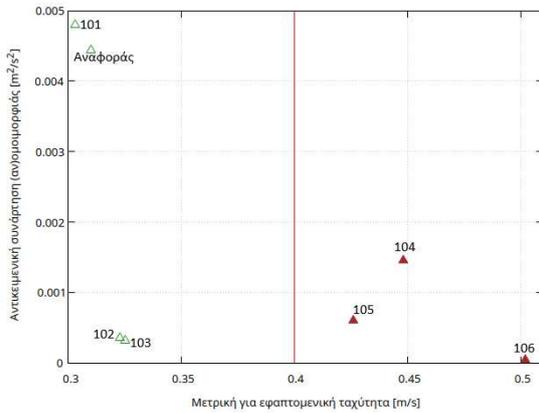


Σχήμα 3.34: Περίπτωση 106: Σύγκριση κατανομών της κάθετης ταχύτητας στην έξοδο.

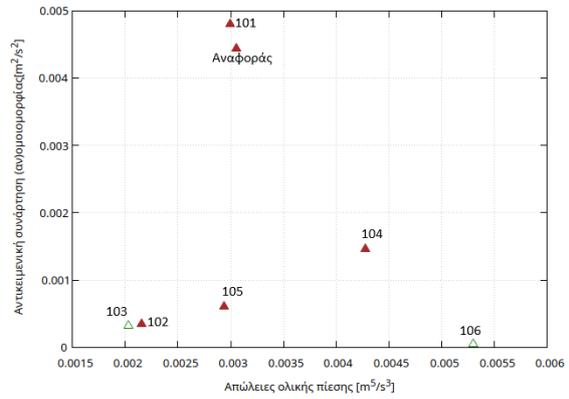
3.2.8 Σύγκριση αποτελεσμάτων

Τα μέτωπα μη-κυριαρχούμενων λύσεων του Σχήματος 3.35, αλλά και τα αντίστοιχα των επόμενων ενοτήτων, βοηθούν στη σύγκριση των τιμών των αντικειμενικών συναρτήσεων και ταυτόχρονα δίνουν πληροφορίες για τις δευτερεύουσες μετρικές. Υπενθυμίζεται, ότι καλύτερη θεωρείται η γεωμετρία με την μικρότερη τιμή αντικειμενικής συνάρτησης 1.1 και αποδεκτές είναι οι γεωμετρίες που ικανοποιούν το κριτήριο 1.2. Τέλος, λόγω της διαφοράς τάξεων μεγέθους της αντικειμενικής συνάρτησης μεταξύ αρχικών και τελικών (βελτιστοποιημένων) γεωμετριών, τα σημεία που τις αντιπροσωπεύουν, παρουσιάζονται σε ξεχωριστά διαγράμματα. Η καλύτερη αποδεκτή ως εδώ γεωμετρία είναι η 103optA (Σχήμα 3.20 (β')). Στο Σχήμα 3.36 παρουσιάζονται τα διανύσματα της ταχύτητας για την καλύτερη γεωμετρία αυτής της ενότητας, και στο Σχήμα 3.37 συγκρίνονται κάποιες από τις καλύτερες γεωμετρίες.

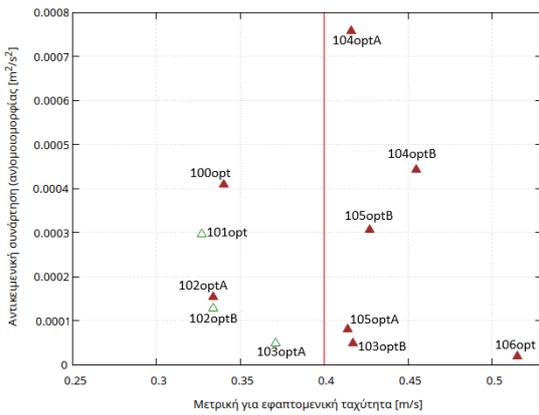
Σε περιπτώσεις που χρησιμοποιήθηκαν κουτιά μορφοποίησης από ογκομετρικές B-Splines για την παραμετροποίηση, υπήρχε η επιλογή 1 ή περισσότερων κουτιών. Με 1 κουτί, όλοι οι εσωτερικοί κόμβοι είναι ελεύθεροι να κουνηθούν, αλλά κάθε σημείο



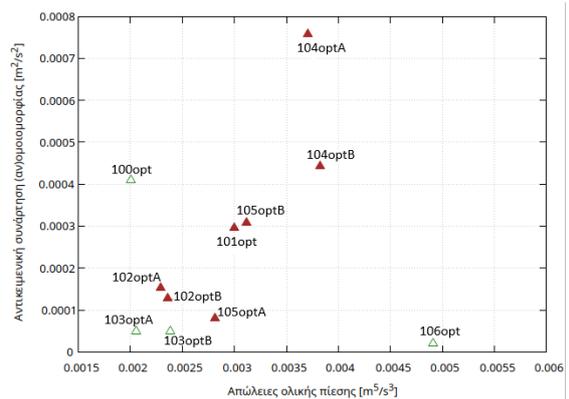
(α') Διάγραμμα με άξονες $C - J$. Χωρίς βελτιστοποίηση.



(β') Διάγραμμα με άξονες $p_{tLosses} - J$. Χωρίς βελτιστοποίηση.



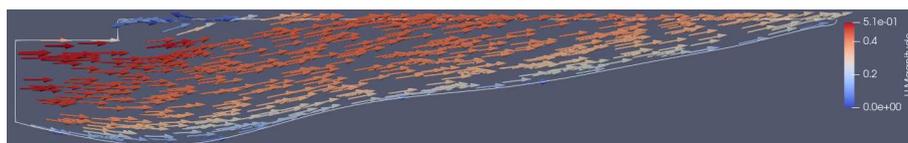
(γ') Διάγραμμα με άξονες $C - J$. Με βελτιστοποίηση.



(δ') Διάγραμμα με άξονες $p_{tLosses} - J$. Με βελτιστοποίηση.

Σχήμα 3.35: Περιπτώσεις 100 έως 106: Μέτωπα μη κυριαρχούμενων λύσεων στους χώρους που αφορούν τη μετρική για την εφαπτομενική ταχύτητα και τις απώλειες ολικής πίεσης. Με πράσινο-άδειο τρίγωνο είναι οι περιπτώσεις που ανήκουν στο μέτωπο μη κυριαρχούμενων λύσεων. Χρησιμοποιούνται οι δείκτες $opt(Y)$ για τις βελτιστοποιημένες περιπτώσεις με $Y = \{A, B\}$ σε περιπτώσεις που εφαρμόζονται 2 διαφορετικές βελτιστοποιήσεις. Η κόκκινη γραμμή στα διαγράμματα (α') και (γ') αναπαριστά το κριτήριο για την εφαπτομενική ταχύτητα στην έξοδο.

του κουτιού, έλκει μεγάλο αριθμό κόμβων μειώνοντας σχετικά την ανεξαρτησία κίνησης μεταξύ τους. Με περισσότερα κουτιά, κάποιοι εσωτερικοί κόμβοι χρειάζεται να μείνουν ακίνητοι, για να διασφαλιστεί η ποιότητα του πλέγματος, αλλά έτσι δύναται να παραχθούν πιο περίπλοκες γεωμετρίες τοπικά σε κάθε κουτί, αφού κάθε κόμβος έχει μεγαλύτερη ανεξαρτησία κίνησης. Στις περιπτώσεις 102 και 104, η χρήση περισσότερων κουτιών οδήγησε σε καλύτερα αποτελέσματα (σε σύγκριση με τη χρήση 1 κουτιού), ενώ στην περίπτωση 105 όχι.



Σχήμα 3.36: Περίπτωση 103 (γεωμετρία με βελτιστοποίηση A): Προσανατολισμός διανυσμάτων ταχύτητας με χρωματική διαβάθμιση για το μέτρο της.



Σχήμα 3.37: Περιπτώσεις 100 έως 106: Περιγράμματα αγωγού για τις περιπτώσεις που ανήκουν στο μέτωπο μη-κυριαρχούμενων λύσεων του Σχήματος 3.35(γ) .

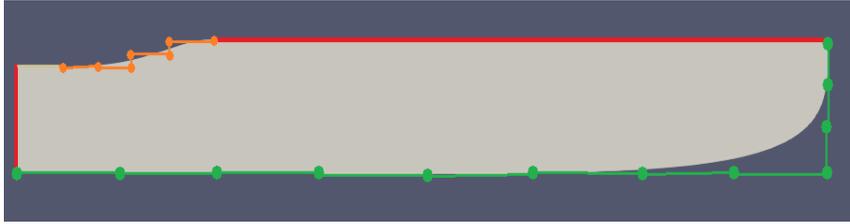
3.3 Περιπτώσεις αλλαγής άνω και κάτω τοιχώματος

Στην προηγούμενη ενότητα η ομοιομορφία στην έξοδο βελτιώθηκε σημαντικά. Στην παρούσα ενότητα, αλλάζει και το άνω τοίχωμα (σε συνδυασμό με την αλλαγή του κάτω), ώστε να δοκιμαστούν νέες αρχικοποιήσεις για τη βελτιστοποίηση.

3.3.1 Περίπτωση 201

Στην περίπτωση αυτή, το κάτω τοίχωμα δημιουργείται με 1 καμπύλη Bezier από 12 CPs (ίδιο με αυτό της αρχικής γεωμετρίας περίπτωσης 101), και το άνω τοίχωμα από 1 καμπύλη Bezier από 7 CPs (Σχήμα 3.38). Η παραμετροποίηση γίνεται με αυτές τις καμπύλες Bezier.

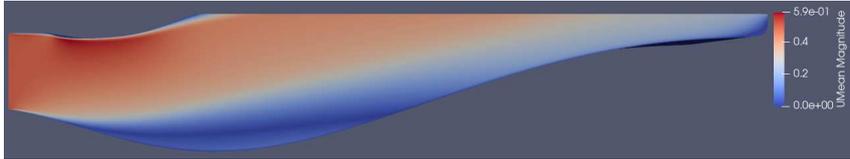
Η σύγκριση αρχικής και τελικής γεωμετρίας φαίνεται στο Σχήμα 3.40, και τα πεδία του μέτρου ταχύτητας που τους αντιστοιχούν στο Σχήμα 3.39. Οι μετρικές παρουσιάζονται στον Πίνακα 3.9 και η κατανομή των κάθετων ταχυτήτων στην έξοδο στο Σχήμα 3.41.



Σχήμα 3.38: Περίπτωση 201: Δημιουργία και παραμετροποίηση γεωμετρίας με 2 καμπύλες Bezier.



(α') Πριν τη βελτιστοποίηση: $J = 0.00392400[m^2/s^2]$.



(β') Μετά τη βελτιστοποίηση (με Bezier): $J = 0.00022502[m^2/s^2]$.

Σχήμα 3.39: Περίπτωση 201: Πεδία μέτρου ταχύτητας.

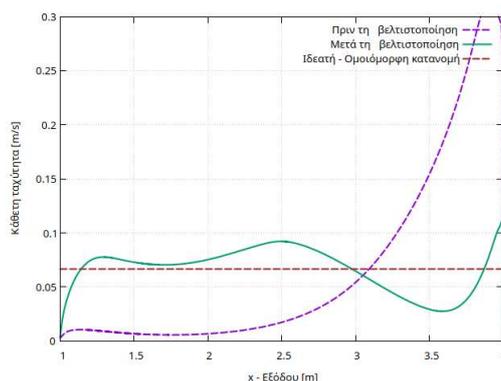


Σχήμα 3.40: Περίπτωση 201: Περίγραμμα αγωγού πριν (άσπρο), μετά τη βελτιστοποίηση A (πράσινο) και μετά τη βελτιστοποίηση B (πορτοκαλί).

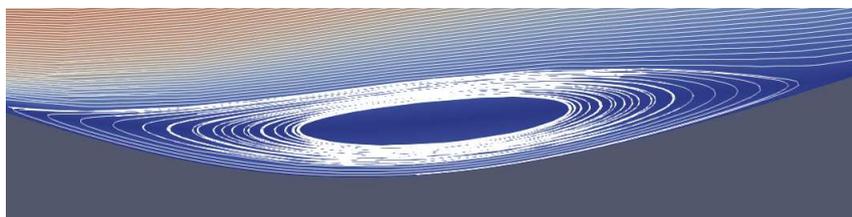
Πίνακας 3.9: Περίπτωση 201: Μετρικές (Μετρική για (αν)ομοιομορφία κάθετης ταχύτητας στην έξοδο (Αντικειμενική συνάρτηση), Απώλειες ολικής πίεσης, Μετρική για κριτήριο εφαπτομενικής ταχύτητας). Σύγκριση με περίπτωση 101 η οποία είχε την ίδια παραμετροποίηση του κάτω τοιχώματος.

	$J[m^2/s^2]$	$p_{tLosses}[m^5/s^3]$	$C[m/s]$
Αναφοράς	0.00443464	0.00305292	0.31
Περίπτωση 101 (μετά τη βελτιστοποίηση)	0.00029558	0.00300115	0.327
Πριν τη βελτιστοποίηση	0.00392400	0.00180782	0.337
Μετά τη βελτιστοποίηση	0.00022502	0.00215187	0.322

Η αρχική γεωμετρία έχει αντικειμενική περίπου ίση με το 88% της τιμής της περίπτωσης αναφοράς. Για την τελική γεωμετρία (201opt) το ποσοστό πέφτει στο 5% σε σχέση με την περίπτωση αναφοράς. Οι απώλειες πίεσης μειώνονται αρκετά και η μετρική για την εφαπτομενική ταχύτητα είναι αποδεκτή και στις 2 γεωμετρίες. Παραμένει καλύτερη γεωμετρία η 103optA με τιμή στο 1.1% της περίπτωσης αναφοράς. Σημειώνεται, ότι σε σχέση με την 101opt στην οποία κατέληξε η ίδια παραμετροποίηση του κάτω τοιχώματος (αλλά χωρίς αλλαγή του άνω), η 201opt έχει 20% μικρότερη αντικειμενική συνάρτηση.



Σχήμα 3.41: Περίπτωση 201: Σύγκριση κατανομών της κάθετης ταχύτητας στην έξοδο.



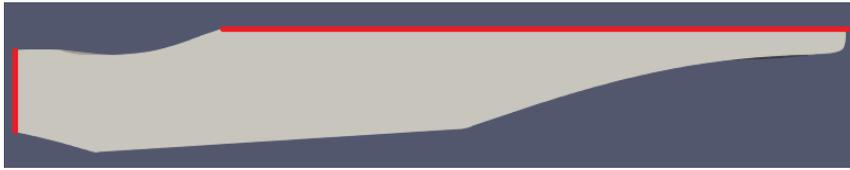
Σχήμα 3.42: Περίπτωση 201: Γραμμές ροής κοντά στο κάτω τοίχωμα.

Στη βελτιστοποιημένη γεωμετρία, κοντά στο κάτω τοίχωμα παρατηρείται αποκόλληση και αναστροφή της ροής (Σχήμα 3.42).

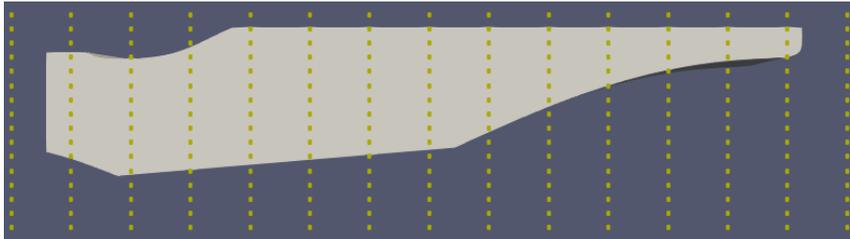
3.3.2 Περίπτωση 202

Παίρνοντας ως βάση τη 201opt, προστίθεται ένα ευθύγραμμο τμήμα ως στερεό όριο, ενδιάμεσα στο κάτω τοίχωμα του αγωγού (Σχήμα 3.43), ώστε να εξαφανιστεί η περιοχή όπου παρατηρούνταν έντονη αποκόλληση και αναστροφή της ροής. Η παραμετροποίηση γίνεται με κουτιά μορφοποίησης από ογκομετρικές B-Splines (Σχήμα 3.44).

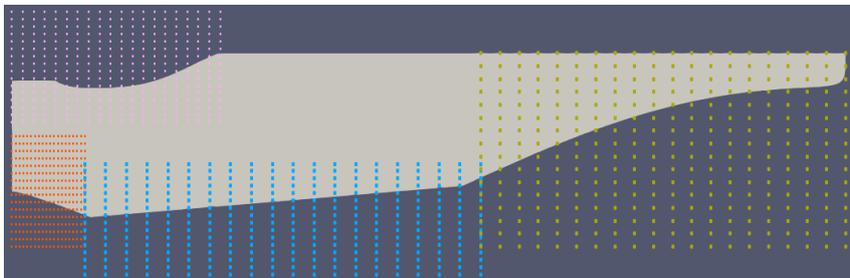
Η σύγκριση αρχικής και τελικής γεωμετρίας φαίνεται στο Σχήμα 3.46, τα πεδία του μέτρου ταχύτητας που τους αντιστοιχούν στο Σχήμα 3.45. Οι μετρικές παρουσιάζονται στον Πίνακα 3.10 και η κατανομή των κάθετων ταχυτήτων στην έξοδο στο Σχήμα 3.47.



