



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο  
Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών  
Τομέας Ρευστών  
Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών  
Μονάδα Παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής  
& Βελτιστοποίησης

Μέθοδος και Λογισμικό Παραμετροποίησης  
της Μορφής Πτερυγώσεων Στροβιλομηχανών

Διπλωματική Εργασία

Παναγιώτης Η. Γιαννατσέλης

Επιβλέπων: Κ.Χ. Γιαννάκογλου, Καθηγητής ΕΜΠ

Αθήνα, 2013



Στην οικογένειά μου.



## Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα, καθηγητή Κ.Χ. Γιαννάκογλου για την επαφή στην οποία με έφερε με το ενδιαφέρον αντικείμενο της διπλωματικής αυτής εργασίας, καθώς επίσης και για την ευκαιρία που μου έδωσε να συμμετέχω στην δημιουργία μίας μεθόδου που θα είναι χρήσιμη στο μέλλον και θα υπάρχει και μετά την αποφοίτησή μου. Ακόμη, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον καθηγητή Κ.Χ. Γιαννάκογλου για την επίβλεψη και την καθοδήγηση που μου παρείχε κατά την εκπόνηση της εργασίας αλλά και για την γνώση και τον τρόπο σκέψης που μου καλλιέργησε κατά την διάρκεια της φοίτησής μου στα μαθήματα που διδάσκει στη Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών του ΕΜΠ. Νιώθω την ανάγκη εκτός από τον καθηγητή Κ.Χ. Γιαννάκογλου να ευχαριστήσω όλη την ερευνητική ομάδα της ΜΠΥΡ&Β, για τις συμβουλές και την βοήθεια σε πολλά τεχνικά θέματα. Ειδικά από την ερευνητική ομάδα θα ήθελα να ευχαριστήσω τον υποψήφιο διδάκτορα κύριο Κωσταντίνο Τσιάκα για τον χρόνο που αφιέρωσε για να με βοηθήσει και για τις συμβουλές που μου έδωσε έχοντας εμπειρία σχετικά με το θέμα, παρά τον μεγάλο φόρτο εργασίας του. Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένειά μου για την υποστήριξη τόσο ψυχολογικά όσο και οικονομικά αλλά και για την πίστη τους σε εμένα.





Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο  
Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών  
Τομέας Ρευστών  
Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών  
Μονάδα Παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής  
& Βελτιστοποίησης

Μέθοδος και Λογισμικό Παραμετροποίησης  
της Μορφής Πτερυγώσεων Στροβιλομηχανών

Γιαννατσέλης Παναγιώτης  
Επιβλέπων: Κ.Χ. Γιαννάκογλου, Καθηγητής ΕΜΠ  
Αθήνα, Οκτώβριος 2013

### Περίληψη

Η παρούσα διπλωματική εργασία, αφορά την ανάπτυξη μιας μεθόδου παραμετροποίησης της μορφής πτερυγώσεων στροβιλομηχανών αξονικής ή μικτής ροής, με σκοπό την αεροδυναμική βελτιστοποίηση της μορφής τους. Η μέθοδος που αναπτύχθηκε εκμεταλλεύεται τις ιδιότητες και τα πλεονεκτήματα που παρουσιάζουν οι καμπύλες Bezier και οι σύμμορφοι μετασχηματισμοί.

Αρχικά, στην εργασία καθορίζονται οι παράμετροι σχεδιασμού του προβλήματος, οι οποίες κατά κύριο λόγο είναι σημεία ελέγχου διδιάστατων καμπυλών Bezier στο επίπεδο  $(R, z)$  και καθορίζεται ο ακριβής τρόπος με τον οποίο από τις παραμέτρους σχεδιασμού προκύπτει η τριδιάστατη γεωμετρία του πτερυγίου σε καρτεσιανές συντεταγμένες. Με τον καθορισμό των παραμέτρων σχεδιασμού και του τρόπου που από αυτές προκύπτει η μορφή της πτερυγώσης, ολοκληρώνεται ο καθορισμός της μεθόδου παραμετροποίησης που προτείνει η παρούσα διπλωματική εργασία.

Στη συνέχεια, περιγράφεται λεπτομερώς το λογισμικό (σε FORTRAN 77) που προγραμματίστηκε στο πλαίσιο της παρούσας διπλωματικής εργασίας, το οποίο δέχεται ως είσοδο τις παραμέτρους σχεδιασμού και επιστρέφει αεροτομές του πτερυγίου σε μορφή τέτοια ώστε να μπορεί ένας γενέτης δομημένων ή μη-δομημένων πλεγμάτων να πραγματοποιήσει γένεση πλέγματος στη γεωμετρία.

Στο τέλος της διπλωματικής εργασίας, επιβεβαιώνεται σε δύο σκέλη πως η μέθοδος μπορεί να παραμετροποιήσει επιτυχώς διάφορες μορφές πτερυγώσεων. Σε πρώτη φάση, παρουσιάζονται εικόνες που δείχνουν μορφές που προέκυψαν από χρήση του λογισμικού που προγραμματίστηκε ενώ, σε δεύτερη φάση, παρουσιάζεται ολόκληρη η διαδικασία που πραγματοποιήθηκε για την αεροδυναμική βελτιστοποίηση της μορφής μιας πτερυγώσης μέσω εξελικτικών αλγορίθμων. Τελικό προϊόν της διπλωματικής εργασίας είναι μία μέθοδος παραμετροποίησης της μορφής πτερυγώσεων στροβιλομηχανών, η οποία εμπλουτίζει το λογισμικό που διαθέτει το Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών του ΕΜΠ.







**NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY OF  
ATHENS  
SCHOOL OF MECHANICAL ENGINEERING  
FLUIDS DEPARTMENT  
LABORATORY OF THERMAL TURBOMACHINES  
PARALLEL CFD & OPTIMIZATION UNIT**

**Shape Parameterization Method and Software for Turbomachinery  
Blade Rows**

**Giannatselis Panagiotis**

**Advisor: K.C. Giannakoglou, Professor NTUA**

**Athens, October 2013**

**Abstract**

This diploma thesis is concerned with the development of a parameterization method for the shape of turbomachinery blade rows. This parameterization method aims at supporting the aerodynamic optimization of the blade shape including likely the hub and shroud geometries. The method exploits the properties and the advantages of Bezier curves and conformal mappings.

Firstly, in this diploma thesis, the design parameters of the method are defined. Most of them are control points of two-dimensional Bezier curves on the  $(R, z)$  plane. Then, the exact way in which the design parameters construct a three-dimensional geometry of the parameterized blade row in Cartesian coordinates is described. Given the definition of the design parameters and the description of the geometry construction based on them, the current parameterization method is thoroughly defined.

Afterwards, the FORTRAN 77 software that implements the parameterization method is described. The software was programmed during this work. It takes as input the design parameters and returns airfoils of the blade, at a format readable by a structured or unstructured grid generator software.

At the last phase of this diploma thesis, the ability of this method to parameterize successfully various blade shapes is demonstrated. In the first part, pictures of geometries which were derived from the use of the software are presented. In the second part, the description of the whole procedure that was conducted during the aerodynamic optimization for the shape of a blade row using evolutionary algorithms is provided. The final product of this diploma thesis is a parameterization method for the shape of turbomachinery blades rows, which, in the future, could become a very useful tool for the aerodynamic optimization of blade rows at the Laboratory of Thermal Turbomachines, NTUA.

## Ακρωνύμια

ΕΜΠ	Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
ΕΘΣ	Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών
ΜΠΥΡ&Β	Μονάδα Παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής & Βελτιστοποίησης
ΥΡΔ	Υπολογιστική Ρευστοδυναμική

---

CFD	Computational Fluid Dynamics
NTUA	National Technical University of Athens
EASY	Evolutionary Algorithm SYstem

# Περιεχόμενα

Περιεχόμενα	i
<b>1 Εισαγωγή</b>	<b>1</b>
1.1 Σκοπός της εργασίας	2
1.2 Δομή της εργασίας	2
<b>2 Η Μέθοδος Παραμετροποίησης</b>	<b>3</b>
2.1 Παράμετροι Σχεδιασμού	4
2.2 Δημιουργία της Τριδιάστατης Γεωμετρίας	10
<b>3 Περιγραφή Κώδικα</b>	<b>19</b>
3.1 Ανάγνωση Αρχείων Εισόδου - mode 1 ή 2	19
3.2 Εύρεση Ενδιάμεσων Καμπυλών Σταθερού Ύψους Πτερυγίου	23
3.3 Απεικόνιση Δεδομένων	23
3.4 Εύρεση Προβολών των Αεροτομών του Πτερυγίου στο Μεσημβρινό Ε- πίπεδο	24
3.5 Εισαγωγή Γωνιών και Σύμμορφη Απεικόνιση	29
3.6 Απόδοση Πάχους	30
3.7 Διόρθωση της Μορφής του Πτερυγίου	34
<b>4 Εφαρμογή της Μεθόδου</b>	<b>37</b>
4.1 Παραμετροποιήσεις	37
4.2 Η Βελτιστοποίηση	39
4.2.1 Αξιολόγηση Αποτελεσμάτων	39

<b>5</b>	<b>Συμπεράσματα - Προτάσεις για Βελτιωμένη Έκδοση του Λογισμικού</b>	<b>47</b>
5.1	Συμπεράσματα . . . . .	47
5.2	Δυνατές Βελτιώσεις Λογισμικού . . . . .	48
<b>A'</b>	<b>Μαθηματικά Εργαλεία</b>	<b>49</b>
A'.1	Πολυώνυμα Bezier - Bernstein . . . . .	49
A'.1.1	Αύξηση τάξης Bezier καμπύλης(Bezier degree elevation) . . . . .	51
A'.2	Αριθμητική Παρεμβολή με Κυβικές B Splines . . . . .	52
A'.3	Επίλυση Μη-Γραμμικών Εξισώσεων . . . . .	54
A'.3.1	Μέθοδος Διχοτόμησης του Διαστήματος . . . . .	54
A'.3.2	Μέθοδος Εσφαλμένης Θέσης ή Γραμμικής Παρεμβολής . . . . .	55
A'.3.3	Εφαρμογή στις καμπύλες Bezier . . . . .	55
A'.4	Επίλυση Μη-Γραμμικών Συστημάτων . . . . .	56
A'.4.1	Μέθοδος Newton-Raphson . . . . .	56
A'.4.2	Μέθοδος Ανάλυσης LU (Μέθοδος Crout) . . . . .	56
A'.5	Συστήματα Συντεταγμένων . . . . .	59
A'.5.1	Καρτεσιανές Συντεταγμένες . . . . .	59
A'.5.2	Κυλινδρικές Συντεταγμένες . . . . .	59
A'.5.3	Μετασχηματισμοί Μεταξύ Κυλινδρικών και Καρτεσιανών Συντεταγμένων . . . . .	60
A'.6	Αεροδυναμική Βελτιστοποίηση . . . . .	60
A'.6.1	Αεροδυναμική Βελτιστοποίηση με Εξελικτικούς Αλγορίθμους . . . . .	61
A'.7	Σύμμορφη Απεικόνιση (Conformal Mapping) . . . . .	65
<b>B'</b>	<b>Αρχεία Εισόδου στο Λογισμικό</b>	<b>67</b>
B'.1	Αρχείο Επιλογών . . . . .	67
B'.1.1	Είδος πτερύγωσης και φορά περιστροφής ατράκτου . . . . .	67
B'.1.2	Μη-Απόλυτα Καθορισμένες Παράμετροι . . . . .	68
B'.1.3	Συμβιβασμός Μεταξύ Οικονομίας και Ακρίβειας . . . . .	68

Β.2 Αρχείο Παραμέτρων . . . . .	69
<b>Βιβλιογραφία</b>	<b>73</b>



# Κεφάλαιο 1

## Εισαγωγή

Κατά τον σχεδιασμό μιας στροβιλομηχανής, η αεροδυναμική μελέτη των πτερυγώσεων που θα χρησιμοποιηθούν με λογισμικό Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής (Computational Fluid Dynamics, CFD) αποτελεί ένα πολύ σημαντικό και απαιτητικό κομμάτι. Τα πτερύγια είναι "αεροδυναμικά ευαίσθητα" απάρτια, με αποτέλεσμα ακόμη και από μικρές διαφοροποιήσεις στο σχήμα τους να αλλάζει αισθητά η αεροδυναμική απόδοση, άρα και η συνολική απόδοση της στροβιλομηχανής. Έτσι, τα μεγέθη που χαρακτηρίζουν γεωμετρικά ένα πτερύγιο αποτελούν αντικείμενο ανάλυσης και βελτιστοποίησης. Για τη δημιουργία πλέγματος, ώστε να μελετηθεί η ροή γύρω από το πτερύγιο, είναι απαραίτητο το πτερύγιο, αλλά και η αντίστοιχη πτερύγωση με τα κελύφη ποδός και κεφαλής, να απεικονισθούν στον χώρο σε κατάλληλες (καρτεσιανές ή κυλινδρικές) συντεταγμένες. Η απεικόνιση του πτερυγίου στο χώρο, καθώς αυτό έχει αρκετά περίπλοκη μορφή, γίνεται με την χρήση ενός πολύ μεγάλου αριθμού σημείων. Είναι βολικό να μπορεί να εκφραστεί η μορφή του πτερυγίου με σύντομο τρόπο ώστε να υπάρξει εποπτεία. Επιπλέον, η βελτιστοποίηση της μορφής του πτερυγίου, απαιτεί οι μεταβλητές σχεδιασμού του να έχουν το ελάχιστο δυνατό πλήθος. Από τα παραπάνω προκύπτει πως κατά τον σχεδιασμό μιας πτερύγωσης είναι απαραίτητη η ικανότητα περιγραφής της με τους δύο παραπάνω τρόπους. Η αντιστοίχιση των δεδομένων της πρώτης μορφής (καρτεσιανές συντεταγμένες της εξωτερικής επιφάνειας του πτερυγίου στον χώρο) στην δεύτερη μορφή που περιγράφεται παραπάνω ονομάζεται **παραμετροποίηση** (της μορφής) του πτερυγίου. Ο καθορισμός του συνόλου των παραμέτρων που χρησιμοποιούνται για την παραμετροποίηση μιας πτερύγωσης και ο τρόπος δημιουργίας της ακριβούς μορφής από τις παραμέτρους αυτές, ορίζει μια **μέθοδο παραμετροποίησης**.

## 1.1 Σκοπός της εργασίας

Η παρούσα διπλωματική εργασία παρουσιάζει την ανάπτυξη μιας μεθόδου παραμετροποίησης πτερυγώσεων στροβιλομηχανών ([1],[2]). Η μέθοδος αυτή συνοδεύεται από λογισμικό (το οποίο προγραμματίστηκε κατά τη διάρκεια της διπλωματικής εργασίας), που δεχόμενο την παραμετροποιημένη μορφή της πτερύγωσης επιστρέφει την πραγματική γεωμετρία της σε καρτεσιανές συντεταγμένες, σε μορφή που μπορεί να εισαχθεί στο λογισμικό γένεσης πλέγματος για ανάλυση της ροής γύρω από το πτερύγιο (μέσα στην πτερύγωση).

## 1.2 Δομή της εργασίας

Η διπλωματική εργασία αυτή, διαρθρώνεται στη συνέχεια ως εξής:

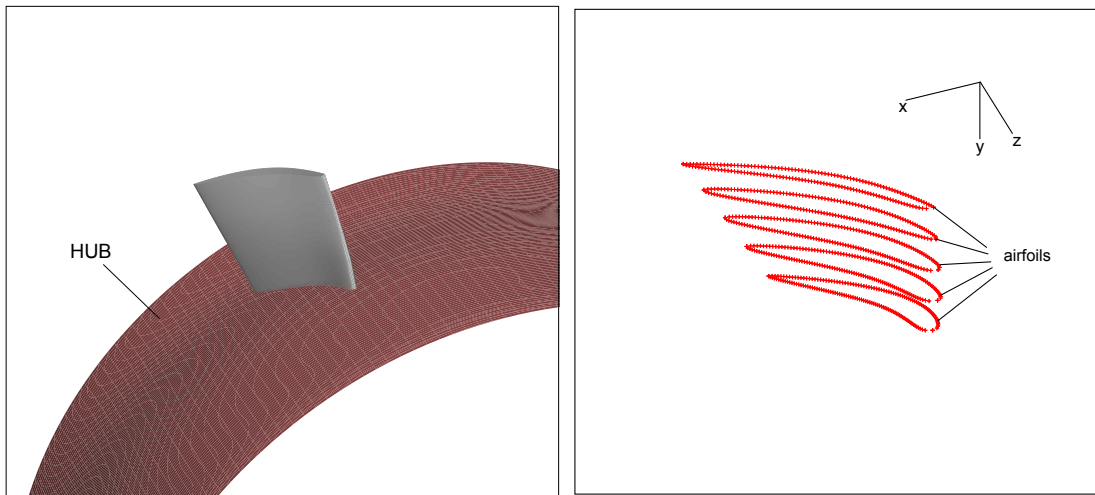
- Στο **Κεφάλαιο 2** Παρουσιάζονται οι παράμετροι που χρησιμοποιούνται στη μέθοδο παραμετροποίησης πτερυγώσεων και περιγράφεται η διαδικασία μέσω της οποίας δημιουργείται η μορφή του πτερυγίου με χρήση των παραμέτρων.
- Στο **Κεφάλαιο 3** περιγράφεται ο κώδικας του λογισμικού δημιουργίας της μορφής της πτερύγωσης.
- Στο **Κεφάλαιο 4** παρουσιάζονται τα αποτελέσματα που προέκυψαν από την εφαρμογή της μεθόδου για την αεροδυναμική βελτιστοποίηση της μορφής ενός πτερυγίου κινούμενης πτερύγωσης συμπίεστή και γίνεται σύγκριση με ένα υπάρχον πτερύγιο.
- Στο **Κεφάλαιο 5** παρατίθενται τα συμπεράσματα στα οποία οδήγησε η παρούσα διπλωματική εργασία και προτείνονται μελλοντικές βελτιώσεις του λογισμικού.
- Στο **Παράρτημα Α'** παρατίθενται τα μαθηματικά εργαλεία που χρησιμοποιούνται σε αυτήν τη διπλωματική εργασία και η αναγκαία θεωρία για την κατανόησή τους.
- Στο **Παράρτημα Β'** βρίσκονται παραδείγματα για τα αρχεία εισόδου που δέχεται το λογισμικό δημιουργίας της μορφής της πτερύγωσης.