Σχήμα 3.43: Περίπτωση 202: Δημιουργία γεωμετρίας εμπνευσμένη από τη βελτιστοποιημένη γεωμετρία της περίπτωσης 201.

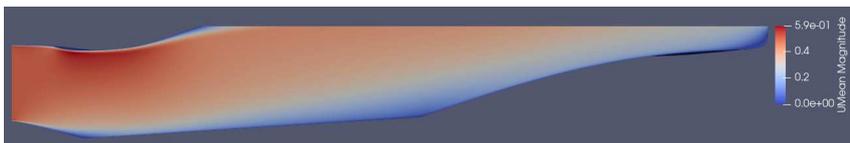


(α') Για τη βελτιστοποίηση A: 1 κουτί μορφοποίησης.

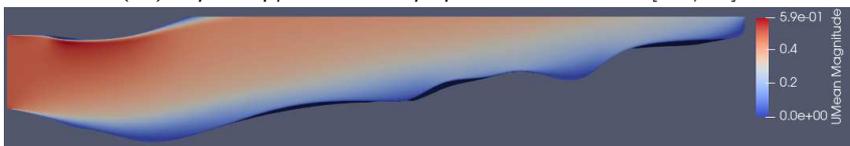


(β') Για τη βελτιστοποίηση B: 4 κουτιά μορφοποίησης.

Σχήμα 3.44: Περίπτωση 202: Παραμετροποίηση γεωμετρίας.



(α') Πριν τη βελτιστοποίηση: $J = 0.00026806[m^2/s^2]$.

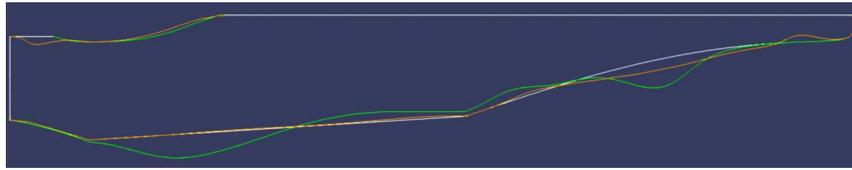


(β') Μετά τη βελτιστοποίηση A (με 1 κουτί μορφοποίησης): $J = 0.00012414[m^2/s^2]$.



(γ') Μετά τη βελτιστοποίηση B (με 4 κουτιά μορφοποίησης): $J = 1.22476e - 05[m^2/s^2]$.

Σχήμα 3.45: Περίπτωση 202: Πεδία μέτρου ταχύτητας.

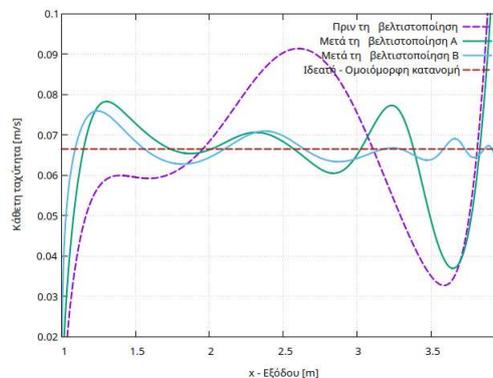


Σχήμα 3.46: Περίπτωση 202: Περίγραμμα αγωγού πριν (άσπρο), μετά τη βελτιστοποίηση A (πράσινο) και μετά τη βελτιστοποίηση B (πορτοκαλί).

Πίνακας 3.10: Περίπτωση 202: Μετρικές (Μετρική για (αν)ομοιομορφία κάθετης ταχύτητας στην έξοδο (Αντικειμενική συνάρτηση), Απώλειες ολικής πίεσης, Μετρική για κριτήριο εφαπτομενικής ταχύτητας).

	$J[m^2/s^2]$	$p_{tLosses}[m^5/s^3]$	$C[m/s]$
Αναφοράς	0.00443464	0.00305292	0.31
Πριν τη βελτιστοποίηση	0.00026806	0.00162998	0.342
Μετά τη βελτιστοποίηση A	0.00012414	0.00172138	0.34
Μετά τη βελτιστοποίηση B	1.22476e-05	0.00303491	0.356

Οι τελικές γεωμετρίες έχουν τιμές αντικειμενικής συνάρτησης στο 2.7% της τιμής της περίπτωσης αναφοράς με τη βελτιστοποίηση A, και στο 0.27% με τη βελτιστοποίηση B. Και οι 2 γεωμετρίες ικανοποιούν το κριτήριο για την εφαπτομενική ταχύτητα και η 202optB (Σχήμα 3.45 (γ')) είναι η καλύτερη ως εδώ.

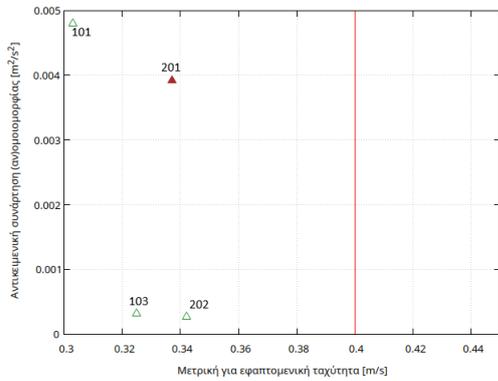


Σχήμα 3.47: Περίπτωση 202: Σύγκριση κατανομών της κάθετης ταχύτητας στην έξοδο.

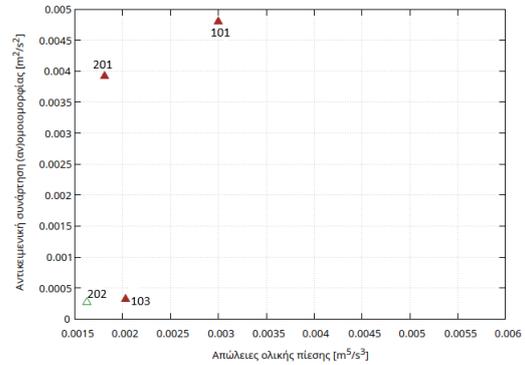
3.3.3 Σύγκριση αποτελεσμάτων

Οι περιπτώσεις που αλλάζει και το άνω τοίχωμα, γενικά οδηγούν σε καλύτερα αποτελέσματα, αλλά υλοποιούνται με μεγαλύτερο κατασκευαστικό κόστος. Η καλύτερη αποδεκτή ως εδώ περίπτωση είναι η 202optB (Σχήμα 3.45 (γ')), όπως φαίνεται στα μέτωπα μη-κυριαρχούμενων λύσεων του Σχήματος 3.48.

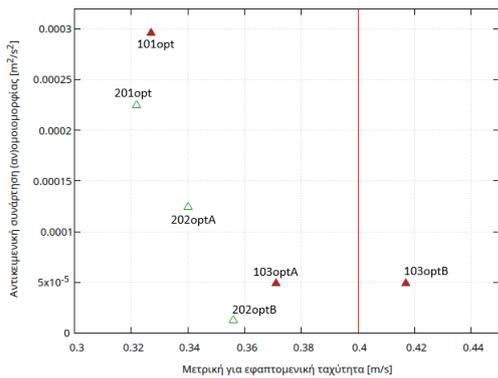
Στο Σχήμα 3.49 παρουσιάζονται τα διανύσματα της ταχύτητας για την καλύτερη γεω-



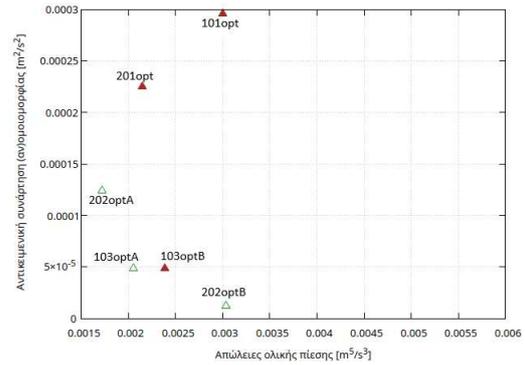
(α') Διάγραμμα με άξονες $C - J$. Χωρίς βελτιστοποίηση.



(β') Διάγραμμα με άξονες $p_{tLosses} - J$. Χωρίς βελτιστοποίηση.



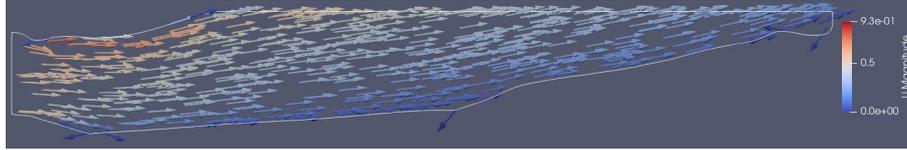
(γ') Διάγραμμα με άξονες $C - J$. Με βελτιστοποίηση.



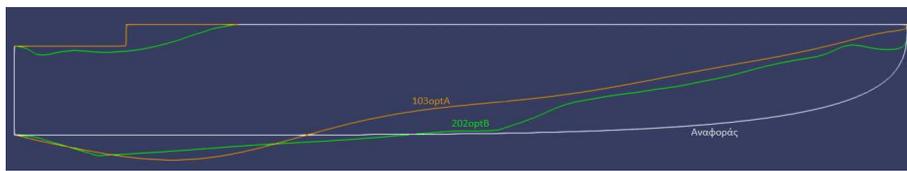
(δ') Διάγραμμα με άξονες $p_{tLosses} - J$. Με βελτιστοποίηση.

Σχήμα 3.48: Περιπτώσεις 201 και 202: Μέτωπα μη κυριαρχούμενων λύσεων στους χώρους που αφορούν τη μετρική για την εραπτομενική ταχύτητα και τις απώλειες ολικής πίεσης (συμπεριλαμβάνεται για σύγκριση και η περίπτωση 101 η οποία έχει ίδιο κάτω τοίχωμα με την 201, και η περίπτωση 103 ως η καλύτερη της προηγούμενης ενότητας). Με πράσινο-άδειο τρίγωνο είναι οι περιπτώσεις που ανήκουν στο μέτωπο μη-κυριαρχούμενων λύσεων. Χρησιμοποιούνται οι δείκτες $opt(Y)$ για τις βελτιστοποιημένες περιπτώσεις με $Y = \{A, B\}$ σε περιπτώσεις που εφαρμόζονται 2 διαφορετικές βελτιστοποιήσεις. Η κόκκινη γραμμή στα διαγράμματα (α') και (γ') αναπαριστά το κριτήριο για την εραπτομενική ταχύτητα στην έξοδο.

μετρία αυτής της ενότητας, και στο Σχήμα 3.50 συγκρίνονται οι καλύτερες γεωμετρίες ως εδώ.



Σχήμα 3.49: Περίπτωση 108 (γεωμετρία με βελτιστοποίηση B): Προσανατολισμός διανυσμάτων ταχύτητας με χρωματική διαβάθμιση για το μέτρο της.



Σχήμα 3.50: Σύγκριση περιγραμμάτων αγωγού για τις 2 καλύτερες ως εδώ αποδεκτές γεωμετρίες (103optA και 202optB).

3.4 Περιπτώσεις εισαγωγής διατάξεων στροφής ροής στο εσωτερικό του αγωγού

Κρίνεται γόνιμη η εισαγωγή διατάξεων στροφής ροής στο εσωτερικό του αγωγού, οι οποίες θα τείνουν να προσανατολίσουν τη ροή κατακόρυφα. Τα κριτήρια επιλογής της γεωμετρίας στην οποία εισάγονται οι διατάξεις στροφής ροής είναι

- να υπάρχει σχετικά αρκετός διαθέσιμος χώρος, ώστε αυτές να μπορούν να βελτιώσουν σημαντικά την ομοιομορφία στην έξοδο,
- να μην είναι ήδη αρκετά πολύπλοκη, ώστε το κόστος κατασκευής να είναι εντός ρεαλιστικών πλαισίων.

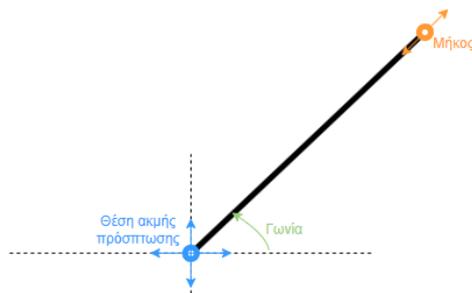
Βάσει αυτών επιλέγεται η 101opt (Σχήμα 3.51). Τα στοιχεία¹ των διατάξεων στροφής ροής που εισάγονται, αρχικά είναι ευθύγραμμα τμήματα πάχους $t = 0.01[m]$, ώστε να είναι εύκολα υλοποιήσιμα κατασκευαστικά.

Λόγω των άπειρων πιθανών συνδυασμών θέσης, μήκους, προσανατολισμού (γωνίας) και αριθμού στοιχείων μιας διάταξης στροφής ροής, είναι αδύνατο να δοκιμαστούν όλοι. Επιλέγεται ένας συνδυασμός ως βάση και εξετάζονται συνδυασμοί όπου οι τρεις πρώτες προαναφερθείσες παράμετροι διαφέρουν λίγο από τον συνδυασμό βάσης. Ωστόσο κατά την αναζήτηση γύρω από τον συνδυασμό βάσης, η γένεση πλέγματος για κάθε συνδυασμό θα αύξανε σημαντικά το υπολογιστικό κόστος. Αντ' αυτού για μια δεδομένη

¹Η ορολογία ακμή εκφυγής και ακμή πρόσπτωσης, υιοθετείται συμβατικά σαν τα στοιχεία να ήταν ευθύγραμμα τμήματα, στο μισό του πάχους.



Σχήμα 3.51: Επιλεγμένη γεωμετρία προς εισαγωγή διατάξεων στροφής ροής από Σχήμα 3.10 (β'). Με διακεκομμένες είναι τα στοιχεία μιας πιθανής διάταξης στροφής ροής.



Σχήμα 3.52: Παράμετροι στοιχείου διάταξης στροφής ροής.

μετατόπιση των κόμβων που αντιστοιχούν στο στερεό όριο της διάταξης, προσαρμόζεται το πλέγμα του αρχικού συνδυασμού επιλύοντας μια διαφορική εξίσωση Laplace για την μετατόπιση.

Οι μετατοπίσεις των κόμβων υπολογίζονται, θεωρώντας τα στοιχεία μιας διάταξης στροφής ροής ως άκαμπτα σώματα, επιδεχόμενα, ανάλογα με την παράμετρο που αλλάζει (Σχήμα 3.52), 3 εικονικές κινήσεις:

1. Περιστροφή αλλάζοντας τη γωνία,
2. Μεταφορά μετακινώντας τη θέση ακμής πρόσπτωσης,
3. Επέκταση (ή συρρίκνωση) μετακινώντας την ακμή εκφυγής, στη διεύθυνση του στοιχείου της διάταξης.

Σημειώνεται ότι η μέθοδος αυτή δεν ενδείκνυται για εξέταση συνδυασμών με μεγάλες διαφορές (από τον συνδυασμό βάσης) στις παραμέτρους, διότι το αρχικό πλέγμα παραμορφώνεται για να προσαρμοστεί, και μετά από κάποιο όριο, ενδέχεται να γίνει ακατάλληλο για την πρόλεξη της ροής.

Τέλος, επιλέγονται οι 2 καλύτεροι συνδυασμοί κάθε περίπτωσης και βελτιστοποιούνται, περιορίζοντας σημαντικά έτσι το συνολικό υπολογιστικό κόστος, καθώς βελτιστοποιούνται μόνο οι καλύτεροι συνδυασμοί παραμέτρων¹. Στις περιπτώσεις που χρησιμοποιούνται καμπύλες Bezier για την παραμετροποίηση, αυτές είναι καμπύλες, οι οποίες

¹Ωστόσο, όπως σχολιάζεται και παρακάτω, καλύτερη αντικειμενική συνάρτηση μιας αρχικοποίησης στη βελτιστοποίηση, δεν συνεπάγεται καλύτερα αποτελέσματα για τη βελτιστοποίηση

αρχικά είναι ευθείες, στο μισό του πάχους κάθε στοιχείου της διάταξης που παραμετροποιείται. Έτσι, οι κόμβοι της πάνω και κάτω πλευράς μετακινούνται βάσει αυτών των καμπυλών και οι ακμές πρόσπτωσης και εκφυγής παραμένουν ακίνητες. Στις περιπτώσεις όπου χρησιμοποιούνται κουτιά μορφοποίησης, αυτά περιβάλλουν κάθε στοιχείο που παραμετροποιείται.

3.4.1 Περίπτωση 301

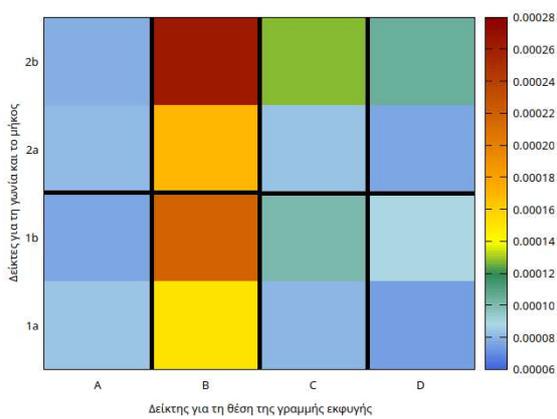
Στην περίπτωση αυτή, εισάγεται διάταξη στροφής ροής με 1 στοιχείο, και οι παράμετροι που αλλάζουν είναι η θέση της ακμής πρόσπτωσης, η γωνία και το μήκος του στοιχείου. Προκύπτουν 16 διαφορετικοί συνδυασμοί οι οποίοι παρουσιάζονται στον Πίνακα 3.11. Κάθε συνδυασμός ταυτοποιείται με έναν κωδικό XYZ όπου $X = \{A, B, C, D\}$ για τη θέση της ακμής πρόσπτωσης, $Y = \{1, 2\}$ για την γωνία του στοιχείου της διάταξης, και $Z = \{a, b\}$ για το μήκος του στοιχείου της διάταξης.