## Κεφάλαιο 2

# Η Μέθοδος Παραμετροποίησης

Σε αυτό το κεφάλαιο, παρουσιάζεται η μέθοδος παραμετροποίησης της μορφής πτερυγώσεων στροβιλομηχανών που αποτελεί το αντικείμενο της παρούσας διπλωματικής εργασίας ([3],[4]). Η μέθοδος μπορεί να παραμετροποιήσει πτερυγώσεις αξονικής και μεικτής ροής, όμως αδυνατεί να παραμετροποιήσει πτερυγώσεις στις οποίες η ροή είναι ακτινική σε κάποια θέση. Πρώτα παρουσιάζονται οι παράμετροι που χρησιμοποιούνται και, στη συνέχεια, η διαδικασία δημιουργίας της μορφής της πτερύγωσης που παράγεται από τις παραμέτρους αυτές. Το λογισμικό δημιουργίας της μορφής της πτερύγωσης, δέχεται ως είσοδο (κατά τα γραφόμενα στο παράρτημα Β'.1) τις παραμέτρους (που θα οριστούν παρακάτω) και τις επιλογές που έχει κάνει ο χρήστης και επιστρέφει ένα (επιλεγμένο από τον χρήστη) πλήθος αεροτομών σε εκ περιστροφής επιφάνειες σταθερού ύψους πτερυγίου. Ως εκ περιστροφής επιφάνειες σταθερού ύψους πτερυγίου, ορίζονται οι νοητές επιφάνειες που βρίσκονται σε ενδιάμεσες θέσεις μεταξύ του κελύφους της κεφαλής και του κελύφους του ποδός του πτερυγίου κατά την ακτινική διεύθυνση της μηχανής. Οι επιφάνειες αυτές προκύπτουν με γραμμική παρεμβολή μεταξύ των ακτινικών θέσεων των κελυφών της μηχανής, για κάθε θέση καταμήκος του άξονα περιστροφής της μηχανής (άξονας  $z$ ). Οι αεροτομές, αποτελούνται καθεμιά, από ένα πλήθος κατανεμημένων σημείων. Και το πλήθος των σημείων, όπως το πλήθος των αεροτομών, δίνεται η δυνατότητα να επιλεγεί από το χρήστη. Ένα παράδειγμα φαίνεται στο σχήμα 2.1. Αμέσως μετά την εκτέλεση του λογισμικού δημιουργίας της μορφής της πτερύγωσης, είναι δυνατή η γένεση πλέγματος για την αεροδυναμική μελέτη της πτερύγωσης. Η γένεση πλέγματος, πραγματοποιείται από κατάλληλο λογισμικό. Το τελευταίο, δέχεται ως είσοδο ένα αρχείο κατάλληλης μορφής που περιέχει τα σημεία των αεροτομών και επιστρέφει το πλέγμα.

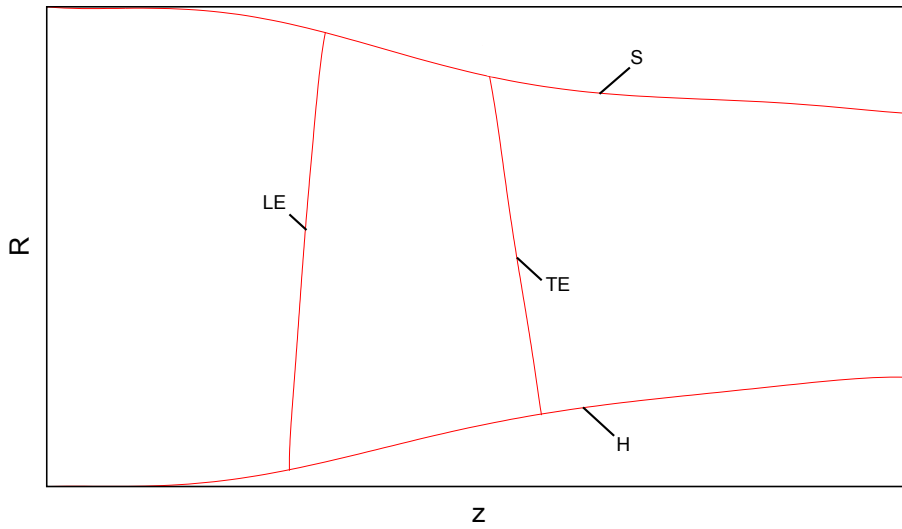


**Σχήμα 2.1:** Αριστερά φαίνεται το παραμετροποιημένο πτερύγιο και δεξιά οι αεροτομές που επιστρέφει το λογισμικό δημιουργίας της μορφής της πτερύγωσης.

## 2.1 Παράμετροι Σχεδιασμού

Οι παράμετροι που έχει επιλεγεί να χρησιμοποιούνται, είναι σημεία ελέγχου διδιάστατων καμπυλών Bezier. Όσα χρειάζεται να αναφερθούν για τις καμπύλες Bezier και τα πλεονεκτήματα που οδήγησαν στην επιλογή τους, βρίσκονται στο παράρτημα Α'.1. Παρακάτω περιγράφεται αναλυτικά η κάθε παράμετρος.

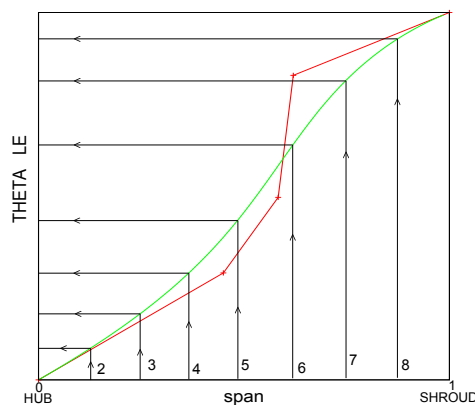
- Τα σημεία ελέγχου των καμπυλών Bezier που περιγράφουν την προβολή στο μεσημβρινό επίπεδο, της ακμής πρόσπτωσης (leading edge-LE) και της ακμής εκφυγής (trailing edge-TE) του πτερυγίου. Τα σημεία ελέγχου αυτά πρέπει να είναι σε κυλινδρικές συντεταγμένες (παράρτημα Α'.5.2). Ειδικά για την προβολή των ακμών του πτερυγίου στο μεσημβρινό επίπεδο και για τις τομές των κελυφών της πτερύγωσης που θα αναφερθούν παρακάτω, δίνεται μία εναλλακτική αντιμετώπιση. Οι παράμετροι μπορούν να μην είναι σημεία ελέγχου καμπυλών Bezier, αλλά σημεία των ίδιων των καμπυλών σε κυλινδρικές συντεταγμένες. Τέτοιες καμπύλες φαίνονται στο σχήμα 2.2. Στο εξής, η περίπτωση κατά την οποία χρησιμοποιούνται σημεία ελέγχου καμπυλών Bezier θα καλείται **mode 1** και αυτή κατά την οποία χρησιμοποιούνται σημεία των καμπυλών αυτών καθαυτών θα καλείται **mode 2**.
- Επόμενες παράμετροι είναι αυτές που εκφράζουν (με τον ίδιο τρόπο που εκφράζονται οι προβολές στο μεσημβρινό επίπεδο των ακμών πρόσπτωσης και εκφυγής, σχήμα 2.2) τις τομές με το μεσημβρινό επίπεδο των κελυφών της κεφαλής (shroud-S) και του ποδός (hub-H) της πτερύγωσης. Στην περίπτωση που τα κελύφη έχουν περίπλοκη μορφή (λ.χ. χωρίς συνέχεια πρώτης παραγώγου), μπορούν να χωριστούν σε διαδοχικά τμήματα, ώστε κάθε τμήμα να μπορεί να παρασταθεί



**Σχήμα 2.2:** Τομές των καμπυλών  $H, S, LE$  και  $TE$  με το μεσημβρινό επίπεδο.

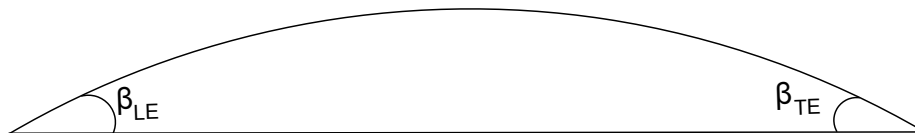
με μια καμπύλη Bezier με μικρό πλήθος σημείων ελέγχου.

- Ακόμη, εισάγονται παράμετροι για την κατανομή της γωνίας  $\theta$ , που δηλώνει την περιφερειακή θέση ως προς το μεσημβρινό επίπεδο, κατά το ύψος του πτερυγίου για την  $LE$  και για την  $TE$ . Αυτές οι παράμετροι είναι τα σημεία ελέγχου δύο διδιάστατων καμπυλών Bezier. Οι καμπύλες εκφράζουν τη γωνία  $\theta$  σε rad κατά το αδιάστατο ύψος του πτερυγίου. Ο όρος αδιάστατο ύψος πτερυγίου, χρησιμοποιείται καταχρηστικά καθώς έχει νόημα μόνο σε αξονικές μηχανές. Η γωνία  $\theta$ , υπολογίζεται μέσω των καμπυλών που αναφέρονται εδώ μόνο στις ακμές του πτερυγίου. Σε μία ακμή, γίνεται αντιστοίχιση στην καμπύλη που δίνει την γωνία  $\theta$  για την ακμή αυτή. Επεξηγηματικά παρατίθεται το σχήμα 2.3. Στο σχήμα φαίνεται το πολύγωνα που σχηματίζουν τα σημεία ελέγχου της καμπύλης Bezier και η καμπύλη που προκύπτει από αυτά. Φαίνεται χαρακτηριστικά πώς τα σημεία ελέγχου λειτουργούν ως “πόλοι έλξης” για την καμπύλη.



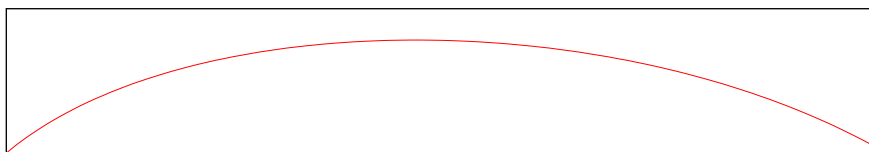
**Σχήμα 2.3:** Η γωνία  $\theta$  κατά το ύψος του πτερυγίου ( $span$ ) για κάποια από τις δύο ακμές ( $LE$  ή  $TE$ ).

- Όμοια με τη γωνία  $\vartheta$ , εισάγονται παράμετροι για τη γωνία μετάλλου  $\beta$  κατά το ύψος του πτερυγίου για την LE και για την TE (σχήμα 2.4).

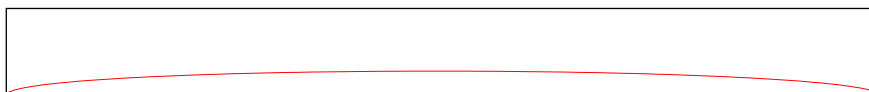


**Σχήμα 2.4:** Μέση γραμμή καμπυλότητας αεροτομής σε εκ περιστροφής επιφάνεια σταθερού ύψους πτερυγίου και η αντίστοιχη χορδή.

- Όμοια με τις γωνίες  $\vartheta$  και  $\beta$ , εισάγονται και οι επόμενες παράμετροι: η παράμετρος  $Z_{LE}$  για την LE και η  $Z_{TE}$  για την TE. Οι παράμετροι  $Z$  καθορίζουν την καμπυλότητα του πτερυγίου με τον τρόπο που εξηγείται στην επόμενη ενότητα. Οι τιμές των  $Z$  έχουν τιμές από 0 ως 1. Στα σχήματα 2.5 - 2.11 φαίνεται πως επηρεάζει η παράμετρος  $Z$  τη μέση γραμμή καμπυλότητας αεροτομής σε εκ περιστροφής επιφάνεια “σταθερού ύψους” του ίδιου πτερυγίου.

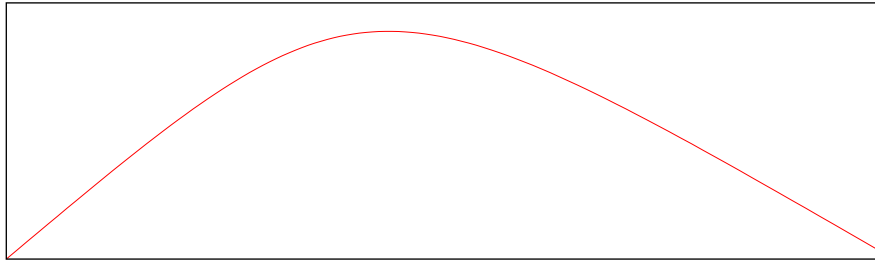


**Σχήμα 2.5:** Μέση γραμμή καμπυλότητας αεροτομής, σε εκ περιστροφής επιφάνεια “σταθερού ύψους” πτερυγίου, για  $Z_{LE} = 0.5$  και  $Z_{TE} = 0.5$ .

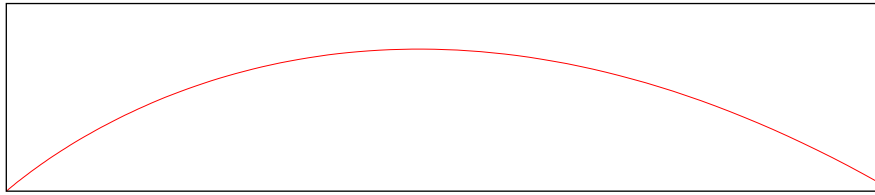


**Σχήμα 2.6:** Μέση γραμμή καμπυλότητας της ίδιας αεροτομής, για  $Z_{LE} = 0.1$  και  $Z_{TE} = 0.1$ .

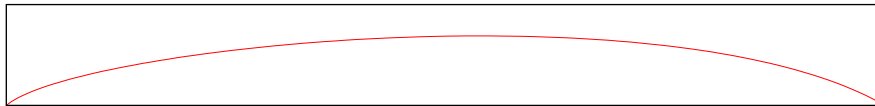
- Όπως θα εξηγηθεί στην επόμενη ενότητα, πριν γίνει η πρόσδοση πάχους στο πτερύγιο κατά τη δημιουργία της μορφής του, με τη βοήθεια των υπολοίπων παραμέτρων, έχουν οριστεί οι μέσες γραμμές καμπυλότητας για διάφορες θέσεις κατά το ύψος του πτερυγίου. Οι επόμενες παράμετροι που εισάγονται είναι τα σημεία ελέγχου καμπυλών Bezier που εκφράζουν το αδιαστατοποιημένο (με το μέγιστο πάχος της κάθε θέσης κατά το ύψος του) πάχος του πτερυγίου συναρτήσει του αδιάστατου μήκους τόξου της μέσης γραμμής καμπυλότητας σε όσες και όποιες θέσεις κατά το ύψος του πτερυγίου κρίνεται αναγκαίο. Σε κάποια



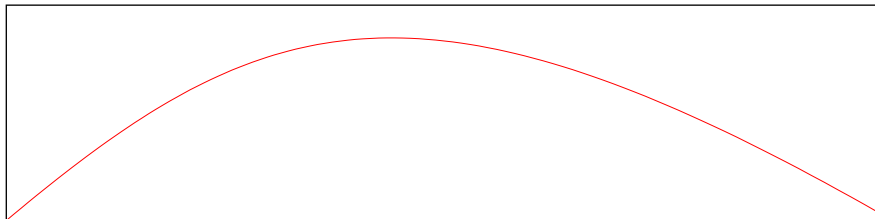
**Σχήμα 2.7:** Μέση γραμμή καμπυλότητας της ίδιας αεροτομής, για  $Z_{LE} = 1.0$  και  $Z_{TE} = 1.0$ .



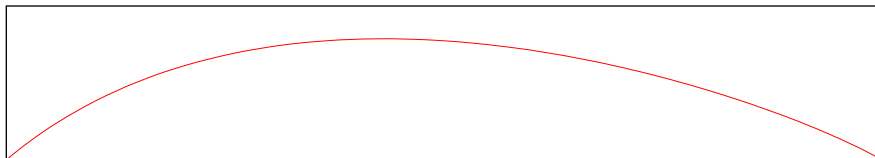
**Σχήμα 2.8:** Μέση γραμμή καμπυλότητας της ίδιας αεροτομής, για  $Z_{LE} = 0.1$  και  $Z_{TE} = 1.0$ .



**Σχήμα 2.9:** Μέση γραμμή καμπυλότητας της ίδιας αεροτομής, για  $Z_{LE} = 0.2$  και  $Z_{TE} = 0.4$ .



**Σχήμα 2.10:**  $Z_{LE} = 0.7$  και  $Z_{TE} = 0.9$ .



**Σχήμα 2.11:** Μέση γραμμή καμπυλότητας της ίδιας αεροτομής, για  $Z_{LE} = 0.8$  και  $Z_{TE} = 0.2$ .

πτερύγια, όπως για παράδειγμα σε κινούμενα πτερύγια στροβίλου τα οποία έχουν αρκετά καμπύλη μορφή, είναι καλύτερο να χρησιμοποιηθεί ως μέση γραμμή καμπυλότητας, μια γραμμή που δεν βρίσκεται στο μέσο πάχος του πτερυγίου. Στην

περίπτωση αυτή, πρέπει να δοθούν σημεία ελέγχου για καμπύλες και στις δύο πλευρές του πτερυγίου, διαφορετικές για την πλευρά υπερπίεσης (pressure side-PS) και την πλευρά υποπίεσης (suction side-SS). Σημειώνεται, ότι ως πάχος του πτερυγίου σε μια πλευρά ορίζεται εδώ η κάθετη απόσταση από την μέση γραμμή καμπυλότητας προς την εξωτερική επιφάνεια του πτερυγίου στην εν λόγω πλευρά. (Στο εξής, οι καμπύλες θα ονομάζονται **μέσες** γραμμές καμπυλότητας, ακόμη και στην περίπτωση που δεν είναι.)

- Οι δύο περιπτώσεις σχετικά με τις μέσες γραμμές καμπυλότητας που διακρίνονται και διατυπώνονται παραπάνω, επηρεάζουν και τις παραμέτρους που θα οριστούν εδώ, με τον ίδιο ακριβώς τρόπο. Οι τελευταίες παράμετροι, είναι τα σημεία ελέγχου μίας ή δύο καμπυλών Bezier (ανάλογα το ποια από τις δύο δυνατές περιπτώσεις επιλέγεται) που εκφράζουν τη μέγιστη πραγματική απόσταση από τη μέση γραμμή καμπυλότητας του πτερυγίου (μέγιστο πάχος) αντίστοιχα κατά το ύψος του πτερυγίου.

Στη συνέχεια, οι παράμετροι που παρουσιάστηκαν παραπάνω, συνοψίζονται σε έναν πίνακα με σύντομη περιγραφή για καθεμιά.

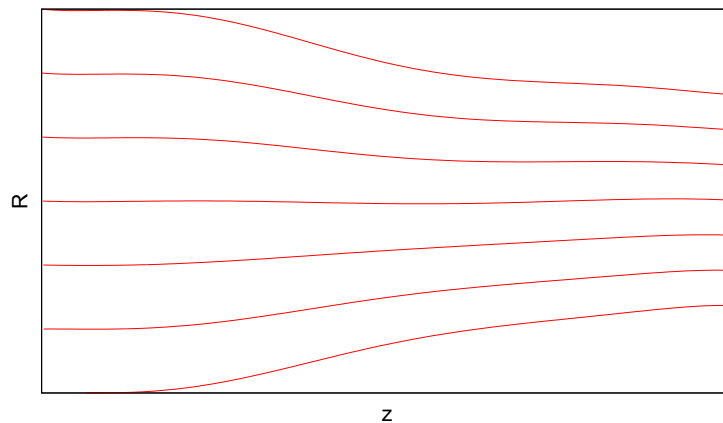
$r_e, z_e$	Πίνακες που περιέχουν τις συντεταγμένες των σημείων ελέγχου των καμπυλών Bezier που εκφράζουν την προβολή στο μεσημβρινό επίπεδο των ακμών του πτερυγίου (μία στήλη για την LE και μία για την TE). <sup>2</sup>
$r_{sh}, z_{sh}$	Πίνακες που περιέχουν τις συντεταγμένες των σημείων ελέγχου των καμπυλών Bezier που εκφράζουν την τομή με το μεσημβρινό επίπεδο των κελυφών του πτερυγίου (μία στήλη για το H και μία για το S).
$x_\theta, y_\theta$	Πίνακες που περιέχουν τις συντεταγμένες των σημείων ελέγχου των καμπυλών Bezier που εκφράζουν τη γωνία $\theta$ κατά το ύψος του πτερυγίου (μία στήλη για την LE και μία για την TE).
$x_\beta, y_\beta$	Πίνακες που περιέχουν τις συντεταγμένες των σημείων ελέγχου των καμπυλών Bezier που εκφράζουν τη γωνία $\beta$ κατά το ύψος του πτερυγίου (μία στήλη για την LE και μία για την TE).
$x_z, y_z$	Πίνακες που περιέχουν τις συντεταγμένες των σημείων ελέγχου των καμπυλών Bezier που εκφράζουν την παράμετρο $Z$ κατά το ύψος του πτερυγίου (μία στήλη για την LE και μία για την TE).
$x_{ps}, y_{ps}$	Πίνακες που περιέχουν τις συντεταγμένες των σημείων ελέγχου των καμπυλών Bezier που εκφράζουν τη συνάρτηση μορφής στις διάφορες θέσεις κατά το ύψος του πτερυγίου στην πλευρά υπερπίεσης (μία στήλη για κάθε θέση κατά το ύψος του πτερυγίου που επιλέχθηκε).
$x_{mps}, y_{mps}$	Πίνακες-διανύσματα που περιέχουν τις συντεταγμένες των σημείων ελέγχου των καμπυλών Bezier που εκφράζουν τη συνάρτηση μέγιστου πάχους για την πλευρά υπερπίεσης.
$x_{ss}, y_{ss}$	Πίνακες που περιέχουν τις συντεταγμένες των σημείων ελέγχου των καμπυλών Bezier που εκφράζουν τη συνάρτηση μορφής στις διάφορες θέσεις κατά το ύψος του πτερυγίου στην πλευρά υποπίεσης (μία στήλη για κάθε θέση κατά το ύψος του πτερυγίου που επιλέχθηκε). <sup>2</sup>
$x_{mss}, y_{mss}$	Πίνακες-διανύσματα που περιέχουν τις συντεταγμένες των σημείων ελέγχου των καμπυλών Bezier που εκφράζουν τη συνάρτηση μέγιστου πάχους για την πλευρά υποπίεσης.

<sup>1</sup> Στην περίπτωση που χρησιμοποιούνται σημεία των καμπυλών και όχι σημεία ελέγχου καμπυλών Bezier (mode 2), οι πίνακες αυτοί περιέχουν τις συντεταγμένες των σημείων ελέγχου που προκύπτουν από την προσέγγιση των καμπυλών με σημεία Bezier. Όμοια για τις παραμέτρους που παραμετροποιούν

## 2.2 Δημιουργία της Τριδιάστατης Γεωμετρίας

Με χρήση των παραμέτρων που περιγράφονται παραπάνω, μπορεί να γίνει δημιουργία της μορφής της πτερύγωσης με τα βήματα που περιγράφονται σε αυτήν την ενότητα.

- Στην περίπτωση που έχει επιλεγεί mode 2 γίνεται προσέγγιση των καμπυλών H,S,LE και TE με καμπύλες Bezier. Έτσι, προκύπτουν σημεία ελέγχου καμπυλών και τα modes 1 και 2 εκφυλίζονται σε μία περίπτωση όπου μπορούν να αξιοποιηθούν τα πλεονεκτήματα που παρέχουν οι καμπύλες Bezier. Υπενθυμίζεται, πως όλες οι καμπύλες αυτές βρίσκονται πάνω στο μεσημβρινό επίπεδο.
- Γίνεται γραμμική παρεμβολή μεταξύ των καμπυλών H και S και βρίσκεται ένα πλήθος ενδιάμεσων καμπυλών, που καθεμιά από αυτές είναι σε συγκεκριμένη θέση κατά το ύψος του πτερυγίου. Το σχήμα 2.12 είναι ένα παράδειγμα.



Σχήμα 2.12: H,S και ενδιάμεσες καμπύλες στο μεσημβρινό επίπεδο.

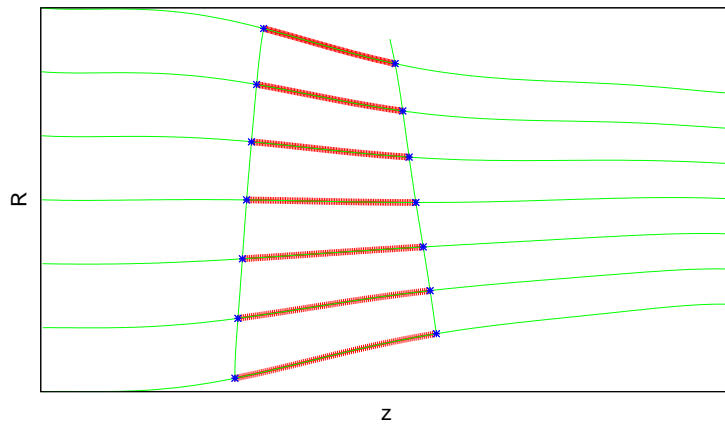
- Βρίσκονται τα σημεία τομής των καμπυλών TE και LE με τις καμπύλες H,S όπως και με τις ενδιάμεσες καμπύλες που βρέθηκαν στο προηγούμενο βήμα και απομονώνονται τα τμήματα μεταξύ των σημείων τομής καθώς μόνο αυτά χρειάζονται για τη δημιουργία της μορφής του πτερυγίου. Όσα περιγράφονται εδώ παριστάνονται στο σχήμα 2.13
- Για τα τμήματα που απομονώθηκαν από το προηγούμενο βήμα, γίνεται ο **σύμμορφος μετασχηματισμός**  $(R, z) \rightarrow \mu$  (η θεωρία για τους σύμμορφους μετασχηματισμούς βρίσκεται στο παράρτημα Α'4). Ο σύμμορφος μετασχηματι-

---

τα κελύφη της πτερύγωσης

<sup>2</sup>Στην περίπτωση που οι μέσες γραμμές καμπυλότητας βρίσκονται στο μέσο κάθε αεροτομής, οι πίνακες αυτοί περιέχουν τα ίδια ακριβώς στοιχεία με τους πίνακες για την πλευρά υπερπίεσης. Όμοια για τις παραμέτρους που παραμετροποιούν το μέγιστο πάχος για την πλευρά υποπίεσης.





**Σχήμα 2.13:** Η απομόνωση των τμημάτων των καμπυλών σταθερού ύψους που βρίσκονται μεταξύ των προβολών των ακμών του πτερυγίου στο μεσημβρινό επίπεδο.

σμός που χρησιμοποιείται είναι ο εξής:

$$\mu(R, z) = \mu(t) = \int_{t_{LE}}^t \frac{\sqrt{\left(\frac{dR(u)}{du}\right)^2 + \left(\frac{dz(u)}{du}\right)^2}}{R(u)} du \quad (2.1)$$

όπου με  $t$  συμβολίζεται η παράμετρος της καμπύλης Bezier της μέσης γραμμής που ανήκει το τμήμα. Για κάθε ενδιάμεση καμπύλη, ο μετασχηματισμός γίνεται μεταξύ του σημείου τομής με την προβολή στο μεσημβρινό επίπεδο της ακμής πρόσπτωσης και του σημείου τομής με την προβολή στο μεσημβρινό επίπεδο της ακμής εκφυγής.

Όμως ισχύει:

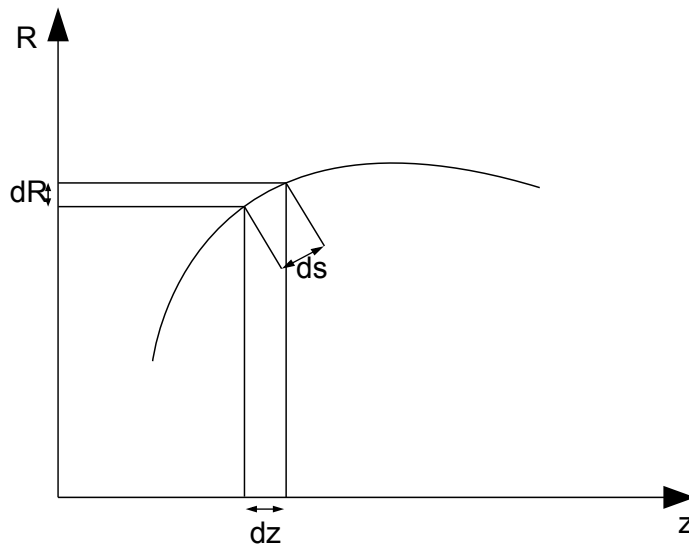
$$ds = \sqrt{dR^2 + dz^2} \quad (2.2)$$

όπως εξηγείται με το σχήμα 2.14 και με βάση το πυθαγόρειο θεώρημα, αν θεωρηθεί πως το στοιχειώδες τόξο της καμπύλης είναι τόσο μικρό ώστε να μπορεί να θεωρηθεί ευθύγραμμο τμήμα.

Έτσι το  $\mu$  μπορεί να υπολογιστεί από τον απλούστερο τύπο:

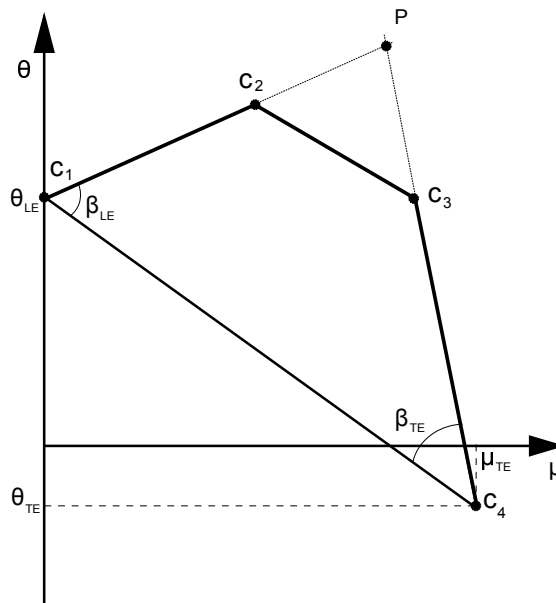
$$\mu(R, s) = \int_0^s \frac{ds}{R(u)} \quad (2.3)$$

- Στη συνέχεια, για κάθε καμπύλη που έχει βρεθεί στις διάφορες θέσεις κατά το ύψος του πτερυγίου, αντιστοιχίζεται κάθε τιμή του  $\mu$  με μια γωνία  $\vartheta$  μέσω της



Σχήμα 2.14: Εύρεση  $ds$ .

γωνίας  $\beta$  και της τιμής της παραμέτρου  $Z$  στην εν λόγω θέση (σχήμα 2.15). Η



Σχήμα 2.15: Εύρεση σημείων ελέγχου για τη σύμμορφη απεικόνιση σε κάποια θέση κατά το ύψος του πτερυγίου.

αντιστοίχιση αυτή, για τις καμπύλες H,S και κάθε ενδιάμεση καμπύλη στο μεσημβρινό επίπεδο κατά το ύψος του πτερυγίου, γίνεται με τη βοήθεια μιας καμπύλης Bezier που παράγεται από τα τέσσερα σημεία ελέγχου ( $C_1, C_2, C_3, C_4$ ). Οι θέσεις των  $C_1, C_4$  είναι γνωστές. Οι γωνίες  $\beta_{LE}$  και  $\beta_{TE}$ , που είναι οι γωνίες μέταλλου του πτερυγίου στην ακμή πρόσπτωσης και στην ακμή εκφυγής αντίστοιχα, δίνουν τη διεύθυνση που τοποθετείται το  $C_2$  και το  $C_3$  σχετικά με το  $C_1$  και το

$C_4$  αντίστοιχα. Στην κάθε θέση καθ' ύψος του πτερυγίου, οι γωνίες  $\beta, \theta$  και η παράμετρος  $Z$ , βρέθηκαν μέσω προσδιορισμού της παραμέτρου  $t$  της καμπύλης Bezier που τις παριστάνει. Πραγματοποιείται η επαναληπτική διαδικασία που περιγράφεται στο παράρτημα Α'.3.3 για να βρεθούν οι τιμές στη ζητούμενη θέση κατά το ύψος του πτερυγίου.

Η παράμετρος  $Z_{LE}$  τοποθετεί το  $C_2$  ως εξής:

$$Z_{LE} = \frac{C_1 C_2}{C_1 P} \quad (2.4)$$

και η παράμετρος  $Z_{TE}$  το  $C_3$  ως εξής :

$$Z_{TE} = \frac{C_4 C_3}{C_4 P} \quad (2.5)$$

Με την παραπάνω διαδικασία, για κάθε καμπύλη σε κάποια θέση κατά το ύψος του πτερυγίου, κάθε τιμή του  $\mu$  αντιστοιχίζεται με μία τιμή της γωνίας  $\vartheta$ . Όμως, από τον σύμμορφο μετασχηματισμό, κάθε τιμή του  $\mu$  έχει αντιστοιχηθεί σε ένα ζεύγος  $(R, z)$ . Έτσι, προκύπτει τριδιάστατη απεικόνιση  $(R, \vartheta, z)$  σε κυλινδρικές συντεταγμένες για τις καμπύλες στις διάφορες θέσεις κατά το ύψος του πτερυγίου. Αυτές είναι οι μέσες γραμμές καμπυλότητας για τις όποιες έγινε λόγος παραπάνω. Η ιδιότητα του σύμμορφου μετασχηματισμού να διατηρεί τις γωνίες, αξιοποιείται έτσι ώστε οι γωνίες που σχηματίζονται στο επίπεδο  $(\mu, \vartheta)$  να διατηρούνται και στο  $(R, \vartheta, z)$ . Η παράμετρος  $Z$  αποδεικνύεται πως είναι συνάρτηση γωνιών και, επομένως, διατηρείται. Ειδικά, η γωνία  $\beta$ , είναι πολύ σημαντικό ότι διατηρείται καθώς, από τις τιμές των παραμέτρων, υπάρχει εποπτεία για τη μορφή του πτερυγίου που δημιουργείται.