Πίνακας 3.11: Περίπτωση 301: Πιθανοί συνδυασμοί (16).

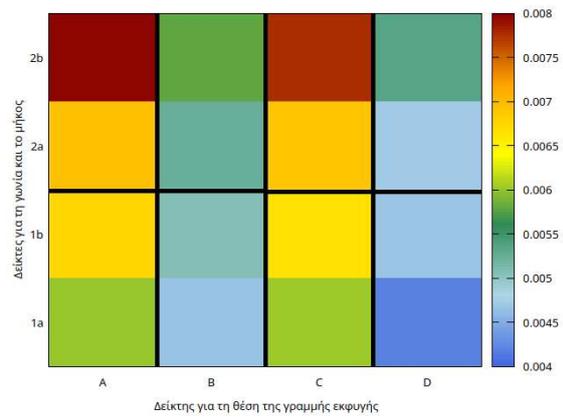
Συνδυασμός	Θέση ακμής πρόσπτωσης [m]	Γωνία θ [°]	Μήκος l [m]
$\underline{A}YZ$	$x = 0.85, y = -0.055$	εξαρτάται από Y	εξαρτάται από Z
$\underline{B}YZ$	$x = 1.05, y = -0.055$	εξαρτάται από Y	εξαρτάται από Z
$\underline{C}YZ$	$x = 0.95, y = -0.005$	εξαρτάται από Y	εξαρτάται από Z
$\underline{D}YZ$	$x = 0.85, y = -0.105$	εξαρτάται από Y	εξαρτάται από Z
$X\underline{1}Z$	εξαρτάται από X	45	εξαρτάται από Z
$X\underline{2}Z$	εξαρτάται από X	50	εξαρτάται από Z
$XY\underline{a}$	εξαρτάται από X	εξαρτάται από Y	0.21
$XY\underline{b}$	εξαρτάται από X	εξαρτάται από Y	0.24

Οι μετρικές για την περίπτωση αυτή, παρουσιάζονται χρησιμοποιώντας μια διαβάθμιση χρωμάτων στο Σχήμα 3.53. Υπενθυμίζεται ότι για όλες τις μετρικές επιδιώκονται όσο το δυνατόν μικρότερες τιμές.

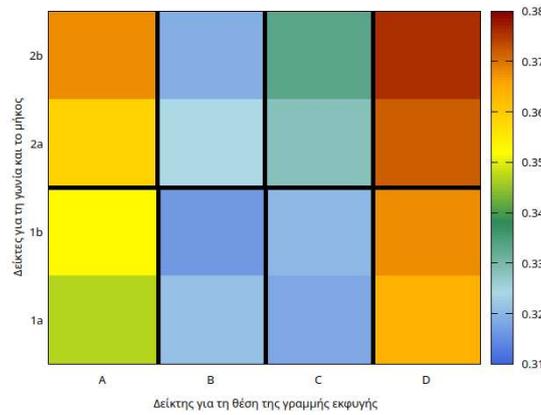
Οι δύο καλύτεροι συνδυασμοί ($A1b$ και $D1a$) βελτιστοποιούνται παραμετροποιώντας με καμπύλες Bezier από 3 CPs για κάθε στοιχείο, για τη βελτιστοποίηση A. Για τη βελτιστοποίηση B η παραμετροποίηση γίνεται με κουτιά μορφοποίησης από ογκομετρικές B-Splines. Τα πεδία μέτρου ταχύτητας για τις αρχικές και τελικές γεωμετρίες με τις δύο καλύτερες διατάξεις $A1b$ και $D1a$ παρουσιάζονται στα Σχήματα 3.54 και 3.55 αντίστοιχα. Σύγκριση αρχικών και βελτιστοποιημένων διατάξεων γίνεται στα Σχήματα 3.56 (α') και (β'), και σύγκριση μεταξύ των δύο καλύτερων με ίσια στοιχεία στο Σχήμα 3.56 (γ'). Οι μετρικές των δύο καλύτερων διατάξεων παρουσιάζονται στον Πίνακα 3.12 και οι κατανομές των κάθετων ταχυτήτων στην έξοδο στο Σχήμα 3.57.



(α') Μετρική για (αν)ομοιομορφία κάθετης ταχύτητα στην έξοδο (Αντικειμενική συνάρτηση).



(β') Απώλειες ολικής πίεσης.

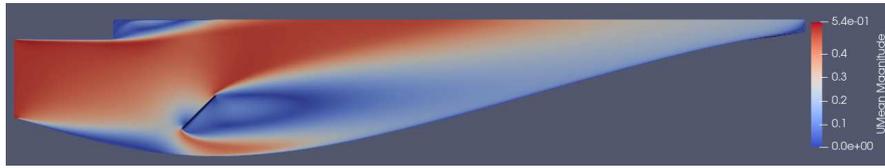


(γ') Μετρική για κριτήριο εφαιτομενικής ταχύτητας.

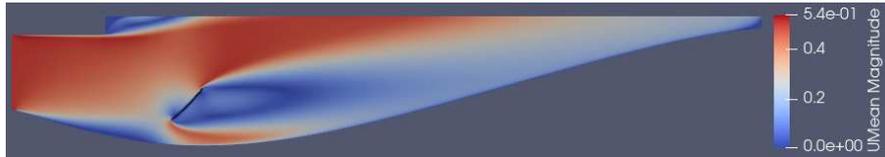
Σχήμα 3.53: Περίπτωση 301: Χρωματική διαβάθμιση για τις μετρικές των 16 πιθανών συνδυασμών.

Πίνακας 3.12: Περίπτωση 301: Μετρικές (Μετρική για (αν)ομοιομορφία κάθετης ταχύτητας στην έξοδο (Αντικειμενική συνάρτηση), Απώλειες ολικής πίεσης, Μετρική για κριτήριο εφαιτομενικής ταχύτητας) των 2 καλύτερων συνδυασμών.

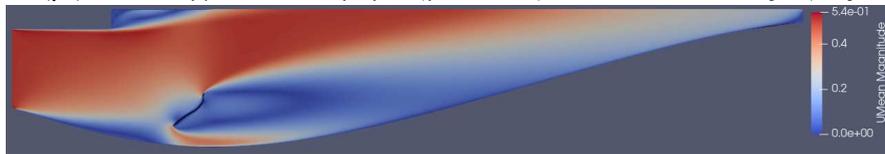
Συνδυασμός	$J[m^2/s^2]$	$p_{tLosses}[m^5/s^3]$	$C[m/s]$
Αναφοράς	0.00443464	0.00305292	0.31
Αδειος αγωγός	0.00029558	0.00300115	0.327
A1b	7.514e-05	0.00694531	0.353
A1b βελτιστοποιημένος με Bezier	7.4369e-05	0.00695842	0.354
A1b βελτιστοποιημένος με κουτί μορφοποίησης	6.3685e-05	0.00658372	0.378
D1a	7.3608e-05	0.00417162	0.364
D1a βελτιστοποιημένος με Bezier	7.2078e-05	0.00414939	0.362
D1a βελτιστοποιημένος κουτί μορφοποίησης	6.8657e-05	0.00447495	0.359



(α') Πριν τη βελτιστοποίηση: $J = 7.514e - 05[m^2/s^2]$.

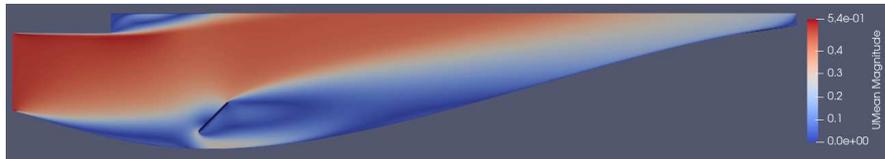


(β') Μετά τη βελτιστοποίηση A (με Bezier): $J = 7.4369e - 05[m^2/s^2]$.

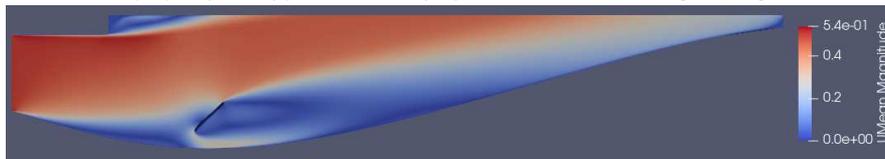


(γ') Μετά τη βελτιστοποίηση B (με Vol. B-Splines): $J = 6.3685 - 05[m^2/s^2]$.

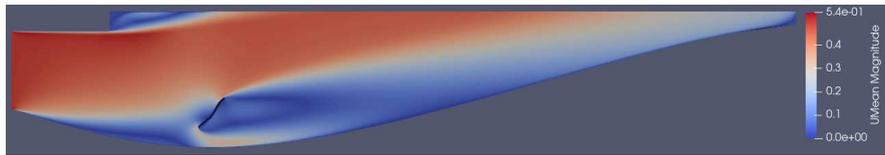
Σχήμα 3.54: Περίπτωση 301 - Συνδυασμός A1b: Πεδία μέτρου ταχύτητας.



(α') Πριν τη βελτιστοποίηση: $J = 7.3608e - 05[m^2/s^2]$.

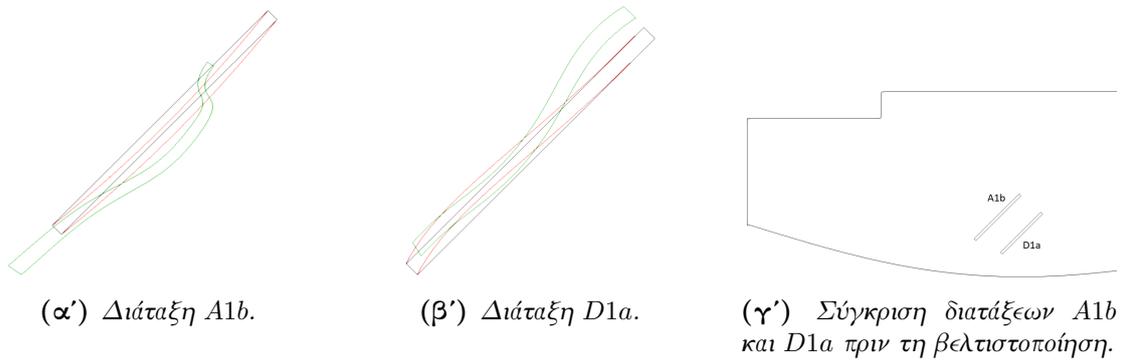


(β') Μετά τη βελτιστοποίηση A (με Bezier): $J = 7.2078e - 05[m^2/s^2]$.

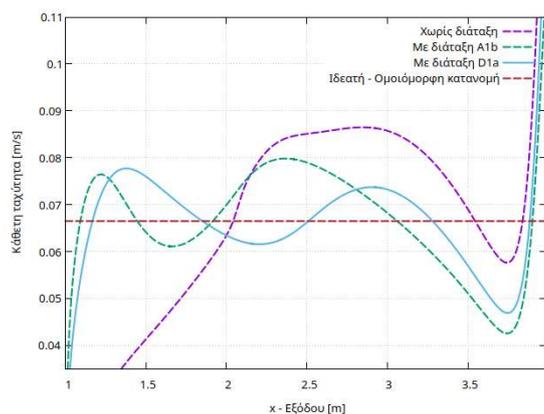
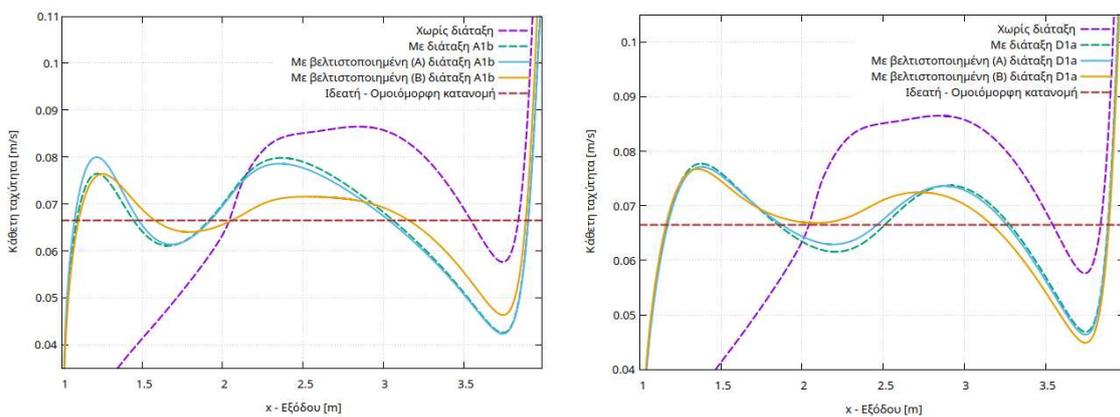


(γ') Μετά τη βελτιστοποίηση B (με Vol. B-Splines): $J = 6.8657e - 05[m^2/s^2]$.

Σχήμα 3.55: Περίπτωση 301 - Συνδυασμός D1a: Πεδία μέτρου ταχύτητας.



Σχήμα 3.56: Περίπτωση 301: Διατάξεις A1b και D1a. Στα σχήματα (α') και (β') το μαύρο περίγραμμα είναι πριν τη βελτιστοποίηση, το κόκκινο μετά από βελτιστοποίηση με Bezier και το πράσινο μετά από βελτιστοποίηση με κουτιά μορφοποίησης.



(γ') Σύγκριση ίσων στοιχείων μεταξύ A1b και D1a.

Σχήμα 3.57: Περίπτωση 301: Σύγκριση κατανομών της κάθετης ταχύτητας στην έξοδο.

3.4.2 Περίπτωση 302

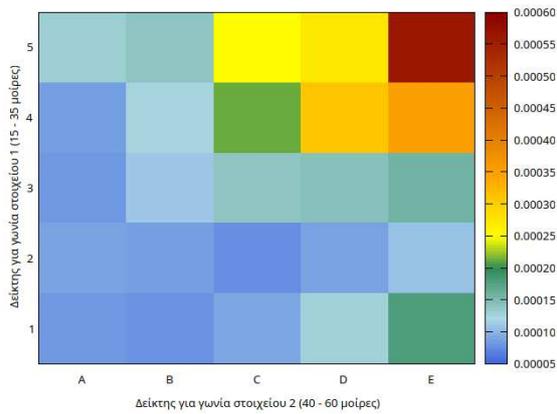
Στην περίπτωση αυτή, δοκιμάζονται διατάξεις με παραπάνω στοιχεία (2), ώστε να μελετηθεί και η εξάρτηση των αποτελεσμάτων από τον αριθμό των στοιχείων. Επειδή με 2 στοιχεία ο αριθμός των δυνατών συνδυασμών αυξάνεται αρκετά, η θέση των ακμών πρόσπτωσης και τα μήκη των στοιχείων παραμένουν σταθερά και οι μόνες παράμετροι που αλλάζουν είναι οι γωνίες τους, εγείροντας 25 διαφορετικούς συνδυασμούς (Πίνακας 3.13). Για το στοιχείο 1, οι συντεταγμένες της ακμής πρόσπτωσης είναι $x = 0.85[m]$ και $y = -0.005[m]$ και το μήκος του $l_1 = 0.32[m]$. Για το στοιχείο 2, οι συντεταγμένες της ακμής πρόσπτωσης είναι $x = 0.65[m]$ και $y = 0.175[m]$ και το μήκος του $l_2 = 0.21[m]$. Κάθε συνδυασμός ταυτοποιείται με έναν κωδικό XY όπου $X = \{A, B, C, D, E\}$ για την γωνία του στοιχείου 2 της διάταξης, $Y = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ για την γωνία του στοιχείου 1 της διάταξης.

Πίνακας 3.13: Περίπτωση 302: Πιθανοί συνδυασμοί (25).

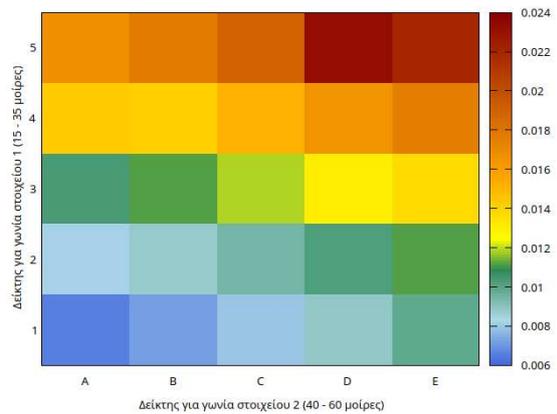
Συνδυασμός	Γωνία θ_1 [°]	Γωνία θ_2 [°]
<u>AY</u>	εξαρτάται από Y	40
<u>BY</u>	εξαρτάται από Y	45
<u>CY</u>	εξαρτάται από Y	50
<u>DY</u>	εξαρτάται από Y	55
<u>EY</u>	εξαρτάται από Y	60
<u>X1</u>	15	εξαρτάται από X
<u>X2</u>	20	εξαρτάται από X
<u>X3</u>	25	εξαρτάται από X
<u>X4</u>	30	εξαρτάται από X
<u>X5</u>	35	εξαρτάται από X

Οι μετρικές για την περίπτωση αυτή παρουσιάζονται χρησιμοποιώντας μια διαβάθμιση χρωμάτων στο Σχήμα 3.58.