- Γίνεται απεικόνιση σε καρτεσιανές συντεταγμένες (μετασχηματισμοί μεταξύ κυλινδρικών και καρτεσιανών συντεταγμένων στο παράρτημα Α'.5) για τις μέσες γραμμές καμπυλότητας και βρίσκεται σε κάθε θέση, το εφαπτομενικό στην καμπύλη μοναδιαίο διάνυσμα  $\vec{t}$ . Επίσης, στις καμπύλες του μεσημβρινού επιπέδου από τις οποίες προέκυψαν οι μέσες γραμμές καμπυλότητας, πραγματοποιείται η ίδια διαδικασία και βρίσκεται σε κάθε θέση, το εφαπτομενικό μοναδιαίο διάνυσμα  $\vec{u}$ . Με χρήση αυτών των διανυσμάτων, βρίσκεται η διεύθυνση κατά την οποία θα αποδοθεί πάχος στο πτερύγιο. Η διεύθυνση αυτή, είναι για κάθε θέση, η διεύθυνση του διανύσματος  $\vec{n}$  που προκύπτει από την παρακάτω σχέση:

$$\vec{n} = \vec{t} \times (\vec{t} \times \vec{u}) \quad (2.6)$$

Στην ενότητα 3.6 γίνεται λεπτομερής περιγραφή της διαδικασίας που ακολουθεί το λογισμικό δημιουργίας της μορφής της πτερύγωσης για τον υπολογισμό των

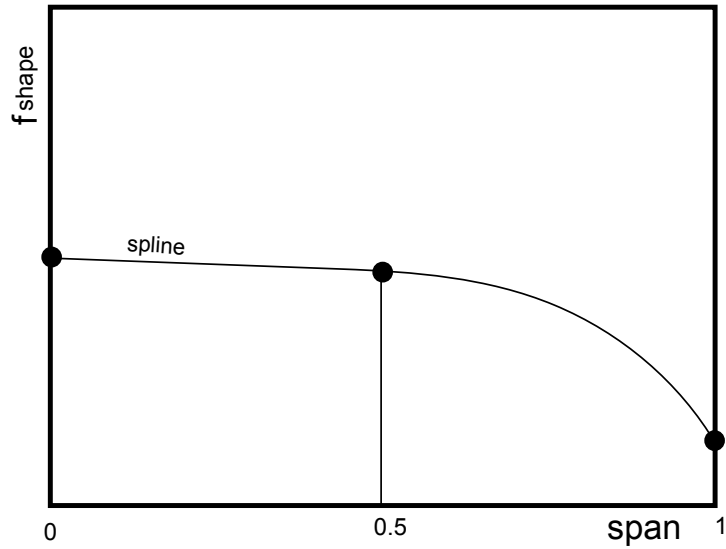
διανυσμάτων  $\vec{t}$  και  $\vec{u}$ .

- Λαμβάνοντας υπόψη τη φορά περιστροφής της απράκτου (θετική ή αρνητική, θετική φορά περιστροφής ορίζεται η ωρολογιακή, όταν ο παρατηρητής βρίσκεται στην είσοδο του ρευστού), το είδος της μηχανής (συμπιεστής ή στρόβιλος) και το είδος της πτερύγωσης (κινητή ή ακίνητη), προσδιορίζεται η πλευρά υπερπίεσης του πτερυγίου (pressure side), βάσει της κυρτότητάς του. Τα διανύσματα που βρέθηκαν στο προηγούμενο βήμα αλλάζουν (αν δεν έχουν τη σωστή) φορά, έτσι ώστε να κατευθύνονται προς την πλευρά υπερπίεσης.
- Σε κάθε πλευρά του πτερυγίου, υψώνονται από κάθε μέση καμπύλη, από κάθε σημείο της καμπύλης, δύο διανύσματα που αποδίδουν πάχος στο πτερύγιο, ένα για κάθε πλευρά. Τα διανύσματα αυτά έχουν τη διεύθυνση των διανυσμάτων  $\vec{n}$  που υψώνονται από κάθε θέση. Η φορά τους είναι ίδια με αυτήν των  $\vec{n}$  για την πλευρά υπερπίεσης και αντίθετη με αυτή των  $\vec{n}$  για την πλευρά υποπίεσης. Το μέτρο τους, για κάποια από τις δύο πλευρές του πτερυγίου, σε κάποια θέση της μέσης γραμμής καμπυλότητας που αντιστοιχεί σε μια θέση κατά το ύψος του πτερυγίου, είναι ίσο με το γινόμενο  $w$ :

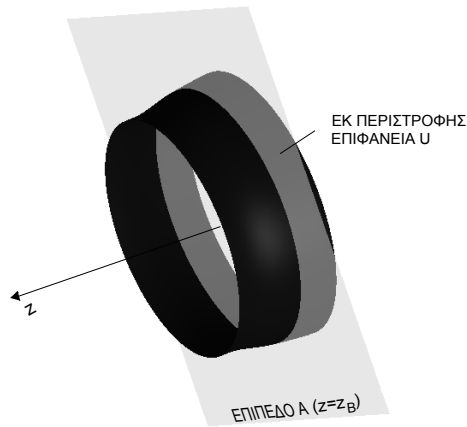
$$w = f_{shape} f_{span} \quad (2.7)$$

όπου  $f_{shape}$  είναι η τιμή της συνάρτησης μορφής, για την εν λόγω πλευρά, στην θέση κατά το ύψος του πτερυγίου και για το σημείο της μέσης γραμμής καμπυλότητας που εξετάζεται και  $f_{span}$  η τιμή της συνάρτησης για το μέγιστο πάχος στην εν λόγω θέση κατά το ύψος του πτερυγίου, στην εν λόγω πλευρά. Για τον προσδιορισμό της ποσότητας  $f_{shape}$  για κάθε σημείο των μέσων γραμμών καμπυλότητας, γίνεται ανακατανομή με B-splines (παράρτημα Α'.2) μεταξύ των τιμών της  $f_{shape}$  στις καμπύλες που βρίσκονται στις θέσεις κατά το ύψος του πτερυγίου στις οποίες κατά την παραμετροποίηση δόθηκαν συναρτήσεις μορφής (σχήμα 2.16). Η ανακατανομή γίνεται μεταξύ των αντίστοιχων σημείων των μέσων γραμμών καμπυλότητας, για παράδειγμα μεταξύ των σημείων που βρίσκονται στην 100η θέση κάθε καμπύλης. Η ποσότητα  $f_{span}$  για κάθε θέση κατά το ύψος του πτερυγίου, προσδιορίζεται όπως και οι γωνίες  $\beta, \theta$  και η παράμετρος  $Z$ , κατά τα γραφόμενα στο παράρτημα Α'.3.3.

- Η μορφή του πτερυγίου που προκύπτει από το προηγούμενο βήμα διορθώνεται με τέτοιο τρόπο ώστε για κάθε θέση κατά το ύψος του πτερυγίου, τα σημεία της εξωτερικής επιφάνειας του πτερυγίου που προέκυψαν από μία μέση γραμμή καμπυλότητας, να ανήκουν στην εκ περιστροφής επιφάνεια  $U$ . Την επιφάνεια  $U$ , όπως φαίνεται και στο σχήμα 2.17 την ορίζει η μέση γραμμή καμπυλότητας όταν περιστραφεί γύρω από τον άξονα των  $z$ . Το σημείο  $B'$  της διορθωμένης μορφής (σχήμα 2.18), ορίζεται ως η πλησιέστερη στο  $B$  τομή, της ευθείας που περνά από το σημείο  $B$  της αρχικής μορφής και έχει τη διεύθυνση της προβολής  $\vec{e}_n$  του διανύσματος  $\vec{c}$  στο επίπεδο  $z = z_B$  (επίπεδο  $A$ ), με την εκ περιστροφής επιφάνεια



**Σχήμα 2.16:** Παρεμβολή με *B-spline* μεταξύ των τιμών της  $f_{shape}$ . Εδώ, με γνωστές τις τιμές της συνάρτησης σε 3 θέσεις προσεγγίζεται η τιμή της συνάρτησης σε οποιαδήποτε θέση καθ' ύψος του πτερυγίου.



**Σχήμα 2.17:** Τομή εκ περιστροφής επιφάνειας με επίπεδο σταθερού  $z$ .

$U$ , όπου:

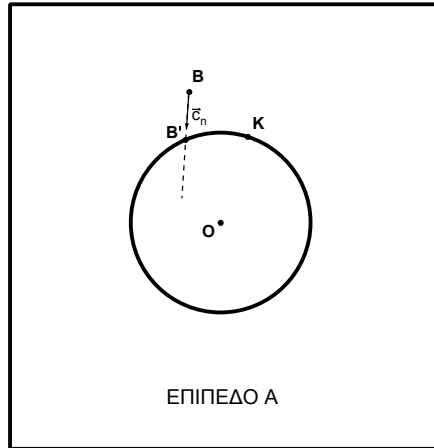
$$\vec{c} = (R_c, \vartheta_c, z_c) = \vec{t} \times \vec{n} \quad (2.8)$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω, για τις συντεταγμένες του  $B'$  ισχύει:

$$R_{B'} = R_K \quad (2.9)$$

και

$$z_{B'} = z_B = z_K \quad (2.10)$$



Σχήμα 2.18: Εύρεση σημείου διορθωμένης μορφής της περύγωσης.

Ακόμη, όπως φαίνεται και στο σχήμα 2.18, ισχύει

$$\vec{BB'} = \lambda \vec{c} \Rightarrow \vec{R}_{B'} - \vec{R}_B = \lambda \vec{c} \quad (2.11)$$

Από τη σχέση 2.11 προκύπτει για το x:

$$x_{B'} = x_B + \lambda x_c \Rightarrow$$

$$R_{B'} \cos(\vartheta_{B'}) = R_B \cos(\vartheta_B) + \lambda R_c \cos(\vartheta_c) \Rightarrow$$

$$\lambda = \frac{R_B \cos(\vartheta_B) - R_{B'} \cos(\vartheta_{B'})}{R_c \cos(\vartheta_c)} \quad (2.12)$$

Πάλι από τη σχέση 2.11, εδώ για το y, ισχύει:

$$y_{B'} = y_B + \lambda y_c \Rightarrow$$

$$R_{B'} \sin(\vartheta_{B'}) = R_B \sin(\vartheta_B) + \lambda R_c \sin(\vartheta_c) \quad (2.13)$$

Οι σχέσεις 2.12 και 2.13, συνδυάζονται και δίνουν τη σχέση 2.14

$$\vartheta_{B'} = \vartheta_c + a \sin\left(\frac{R_B}{R_{B'}} \sin(\vartheta_B - \vartheta_c)\right) \quad (2.14)$$

Στις παραπάνω σχέσεις, με  $K$  συμβολίζεται το σημείο της μέσης γραμμής καμπυλότητας που βρίσκεται στο ίδιο επίπεδο σταθερού  $z$  με το  $B$ . Στην ενότητα 3.7 φαίνεται πως προσδιορίζεται το σημείο  $K$ .

Από τον τρόπο που ορίζεται η διόρθωση αυτή φαίνεται πως η παρούσα μέθοδος παραμετροποίησης της μορφής πτερυγώσεων στροβιλομηχανών δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί για ακτινικές μηχανές, καθώς στην ακτινική περιοχή κάθε κελύφους ακτινικής μηχανής, το επίπεδο  $A$  περιέχει την ενδιαμέση καμπύλη και επομένως η διόρθωση δεν έχει νόημα.





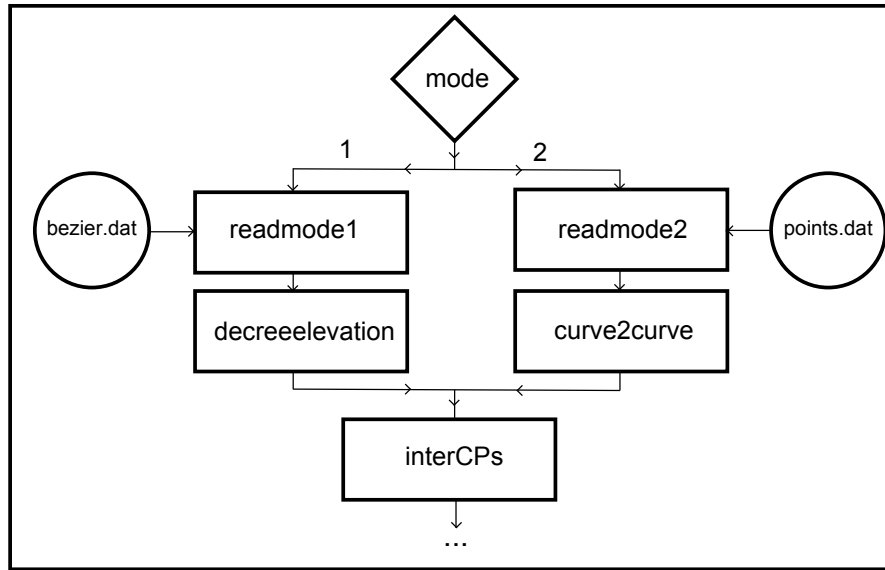
# Κεφάλαιο 3

## Περιγραφή Κώδικα

Στο κεφάλαιο αυτό, περιγράφεται ο κώδικας του λογισμικού δημιουργίας της μορφής της πτερύγωσης, έτσι ώστε να είναι πιο κατανοητός σε κάποιον που θέλει να το τροποποιήσει, να το αναβαθμίσει ή απλά να κατανοήσει τα βήματα που ακολουθούνται και τον σκοπό που εξυπηρετεί το καθένα από αυτά.

### 3.1 Ανάγνωση Αρχείων Εισόδου - mode 1 ή 2

Αρχικά διαβάζεται το αρχείο **preferences.dat**. Από το αρχείο αυτό, εισάγονται στο λογισμικό δημιουργίας της μορφής της πτερύγωσης, οι επιλογές που πρέπει να κάνει ο χρήστης. Οι επιλογές αυτές, ρυθμίζουν διάφορες διαδικασίες του αλγορίθμου, μέσω της τιμής ακεραίων μεταβλητών, για των οποίων τη σημασία έχει γίνει σύμβαση (οι συμβάσεις για τις επιλογές και η μορφή του αρχείου preferences.dat παρουσιάζονται στο παράρτημα Β'.1). Στη συνέχεια, διαβάζεται μέσω κατάλληλου υποπρογράμματος το αρχείο **bezier.dat** ή το αρχείο **points.dat**, ανάλογα αν οι ακμές του πτερυγίου και τα κελύφη περιγράφονται με καμπύλες Bezier ή διακριτά σημεία αντίστοιχα. Το αρχείο bezier.dat διαβάζεται από το υποπρόγραμμα **readmode1** ενώ το points.dat διαβάζεται από το υποπρόγραμμα **readmode2**. Αν χρησιμοποιείται mode 1, μεταξύ του υποπρογράμματος readmode1 και της συνέχειας του προγράμματος παρεμβάλλεται το υποπρόγραμμα **degreeelevation** ενώ αν χρησιμοποιείται mode 2, μεταξύ του υποπρογράμματος readmode2 και της συνέχειας του προγράμματος παρεμβάλλεται το υποπρόγραμμα **curve2curve**. Η διάκριση των περιπτώσεων για τα modes 1,2 φαίνεται και στο λογικό διάγραμμα του σχήματος 3.1. Το υποπρόγραμμα degreeelevation ελέγχει αν είναι ίσο, και σε περίπτωση μη ισότητας καθιστά ίσο το πλήθος των σημείων ελέγχου μεταξύ των αντίστοιχων τμημάτων των H και S με τον τρόπο που αναφέρεται στο παράρτημα Α'.1.1. Το υποπρόγραμμα curve2curve, χρησιμοποιώντας ελάχιστα



**Σχήμα 3.1:** Λογικό διάγραμμα του τμήματος του κώδικα που καλεί τα υποπρογράμματα που μετατρέπουν τις δύο περιπτώσεις (*mode 1* ή *2*) σε μία.

τετράγωνα, προσεγγίζει με καμπύλη Bezier τα δοθέντα σημεία και στο εξής χρησιμοποιούνται τα σημεία ελέγχου που προκύπτουν από την προσέγγιση. Λεπτομερέστερα, το υποπρόγραμμα *curve2curve*:

- Αρχικά, βρίσκει το αδιάστατο μήκος τόξου σε κάθε θέση, της κάθε προς προσέγγιση καμπύλης που σχηματίζεται από τα  $N_p$  δοθέντα σημεία στο διδιάστατο επίπεδο. Η αδιαστατοποίηση γίνεται με το συνολικό μήκος τόξου της καμπύλης που θα προσεγγισθεί. Για την εύρεση του μήκους τόξου από την αρχή της καμπύλης, σε κάθε θέση, τα δοθέντα σημεία παρεμβάλλονται από κυβικές B-splines (παράρτημα Α'.2). Ισχύει

$$s_1 = 0 \quad (3.1)$$

και

$$s_i = \frac{s_{i-1} + \Delta s_i}{\sum_{i=2}^{N_p} \Delta s_i} \quad \text{για} \quad i = 2, 3, \dots, N_p \quad (3.2)$$

- Στη συνέχεια, τα σημεία ελέγχου της καμπύλης Bezier που πρέπει να βρεθούν, τοποθετούνται πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει το πρώτο σημείο με το τελευταίο της καμπύλης που πρέπει να προσεγγισθεί. Η αρχική τοποθέτηση των  $N + 1$  σημείων ελέγχου, για το κάθε σημείο  $i$  όπου οι τιμές για το  $i$  είναι από 0 ως  $N$ , γίνεται από τη σχέση

$$\vec{r}_{cp}^i = \vec{r}_{curve}^1 + \frac{i-1}{n-1} (\vec{r}_{curve}^n - \vec{r}_{curve}^1) \quad (3.3)$$

Αναλυτικά για την κάθε συντεταγμένη:

$$R_{cp}^i = R_{curve}^1 + \frac{i-1}{n-1}(R_{curve}^n - R_{curve}^1) \quad (3.4)$$

$$z_{cp}^i = z_{curve}^1 + \frac{i-1}{n-1}(z_{curve}^n - z_{curve}^1) \quad (3.5)$$

Αυτή είναι μια αρχική τοποθέτηση, προκειμένου, με τη διαδικασία που θα ακολουθήσει, να βρεθούν οι θέσεις των σημείων ελέγχου που παράγουν την καμπύλη Bezier που προσεγγίζει τα δοθέντα σημεία. Το πλήθος των σημείων ελέγχου που χρησιμοποιούνται, δίνεται από το αρχείο preferences.dat.