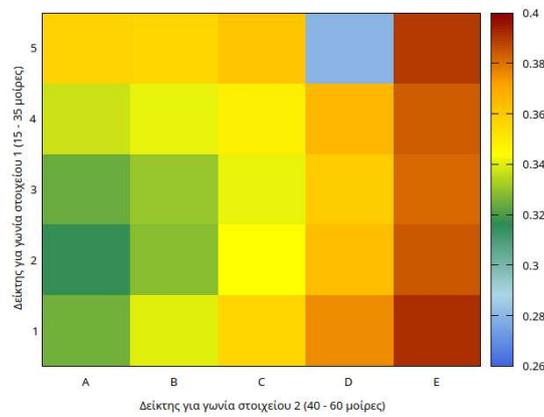
Οι δύο καλύτεροι συνδυασμοί ($B1$ και $C2$) βελτιστοποιούνται παραμετροποιώντας με καμπύλες Bezier από 3 CPs για κάθε στοιχείο. Τα πεδία μέτρου ταχύτητας για τις αρχικές και τελικές γεωμετρίες με τις δύο καλύτερες διατάξεις $B1$ και $C2$ παρουσιάζονται στα Σχήματα 3.59 και 3.60 αντίστοιχα. Σύγκριση αρχικών και βελτιστοποιημένων διατάξεων γίνεται στα Σχήματα 3.61 (α') και (β'), και σύγκριση μεταξύ των δύο καλύτερων με ίσια στοιχεία στο Σχήμα 3.61 (γ'). Οι μετρικές των δύο καλύτερων διατάξεων παρουσιάζονται στον Πίνακα 3.14 και οι κατανομές των κάθετων ταχυτήτων στην έξοδο στο Σχήμα 3.62.



(α') Μετρική για (αν)ομοιομορφία κάθετης ταχύτητας στην έξοδο (Αντικειμενική συνάρτηση)

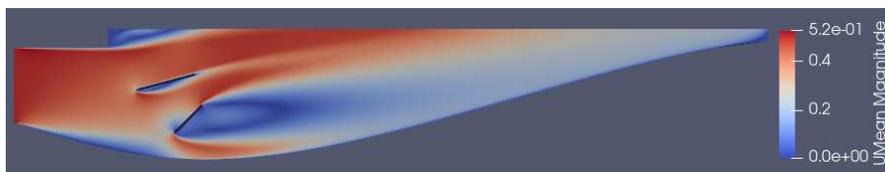


(β') Απώλειες ολικής πίεσης

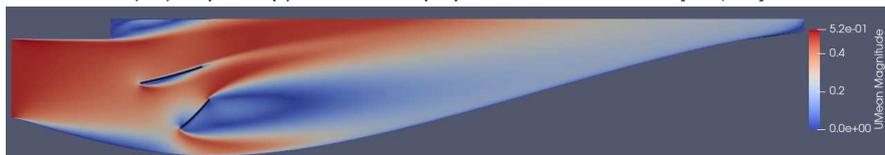


(γ') Μετρική για κριτήριο εφαπτομενικής ταχύτητας

Σχήμα 3.58: Περίπτωση 302: Χρωματική διαβάθμιση για τις μετρικές των 25 πιθανών συνδυασμών.

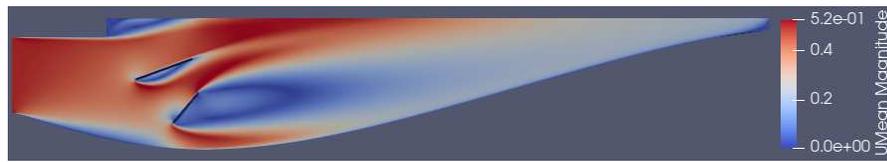


(α') Πριν τη βελτιστοποίηση: $J = 7.6289e - 05[m^2/s^2]$.

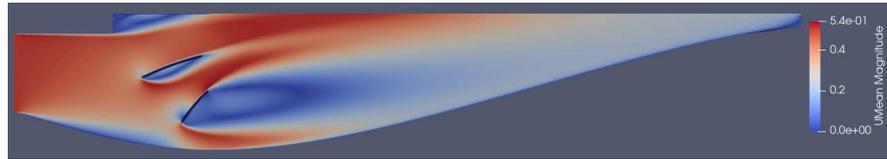


(β') Μετά τη βελτιστοποίηση (με Bezier): $J = 7.21313e - 05[m^2/s^2]$.

Σχήμα 3.59: Περίπτωση 302 - Συνδυασμός B1: Πεδία μέτρου ταχύτητας.



(α') Πριν τη βελτιστοποίηση: $J = 7.3844e - 05[m^2/s^2]$.

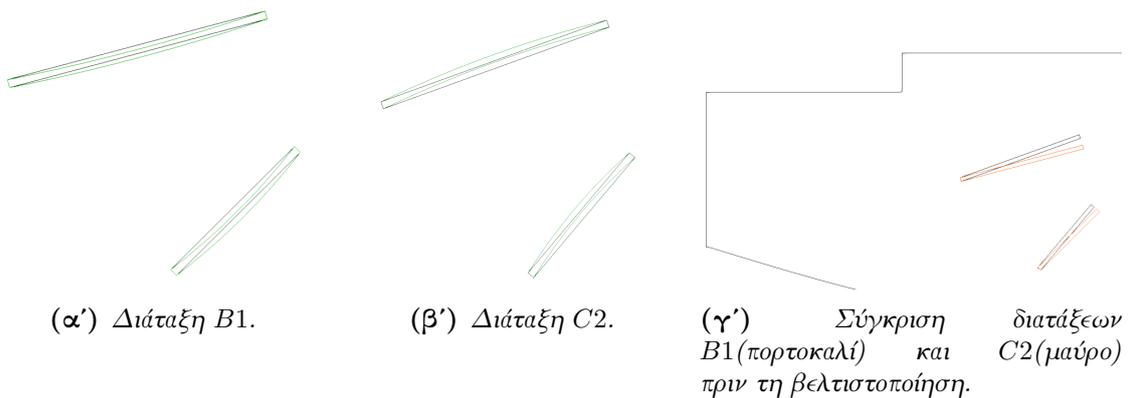


(β') Μετά τη βελτιστοποίηση A (με Bezier): $J = 6.4513e - 05[m^2/s^2]$.

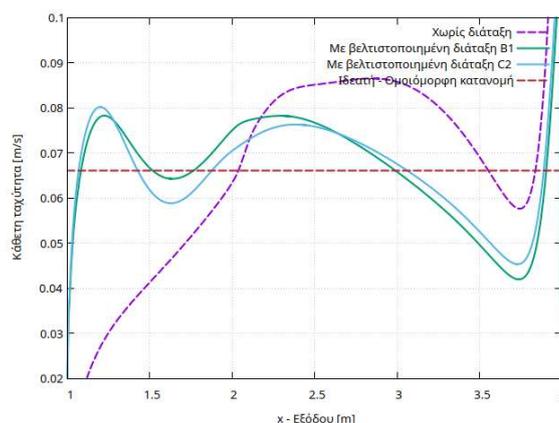
Σχήμα 3.60: Περίπτωση 302 - Συνδυασμός C2: Πεδία μέτρου ταχύτητας.

Πίνακας 3.14: Περίπτωση 302: Μετρικές (Μετρική για (αν)ομοιομορφία κάθετης ταχύτητας στην έξοδο (Αντικειμενική συνάρτηση), Απώλειες ολικής πίεσης, Μετρική για κριτήριο εφαπτομενικής ταχύτητας) των 2 καλύτερων συνδυασμών

Συνδυασμός	$J[m^2/s^2]$	$p_{tLosses}[m^5/s^3]$	$C[m/s]$
Αναφοράς	0.00443464	0.00305292	0.31
Αδειος αγωγός	0.00029558	0.00300115	0.327
B1	7.6289e-05	0.00710250	0.321
B1 βελτιστοποιημένος με Bezier	7.21313e-05	0.00725092	0.337
C2	7.3844e-05	0.00937536	0.32
C2 βελτιστοποιημένος με Bezier	6.4513e-05	0.00917249	0.348



Σχήμα 3.61: Περίπτωση 302: Διατάξεις B1 και C2. Στα σχήματα (α') και (β') το μαύρο περίγραμμα είναι πριν τη βελτιστοποίηση και το πράσινο μετά από βελτιστοποίηση με Bezier.

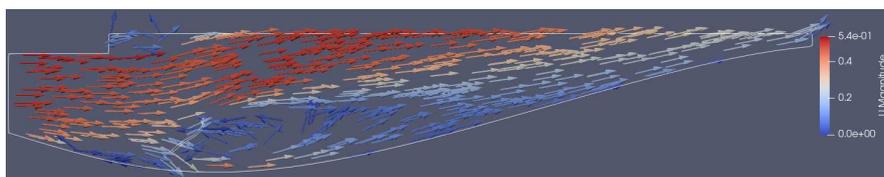


Σχήμα 3.62: Περίπτωση 302: Σύγκριση κατανομών της κάθετης ταχύτητας στην έξοδο.

3.4.3 Σύγκριση αποτελεσμάτων

Η χρήση καμπυλών Bezier για την παραμετροποίηση οδηγεί σε στοιχεία με τελικές γεωμετρίες με σχετικά χαμηλό κατασκευαστικό κόστος, καθώς το πάχος τους παραμένει σταθερό και οι ακμές πρόσπτωσης και εκφυγής ακίνητες. Αντιθέτως, η χρήση κουτιών μορφοποίησης από ογκομετρικές B-Splines οδηγεί σε στοιχεία με τελικές γεωμετρίες με μεταβλητό πάχος και μετακινεί την ακμή πρόσπτωσης και εκφυγής. Έτσι, προκύπτουν γεωμετρίες με καλύτερα αποτελέσματα, αλλά πιο δύσκολη υλοποίηση.

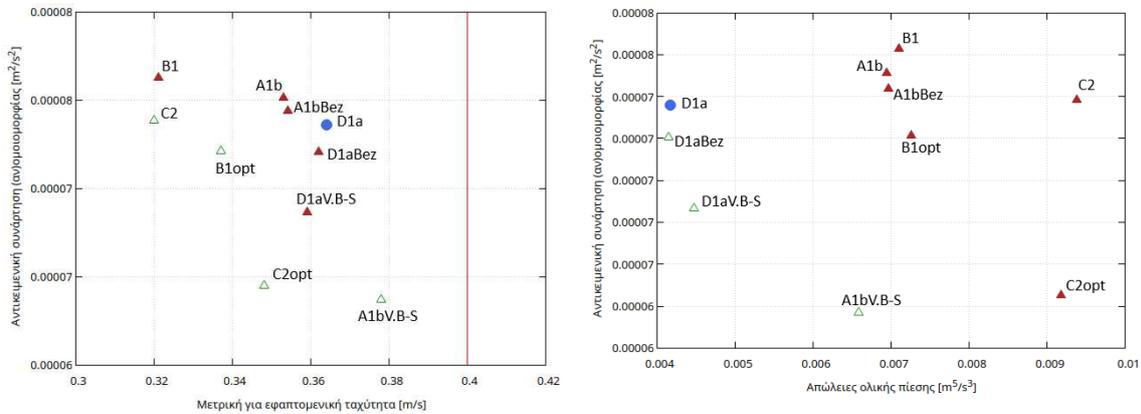
Στις περιπτώσεις 301 και 302 η προσθήκη διατάξεων μειώνει την αντικειμενική συνάρτηση σχεδόν κατά 75% σε σχέση με τον αγωγό χωρίς καμία διάταξη (101opt). Ωστόσο, παρά τη σημαντική βελτίωση των αποτελεσμάτων για την αντικειμενική συνάρτηση περίπου στο 1.5 – 1.6% της τιμής της αρχικής γεωμετρίας αναφοράς, η καλύτερη ως εδώ περίπτωση παραμένει η 202optB με τιμή 0.27% της τιμής της περίπτωσης αναφοράς (Σχήμα 3.45 (γ')).



Σχήμα 3.63: Περίπτωση 301 - Διάταξη A1b (βελτιστοποιημένη με κουτί μορφοποίησης από ογκομετρικές B-Splines): Προσανατολισμός διανυσμάτων ταχύτητας με χρωματική διαβάθμιση για το μέτρο της.

Για δεδομένες αρχικοποιήσεις των υπόλοιπων παραμέτρων τους, μεγαλύτερος αριθμός στοιχείων στη διάταξη δεν οδηγεί σε καλύτερα αποτελέσματα, ενώ συνοδεύονται από μεγαλύτερες απώλειες πίεσης. Βάσει των Σχημάτων 3.53 και 3.58 μικρότερες γωνίες και μικρότερα μήκη φαίνεται να οδηγούν σε καλύτερα αποτελέσματα. Ωστόσο, αυτή

η συμπεριφορά εξαρτάται αρκετά από την επιλογή της θέσης της ακμής πρόσπτωσης. Επίσης, στα ίδια σχήματα παρατηρούνται διαφορές της τάξης του 10^{-4} για διαφορετικούς συνδυασμούς παραμέτρων, ενώ οι διαφορές των καλύτερων συνδυασμών πριν και μετά τη βελτιστοποίηση είναι της τάξης του 10^{-5} . Έτσι, φαίνεται ότι είναι πιο σημαντική η εύρεση των βέλτιστων παραμέτρων κάθε στοιχείου, παρά η βελτιστοποίηση αυτού. Ωστόσο, η επιλογή του καλύτερου συνδυασμού παραμέτρων για ίσια στοιχεία, δεν συνεπάγεται απαραίτητα και καλύτερα αποτελέσματα μετά τη βελτιστοποίηση, καθώς υπάρχει πιθανότητα εγκλωβισμού σε τοπικό ακρότατο. Ο συνδυασμός *D1a* είναι καλύτερος από τον *A1b*, όταν τα στοιχεία είναι ίσια, αλλά μετά τη βελτιστοποίηση με κουτιά μορφοποίησης από ογκομετρικές B-Splines η σχέση αυτή αντιστρέφεται. Στο Σχήμα 3.63 παρουσιάζονται τα διανύσματα της ταχύτητας για την καλύτερη γεωμετρία αυτής της ενότητας, βάσει των μέτωπων μη-κυριαρχούμενων λύσεων (Σχήμα 3.64).



(α') Διάγραμμα με άξονες $C - J$.

(β') Διάγραμμα με άξονες $p_{tLosses} - J$.

Σχήμα 3.64: Περιπτώσεις 301 και 302: Μέτωπα μη κυριαρχούμενων λύσεων στους χώρους που αφορούν τη μετρική για την εφαπτομενική ταχύτητα και τις απώλειες ολικής πίεσης. Με πράσινο-άδειο τρίγωνο είναι οι γεωμετρίες που ανήκουν στο μέτωπο μη-κυριαρχούμενων λύσεων. Με μπλε-κύκλο είναι η καλύτερη περίπτωση για διατάξεις με ίσια στοιχεία. Χρησιμοποιούνται οι δείκτες *Ref* για την περίπτωση αναφοράς, *opt*(*Y*) για τις βελτιστοποιημένες περιπτώσεις. Ο δείκτης *Bez* υποδηλώνει βελτιστοποίηση χρησιμοποιώντας καμπύλες *Bezier* και ο δείκτης *V.B-S* υποδηλώνει βελτιστοποίηση χρησιμοποιώντας κουτιά μορφοποίησης από ογκομετρικές *B-Splines*. Η κόκκινη γραμμή στο διάγραμμα (α') αναπαριστά το κριτήριο για την εφαπτομενική ταχύτητα στην έξοδο.

Κεφάλαιο 4

Εφαρμογή βελτιστοποίησης τοπολογίας (TopO)

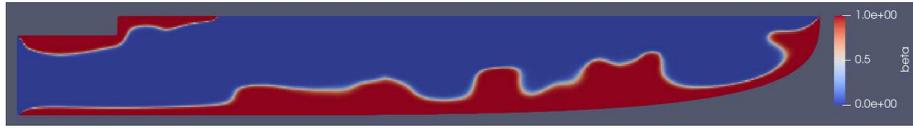
Από τις τελευταίες περιπτώσεις του προηγούμενου κεφαλαίου διαπιστώθηκε, ότι η ύπαρξη διατάξεων στροφής ροής στο εσωτερικό του αγωγού, διαδραματίζει αρκετά σημαντικό ρόλο στην ομοιομορφία στην έξοδο. Ωστόσο, στις περιπτώσεις 301 και 302, η επιλογή παραμέτρων αυτών βασιζόταν στην παρατήρηση και τη διαίσθηση, και πιθανόν να μην ήταν η βέλτιστη, από τους άπειρους συνδυασμούς που υπάρχουν. Αν αντ' αυτού χρησιμοποιηθεί TopO, υπάρχει αφενός δυνατότητα αλλαγής του αριθμού των στοιχείων, και αφετέρου η δυνατότητα ανάδυσης αρκετά διαφορετικών μορφών από αυτές των στοιχείων των περιπτώσεων 301 και 302.