- Ακολουθεί δημιουργία καμπύλης Bezier, με πλήθος σημείων  $N_w$ , **μεγαλύτερο** του πλήθους των σημείων της προς προσέγγιση καμπύλης, που προκύπτει από τα σημεία ελέγχου που τοποθετήθηκαν γραμμικά όπως αναφέρεται παραπάνω (δημιουργείται μία ευθεία γραμμή). Στη συνέχεια, γίνεται υπολογισμός του μήκους τόξου  $s_j$  από την αρχή της καμπύλης αυτής ως το κάθε σημείο της  $j$  με τη χρήση κυβικών B-splines για παρεμβολή μεταξύ των σημείων όπως έγινε και παραπάνω.
- Κάθε  $s_j$  αντιστοιχίζεται με μια τιμή της παραμέτρου  $t$  της καμπύλης Bezier και γίνεται ανακατανομή μέσω κυβικών B-splines ώστε να προκύψουν οι τιμές της παραμέτρου  $t$  για τις οποίες αντιστοιχεί πλήθος σημείων ίσο με αυτό της προς προσέγγιση καμπύλης. Τα σημεία που αντιστοιχούν στις τιμές της παραμέτρου  $t$  που βρέθηκαν εδώ, επιλέγονται έτσι ώστε να χωρίζουν την καμπύλη σε ίσα μήκη τόξου.
- Υπολογίζεται το μητρώο  $C_{bez}$  του οποίου κάθε γραμμή αντιστοιχεί σε ένα σημείο ελέγχου της καμπύλης Bezier που αναζητείται και κάθε στήλη του αντιστοιχεί σε ένα σημείο της καμπύλης Bezier που βρέθηκε στο προηγούμενο βήμα. Το στοιχείο  $c_{bez}^{i,j}$  της  $i$  γραμμής και της  $j$  στήλης υπολογίζεται ως εξής:

$$c_{bez}^{i,j} = \sum_{k=0}^N m_{i,k} t_j^k \quad (3.6)$$

όπου το  $m_{i,k}$  δίνεται από τη σχέση Α'.4 του παραρτήματος Α'.1. Το  $k$  στο  $t_j$  είναι εκθέτης και όχι άνω δείκτης.

- Υπολογίζεται το μητρώο  $A$  και τα διανύσματα  $\vec{b}_R$  και  $\vec{b}_z$  που συναντώνται όταν η διπλή εξίσωση

$$A \cdot \vec{r} = \vec{b} \quad (3.7)$$

αναλύεται στις

$$A \cdot \vec{R} = \vec{b}_R \quad (3.8)$$

$$A \cdot \vec{z} = \vec{b}_z \quad (3.9)$$

όπου το διάνυσμα  $\vec{R}$  αντιστοιχεί στις ακτινικές θέσεις και το διάνυσμα  $\vec{z}$  στις αξονικές θέσεις των σημείων ελέγχου της ζητούμενης καμπύλης Bezier. Οι εξισώσεις 3.8 και 3.9 αναπτύσσονται στην 3.10 και στην 3.11 αντίστοιχα.

$$\begin{bmatrix} a_{0,0} & a_{0,1} & \dots & a_{0,N} \\ a_{1,0} & a_{1,1} & \dots & a_{1,N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{N,0} & a_{N,1} & \dots & a_{N,N} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} R_0 \\ R_1 \\ \vdots \\ R_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{R0} \\ b_{R1} \\ \vdots \\ b_{RN} \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

$$\begin{bmatrix} a_{0,0} & a_{0,1} & \dots & a_{0,N} \\ a_{1,0} & a_{1,1} & \dots & a_{1,N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{N,0} & a_{N,1} & \dots & a_{N,N} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z_0 \\ z_1 \\ \vdots \\ z_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{z0} \\ b_{z1} \\ \vdots \\ b_{zN} \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

όπου τα στοιχεία  $a_{i,j}$ ,  $b_{Ri}$  και  $b_{zi}$  υπολογίζονται από τις σχέσεις 3.12 ως 3.14.

$$a_{i,j} = \sum_{k=1}^{N_p} C_{bez}^{i,k} C_{bez}^{j,k} \quad (3.12)$$

$$b_{Ri} = \sum_{k=1}^{N_p} C_{bez}^{i,k} R_{curve}^k \quad (3.13)$$

$$b_{zi} = \sum_{k=1}^{N_p} C_{bez}^{i,k} z_{curve}^k \quad (3.14)$$

- Γίνεται επίλυση του συστήματος εξισώσεων 3.10 ως προς το διάνυσμα  $\vec{R}$  και του 3.11 ως προς το διάνυσμα  $\vec{z}$ . Για την επίλυση, χρησιμοποιείται η μέθοδος Crout[3] η οποία περιγράφεται στο παράρτημα Α'4.2.

Με την εύρεση των σημείων ελέγχου των καμπυλών Bezier που προσεγγίζουν τις αρχικές καμπύλες, οι δύο περιπτώσεις εκφυλίζονται σε μία. Υπενθυμίζεται πως όταν χρησιμοποιείται mode 2 όλα τα τμήματα έχουν το ίδιο πλήθος σημείων ελέγχου οπότε δεν χρειάζεται προσαρμογή του πλήθους τους. Ανεξάρτητα με το αν χρησιμοποιείται mode 1 ή mode 2, από το σημείο αυτό και στη συνέχεια του κώδικα ακολουθείται η ίδια διαδικασία.

## 3.2 Εύρεση Ενδιάμεσων Καμπυλών Σταθερού Ύψους Πτερυγίου

Στη συνέχεια, το υποπρόγραμμα **interCPs** κάνει γραμμική παρεμβολή μεταξύ των σημείων ελέγχου των τμημάτων του H και του S ώστε να προκύψουν ενδιάμεσες καμπύλες σταθερού ύψους πτερυγίου, οι οποίες θα χρησιμοποιηθούν στη συνέχεια (αυτή η γραμμική παρεμβολή, επέβαλε την ύπαρξη του *degreeelevation*).

Για παράδειγμα, αν χρησιμοποιούνται τρία τμήματα για το H και τρία για το S και στο αρχείο *preferences.dat* αναγράφεται πως χρειάζονται δέκα ενδιάμεσες καμπύλες σταθερού ύψους πτερυγίου, θα γίνει γραμμική παρεμβολή μεταξύ: του πρώτου σημείου ελέγχου του πρώτου τμήματος του H και του πρώτου σημείου του πρώτου τμήματος του S, του δεύτερου με το δεύτερο κοκ για όλα τα τμήματα. Υπενθυμίζουμε πως έχει τεθεί ο περιορισμός στον χρήστη να χρησιμοποιήσει ίσο πλήθος τμημάτων για το H και για το S, δηλαδή **δεν** μπορεί να δώσει το S σε δύο τμήματα και το H σε τρία. Η γραμμική παρεμβολή, για κάθε τμήμα, στο σημείο ελέγχου  $k$ , γίνεται με τις σχέσεις 3.15 και 3.16 που δίνουν τις κυλινδρικές συντεταγμένες των σημείων ελέγχου των καμπυλών Bezier που παριστάνουν τις ζητούμενες ενδιάμεσες καμπύλες σταθερού ύψους πτερυγίου στο μεσημβρινό επίπεδο.

$$R_{sh}^{k,i+2} = R_{sh}^{k,1} + \frac{i}{I_c + 1} (R_{sh}^{k,2} - R_{sh}^{k,1}) \quad (3.15)$$

$$z_{sh}^{k,i+2} = z_{sh}^{k,1} + \frac{i}{I_c + 1} (z_{sh}^{k,2} - z_{sh}^{k,1}) \quad (3.16)$$

όπου  $I_c$  είναι το πλήθος των ενδιάμεσων καμπυλών που ζητήθηκαν. Σημειώνεται πως η αρίθμηση των καμπυλών είναι:

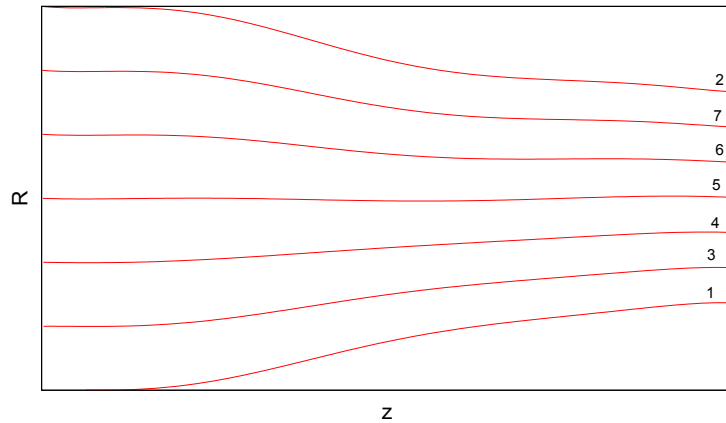
$i = 1$  :Hub

$i = 2$  :Shroud

$i = 3, 4, \dots, I_c + 2$  :οι ενδιάμεσες καμπύλες, ξεκινώντας από αυτήν που βρίσκεται πλησιέστερα στο Hub (παράδειγμα το σχήμα 3.2)

## 3.3 Απεικόνιση Δεδομένων

Μετά την εύρεση των σημείων ελέγχου καμπυλών Bezier που πραγματοποιήθηκε στο προηγούμενο βήμα, ακολουθεί το υποπρόγραμμα **crvs** που παριστάνει γραφικά τις καμπύλες Bezier που προκύπτουν από αυτά. Δημιουργείται ένα αρχείο που περιέχει τις



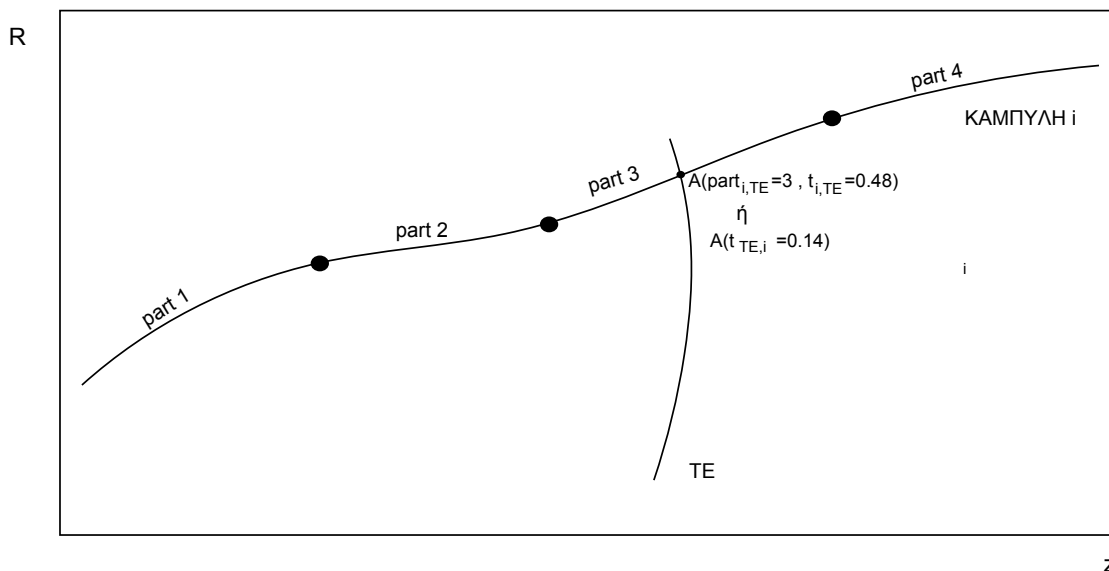
**Σχήμα 3.2:** Η αριθμηση των καμπυλών σταθερού ύψους πτερυγίου στο μεσημβρινό επίπεδο.

καμπύλες που παριστάνουν καμπύλες H,S,LE και TE καθώς και τις  $I_c$  ενδιάμεσες καμπύλες, όπως αυτές παράγονται σύμφωνα με τη θεωρία για τις καμπύλες Bezier που παρατίθεται στο παράρτημα Α'.1. Αυτό το βήμα δεν είναι μέρος της διαδικασίας, όμως κατά την τροποποίηση του λογισμικού, το βήμα αυτό συμβάλλει στην εύρεση λαθών που μπορεί να γίνουν από τον προγραμματιστή που τροποποιεί το λογισμικό. Ακόμη, οι καμπύλες H και S που βρίσκονται, είναι αυτές που με περιστροφή τους γύρω από τον άξονα  $z$  παράγουν τα κελύφη της μηχανής.

### 3.4 Εύρεση Προβολών των Αεροτομών του Πτερυγίου στο Μεσημβρινό Επίπεδο

Για τη δημιουργία της μορφής του πτερυγίου, πρέπει να βρεθούν τα τμήματα των ενδιάμεσων καμπυλών σταθερού ύψους πτερυγίου που βρίσκονται μεταξύ των προβολών στο μεσημβρινό επίπεδο των LE και TE. Τα τμήματα αυτά, αποτελούν τις προβολές στο μεσημβρινό επίπεδο, των αεροτομών του πτερυγίου στις εκ περιστροφής επιφάνειες που ορίζονται από την περιστροφή κάθε ενδιάμεσης καμπύλης σταθερού ύψους γύρω από τον άξονα  $z$ . Για την εύρεση των ζητούμενων τμημάτων, πρέπει να βρεθούν τα σημεία τομής των ενδιάμεσων καμπυλών, όπως και των καμπυλών H και S, με τις προβολές των ακμών (πρόσπτωσης και εκφυγής) του πτερυγίου στο μεσημβρινό επίπεδο, (σχήμα 2.13). Η εύρεση των σημείων τομής, πραγματοποιείται από το υποπρόγραμμα **Crosssections**. Το υποπρόγραμμα αυτό βρίσκει τα σημεία τομής μεταξύ των ζευγών καμπυλών Bezier που τέμνονται. Η εύρεση του κάθε σημείου τομής μεταξύ δύο καμπυλών Bezier, γίνεται μέσω της εύρεσης της τιμής της παραμέτρου  $t$  μιας από τις δύο καμπύλες στη θέση όπου οι καμπύλες τέμνονται. Λόγω του διαχωρισμού των καμπυλών H και S σε τμήματα, για τις καμπύλες αυτές αλλά και για τις ενδιάμεσες καμπύλες που προκύπτουν

από αυτές, για το σημείο τομής, η τιμή της παραμέτρου  $t$  πρέπει να συνοδεύεται από την τιμή μιας ακέραιης μεταβλητής που χαρακτηρίζει το τμήμα στο οποίο βρίσκεται το σημείο τομής (σχήμα 3.3). Παρακάτω, φαίνεται η διαδικασία με την οποία το υπο-



**Σχήμα 3.3:** Το σημείο τομής  $A$  προσδιορίζεται μέσω του προσδιορισμού της τιμής της παραμέτρου  $t$  στο σημείο τομής.

πρόγραμμα Crosssections βρίσκει τα σημεία τομής (δηλαδή τις τιμές των παραμέτρων  $t$  των τεμνόμενων καμπυλών Bezier).

- Αρχικά, για τη γρηγορότερη σύγκλιση της επαναληπτικής διαδικασίας που θα ακολουθήσει, δίνονται αρχικές τιμές στην παράμετρο  $t$  των καμπυλών Bezier που απεικονίζουν τις ακμές, με τέτοιο τρόπο ώστε η τιμές αυτές να είναι, κατά το δυνατό, πλησιέστερες στις τιμές του σημείου τομής. Η απόδοση αρχικής τιμής, που χρησιμοποιείται στον κώδικα του λογισμικού δημιουργίας της μορφής της πτερύγωσης, αναφέρεται στην περίπτωση όπου τα σημεία ελέγχου των καμπυλών Bezier που παριστάνουν τις προβολές των ακμών στο μεσημβρινό επίπεδο (ή αντίστοιχα τα σημεία των καμπυλών, αν χρησιμοποιείται mode 2) δόθηκαν έτσι ώστε να ξεκινούν από την κεφαλή του πτερυγίου και να καταλήγουν στο πόδι. Η απόδοση αρχικής τιμής πραγματοποιείται με τους τύπους

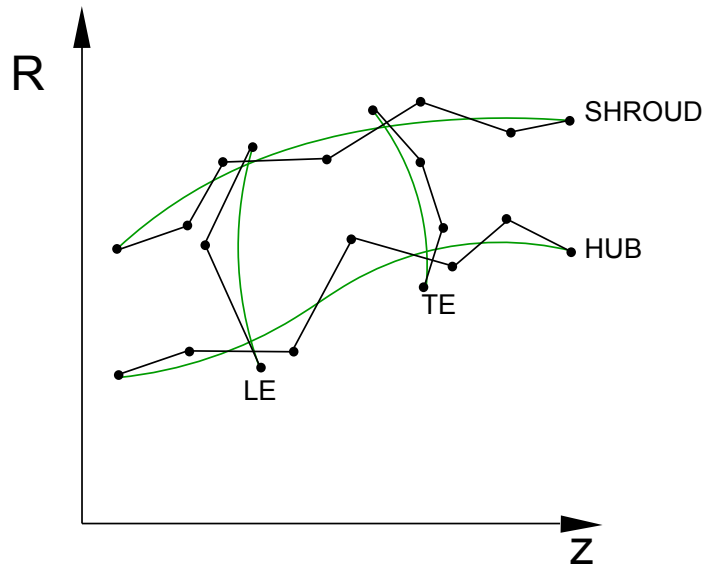
$$t_0(1) = 0.05$$

$$t_0(2) = 0.995$$

$$t_0(i) = \frac{i-2}{I_c+1} \quad \text{για} \quad i = 3, 4, \dots, I_c+2$$

- Εισάγεται ένας μετρητής ο οποίος έχει τιμή ίση με το πλήθος των σημείων τομής που έχουν βρεθεί. Όταν ολοκληρωθεί η διαδικασία εύρεσης των σημείων

τομής, γίνεται έλεγχος αν βρέθηκαν όλα τα ζητούμενα σημεία τομής. Αν κατά τον έλεγχο η τιμή του μετρητή δεν είναι ίση με  $2I_c + 4$ , η εκτέλεση του λογισμικού σταματά και εμφανίζεται σχετικό μήνυμα. Αυτό το ανεπιθύμητο φαινόμενο, μπορεί να συναντηθεί σε περίπτωση που έχει δοθεί από το αρχείο `bezier.dat` (ή το `points.dat` για mode 2) γεωμετρία η οποία δεν έχει τα αναγκαία σημεία τομής. Πρέπει δηλαδή οι καμπύλες LE και TE να τέμνονται με τις καμπύλες H και S όπως φαίνεται στο σχήμα 3.4.



**Σχήμα 3.4:** Οι καμπύλες LE και TE πρέπει να τέμνονται με τις καμπύλες H και S.

- Δημιουργούνται  $I_{parts}(2I_c + 4)$  ζεύγη καμπυλών Bezier. Με  $I_{parts}$  συμβολίζεται το πλήθος των τμημάτων στα οποία χωρίζεται καθεμιά από τις καμπύλες σταθερού ύψους πτερυγίου στο μεσημβρινό επίπεδο.
- Για κάθε ζεύγος πραγματοποιείται επαναληπτική διαδικασία για την εύρεση σημείου τομής (αν υπάρχει). Για την προβολή της ακμής στο μεσημβρινό επίπεδο, επιλέγεται το σημείο που αντιστοιχεί στην αρχική τιμή που αποδόθηκε στην παράμετρο  $t$  όπως περιγράφεται παραπάνω, ενώ για το τμήμα της καμπύλης σταθερού ύψους πτερυγίου επιλέγεται το σημείο που αντιστοιχεί σε  $t = 0.5$ . Η επαναληπτική διαδικασία που αναφέρεται παραπάνω, πραγματοποιείται για την επίλυση του συστήματος  $2 \times 2$  που αποτελείται από τις εξισώσεις

$$R_{edge}(t_{edge}) - R_{part}(t_{part}) = 0$$

$$z_{edge}(t_{edge}) - z_{part}(t_{part}) = 0$$

και έχει αγνώστους τις παραμέτρους  $t_{edge}, t_{part}$ . Για την επίλυση του συστήματος χρησιμοποιείται η μέθοδος Newton-Raphson[3] που περιγράφεται στο παράρτημα



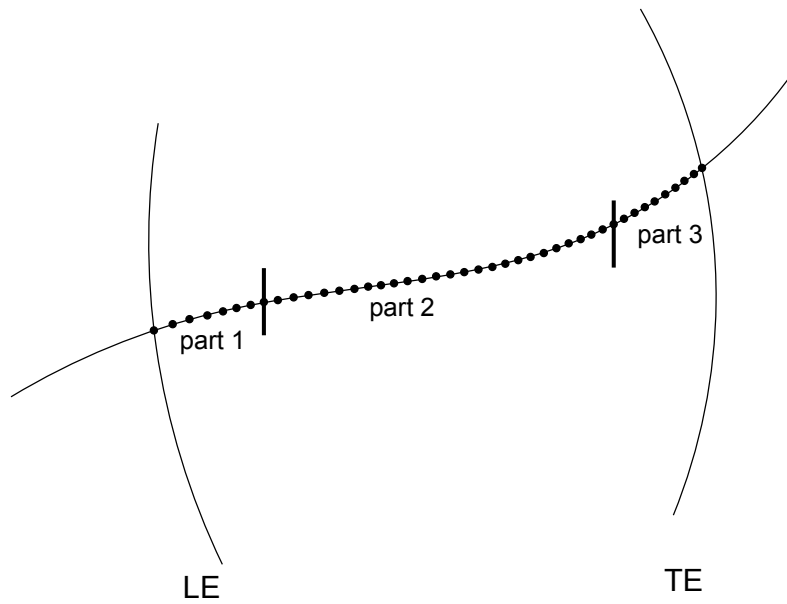
Α'4.1. Η μέθοδος εφαρμόζεται με χρήση των υποπρογραμμάτων **coeftoft**, **use-coeftoft** και **inibezier** τα οποία καλούνται από το υποπρόγραμμα **crosssections**.

Μετά το υποπρόγραμμα **crosssections**, ακολουθεί το υποπρόγραμμα **BladeIsolation**. Το υποπρόγραμμα αυτό, για κάθε διδιάστατη καμπύλη σταθερού ύψους πτερυγίου στο μεσημβρινό επίπεδο, στο τμήμα μεταξύ των τομών με τις ακμές, υπολογίζει ένα νέο πλήθος σημείων που ανήκουν σε αυτήν. Αυτό το νέο πλήθος σημείων, αποτελεί ένα μέρος της καμπύλης που χρησιμοποιείται ως αυτό το σημείο. Η νέα καμπύλη ξεκινά στο σημείο τομής της αρχικής καμπύλης με την προβολή στο μεσημβρινό επίπεδο της ακμής πρόσπτωσης και καταλήγει στο σημείο τομής της αρχικής καμπύλης με την προβολή στο μεσημβρινό επίπεδο της ακμής εκφυγής του πτερυγίου. Όπως έχει αναφερθεί και παραπάνω, κάθε καμπύλη μπορεί να αποτελείται από περισσότερες από μία καμπύλη Bezier. Το υποπρόγραμμα **BladeIsolation**, για να ενώσει τα τμήματα που βρίσκονται μεταξύ των σημείων τομής, ακολουθεί για όλες τις καμπύλες σταθερού ύψους πτερυγίου την παρακάτω διαδικασία

- Προσδιορίζει τα τμήματα της καμπύλης σχετικά με τα σημεία τομής με τις προβολές των ακμών. Για ένα τμήμα δύναται να ισχύει:
  - Το τμήμα, να βρίσκεται ολόκληρο πριν την τομή της καμπύλης με την προβολή της ακμής πρόσπτωσης.
  - Το τμήμα, να βρίσκεται ολόκληρο μετά την τομή της καμπύλης με την προβολή της ακμής εκφυγής.
  - Το τμήμα, να βρίσκεται ολόκληρο μεταξύ των σημείων τομής.
  - Και τα δύο σημεία τομής να ανήκουν στο τμήμα.
  - Το τμήμα, να περιέχει το σημείο τομής με την προβολή της ακμής πρόσπτωσης του πτερυγίου.
  - Το τμήμα, να περιέχει το σημείο τομής με την προβολή της ακμής εκφυγής του πτερυγίου.

Για κάθε τμήμα, αντίστοιχα με τις παραπάνω περιπτώσεις, βρίσκονται τα σημεία της νέας καμπύλης που δημιουργείται. (Υπενθυμίζεται, πως η κάθε νέα καμπύλη, είναι η προβολή στο μεσημβρινό επίπεδο, της αεροτομής του πτερυγίου στην εκ περιστροφής επιφάνεια, που αντιστοιχεί στο ύψος πτερυγίου στο οποίο αντιστοιχεί η αρχική καμπύλη.)

- Για να είναι, κατά το δυνατό, ομοιόμορφα κατανεμημένα τα σημεία στη νέα καμπύλη, ανάλογα αν το κάθε τμήμα της παλιάς συμμετέχει ολόκληρο στη νέα καμπύλη ή όχι, χρησιμοποιείται μεγαλύτερο πλήθος σημείων ή μικρότερο αντίστοιχα όπως φαίνεται επεξηγηματικά στο σχήμα 3.5. Πρώτα βρίσκονται οι τιμές της παραμέτρου  $t$  των καμπυλών Bezier που αντιστοιχούν στα ζητούμενα σημεία. Έχει επιλεγεί να χρησιμοποιούνται
  - 100 σημεία για κάθε τμήμα της αρχικής καμπύλης που συμμετέχει ολόκληρο



**Σχήμα 3.5:** Στη νέα καμπύλη πρέπει να συμμετέχουν περισσότερα σημεία από το τμήμα 2 από όσα θα συμμετέχουν από τα τμήματα 1 και 3, καθώς το τμήμα 2 βρίσκεται ολόκληρο μεταξύ των σημείων τομής της αρχικής καμπύλης με τις προβολές των ακμών στο μεσημβρινό επίπεδο.

στη νέα.

- $200 \times (t_{TE} - t_{LE})$  σημεία για το τμήμα της αρχικής καμπύλης που περιέχει και τα δύο σημεία τομής της αρχικής καμπύλης με τις προβολές των ακμών στο μεσημβρινό επίπεδο (αν υπάρχει τέτοιο τμήμα).
- $85 \times t_{TE} + 15$  σημεία για το τμήμα της αρχικής καμπύλης που περιέχει μόνο το σημείο τομής της αρχικής καμπύλης με την προβολή της ακμής εκφυγής στο μεσημβρινό επίπεδο (αν υπάρχει τέτοιο τμήμα).
- $85 \times (1 - t_{LE}) + 15$  σημεία για το τμήμα της αρχικής καμπύλης που περιέχει μόνο το σημείο τομής της αρχικής καμπύλης με την προβολή της ακμής πρόσπτωσης στο μεσημβρινό επίπεδο (αν υπάρχει τέτοιο τμήμα).
- Κανένα σημείο, για τα τμήματα της αρχικής καμπύλης που δεν συμμετέχουν καθόλου στη νέα.

Όπου  $t_{LE}$  η τιμή της παραμέτρου  $t$  στο σημείο τομής του τμήματος της αρχικής καμπύλης με την προβολή στο μεσημβρινό επίπεδο της ακμής πρόσπτωσης και  $t_{TE}$  η τιμή της παραμέτρου  $t$  στο σημείο τομής του τμήματος της αρχικής καμπύλης με την προβολή στο μεσημβρινό επίπεδο της ακμής εκφυγής. Οι τιμές  $t_{LE}$  και  $t_{TE}$  χρησιμοποιούνται μόνο για τα τμήματα που περιέχουν σημείο ή σημεία τομής.

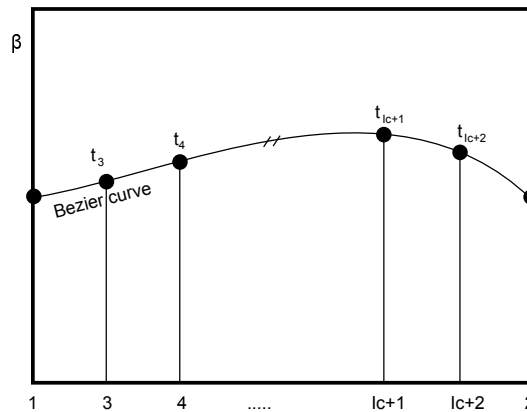
- Βάσει των τιμών της παραμέτρου  $t$  που βρέθηκαν, υπολογίζονται οι συντεταγμένες των σημείων της νέας καμπύλης.

### 3.5 Εισαγωγή Γωνιών και Σύμμορφη Απεικόνιση

Ακολουθεί το υποπρόγραμμα **ConformalMapping**. Οι νέες καμπύλες σταθερού ύψους πτερυγίου που έχουν βρεθεί, ειδικά στην περίπτωση όπου οι καμπύλες H και S δόθηκαν σε περισσότερα από ένα τμήμα, θα αποτελούνται από σημεία που δεν έχουν ομοιόμορφη κατανομή κατά το μήκος της καμπύλης. Το γεγονός αυτό δεν είναι επιθυμητό και για να βρεθούν σημεία με ομοιόμορφη κατανομή χρησιμοποιούνται, όπως και παραπάνω, κυβικές B-splines (παράρτημα A'.2) Αυτή είναι και η πρώτη διαδικασία που πραγματοποιείται στο υποπρόγραμμα αυτό. Το πλήθος των σημείων σε κάθε καμπύλη δίδεται από το αρχείο preferences.dat

Στη συνέχεια, για τη μεταφορά από τις δύο διαστάσεις στις τρεις, χρησιμοποιείται η **σύμμορφη απεικόνιση** [5]  $(R, z) \rightarrow \mu$  που αναφέρεται στο προηγούμενο κεφάλαιο. Η σύμμορφη απεικόνιση γίνεται για τα σημεία που βρέθηκαν από τις B-splines.

Μετά τον υπολογισμό του  $\mu$ , **για κάθε ακμή**, υπολογίζονται οι γωνίες  $\theta, \beta$  και η παράμετρος  $z$  στις θέσεις κατά το ύψος του πτερυγίου που αντιστοιχούν σε ενδιάμεσες καμπύλες. Για τα μεγέθη αυτά, είναι γνωστά τα σημεία ελέγχου διδιάστατων καμπυλών Bezier που παριστάνουν συναρτήσεις της μορφής που φαίνεται στο σχήμα 3.6 (συνολικά 6 συναρτήσεις). Για την παράμετρο  $t$ , στο σημείο τομής με κάποια ακμή, ισχύει στα



**Σχήμα 3.6:** Η συνάρτηση που δίνει τη γωνία  $\beta$  σε κάθε θέση κατά το ύψος του πτερυγίου. Στο σχήμα φαίνεται η αρίθμηση των ενδιάμεσων καμπυλών. Οι καμπύλες ισαπέχουν ακτινικά.

κελύφη

$$t_1 = 0$$

και

$$t_2 = 1$$

ενώ για τις ενδιάμεσες θέσεις κατά το ύψος του πτερυγίου, για την εύρεση της τιμής της παραμέτρου  $t$  που αντιστοιχεί στην καμπύλη  $j$  για  $j = 3, \dots, Ic + 2$ , επιλύεται με τον τρόπο που περιγράφεται στο παράρτημα Α'.3.3 η εξίσωση

$$\sum_{k=0}^N R_{cp,k} c_{bez}^k(t) - \frac{j-2}{Ic+1} = 0$$

Οι ποσότητες  $c_{bez}^k$  προκύπτουν από τη σχέση Α'.13 του παραρτήματος Α'.1.

Στο τέλος του υποπρόγραμματος ConformalMapping καλείται το υποπρόγραμμα **calcCM**. Το υποπρόγραμμα calcCM, για κάθε καμπύλη σταθερού ύψους πτερυγίου, αντιστοιχεί κάθε τιμή του  $\mu$  με τη γωνία θέσης  $\vartheta$  κάνοντας χρήση της γωνίας  $\beta$  και της παραμέτρου  $z$ , με τον τρόπο που περιγράφεται στην ενότητα 2.2.

Στη συνέχεια, γίνεται αντίστροφη αντιστοίχιση από την αντιστοίχιση που πραγματοποιήθηκε με το σύμμορφο μετασχηματισμό. Για κάθε σημείο, κάθε καμπύλης Bezier  $j$  που βρέθηκε από τα τέσσερα σημεία ελέγχου με συντεταγμένες  $(\mu_{cp,k}^j, \vartheta_{cp,k}^j)$  για  $k = 0, 1, 2, 3$  (σχήμα 2.15), υπολογίζονται οι τιμές της παραμέτρου  $t$  που αντιστοιχούν στην τιμή του  $\mu$  στην οποία αντιστοιχεί σημείο της καμπύλης σταθερού ύψους πτερυγίου. Η εξίσωση που επιλύεται με τη μέθοδο του παραρτήματος Α'.3.3 για την εύρεση της παραμέτρου  $t$ , για το σημείο  $i$  της καμπύλης  $j$ , είναι η

$$\sum_{k=0}^3 \mu_{cp,k}^j c_{bez}^k(t) - \mu_{i,j} = 0$$

(Τα  $j, k$  στην παραπάνω σχέση είναι άνω δείκτες και όχι εκθέτες.) Οι ποσότητες  $c_{bez}^k$  προκύπτουν από τη σχέση Α'.13 του παραρτήματος Α'.1 για  $N = 3$ .

## 3.6 Απόδοση Πάχους

Με την τελική αντιστοίχιση που έγινε στο προηγούμενο βήμα, έχουν βρεθεί οι κυλινδρικές συντεταγμένες των μέσων γραμμών καμπυλότητας του πτερυγίου στις διάφορες θέσεις σταθερού ύψους πτερυγίου. Σε αυτό το σημείο καλείται το υποπρόγραμμα **vectors**. Στο υποπρόγραμμα αυτό, αρχικά γίνεται ο μετασχηματισμός από τις κυλινδρικές στις καρτεσιανές συντεταγμένες για τα σημεία των μέσων γραμμών καμπυλότητας. Αφού βρεθούν οι καρτεσιανές συντεταγμένες των σημείων, γίνεται σε κάθε μέση γραμμή καμπυλότητας παρεμβολή μεταξύ των σημείων μέσω κυβικών B-splines ώστε να προκύψει ομοιόμορφη κατανομή. Στην περίπτωση αυτή, γίνεται παρεμβολή μεταξύ σημείων τριδιάστατων καμπυλών. Σε προηγούμενα βήματα πραγματοποιήθηκε παρεμβολή σημείων διδιάστατων καμπυλών. Η μοναδική διαφορά μεταξύ των δύο περιπτώσεων, όσον αφορά τον τρόπο υλοποίησης, είναι πως στην περίπτωση τριών διαστάσεων καλείται το

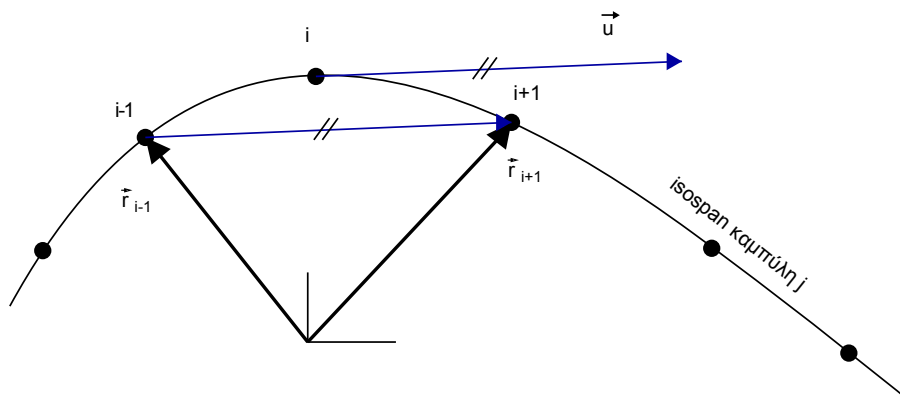
υποπρόγραμμα **conto1\_3D** και όχι το **conto1**.