Στην TopO, όσον αφορά το φιλτραρισμένο πεδίο πορώδους $\tilde{\alpha}$ στην Εξ. 2.11, αυτό αρχικοποιείται στο εσωτερικό του αγωγού και τίθεται οριακή συνθήκη, είτε μοναδιαία Dirichlet ($\tilde{\alpha} = 1$), είτε μηδενική Neumann ($\frac{\partial \tilde{\alpha}}{\partial x_j} n_j = 0$). Στην πρώτη περίπτωση για την οριακή συνθήκη, η διεπιφάνεια μεταξύ ρευστού και στερεού (FSI) εκβάλλει από τα όρια του υπολογιστικού χωρίου. Αντιθέτως στη δεύτερη, ευνοείται ο σχηματισμός νησίδων στερεού στο εσωτερικό του αγωγού. Η προσέγγιση βασιζόμενη στην αδιαπερατότητα (Density-Based) συνοδεύεται από μια παθογένεια σχετικά με τις οριακές συνθήκες στη διεπιφάνεια ρευστού-στερεού, και έτσι σε όλες τις περιπτώσεις μετά το πέρας της TopO, η πρόλεξη και αξιολόγηση των ροών για τους υποψήφιους σχεδιασμούς γίνεται σε οριόδετα πλέγματα, κατασκευασμένα εκ νέου.

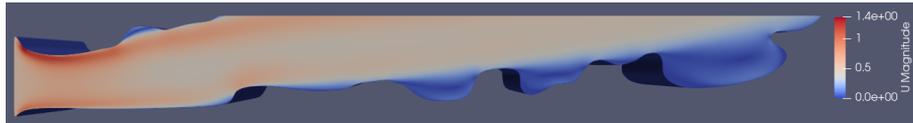
4.1 Περίπτωση 400

Στην περίπτωση αυτή, για τον υπάρχοντα αρχικό σχεδιασμό του αγωγού εφαρμόζεται TopO. Τίθεται μοναδιαία Dirichlet στα όρια για την Εξ. 2.11, σχηματίζοντας περίπλοκες μορφές τοιχωμάτων, τα οποία ο αλγόριθμος ShpO θα χρειαζόταν αρκετά μεγάλο αριθμό μεταβλητών σχεδιασμού για να τις δημιουργήσει, παραμορφώνοντας σημαντικά και το αρχικό πλέγμα. Η αρχική συνθήκη για την ίδια εξίσωση είναι $\tilde{\alpha} = 0$ (παντού

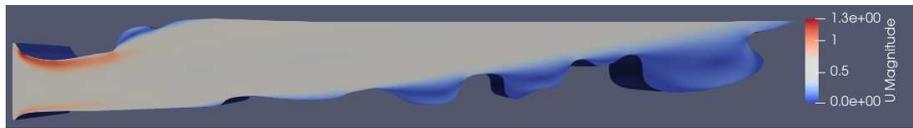
ρευστό) και η ακτίνα της $r = 10$.



Σχήμα 4.1: Περίπτωση 400: Πεδίο β μετά από TopO.



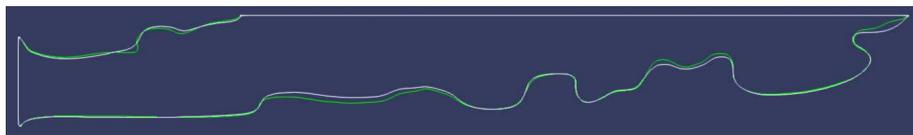
(α') Με TopO (πρόλεξη σε νέο πλέγμα): $J = 0.00017729[m^2/s^2]$.



(β') Με TopO και έπειτα ShpO (με 1 κουτί μορφοποίησης): $J = 5.1383e - 05[m^2/s^2]$.

Σχήμα 4.2: Περίπτωση 400: Πεδία μέτρου ταχύτητας.

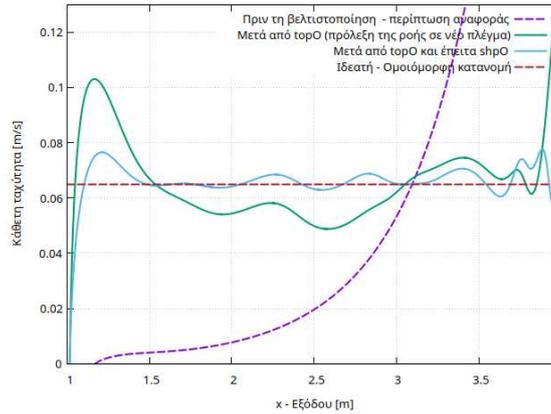
Στο Σχήμα 4.1 φαίνεται το πεδίο β μετά την TopO. Στην τελική γεωμετρία (σε νέο πλέγμα) εφαρμόζεται επιπλέον ShpO, χρησιμοποιώντας ένα κουτί μορφοποίησης από ογκομετρικές B-Splines. Τα πεδία μέτρου ταχύτητας μετά τις δύο βελτιστοποιήσεις παρουσιάζονται στο Σχήμα 4.2, ενώ στο Σχήμα 4.3 συγκρίνονται τα περιγράμματα του αγωγού μετά τις δύο βελτιστοποιήσεις. Τέλος, στον Πίνακα 4.1 παρουσιάζονται οι μετρικές της περίπτωσης με την αντικειμενική συνάρτηση να πέφτει στο 3.8% της τιμής αναφοράς μετά από TopO, και στο 1.1% όταν ακολουθείται από ShpO. Ωστόσο, οι απώλειες ολικής πίεσης αυξάνονται σχεδόν κατά μια τάξη μεγέθους ενώ το κριτήριο για την εφαπτομενική ταχύτητα δεν ικανοποιείται.



Σχήμα 4.3: Περίπτωση 400: Περιγράμματα αγωγού μόνο με TopO με άσπρο και με πράσινο μετά από TopO και έπειτα ShpO.

Πίνακας 4.1: Περίπτωση 400: Μετρικές (Μετρική για (αν)ομοιομορφία κάθετης ταχύτητας στην έξοδο (Αντικειμενική συνάρτηση), Απώλειες ολικής πίεσης, Μετρική για κριτήριο εφαπτομενικής ταχύτητας).

	$J[m^2/s^2]$	$p_{tLosses}[m^5/s^3]$	$C[m/s]$
Αναφοράς	0.00443464	0.00305292	0.31
Μετά από TopO (νέο πλέγμα)	0.00017729	0.0251509	0.458
Μετά από TopO και έπειτα ShpO	5.1383e-05	0.0245419	0.431



Σχήμα 4.4: Περίπτωση 400: Σύγκριση κατανομών της κάθετης ταχύτητας στην έξοδο.

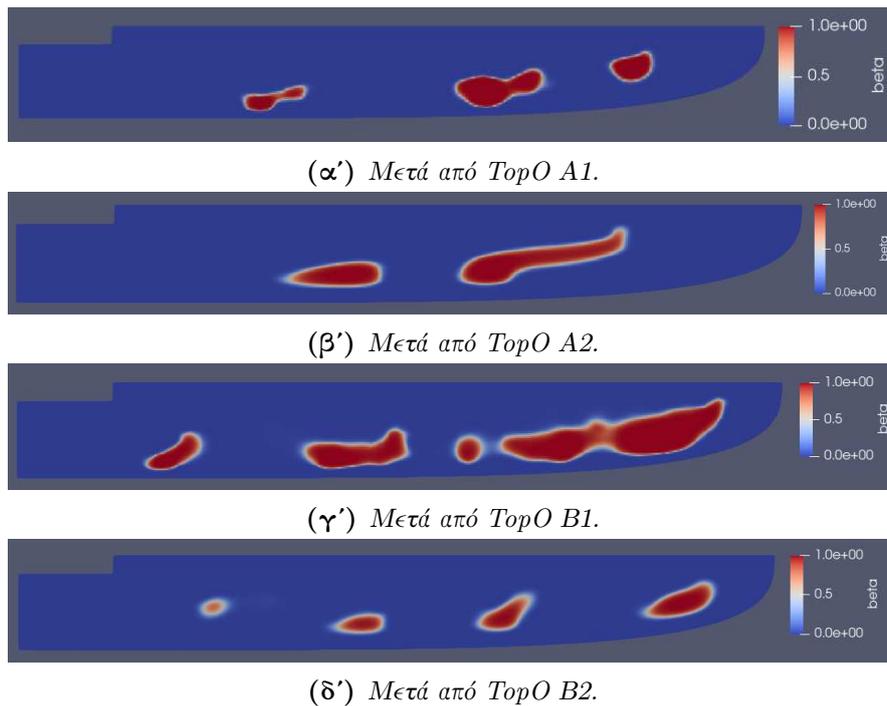
4.2 Περίπτωση 401

Στην περίπτωση αυτή, για την υπάρχουσα γεωμετρία (περίπτωση αναφοράς) τίθεται μηδενική Neumann στα όρια του υπολογιστικού χωρίου για την Εξ. 2.11. Προκειμένου να μελετηθεί το πώς επηρεάζουν τα αποτελέσματα κάποιοι παράμετροι βελτιστοποίησης, κάθε συνδυασμός (παραμέτρων βελτιστοποίησης) ταυτοποιείται με έναν κωδικό XY , όπου $X = \{A, B\}$ ανάλογα με την αρχικοποίηση της Εξ. 2.11, και $Y = \{1, 2\}$ ανάλογα με την ακτίνα r στην ίδια εξίσωση. Εξετάζονται 4 διαφορετικοί συνδυασμοί οι οποίοι παρουσιάζονται στον Πίνακα 4.2. Οι μεγάλες σχετικά τιμές της ακτίνας r (οι τυπικές τιμές είναι $r = 5, 10$) επιλέγονται προς αποφυγή σχηματισμού μεγάλου αριθμού μικρών νησίδων και συσσωμάτωση, ώστε τα στοιχεία στροφής ροής που αυτές αναπαριστούν, να είναι κατασκευαστικά ρεαλιστικά.

Πίνακας 4.2: Περίπτωση 401: Πιθανοί συνδυασμοί (4).

Συνδυασμός	Αρχικοποίηση πεδίου πορώδους	Ακτίνα $r[-]$
\underline{AY}	$\tilde{\alpha} = 0$	εξαρτάται από Y
\underline{BY}	$\tilde{\alpha} = 0.5$	εξαρτάται από Y
$X\underline{1}$	εξαρτάται από X	20
$X\underline{2}$	εξαρτάται από X	40

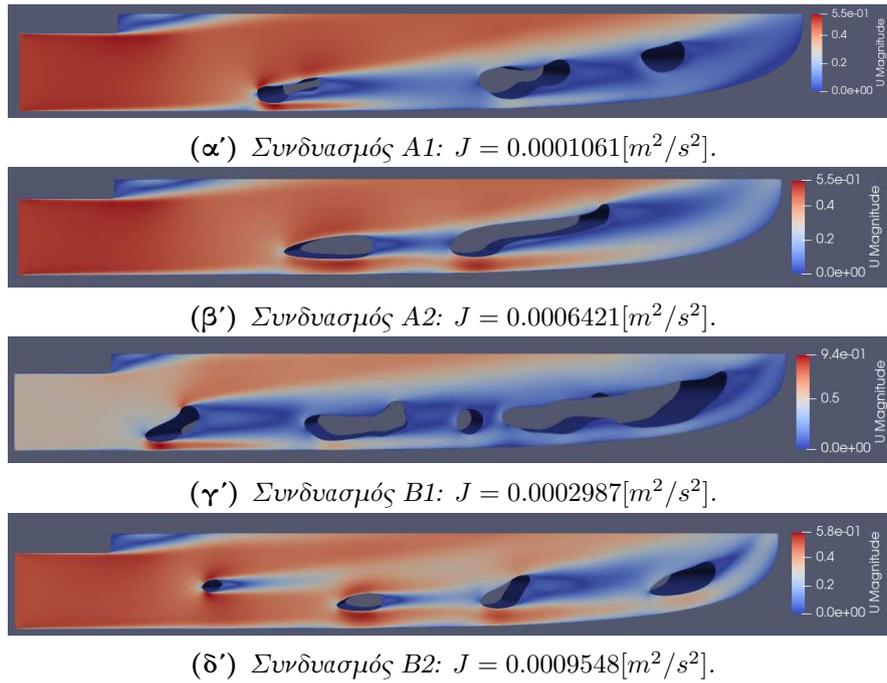
Στο Σχήμα 4.5 παρουσιάζονται τα πεδία β μετά το τέλος της TopO για τους 4 διαφορε-



Σχήμα 4.5: Περίπτωση 401: Πεδία β μετά από TopO.

τικούς συνδυασμούς παραμέτρων βελτιστοποίησης, ενώ στο Σχήμα 4.6 τα αντίστοιχα πεδία μέτρου ταχύτητας σε νέα πλέγματα. Οι γεωμετρίες αυτές βελτιστοποιούνται περαιτέρω ως προς τη μορφή τους (ShpO) παραμετροποιώντας με κουτιά μορφοποίησης από ογκομετρικές B-Splines, με 1 κουτί να περιβάλλει κάθε σχηματιζόμενη νησίδα. Στο Σχήμα 4.7 συγκρίνονται τα περιγράμματα των νησίδων πριν και μετά τη ShpO και στο Σχήμα 4.8 συγκρίνονται οι κατανομές της κάθετης ταχύτητας στην έξοδο μεταξύ των διάφορων συνδυασμών. Τέλος, στον Πίνακα 4.3 παρουσιάζονται οι μετρικές της περίπτωσης με τις τιμές της αντικειμενικής συνάρτησης να μειώνονται από 1 έως 2 τάξεις μεγέθους. Για τους δύο καλύτερους συνδυασμούς A1 και B1, οι τελικές τιμές της αντικειμενικής συνάρτησης είναι 0.88% και 0.46% αντίστοιχα, της τιμής αναφοράς, αλλά ο συνδυασμός B1 δεν ικανοποιεί το κριτήριο για την εφαπτομενική ταχύτητα.

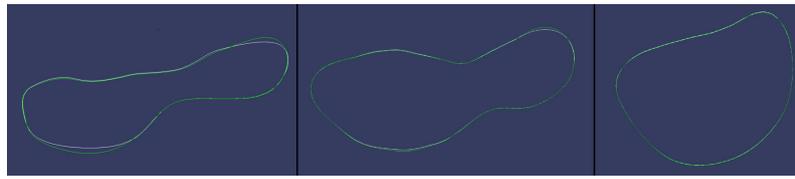
Αξιοσημείωτο είναι, ότι με τον συνδυασμό A1 επιτυγχάνεται μείωση αντικειμενικής συνάρτησης κατά 2 τάξεις μεγέθους, χωρίς να αλλάξουν τα τοιχώματα του αγωγού, παρά μόνο εισάγοντας τις νησίδες ως διατάξεις στροφής ροής. Βάσει του Πίνακα 4.3 φαίνεται μικρότερη ακτίνα r οδηγεί σε καλύτερα αποτελέσματα. Όσον αφορά την αρχικοποίηση του πεδίου πορώδους, μπορεί τα αποτελέσματα της TopO να είναι καλύτερα όταν η αρχικοποίηση είναι $\tilde{\alpha} = 0$, αλλά δεν ισχύει το ίδιο, όταν βελτιστοποιούνται περαιτέρω ως προς τη μορφή τους οι νησίδες που σχηματίζονται, οπότε δεν εξάγεται κάποιο αποτέλεσμα για το εάν κάποια από τις δύο αρχικοποιήσεις είναι καλύτερη, όταν η TopO ακολουθείται από ShpO. Ωστόσο, με την αρχικοποίηση $\tilde{\alpha} = 0.5$ επιταχύνεται σημαντικά η σύγκλιση της TopO (βλ. Σχήμα 4.17), γι' αυτό και υιοθετείται στις επόμενες περιπτώσεις.



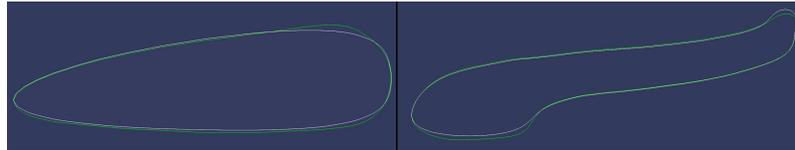
Σχήμα 4.6: Περίπτωση 401: Πεδία μέτρου ταχύτητας μετά από TopO (πρόλεξη των ροών σε νέα πλέγματα).

Πίνακας 4.3: Περίπτωση 401: Μετρικές (Μετρική για (αν)ομοιομορφία κάθετης ταχύτητας στην έξοδο (Αντικειμενική συνάρτηση), Απώλειες ολικής πίεσης, Μετρική για κριτήριο επαπτομενικής ταχύτητας).

Συνδυασμός	$J[m^2/s^2]$	$p_{tLosses}[m^5/s^3]$	$C[m/s]$
Αναφοράς	0.00443464	0.00305292	0.31
TopO A1	0.0001061	0.006195	0.378
TopO A2	0.0006421	0.006617	0.344
TopO B1	0.0002987	0.019373	0.529
TopO B2	0.0009548	0.009040	0.346
TopO A1 + ShpO	3.9264e-05	0.006145	0.38
TopO A2 + ShpO	0.0004064	0.006393	0.354
TopO B1 + ShpO	2.02816e-05	0.023453	0.535
TopO B2 + ShpO	0.0002034	0.010390	0.32



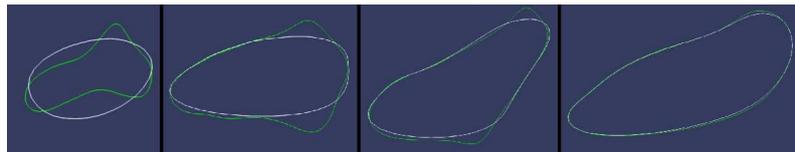
(α') Συνδυασμός A1.



(β') Συνδυασμός A2.

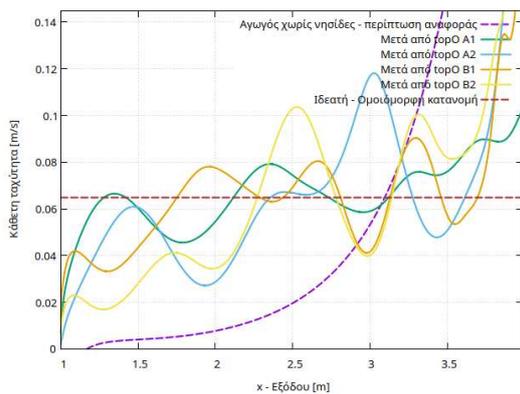


(γ') Συνδυασμός B1.

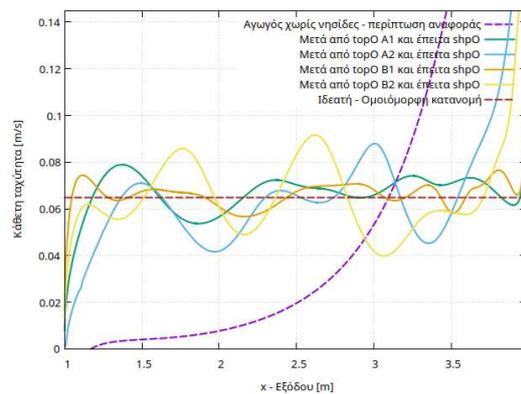


(δ') Συνδυασμός B2.

Σχήμα 4.7: Περίπτωση 401: Περιγράμματα νησίδων που σχηματίζονται με TopO (άσπρο) και των ίδιων νησίδων βελτιστοποιημένων περαιτέρω με ShpO (πράσινο).



(α') Μετά από TopO.



(β') Μετά από TopO και έπειτα ShpO.

Σχήμα 4.8: Περίπτωση 401: Σύγκριση κατανομών της κάθετης ταχύτητας στην έξοδο.

4.3 Περίπτωση 402

Στην περίπτωση αυτή και την επόμενη, εφαρμόζεται TopO στις καλύτερες 2 γεωμετρίες του Κεφαλαίου 3 (όπου εφαρμόστηκε μόνο ShpO). Εδώ εξετάζεται η γεωμετρία της 103optA. Εφαρμόζεται TopO με οριακή συνθήκη μηδενική *Neumann* στο όριο για την Εξ. 2.11 και αρχική $\tilde{\alpha} = 0.5$ στο εσωτερικό του. Η ακτίνα είναι $r = 20$ και εξετάζεται πως επηρεάζει τη βελτιστοποίηση ο περιορισμός:

$$C = \left(\frac{\int_{\Omega} \beta d\Omega}{\int_{\Omega} d\Omega} - \pi_{tar} \right) \frac{1}{\pi_{tar}} \quad (4.1)$$

ο οποίος αναπαριστά το ποσοστό του υπολογιστικού χωρίου που στερεοποιείται, όταν εφαρμόζεται TopO. Εφαρμόζονται 4 διαφορετικές βελτιστοποιήσεις. Αρχικά χωρίς τον περιορισμό 4.1, και έπειτα για τρεις διαφορετικές τιμές του $\pi_{tar} = \{5, 10, 15\}\%$. Έπειτα σε νέα πλέγματα, εφαρμόζονται ShpO παραμετροποιώντας με κουτιά μορφοποίησης από ογκομετρικές B-Splines με 1 κουτί να περιβάλλει κάθε σχηματιζόμενη νησίδα.



(α') Χωρίς περιορισμό.



(β') Με $\pi_{tar} = 5\%$.



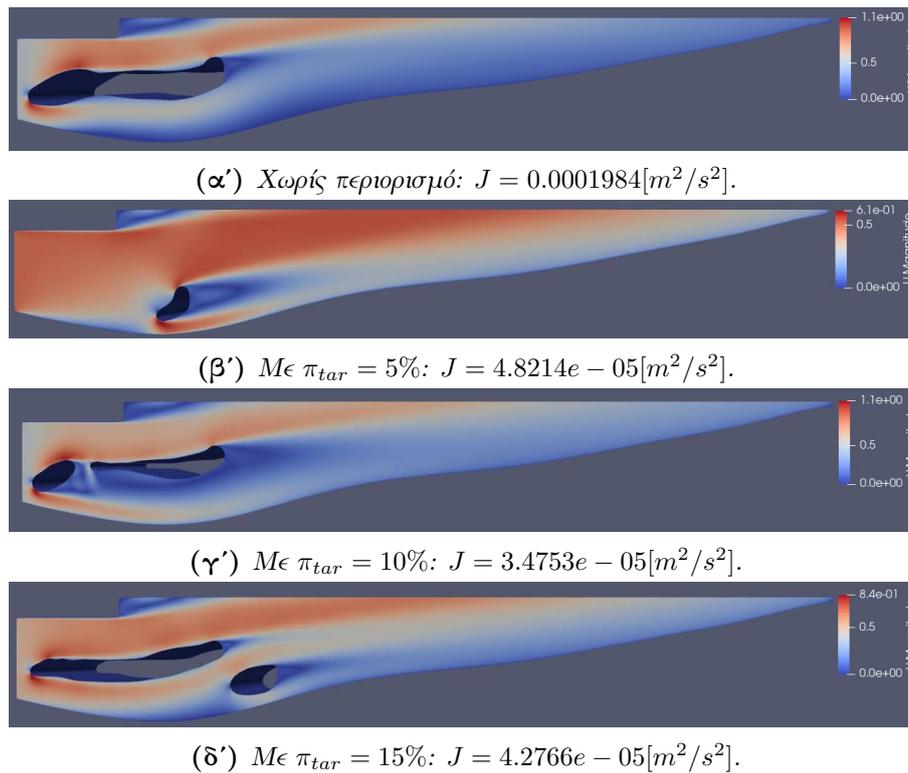
(γ') Με $\pi_{tar} = 10\%$.



(δ') Με $\pi_{tar} = 15\%$.

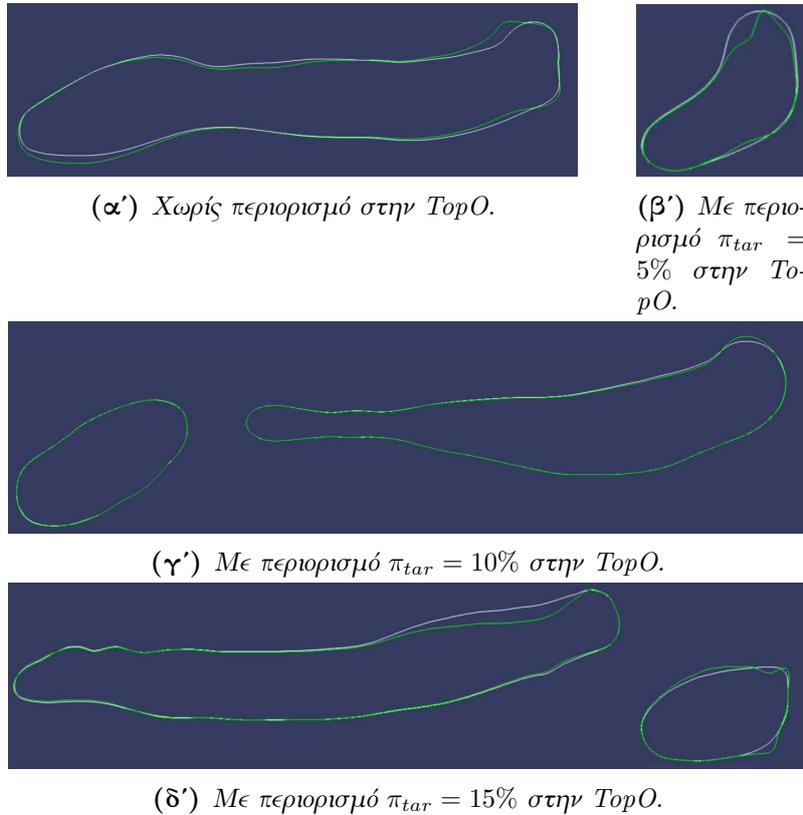
Σχήμα 4.9: Περίπτωση 402: Πεδία β μετά από TopO.

Στο Σχήμα 4.9 παρουσιάζονται τα πεδία β μετά το τέλος της TopO για τους 4 διαφορετικούς συνδυασμούς παραμέτρων βελτιστοποίησης, ενώ στο Σχήμα 4.10 τα αντίστοιχα πεδία μέτρου ταχύτητας σε νέα πλέγματα. Οι γεωμετρίες αυτές βελτιστοποιούνται περαιτέρω ως προς τη μορφή τους (ShpO) παραμετροποιώντας με κουτιά μορφοποίησης από ογκομετρικές B-Splines, με 1 κουτί να περιβάλλει κάθε σχηματιζόμενη νησίδα.



Σχήμα 4.10: Περίπτωση 402: Πεδία μέτρου ταχύτητας μετά από TopO (πρόλεξη των ροών σε νέα πλέγματα).

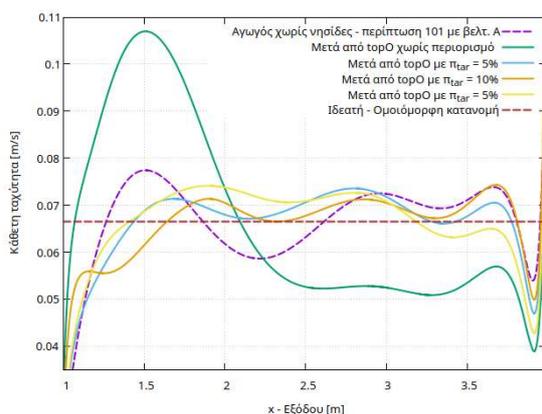
Στο Σχήμα 4.11 συγκρίνονται τα περιγράμματα των νησίδων πριν και μετά τη ShpO και στο Σχήμα 4.12 συγκρίνονται οι κατανομές της κάθετης ταχύτητας στην έξοδο μεταξύ των διάφορων συνδυασμών. Τέλος, στον Πίνακα 4.4 παρουσιάζονται οι μετρικές της περίπτωσης με τις τιμές της αντικειμενικής συνάρτησης να μειώνονται εν τέλει κατά 2 τάξεις μεγέθους. Η καλύτερη γεωμετρία της περίπτωσης είναι αυτή στην οποία εφαρμόστηκε περιορισμός με $\pi_{tar} = 10\%$ με τιμή αντικειμενικής συνάρτησης στο 0.89% της τιμής αναφοράς. Ωστόσο, δεν ικανοποιείται το κριτήριο για την εφαιπτομενική ταχύτητα σε καμία γεωμετρία της περίπτωσης.



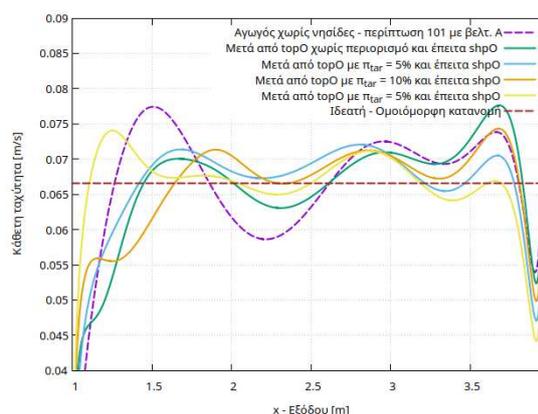
Σχήμα 4.11: Περίπτωση 402: Περιγράμματα νησίδων που σχηματίζονται με TopO (άσπρο) και των ίδιων νησίδων βελτιστοποιημένων περαιτέρω με ShpO (πράσινο).

Πίνακας 4.4: Περίπτωση 402: Μετρικές (Μετρική για (αν)ομοιομορφία κάθετης ταχύτητας στην έξοδο (Αντικειμενική συνάρτηση), Απώλειες ολικής πίεσης, Μετρική για κριτήριο εφαπτομενικής ταχύτητας).

Συνδυασμός	$J[m^2/s^2]$	$p_{tLosses}[m^5/s^3]$	$C[m/s]$
Αναφοράς	0.00443464	0.00305292	0.31
TopO χωρίς περιορισμό	0.0001984	0.02567	0.464
TopO με $\pi_{tar} = 5\%$	4.8214e-05	0.00707	0.424
TopO με $\pi_{tar} = 10\%$	3.4753e-05	0.02805	0.48
TopO με $\pi_{tar} = 15\%$	4.2766e-05	0.01288	0.473
TopO χωρίς περιορισμό + ShpO	4.8966e-05	0.0287	0.546
TopO με $\pi_{tar} = 5\%$ + ShpO	3.679e-05	0.0092	0.431
TopO με $\pi_{tar} = 10\%$ + ShpO	2.220e-05	0.0293	0.475
TopO με $\pi_{tar} = 15\%$ + ShpO	2.3217e-05	0.01411	0.466



(α') Μετά από TopO.



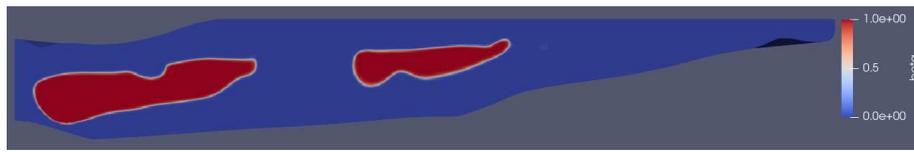
(β') Μετά από TopO και έπειτα ShpO.

Σχήμα 4.12: Περίπτωση 402: Σύγκριση κατανομών της κάθετης ταχύτητας στην έξοδο.

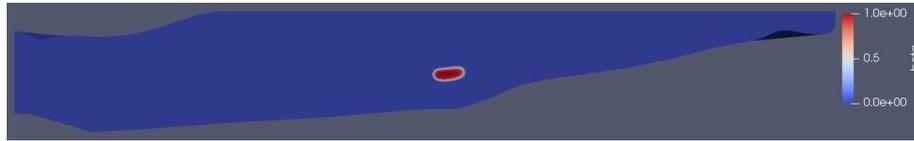
4.4 Περίπτωση 403

Η διαδικασία που ακολουθήθηκε στην προηγούμενη περίπτωση, ακολουθείται και εδώ για την γεωμετρία της περίπτωσης 202optB. Στο Σχήμα 4.13 παρουσιάζονται τα πεδία β μετά το τέλος της TopO για τους 4 διαφορετικούς συνδυασμούς παραμέτρων βελτιστοποίησης, ενώ στο Σχήμα 4.10 τα αντίστοιχα πεδία μέτρου ταχύτητας σε νέα πλέγματα. Οι γεωμετρίες αυτές βελτιστοποιούνται περαιτέρω ως προς τη μορφή τους (ShpO), παραμετροποιώντας με κουτιά μορφοποίησης από ογκομετρικές B-Splines, με 1 κουτί να περιβάλλει κάθε σχηματιζόμενη νησίδα. Στο Σχήμα 4.11 συγκρίνονται τα περιγράμματα των νησίδων πριν και μετά τη ShpO, και στο Σχήμα 4.12 συγκρίνονται οι κατανομές της κάθετης ταχύτητας στην έξοδο μεταξύ των διάφορων συνδυασμών. Τέλος, στον Πίνακα 4.4 παρουσιάζονται οι μετρικές της περίπτωσης με τις τιμές της αντικειμενικής συνάρτησης να μειώνονται κατά 2 τάξεις μεγέθους εν τέλει. Η μόνη αποδεκτή γεωμετρία της περίπτωσης (που ικανοποιεί το κριτήριο για την εφαπτομενική ταχύτητα) προκύπτει όταν τίθεται περιορισμός με $\pi_{tar} = 5\%$, που έχει τιμή αντικειμενικής συνάρτησης ίση με 0.45% της τιμής αναφοράς. Ωστόσο, είναι μεγαλύτερη από την τιμή που έχει ο αγωγός χωρίς νησίδες (0.27% της 202optB) ¹.

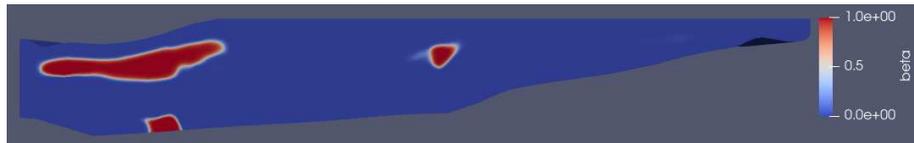
¹Η αρχικοποίηση του αλγορίθμου έγινε με $\tilde{\alpha} = 0.5$ και όχι με $\tilde{\alpha} = 0$, όπου τότε η αρχικοποίηση θα ήταν ταυτοτικά ίδια με την 202optB και κατά πάσα πιθανότητα η TopO δεν θα εμφάνιζε νησίδες, στην περίπτωση χωρίς περιορισμό. Η ύπαρξη του περιορισμού για το ποσοστό στερεοποίησης, ανάγκασε τον αλγόριθμο να εμφανίσει νησίδες.



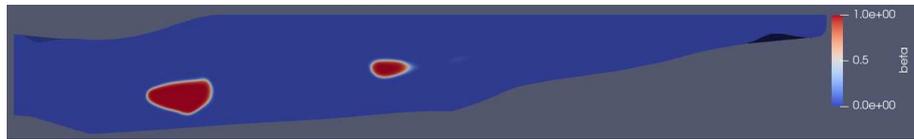
(α') Χωρίς περιορισμό.