Μετά την ανακατανομή των σημείων των μέσων γραμμών καμπυλότητας, προστίθενται στο διάνυσμα θέσης κάθε σημείου, κατά την κάθετη στην καμπύλη διεύθυνση, δύο αντίρροπα διανύσματα που εκφράζουν το καθένα την αντίστοιχη απόσταση της μέσης γραμμής καμπυλότητας από την πλευρά υπερπίεσης και την πλευρά υποπίεσης. Στο σημείο αυτό του κώδικα υπολογίζονται οι συντεταγμένες των διανυσμάτων αυτών. Η διαδικασία που πραγματοποιεί το παρόν λογισμικό για να βρει τις συντεταγμένες είναι :

- Προβάλλονται στο μεσημβρινό επίπεδο οι μέσες γραμμές καμπυλότητας ( $\vartheta = 0$ ) και υπολογίζεται [6] για κάθε σημείο της προβολής, το εφαπτομενικό διάνυσμα  $\vec{u}$ . Οι συντεταγμένες του διανύσματος αυτού υπολογίζονται από το σχήμα πεπερασμένων διαφορών

$$\vec{u}_i^j = \vec{r}_{i+1}^j - \vec{r}_{i-1}^j \quad (3.17)$$

όπου  $\vec{r}_i^j$  το διάνυσμα θέσης του σημείου  $i$  της μέσης γραμμής καμπυλότητας  $j$ . Επεξηγηματικά παρατίθεται το σχήμα 3.7.



**Σχήμα 3.7:** Διάνυσμα  $\vec{u}$  που χρησιμοποιείται για την εύρεση της διεύθυνσης κατά την οποία θα αποδοθεί πάχος στο πτερύγιο.

Ειδικά, για τα άκρα των μέσων γραμμών καμπυλότητας, όπου δεν μπορεί να εφαρμοσθεί η σχέση 3.17 (λόγω μη ύπαρξης του  $i - 1$  για τον υπολογισμό του εφαπτομενικού διανύσματος στο πρώτο σημείο, και του  $i + 1$  για τον υπολογισμό του εφαπτομενικού διανύσματος στο τελευταίο σημείο  $N$ ), χρησιμοποιείται κατ' ανάγκη το λιγότερο ακριβές σχήμα

$$\vec{u}_1^j = \vec{r}_2^j - \vec{r}_1^j \quad (3.18)$$

$$\vec{u}_N^j = \vec{r}_N^j - \vec{r}_{N-1}^j \quad (3.19)$$

- Όμοια με το  $\vec{u}$ , για κάθε σημείο κάθε μέσης γραμμής καμπυλότητας, υπολογίζεται

το εφαπτομενικό διάνυσμα  $\vec{t}$ .

- Υπολογίζονται τα διανύσματα  $\vec{n}$  και  $\vec{c}$  με χρήση των σχέσεων 2.6 και 2.8 αντίστοιχα. Αφού βρεθούν, όλα τα διανύσματα  $\vec{n}$  και  $\vec{c}$  αδιαστατοποιούνται ώστε να γίνουν μοναδιαία. Ειδικά για τον υπολογισμό του διανύσματος  $\vec{n}$ , μετά την εφαρμογή της σχέσης 2.6, γίνονται οι εξής έλεγχοι και διορθώσεις:

- Για κάθε μέση γραμμή καμπυλότητας, υπολογίζεται το εσωτερικό γινόμενο όλων των ζευγών διανυσμάτων  $\vec{n}$  που αντιστοιχούν σε διαδοχικά σημεία της μέσης γραμμής καμπυλότητας. Αν το εσωτερικό γινόμενο βρεθεί αρνητικό, σε ένα ζεύγος, τότε όλα τα επόμενα διανύσματα αλλάζουν φορά. Αυτό συμβαίνει καθώς δεν είναι επιθυμητή αμβλεία γωνία μεταξύ των συνεχόμενων διανυσμάτων.
- Με τον προηγούμενο έλεγχο εξασφαλίστηκε πως όλα τα διανύσματα  $\vec{n}$  μίας μέσης γραμμής καμπυλότητας “θα βλέπουν” προς την ίδια πλευρά της καμπύλης. Σε αυτό το βήμα, γίνεται ο ίδιος έλεγχος μεταξύ των μέσων γραμμών καμπυλότητας του περυγίου έτσι ώστε να αποκτήσουν όλα τα διανύσματα φορά προς την ίδια πλευρά της επιφάνειας που ορίζεται από τη **μέση επιφάνεια καμπυλότητας**<sup>3</sup> του περυγίου.
- Ο τελευταίος έλεγχος/διόρθωση που πραγματοποιείται, επιβάλλει όλα τα διανύσματα  $\vec{n}$  να έχουν φορά τέτοια ώστε να ισχύει

$$k_o(y_n^{1,1}x^{1,1} - x_n^{1,1}y^{1,1})$$

όπου  $(x^{1,1}, y^{1,1})$  οι συντεταγμένες  $x$  και  $y$  του πρώτου σημείου της μέσης γραμμής καμπυλότητας που αντιστοιχεί στη θέση μηδενικού ύψους περυγίου. Ο συντελεστής  $k_o$  παίρνει τις τιμές 1 και  $-1$ , σύμφωνα με τον παρακάτω πίνακα, ανάλογα με το είδος της περύγωσης και τη φορά περιστροφής

Κινητή ή Ακίνητη Πτερύγωση	Συμπίεστής(C) ή Στρόβιλος(T)	Φορά Περιστροφής (+ ή -)	$k_o$
Κινητή	C	+	1
Κινητή	T	+	-1
Κινητή	C	-	-1
Κινητή	T	-	1
Ακίνητη	C	+	-1
Ακίνητη	T	+	1
Ακίνητη	C	-	1
Ακίνητη	T	-	-1

Με τον τρόπο που καθορίστηκαν τα διανύσματα  $\vec{n}$ , κατευθύνονται από τη μέση γραμμή καμπυλότητας προς την πλευρά υπερπίεσης του περυγίου. Έτσι, μετά τις όποιες διορθώσεις, έχουν βρεθεί οι διευθύνσεις για την απόδοση πάχους που θα ακολουθήσει.

Με το υποπρόγραμμα **thickness** που ακολουθεί, γίνεται η απόδοση πάχους σύμφωνα με τη σχέση 2.7, κατά τα γραφόμενα στην ενότητα 2.2. Η διαδικασία πραγματοποιείται πρώτα για την πλευρά υπερπίεσης και, στη συνέχεια, με όμοιο τρόπο για την πλευρά υποπίεσης.

Για κάθε πλευρά, πρώτα υπολογίζονται οι τιμές της  $f_{shape}$  σε καθεμιά από τις θέσεις κατά το ύψος του πτερυγίου όπου είναι γνωστά σημεία ελέγχου  $(x_s, y_s)$  της καμπύλης Bezier που απεικονίζει την  $f_{shape}$  συναρτήσε του αδιάστατου μήκους τόξου της μέσης γραμμής καμπυλότητας. Η τιμή της  $f_{shape}$  για το κάθε σημείο  $i$  από τα  $N$  σημεία, υπολογίζεται με τη μέθοδο εσφαλμένης θέσης του παραρτήματος Α'3.3 μέσω της εξίσωσης

$$\sum_k x_{s,k} c_{bez}^k(t_i) - \frac{i-1}{N-1} = 0$$

όμοια με τις υπόλοιπες περιπτώσεις όπου χρησιμοποιείται η μέθοδος αυτή, δηλαδή εύρεση της παραμέτρου  $t_i$  και υπολογισμός της  $f_{shape}$  ως

$$f_{shape}^i = \sum_k y_{s,k} c_{bez}^k(t_i)$$

Στη συνέχεια, για κάθε πλευρά, υπολογίζονται οι τιμές της  $f_{span}$  για την κάθε θέση κατά το ύψος του πτερυγίου στην οποία έχει υπολογιστεί μέση γραμμής καμπυλότητας. Για την  $f_{span}$  κάθε πλευράς, είναι γνωστά σημεία ελέγχου  $(x_{smax}, y_{smax})$  της καμπύλης Bezier που απεικονίζει την τιμή της συνάρτησης  $f_{span}$  συναρτήσε της θέσης κατά το ύψος του πτερυγίου. Ισχύει για το πόδι του πτερυγίου

$$span_1 = 0$$

για την κεφαλή

$$span_2 = 1$$

και για τη μέση γραμμή καμπυλότητας στη θέση  $j$  κατά το ύψος του πτερυγίου, όπου  $j = 3, \dots, Ic + 2$  (υπενθυμίζεται πως η αρίθμηση που έχει επιλεγεί είναι H:1, S:2 και για τις ενδιάμεσες θέσεις: 3,4,...,Ic+2 )

$$span_j = \frac{j-3}{Ic+1}$$

Για την εύρεση των τιμών της  $f_{span}$ , επιλύεται ως προς  $t_j$  με τη μέθοδο του παραρ-

---

<sup>3</sup>Ως μέση επιφάνεια καμπυλότητας του πτερυγίου, ορίζεται η επιφάνεια στην οποία ανήκει κάθε μέση γραμμής καμπυλότητας του πτερυγίου, σε οποιοδήποτε σταθερό ύψος πτερυγίου και αν ληφθεί.

τμήματος A.3.3 η εξίσωση

$$\sum_k y_{s,k} c_{bez}^k(t_j) - span_j = 0$$

Έτσι, για καθεμιά από τις δύο πλευρές, το υποπρόγραμμα thickness υπολογίζει το γινόμενο  $w = f_{shap} f_{span}$  για κάθε σημείο κάθε μέσης γραμμής καμπυλότητας. Η τελευταία ενέργεια του υποπρογράμματος είναι να προσθέσει στο διάνυσμα θέσης  $\vec{r}_{i,j}$  του σημείου  $i$  της μέσης γραμμής καμπυλότητας  $j$

- Για την πλευρά υπερπίεσης το διάνυσμα  $\vec{w}_{PS}^{i,j}$

$$\vec{w}_{PS}^{i,j} = w_{PS}^{i,j} \vec{n}_{i,j}$$

- και για την πλευρά υποπίεσης το διάνυσμα  $\vec{w}_{SS}^{i,j}$

$$\vec{w}_{SS}^{i,j} = -w_{SS}^{i,j} \vec{n}_{i,j}$$

Τελικά, το σημείο  $i$ , της αεροτομής  $j$ , της πλευράς υπερπίεσης έχει διάνυσμα θέσης το

$$\vec{r}_{PS}^{i,j} = \vec{r}_{i,j} + w_{PS}^{i,j} \vec{n}_{i,j}$$

ενώ το σημείο  $i$ , της αεροτομής  $j$ , της πλευράς υποπίεσης έχει διάνυσμα θέσης το

$$\vec{r}_{SS}^{i,j} = \vec{r}_{i,j} - w_{SS}^{i,j} \vec{n}_{i,j}$$

Με την παραπάνω διαδικασία, έχουν προκύψει  $Ic + 2$  αεροτομές του πτερυγίου, σε επιφάνειες όμως που δεν είναι αυτές που προκύπτουν από την περιστροφή της μέσης γραμμής καμπυλότητας περί τον άξονα  $z$ .

### 3.7 Διόρθωση της Μορφής του Πτερυγίου

Το τελευταίο υποπρόγραμμα που καλείται από το κυρίως πρόγραμμα, είναι το υποπρόγραμμα **correction**. Το υποπρόγραμμα αυτό, πραγματοποιεί τη διόρθωση που περιγράφεται στο τελευταίο βήμα της ενότητας 2.2 (η μορφή διορθώνεται έτσι ώστε για κάθε θέση κατά το ύψος του πτερυγίου, τα σημεία της εξωτερικής επιφάνειας του πτερυγίου που προέκυψαν από μία μέση γραμμή καμπυλότητας, να ανήκουν στην



εκ περιστροφής επιφάνεια που ορίζει η μέση γραμμή καμπυλότητας όταν περιστραφεί γύρω από τον άξονα των  $z$ ). Συγκεκριμένα, για κάθε αεροτομή, στο υποπρόγραμμα correction

- Αρχικά, γίνεται προσέγγιση των σημείων της μέσης γραμμής καμπυλότητας που έχει βρεθεί με καμπύλη Bezier. Η προσέγγιση γίνεται με τον ίδιο τρόπο που γίνεται και η προσέγγιση στο υποπρόγραμμα curve2curve όπως περιγράφεται στην ενότητα 3.1. Το γεγονός ότι εδώ προσεγγίζεται τριδιάστατη καμπύλη δεν δημιουργεί σημαντική διαφορά στη διαδικασία, καθώς η μέθοδος προσέγγισης γενικεύεται, από τις δύο, στις τρεις διαστάσεις.
- Στη συνέχεια, καλείται το υποπρόγραμμα **zpairing** μια φορά για κάθε πλευρά. Το υποπρόγραμμα αυτό βρίσκει το επίπεδο  $A$  που αναφέρεται στην ενότητα 2.2. Η εύρεση του επιπέδου  $A$  που αντιστοιχεί στο σημείο  $i$  της μίας από της δύο πλευρές της αεροτομής  $j$ , στην περίπτωση που **υπάρχει** σημείο της μέσης γραμμής καμπυλότητας με τέτοιο  $z$ , γίνεται με επίλυση της εξίσωσης

$$\sum_{k=0}^{N_{cor}-1} z_{cp,k} c_{bez}^k(t_s^{i,j}) - z_s^{i,j} = 0$$

με τη μέθοδο του παραρτήματος Α'.3.3 προς εύρεση της παραμέτρου  $t_s^{i,j}$  της καμπύλης Bezier, όπου:

- $N_{cor}$  το πλήθος των σημείων ελέγχου που χρησιμοποιήθηκαν για την προσέγγιση κάθε μέσης γραμμής καμπυλότητας
- $z_{cp,k}$  οι συντεταγμένες στην  $z$  διεύθυνση των σημείων ελέγχου της καμπύλης Bezier που προέκυψε από την προσέγγιση που πραγματοποιήθηκε
- $c_{bez}^k(t_s^{i,j})$  η ποσότητα που χρησιμοποιείται στις καμπύλες Bezier και έχει περιγραφεί παραπάνω
- $z_s^{i,j}$  η συντεταγμένη στη  $z$  διεύθυνση του προς διόρθωση σημείου.

Αν **δεν υπάρχει** τέτοιο σημείο, γίνεται γραμμική προεκβολή στην μέση γραμμή καμπυλότητας, προς την πλευρά της στην οποία θα βρισκόταν το ζητούμενο σημείο, αν υπήρχε. Η προεκβολή γίνεται με χρήση των τύπων

$$x_{i,j} = x_{mcl}^{1,j} + (z_s^{i,j} - z_{mcl}^{1,j}) \frac{x_{mcl}^{2,j} - x_{mcl}^{1,j}}{z_{mcl}^{2,j} - z_{mcl}^{1,j}}$$

$$y_{i,j} = y_{mcl}^{1,j} + (z_s^{i,j} - z_{mcl}^{1,j}) \frac{y_{mcl}^{2,j} - y_{mcl}^{1,j}}{z_{mcl}^{2,j} - z_{mcl}^{1,j}}$$

στην περίπτωση κατά την οποία  $z_s^{i,j} \leq z_s^{1,j}$ . Και

$$x_{i,j} = x_{mcl}^{N,j} + (z_s^{i,j} - z_{mcl}^{N,j}) \frac{x_{mcl}^{N-1,j} - x_{mcl}^{N,j}}{z_{mcl}^{N-1,j} - z_{mcl}^{N,j}}$$

$$y_{i,j} = y_{mcl}^{1,j} + (z_s^{i,j} - z_{mcl}^{1,j}) \frac{y_{mcl}^{2,j} - y_{mcl}^{1,j}}{z_{mcl}^{2,j} - z_{mcl}^{1,j}}$$

στην περίπτωση όπου  $z_s^{i,j} \geq z_s^{N,j}$

- Τέλος, καλείται το υποπρόγραμμα **solvecorrection** μια φορά για κάθε πλευρά. Στο υποπρόγραμμα αυτό, για κάθε σημείο, εφαρμόζεται η σχέση 2.14 για την εύρεση της γωνίας θέσης του σημείου της τελικής μορφής, ενώ μέσω των σχέσεων 2.9 και 2.10 έχουν βρεθεί και οι τρεις συντεταγμένες της γεωμετρίας του περυγίου. Ακολουθεί μετατροπή σε καρτεσιανές συντεταγμένες και, με αυτό, ολοκληρώνεται ο υπολογισμός της μορφής του περυγίου που αντιστοιχεί στις παραμέτρους σχεδιασμού που δόθηκαν.