(β') Με $\pi_{tar} = 5\%$.

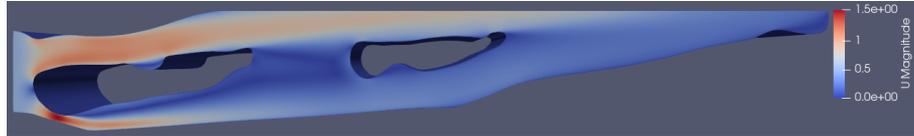


(γ') Με $\pi_{tar} = 10\%$.

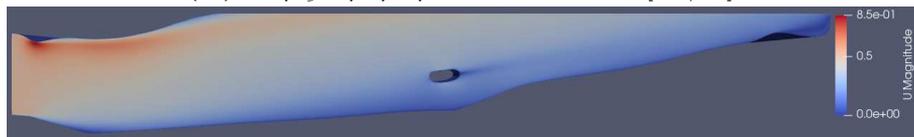


(δ') Με $\pi_{tar} = 15\%$.

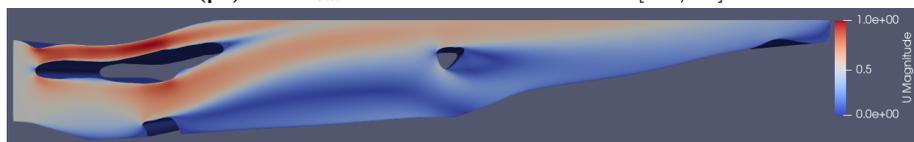
Σχήμα 4.13: Περίπτωση 403: Πεδία β μετά από TopO.



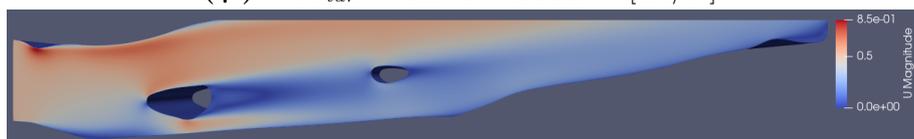
(α') Χωρίς περιορισμό: $J = 0.00056169[m^2/s^2]$.



(β') Με $\pi_{tar} = 5\%$: $J = 3.1283e - 05[m^2/s^2]$.

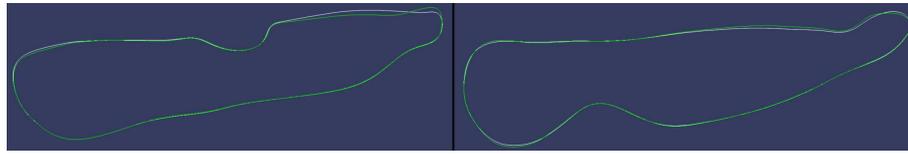


(γ') Με $\pi_{tar} = 10\%$: $J = 0.0007121[m^2/s^2]$.

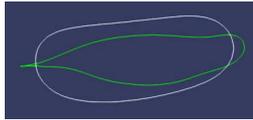


(δ') Με $\pi_{tar} = 15\%$: $J = 5.2709e - 05[m^2/s^2]$.

Σχήμα 4.14: Περίπτωση 403: Πεδία μέτρου ταχύτητας μετά από TopO (πρόλεξη των ροών σε νέα πλέγματα).



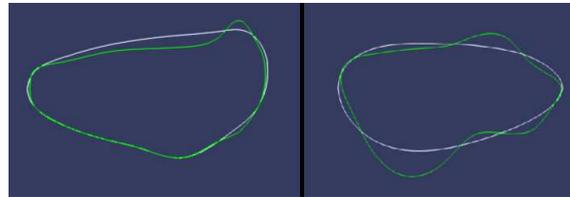
(α') Χωρίς περιορισμό στην TopO.



(β') Με περιορισμό $\pi_{tar} = 5\%$ στην TopO.



(γ') Με περιορισμό $\pi_{tar} = 10\%$ στην TopO.

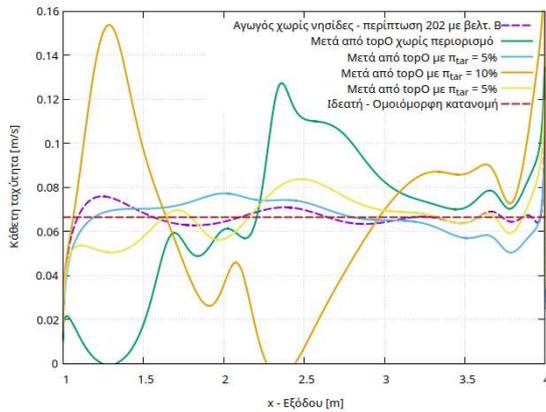


(δ') Με περιορισμό $\pi_{tar} = 15\%$ στην TopO.

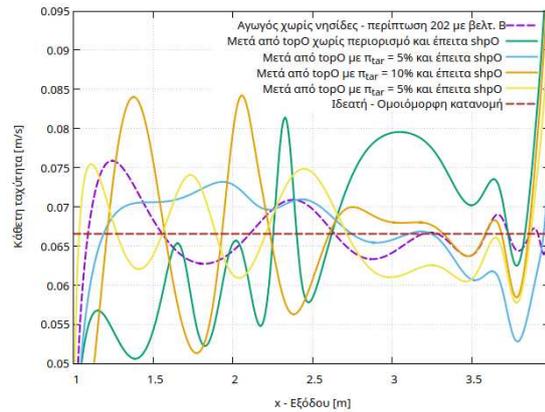
Σχήμα 4.15: Περίπτωση 403: Περιγράμματα νησίδων που σχηματίζονται με TopO (άσπρο) και των ίδιων νησίδων βελτιστοποιημένων περαιτέρω με ShpO (πράσινο).

Πίνακας 4.5: Περίπτωση 403: Μετρικές (Μετρική για (αν)ομοιομορφία κάθετης ταχύτητας στην έξοδο (Αντικειμενική συνάρτηση), Απώλειες ολικής πίεσης, Μετρική για κριτήριο εφαπτομενικής ταχύτητας).

Συνδυασμός	$J[m^2/s^2]$	$p_{tLosses}[m^5/s^3]$	$C[m/s]$
Αναφοράς	0.00443464	0.00305292	0.31
TopO χωρίς περιορισμό	0.00056169	0.0633266	0.535
TopO με $\pi_{tar} = 5\%$	$3.1283e-05$	0.003992	0.343
TopO με $\pi_{tar} = 10\%$	0.0007121	0.03154	0.527
TopO με $\pi_{tar} = 15\%$	$5.2709e-05$	0.009586	0.419
TopO χωρίς περιορισμό + ShpO	$6.6314e-05$	0.060234	0.585
TopO με $\pi_{tar} = 5\%$ + ShpO	$2.0251e-05$	0.003877	0.349
TopO με $\pi_{tar} = 10\%$ + ShpO	$6.0135e-05$	0.03022	0.439
TopO με $\pi_{tar} = 15\%$ + ShpO	$2.1942e-05$	0.01143	0.414



(α') Μετά από TopO.

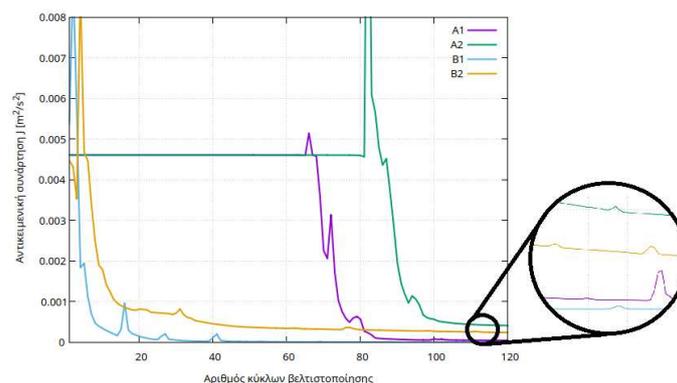


(β') Μετά από TopO και έπειτα ShpO.

Σχήμα 4.16: Περίπτωση 403: Σύγκριση κατανομών της κάθετης ταχύτητας στην έξοδο.

4.5 Σύγκριση αποτελεσμάτων

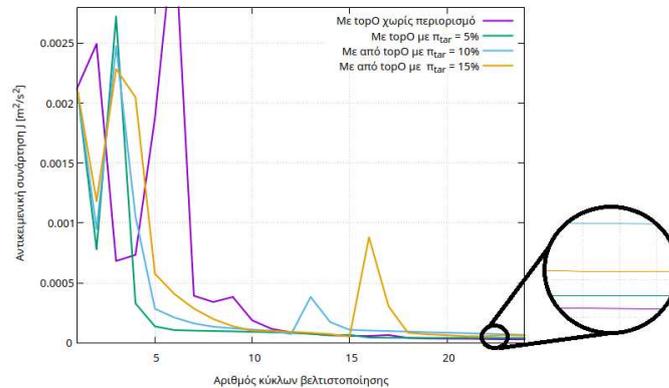
Σε αυτό το κεφάλαιο, καθώς συγκρίθηκαν διάφοροι παράμετροι της βελτιστοποίησης, κρίνεται σκόπιμο να σχολιαστεί η συμπεριφορά του αλγορίθμου βελτιστοποίησης σε διάφορες περιπτώσεις. Στο Σχήμα 4.17 παρουσιάζεται η σύγκλιση του αλγορίθμου βελτιστοποίησης για διαφορετικές αρχικοποιήσεις και διαφορετικές ακτίνες r της Εξ. 2.11, όπως εφαρμόζεται στην περίπτωση 401. Όταν το πεδίου πορώδους αρχικοποιείται όλο ως ρευστό ($\tilde{\alpha} = 0$), για αρκετούς κύκλους ο αλγόριθμος πρακτικά δεν αλλάζει την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης και μόνο αργότερα αρχίζει να τη μειώνει. Αντιθέτως, με $\tilde{\alpha} = 0.5$ ο αλγόριθμος συγκλίνει σαφώς γρηγορότερα. Όσον αφορά την ακτίνα r , φαίνεται ότι η μεγαλύτερη ακτίνα (περιπτώσεις A2 και B2) συνεπάγεται λίγο πιο αργή σύγκλιση.



Σχήμα 4.17: Περίπτωση 401: Σύγκριση σύγκλισης αλγορίθμου βελτιστοποίησης για διαφορετικές παραμέτρους βελτιστοποίησης. Οι τιμές της αντικειμενικής συνάρτησης είναι αυτές που υπολογίζει η TopO (όχι σε νέα πλέγματα).

Στο Σχήμα 4.18 παρουσιάζεται η σύγκλιση του αλγορίθμου βελτιστοποίησης για την

περίπτωση 402², και αναδεικνύεται ο ρόλος του περιορισμού σε αυτήν. Με $\pi_{tar} = 5\%$ φαίνεται να επιτυγχάνεται η γρηγορότερη σύγκλιση.



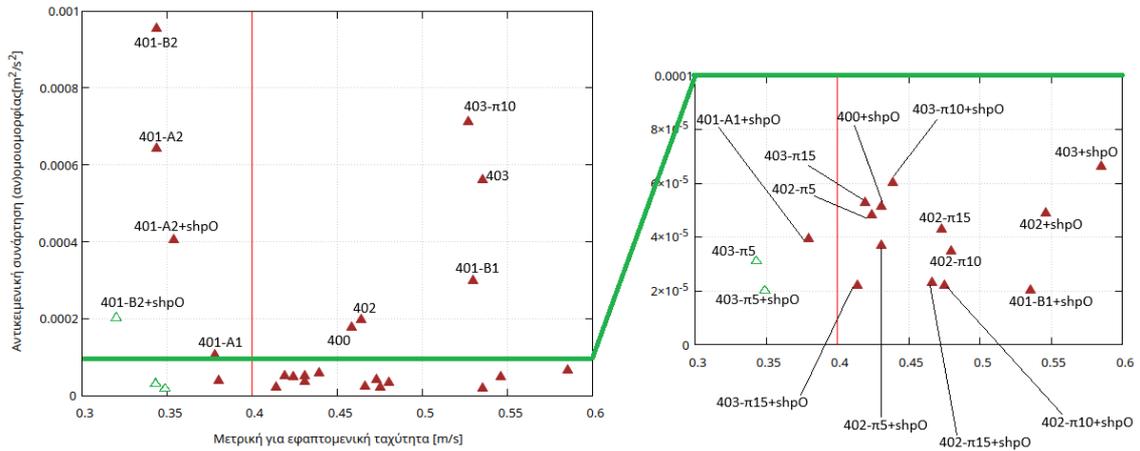
Σχήμα 4.18: Περίπτωση 402: Σύγκριση σύγκλισης αλγορίθμου βελτιστοποίησης για διαφορετικές παραμέτρους βελτιστοποίησης. Οι τιμές της αντικειμενικής συνάρτησης είναι αυτές που υπολογίζει ο αλγόριθμος TopO (όχι σε νέα πλέγματα).

Βάσει των περιπτώσεων 402 και 403, γίνεται αντιληπτό, ότι η αρχικοποίηση³ στην οποία εφαρμόστηκε ο αλγόριθμος TopO, δεν οδήγησε σε γεωμετρίες με καλύτερα αποτελέσματα, και επιπλέον οι νησίδες που σχηματίζονται αυξάνουν το κατασκευαστικό κόστος και τις απώλειες ολικής πίεσης. Όταν σε μια γεωμετρία λοιπόν, έχει εφαρμοστεί ήδη αλγόριθμος ShpO, δημιουργώντας ένα περίπλοκο όριο στο υπολογιστικό χώρο, η εισαγωγή στοιχείων στροφής ροής στο εσωτερικό του χώρου δεν αναδείχθηκε γόνιμη. Αντιθέτως, στην περίπτωση 401 όπου εξετάζεται η εισαγωγή στοιχείων στροφής ροής στην υπάρχουσα γεωμετρία τα αποτελέσματα είναι ριζικά διαφορετικά, μειώνοντας την αντικειμενική συνάρτηση κατά μια τάξη μεγέθους με τον αλγόριθμο TopO.

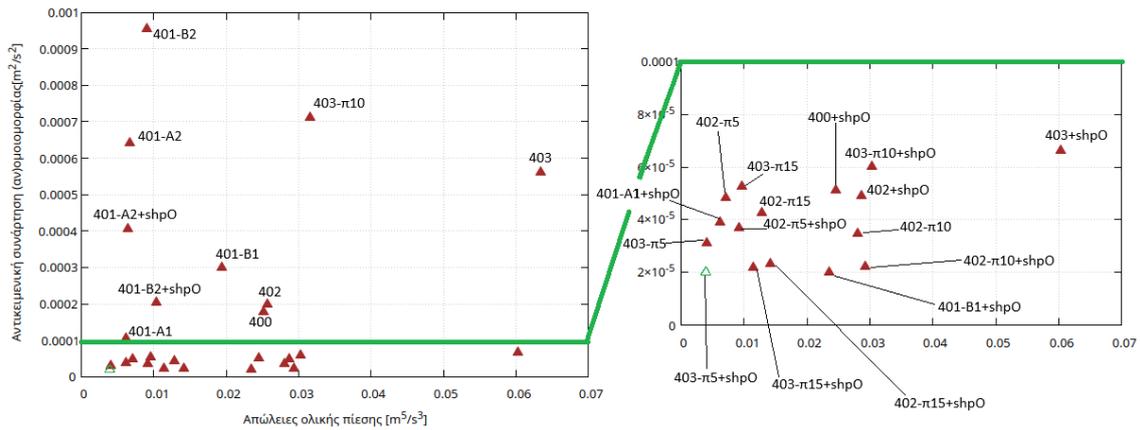
Στο Σχήμα 4.19 παρουσιάζονται τα μέτωπα μη κυριαρχούμενων λύσεων, για τις γεωμετρίες του κεφαλαίου, τα οποία αναδεικνύουν ως καλύτερη αποδεκτή γεωμετρία του κεφαλαίου, αυτή της περίπτωσης 403 με περιορισμό $\pi_{tar} = 5\%$, όταν ακολουθείται από ShpO. Ωστόσο, η καλύτερη αποδεκτή γεωμετρία συνολικά παραμένει αυτή της περίπτωσης 202optB, δηλαδή της περίπτωσης 403 πριν την εφαρμογή TopO. Αναφέρεται ως εύκολη κατασκευαστικά λύση η γεωμετρία του συνδυασμού A1 της 401, λόγω του ότι δεν χρειάζονται αλλαγή τα τοιχώματά του, με αντικειμενική συνάρτηση περίπου τριπλάσια της 202optB, αλλά ίδιας τάξης μεγέθους.

² Η αρχική τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης διαφέρει από αυτή του Πίνακα 3.5, λόγω της ύπαρξης των επιπλέον όρων στις εξισώσεις της ροής, όταν το πεδίο πορώδους αρχικοποιείται με $\tilde{\alpha} = 0.5$

³ Η οριακή και η αρχική συνθήκη για την Εξ. 2.11 σε συνδυασμό με την επιβολή περιορισμού, οδηγούν τον αλγόριθμο να εμφανίσει νησίδες.



(α') Διάγραμμα με άξονες $C - J$.



(β') Διάγραμμα με άξονες $p_{tLosses} - J$.

Σχήμα 4.19: Περιπτώσεις 400 έως 403: Μέτωπα μη κυριαρχούμενων λύσεων στους χώρους που αφορούν τη μετρική για την εφαιπτομενική ταχύτητα και τις απώλειες ολικής πίεσης. Με πράσινο-άδειο τρίγωνο είναι οι γεωμετρίες που ανήκουν στο μέτωπο μη κυριαρχούμενων λύσεων. Χρησιμοποιούνται οι δείκτες +shpO όταν ακολουθεί ShpO, $-\pi Y$ όταν χρησιμοποιείται ο περιορισμός με ποσοστό $\pi_{tar} = Y\%$. Η κόκκινη γραμμή στο διάγραμμα (α') αναπαριστά το κριτήριο για την εφαιπτομενική ταχύτητα στην έξοδο.

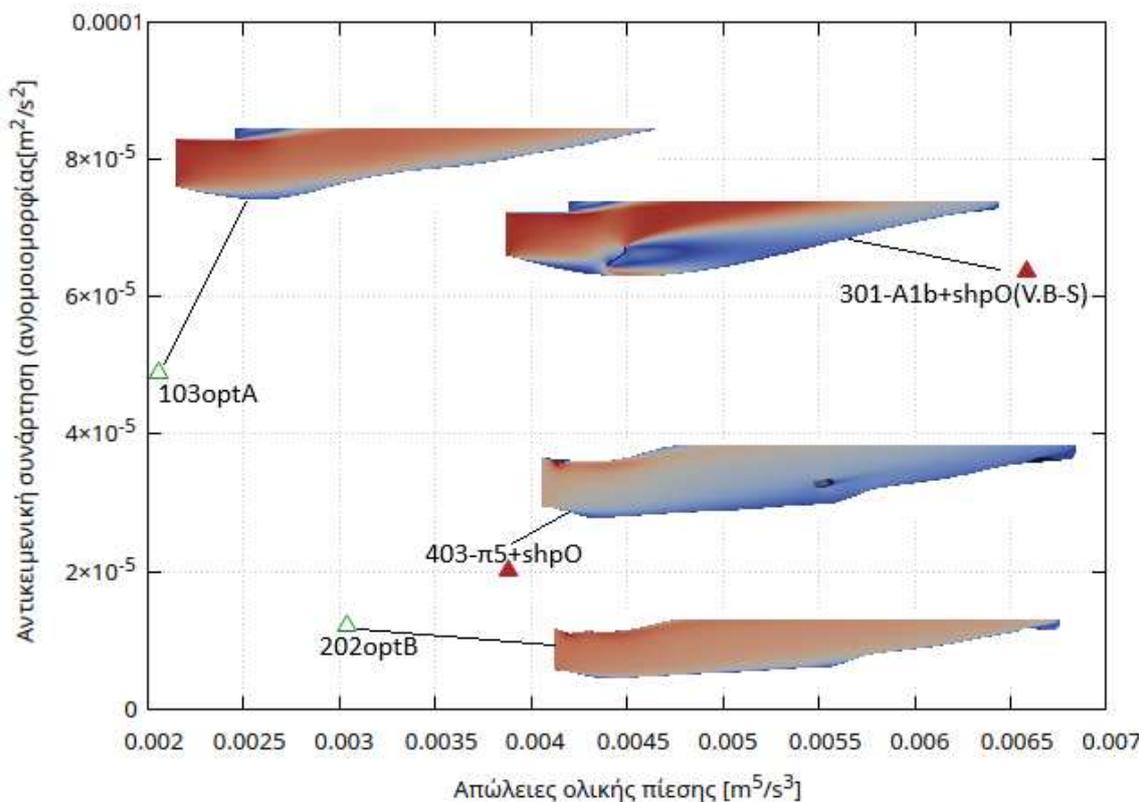
Κεφάλαιο 5

Ανακεφαλαίωση και συμπεράσματα

Στην εργασία μελετήθηκε ένας αγωγός στροφής ροής 90° στον οποίο εφαρμόζονται αλγόριθμοι ShpO και TopO. Ως βέλτιστη αποδεκτή γεωμετρία αναδείχθηκε η $202optB$ με τιμή αντικειμενικής συνάρτησης (Εξ. 1.1) στο 0.27% της τιμής αναφοράς. Οι απώλειες ολικής πίεσης μεταξύ εισόδου και εξόδου (Εξ. 1.3) είναι περίπου ίδιες με αυτές της γεωμετρίας αναφοράς, ενώ η μετρική για την εφαπτομενική ταχύτητα αυξάνεται λίγο, ωστόσο ικανοποιεί το κριτήριο (Εξ. 1.2). Στις περιπτώσεις που εφαρμόστηκε ShpO, η πρόλεξη της ροής για κάθε τελική γεωμετρία γινόταν στο παραμορφωμένο πλέγμα με την προϋπόθεση να παρέμενε ποιοτικά κατάλληλο. Ωστόσο, για την καλύτερη γεωμετρία ($202opt$) κατασκευάστηκε πλέγμα εκ νέου, ώστε να είναι πιο ακριβής η σύγκριση με τις γεωμετρίες των αποτελεσμάτων TopO, όπου ούτως ή άλλως γίνεται γένεση νέου πλέγματος για κάθε μια, και οι τιμές της αντικειμενικής συνάρτησης είναι συγκρίσιμες (ίδιας τάξης μεγέθους με την $202opt$). Στο Σχήμα 5.1 παρουσιάζονται τα μέτωπα μη-κυριαρχούμενων λύσεων για τις καλύτερες αποδεκτές γεωμετρίες κάθε ενότητας.

Η αλλαγή των τοιχωμάτων του αγωγού (άνω και κάτω) βάσει διαίσθησης, και η μετέπειτα εφαρμογή ShpO σε κάθε νέα γεωμετρία, παρήγαγε γεωμετρίες με σημαντικά βελτιωμένη ομοιομορφία για την κάθετη συνιστώσα της ταχύτητας στην έξοδο. Ωστόσο, η παρατήρηση ανακυκλοφορίας κοντά στα τοιχώματα και η προσπάθεια απαλοιφής της, προσθέτοντας ευθύγραμμα τμήματα στα αντίστοιχα στερεά τοιχώματα, δημιούργησε γεωμετρίες, μια από τις οποίες εν τέλει (μετά την εφαρμογή ShpO) αναδείχθηκε ως καλύτερη.

Στη ShpO (Κεφάλαιο 3) δεν παρατηρήθηκε κάποιος τρόπος παραμετροποίησης (είτε καμπύλων Bezier, είτε κουτιών μορφοποίησης από ογκομετρικές B-Splines) να πλεονεκτήρητά. Όταν αυτή εφαρμόστηκε για τις νησίδες εσωτερικά του αγωγού, προτιμήθηκε η χρήση κουτιών μορφοποίησης, καθώς ήταν πιο εύκολο να παραμετροποιήσουν τα περίπλοκα περιγράμματά τους. Η αύξηση των αριθμών μεταβλητών σχεδιασμού εν γένει οδήγησε σε καλύτερα αποτελέσματα, αλλά μετά από κάποιο όριο, παρατηρήθηκε σε



Σχήμα 5.1: Μέτωπο μη κυριαρχούμενων λύσεων στον χώρο απωλειών ολικής πίεσης για τις καλύτερες αποδεκτές γεωμετρίες κάθε ενότητας. Με πράσινο-άδειο τρίγωνο είναι οι γεωμετρίες που ανήκουν στο μέτωπο. Οι δείκτες *optY* υποδηλώνουν βελτιστοποιημένες γεωμετρίες με $Y = \{A, B\}$, ο δείκτης *shpO* υποδηλώνει *ShpO*, ο δείκτης $-\pi 5$ υποδηλώνει ότι εφαρμόζεται ο περιορισμός για ποσοστό στερεοποίησης 5% του χωρίου και τέλος ο δείκτης $(V.B - S)$ υποδηλώνει παραμετροποίηση με κουτιά μορφοποίησης από ογκομετρικές *B-Splines*.

δοκιμές που δεν συμπεριλήφθηκαν ως περιπτώσεις, ότι παραμορφώνονται σημαντικά τα πλέγματα και σταματάει η διαδικασία βελτιστοποίησης. Η προσπάθεια εισαγωγής ίσων στοιχείων σε μια υπάρχουσα γεωμετρία ανέδειξε τη σημαντικότητα της θέσης αυτών των στοιχείων, παρά της βελτιστοποίησή τους, καθώς και ότι μεγαλύτερος αριθμός στοιχείων δεν οδηγεί απαραίτητα σε καλύτερα αποτελέσματα. Ωστόσο, έγινε αντιληπτό ότι καλύτερος συνδυασμός παραμέτρων για τα ίσια στοιχεία δεν συνεπάγεται απαραίτητα και καλύτερη αρχικοποίηση στον αλγόριθμο *ShpO* που εφαρμόστηκε.

Στην *TopO* (Κεφάλαιο 4) παρατηρήθηκε μεγάλο ποσοστό των υποψήφιων γεωμετριών που προέκυψαν να μην ικανοποιεί το κριτήριο για την εφαπτομενική ταχύτητα στην έξοδο. Επίσης, προκειμένου να ανταγωνιστούν τις γεωμετρίες του Κεφαλαίου 3 έπρεπε να ακολουθηθούν από αλγόριθμο *ShpO*. Όσον αφορά τις παραμέτρους της *TopO*, φαίνεται η αρχικοποίηση του πεδίου πορώδους με τιμή 0.5 να βοηθάει σημαντικά τη σύγκλιση του αλγορίθμου, όταν επιδιώκεται η ανάδυση νησίδων στο εσωτερικό, αλλά

δεν είναι αναγκαία καλύτερη αρχικοποίηση. Η επιβολή του περιορισμού για το ποσοστό στερεοποίησης αφενός βοηθά στη σύγκλιση της TopO και αφετέρου οδηγεί σε καλύτερα αποτελέσματα (σε σχέση με χωρίς τον περιορισμό).

Διαπιστώθηκε, ότι παρόλο που ένας αλγόριθμος TopO έχει σαφώς μεγαλύτερο αριθμό μεταβλητών σχεδιασμού, δεν είναι απαραίτητο ότι θα οδηγήσει και σε καλύτερα αποτελέσματα από έναν αλγόριθμο ShpO. Παράλληλα, όταν στην ως εκεί καλύτερη γεωμετρία εφαρμόστηκε αλγόριθμος TopO, έτσι ώστε να αναδυθούν νησίδες στο εσωτερικό του, τα αποτελέσματα όσον αφορά την ομοιομορφία ήταν χειρότερα από πριν (Περίπτωση 403). Αυτό οφείλεται στο ότι η αρχικοποίηση του πεδίου πορώδους ήταν μη μηδενική, με αποτέλεσμα ο αλγόριθμος να εγκλωβιστεί σε κάποιο τοπικό ελάχιστο, καθώς και στην επιβολή περιορισμού για το ποσοστό στερεοποίησης του χωρίου, που ανάγκασε τον αλγόριθμο να εμφανίσει νησίδες.

Παρόλο που καλύτερη θεωρείται η γεωμετρία με χαμηλότερη τιμή αντικειμενικής συνάρτησης, η επιλογή της καταλληλότερης γεωμετρίας εξαρτάται και από την εφαρμογή, στην οποία θα χρησιμοποιηθεί ο αγωγός, ανάλογα με τον χώρο που μπορεί να καταλαμβάνει και την ανοχή στις απώλειες ολικής πίεσης. Σημαντικό είναι και το κόστος κατασκευής, καθώς περίπλοκες γεωμετρίες απαιτούν πιο σύνθετες κατεργασίες. Επίσης, σε περιοχές μεγάλης καμπυλότητας των τοιχωμάτων του αγωγού, ενδέχεται ανάλογα με την καθαρότητα του εργαζόμενου μέσου, να κατακάθονται ακαθαρσίες, και με την πάροδο του χρόνου να αλλοιωθεί η μορφή του τοιχώματος στις περιοχές αυτές. Βάσει αυτών, άξια μνείας είναι η γεωμετρία του συνδυασμού A1 της 401, καθώς σε αυτήν, η αντικειμενική συνάρτηση είναι 2 τάξεις μεγέθους μικρότερη από την περίπτωση αναφοράς, απλώς εισάγοντας στοιχεία στροφής ροής (σχετικά εύκολα κατασκευαστικά), χωρίς καθόλου αλλαγή των εξωτερικών τοιχωμάτων του αγωγού.

Για περαιτέρω μελέτη και πιθανή βελτίωση της ομοιομορφίας στην έξοδο, οι ιδέες που προτείνονται είναι οι εξής:

- Ένταξη του κριτηρίου για τη μετρική επαπτομενικής ταχύτητας στην έξοδο ως περιορισμό στον αλγόριθμο βελτιστοποίησης¹.
- Δοκιμή αρκετά μεγάλου αριθμού σημείων ελέγχου για ShpO, με γένεση νέου πλέγματος σε κάθε κύκλο βελτιστοποίησης.
- Παραμετροποίηση των νησίδων του Κεφαλαίου 4 με καμπύλες Bezier.
- Παραμετρική μελέτη για την τιμή η της Εξ. 2.12, η οποία καθορίζει την διεπιφάνεια στερεού-ρευστού.
- TopO σε 2 στάδια: Αρχικά βελτιστοποιώντας την περιοχή κοντά στην είσοδο με στόχο τη μεγιστοποίηση της κυκλοφορίας (ανθρωρολογιακά) στο υπόλοιπο του υπολογιστικού χωρίου, και έπειτα βελτιστοποιώντας όλο το υπολογιστικό χωρίο για βελτίωση της ομοιομορφίας στην έξοδο.

¹ Προκειμένου να ενταχθεί σε αλγόριθμο αιτιοκρατικής βελτιστοποίησης θα πρέπει να διατυπωθεί ο περιορισμός σε διαφορίσιμη μορφή $C = \frac{\int_{S_{out}} (v_i t_i)^2 dS}{\int_{S_{out}} dS}$.

Βιβλιογραφία

- [1] Παπουτσής-Κιαχαγιάς, Ε.: *Συζυγείς Μέθοδοι για Τυρβώδεις Ροές, με Εφαρμογή στη Βελτιστοποίηση Μορφής ή Τοπολογίας και στο Στιβαρό Σχεδιασμό*. Διδακτορική διατριβή, Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, Ε.Μ.Π., Αθήνα, 2013.
- [2] Γιαννάκογλου, Κ.Χ.: *Μέθοδοι Βελτιστοποίησης στην Αεροδυναμική*. Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, 2006.
- [3] *Programmer's Guide, OpenFOAM, The Open Source CFD Toolbox*, 2025.
- [4] *USER MANUAL, adjointOptimisationFoam, an OpenFOAM-based optimisation tool*, 2023. https://www.openfoam.com/documentation/files/adjointOptimisationFoamManual_v2312.pdf.
- [5] Κ.Χ. Γιαννάκογλου, Ι. Αναγνωστόπουλος, Γ.Μπεργελές: *Αριθμητική Ανάλυση για Μηχανικούς*. Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, 2003.
- [6] E.M. Papoutsis-Kiachagias, N. Magoulas, J. Mueller, C. Othmer, and K.C. Giannakoglou: *Noise reduction in car aerodynamics using a surrogate objective function and the continuous adjoint method with wall functions*. *Comput. Fluids*, 122:223-232, 2015.
- [7] J. Nocedal and S. Wright: *Numerical optimization*. Springer, 233 Spring Street, New York, NY 10013, USA, 2001.
- [8] K. Svanberg: *The method of moving asymptotes - a new method for structural optimization*. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 24:359-373, 1987.
- [9] Γαλανός, Ν.: *Βελτιστοποίηση Τοπολογίας και Μορφής στη Ρευστοδυναμική και Συζευγμένη Μεταφορά Θερμότητας με χρήση της Συνεχούς Συζυγούς Μεθόδου με Συμβατή Διακριτοποίηση*. Διδακτορική διατριβή, Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, Ε.Μ.Π., Αθήνα, 2025.
- [10] P. Spalart and S. Allmaras: *A one-equation turbulence model for aerodynamic flows*. AIAA Paper 1992-439, 30th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, Reno, Nevada, USA, 1992.
- [11] P. G. Tucker: *Differential equation-based wall distance computation for DES and RANS*. *J. Comput. Physics*, 190:229-248, 2003.

- [12] W. Rodi: *Experience with two-layer models combining the $\kappa - \epsilon$ model with a one-equation model near the wall*. AIAA paper, 02(16), 1991.
- [13] TH. Shih, LA. Povinelli, NS. Liu, MG. Potapczuk, and JL. Lumley: *A generalized wall function*. NASA Report, 209398:12-26, 1999.
- [14] DL. Sondak and RH. Pletcher: *Application of wall function to generalized nonorthogonal curvilinear coordinate systems*. AIAA paper, 31(07), 1993.
- [15] D. B. Spalding: *A single formula for the law of the wall*. Journal of Applied Mechanics, 28:455–457, 1961.
- [16] K. Karki and S. Patankar: *Pressure based calculation procedure for viscous flows at all speeds in arbitrary configurations*. AIAA Journal, 27(9):1167-1174, 1989.
- [17] B. S. Lazarov and O. Sigmund: *Filters in topology optimization based on Helmholtz-type differential equations*. Int. J. Numer. Methods Eng., 86:765-781, 2011.
- [18] F. Wang, B. S. Lazarov and O. Sigmund: *On projection methods, convergence and robust formulations in topology optimization*. Struct. Multidisc. Optim., 43:767-784, 2011.
- [19] T. Borrvall and J. Petersson: *Topology optimization of fluids in Stokes flow*. Int. J. Numer. Meth. Fluids, 41:77-107, 2003.