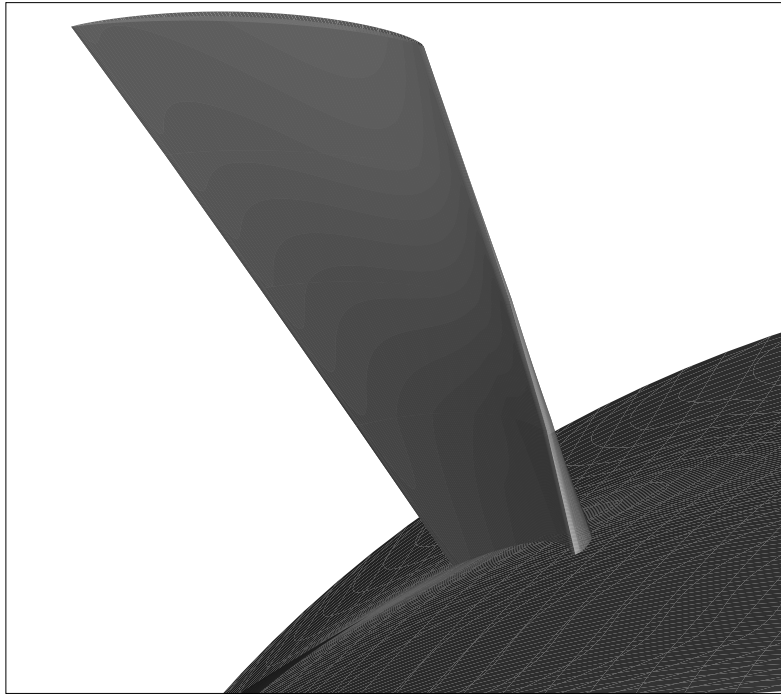
## Κεφάλαιο 4

# Εφαρμογή της Μεθόδου

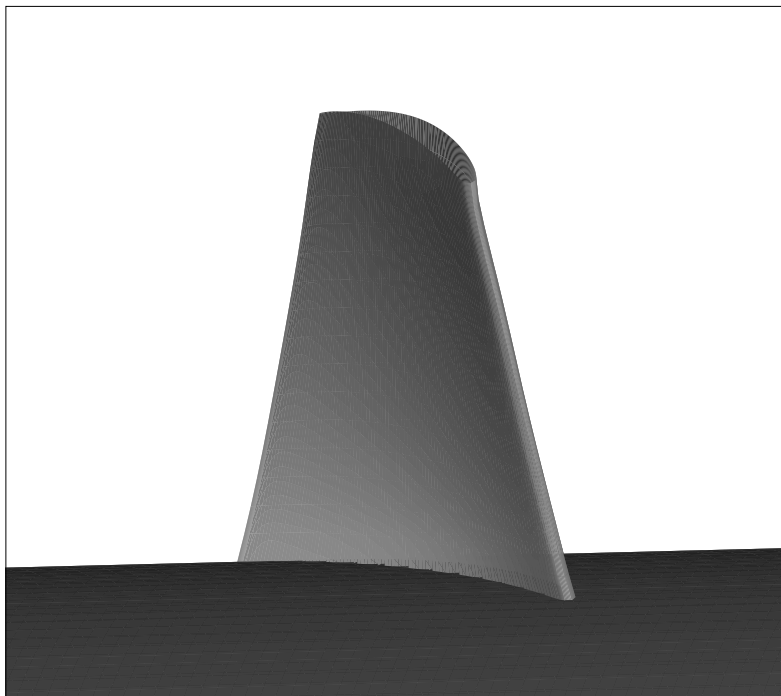
Το κεφάλαιο αυτό έχει δύο σκέλη. Στο πρώτο σκέλος παρουσιάζονται πτερυγώσεις που παραμετροποιήθηκαν επιτυχώς με τη μέθοδο παραμετροποίησης πτερυγώσεων στροβιλομηχανών που αναπτύχθηκε στην παρούσα διπλωματική εργασία, στο πλαίσιο του ελέγχου για την αποτελεσματικότητά της. Στο δεύτερο σκέλος παρουσιάζονται τα αποτελέσματα που προέκυψαν από τη χρήση της μεθόδου, κατά την επίλυση σχετικού προβλήματος βελτιστοποίησης.

### 4.1 Παραμετροποιήσεις

Στα σχήματα 4.1 και 4.2 παρουσιάζονται απεικονίσεις δύο διαφορετικών πτερυγώσεων που παραμετροποιήθηκαν από την παρούσα μέθοδο παραμετροποίησης της μορφής πτερυγώσεων στροβιλομηχανών.



Σχήμα 4.1: Πτερύγιο περιστρεφόμενης περύγωσης συμπίεστή Α.



Σχήμα 4.2: Πτερύγιο περιστρεφόμενης περύγωσης συμπίεστή Β.

## 4.2 Η Βελτιστοποίηση

Η μέθοδος χρησιμοποιήθηκε κατά τη διαδικασία αεροδυναμικής βελτιστοποίησης [7] περιστρεφόμενης πτερύγωσης αξονικού συμπιεστή. Η βελτιστοποίηση με εξελικτικούς αλγόριθμους (παράρτημα Α'6.1) πραγματοποιείται με το λογισμικό EASY ([8],[9],[10]), το οποίο αναπτύχθηκε στη ΜΠΥΡ&Β του ΕΘΣ του ΕΜΠ. Ως λογισμικό αξιολόγησης των υποψήφιων λύσεων χρησιμοποιείται επιλύτης της ροής ο οποίος είναι οικείο λογισμικό του ΕΘΣ του ΕΜΠ. Η επίλυση των εξισώσεων Navier-Stokes γίνεται σε επεξεργαστές καρτών γραφικών ([11],[12],[13],[14]). Το λογισμικό αυτό, έχει τη δυνατότητα να επιλύει ροές στο εσωτερικό στροβιλομηχανών και μπορεί να χρησιμοποιηθεί για συμπιεστές και ασυμπίεστες ροές. Η μέθοδος ΥΡΔ που χρησιμοποιείται, είναι η μέθοδος των πεπερασμένων όγκων σε κεντροκομβική διατύπωση. Οι εξισώσεις της ροής είναι εκφρασμένες στο σχετικό σύστημα αναφοράς. Το μοντέλο τύρβης που χρησιμοποιείται είναι το Spalart-Allmaras χαμηλών ή υψηλών αριθμών Reynolds με μοντέλο συναρτήσεων τοίχου [15]. Η επίλυση μπορεί να πραγματοποιηθεί σε δομημένα, μη-δομημένα ή υβριδικά πλέγματα. Η γένεση των πλεγμάτων [16] γίνεται από γενέτες πλέγματος που έχουν αναπτυχθεί στη ΜΠΥΡ&Β/ΕΜΠ. Όπως κάθε σύγχρονο λογισμικό, ο επιλύτης αυτός χρησιμοποιεί την ιδιότητα της περιοδικότητας των ροϊκών φαινομένων των στροβιλομηχανών.

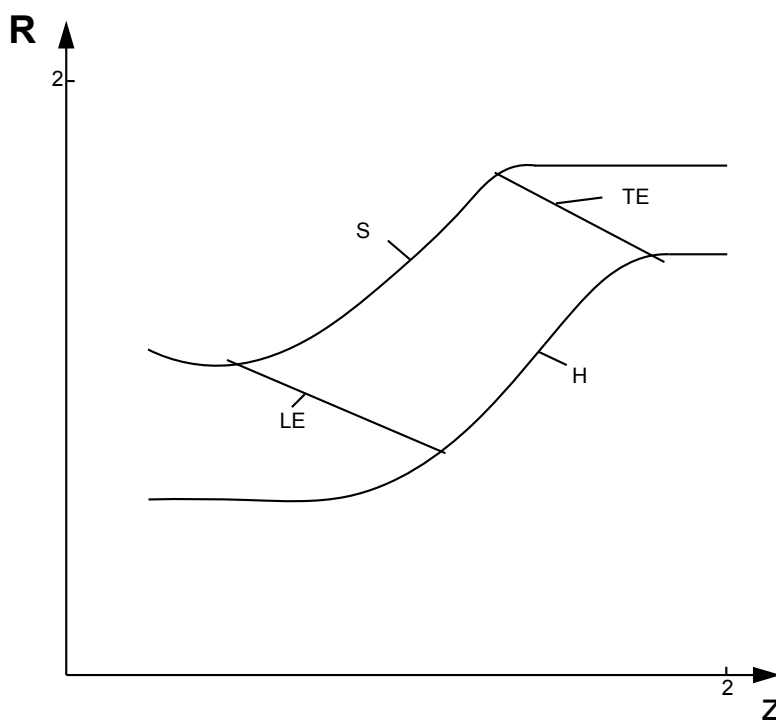
### 4.2.1 Αξιολόγηση Αποτελεσμάτων

Στην εφαρμογή της μεθόδου που πραγματοποιήθηκε για την αξιολόγησή της, πραγματοποιήθηκε αεροδυναμική βελτιστοποίηση της μορφής της περιστρεφόμενης πτερύγωσης μιας από τις βαθμίδες πολυβάθμιας αντλίας. Η περιστρεφόμενη πτερύγωση αυτή σχεδιάζεται έτσι ώστε στο κανονικό σημείο λειτουργίας της να έχει

- ταχύτητα περιστροφής  $3500rpm$
- παροχή όγκου του εργαζόμενου μέσου ίση με  $\dot{V} = 0.009 \frac{m^3}{s}$
- με το εργαζόμενο μέσο να έχει κινηματική συνεκτικότητα ίση με  $\nu = 1.005 \times 10^{-6} \frac{m^2}{s}$ .

Η αντλία λειτουργεί με ασυμπίεστο εργαζόμενο μέσο και δίνει ολικό ύψος  $11m$ . Χρησιμοποιήθηκαν 38 μεταβλητές σχεδιασμού και μία αντικειμενική συνάρτηση. Στόχος της βελτιστοποίησης ήταν η εύρεση της μορφής που, με μέγιστο βαθμό απόδοσης (αντικειμενική συνάρτηση) δίνει ολικό ύψος  $\Delta h_t$  μεταξύ  $10m$  και  $11m$  (δύο περιορισμοί ανισο-ισότητας). Η προβολή των ακμών του πτερυγίου στο μεσημβρινό επίπεδο, όπως και η τομή των κελυφών της πτερύγωσης με το μεσημβρινό επίπεδο παραμένουν σταθερές.

Για την προς βελτιστοποίηση πτερύγωση, οι καμπύλες LE, TE, H και S, οι οποίες όπως αναφέρεται παραπάνω διατηρήθηκαν, φαίνονται στο σχήμα 4.3. Σε κάθε γενιά του εξελι-



**Σχήμα 4.3:** Οι καμπύλες LE, TE, H και S της προς βελτιστοποίηση πτερύγωσης.

κτικού αλγόριθμου χρησιμοποιήθηκαν 9 γονείς( $\mu$ ), 28 απόγονοι( $\lambda$ ), και 1 επίλεκτος( $e$ ) (παράρτημα Α'.6.1). Για εξοικονόμηση υπολογιστικού χρόνου, μετά από 100 επιτυχημένες αξιολογήσεις, έγινε η επιλογή να αξιολογούνται οι πιθανές λύσεις που παράγονταν από τον EASY, από μεταπρότυπα αξιολόγησης ([17],[18],[19],[20],[21]) και όχι από τον κώδικα επίλυσης της ροής, ο οποίος αξιολογούσε τις πιθανές λύσεις ως αυτό το σημείο. Τα μεταπρότυπα πραγματοποιούν μια προσέγγιση των αποτελεσμάτων από την εκτέλεση του απαιτητικού οικείου λογισμικού επίλυσης της ροής, πραγματοποιώντας μια προσεγγιστική προαξιολόγηση των υποψήφιων λύσεων σε προκαταρκτικό στάδιο και στη συνέχεια, ακριβής αξιολόγηση πραγματοποιείται μόνο για τις (κατά τα φαινόμενα) καλύτερες από αυτές. Σε κάθε γενιά επιβλήθηκε να πραγματοποιούνται από 4 έως 8 αξιολογήσεις από το λογισμικό επίλυσης τη ροής. Το μεταπρότυπο που χρησιμοποιήθηκε είναι δίκτυο συναρτήσεων ακτινικής βάσης (Radial Basis Functions, RBF), το οποίο είναι ένα είδος νευρωνικών δικτύων [22].

Η γεωμετρία αναφοράς, παραμετροποιήθηκε με τα σημεία του μεσημβρινού επιπέδου που φαίνονται στο σχήμα 4.3 από σημεία ελέγχου καμπυλών Bezier (παράρτημα Α'.1) που φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

$x_{\theta,LE}$	0.00	0.25	0.50	0.75	1.00			
$y_{\theta,LE}$	<b>0.780</b>	<b>0.870</b>	<b>0.875</b>	<b>1.000</b>	<b>1.000</b>			
$x_{\theta,TE}$	0.00	0.25	0.50	0.75	1.00			
$y_{\theta,TE}$	<b>-0.29</b>	<b>-0.23</b>	<b>-0.17</b>	<b>-0.11</b>	<b>-0.05</b>			
$x_{\beta,LE}$	0.00	0.50	1.00					
$y_{\beta,LE}$	<b>-0.00</b>	<b>-0.40</b>	<b>-0.70</b>					
$x_{\beta,TE}$	0.00	0.50	1.00					
$y_{\beta,TE}$	<b>-0.001</b>	<b>-0.005</b>	<b>-0.01</b>					
$x_{z,LE}$	0.00	0.50	1.00					
$y_{z,LE}$	<b>0.50</b>	<b>0.50</b>	<b>0.50</b>					
$x_{z,TE}$	0.00	0.50	1.00					
$y_{z,TE}$	<b>0.60</b>	<b>0.60</b>	<b>0.60</b>					
$x_{s0}$	0.00	0.00	0.20	0.40	0.60	0.80	1.00	1.00
$y_{s0}$	0.00	2.50	<b>0.70</b>	<b>1.40</b>	<b>1.70</b>	<b>2.00</b>	1.20	0.00
$x_{s50}$	0.00	0.00	0.20	0.40	0.60	0.80	1.00	1.00
$y_{s50}$	0.00	2.40	<b>3.30</b>	<b>4.50</b>	<b>2.70</b>	<b>2.90</b>	1.50	0.00
$x_{s100}$	0.00	0.00	0.20	0.40	0.60	0.80	1.00	1.00
$y_{s100}$	0.00	2.40	<b>3.30</b>	<b>4.50</b>	<b>2.70</b>	<b>2.90</b>	1.50	0.00
$x_{fmax}$	0.00	0.33	0.66	1.00				
$y_{fmax}$	<b>0.28</b>	<b>0.33</b>	<b>0.40</b>	<b>0.50</b>				

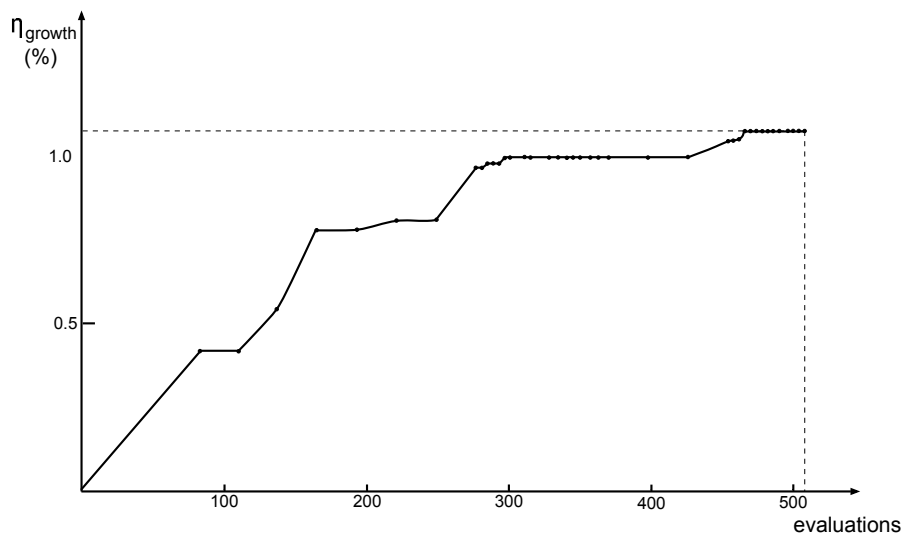
Στον πίνακα φαίνεται πως μένουν σταθερές οι παράμετροι  $x$  και η καμπυλότητα του πτερυγίου στις ακμές ενώ όλες οι άλλες παράμετροι επιλέγονται ως μεταβλητές σχεδιασμού. Συγκεκριμένα μπορούν να αλλάξουν οι γωνίες  $\beta$  και  $\theta$ , οι παράμετροι  $z$ , οι καμπύλες που καθορίζουν το σχήμα του πτερυγίου στις διάφορες θέσεις κατά το ύψος του, αλλά και οι συναρτήσεις μέγιστου πάχους πτερυγίου.

Αφού αξιολογήθηκε η αρχική μορφή σχετικά με τον βαθμό απόδοσης, ακολούθησε η βελτιστοποίηση με εξελικτικούς αλγόριθμους που παρουσιάστηκε παραπάνω, με τις 38 μεταβλητές σχεδιασμού να αντιστοιχούν στις 38 θέσεις του παραπάνω πίνακα όπου οι τιμές έχουν γραφτεί με έντονους χαρακτήρες. Κατά τη βελτιστοποίηση, τα επιτρεπτά όρια για τις τιμές των παραπάνω μεταβλητών σχεδιασμού, τέθηκαν όπως φαίνεται στον πίνακα που ακολουθεί. Στην τελευταία στήλη του πίνακα φαίνονται οι αντίστοιχες τιμές των μεταβλητών σχεδιασμού που προέκυψαν για τη βέλτιστη (αυτή με το μέγιστο βαθμό απόδοσης) μορφή, μετά τη σύγκλιση του εξελικτικού αλγόριθμου.

Μεταβλητή Σχεδιασμού	Αρχική Τιμή	Επιτρεπτά Όρια	Τιμή για Βέλτιστη Μορφή
$y_{\theta,LE}^1$	0.780	από 0.690 ως 0.870	0.762
$y_{\theta,LE}^2$	0.870	από 0.780 ως 0.960	0.864
$y_{\theta,LE}^3$	0.875	από 0.785 ως 0.965	0.881
$y_{\theta,LE}^4$	1.000	από 0.990 ως 1.090	1.09
$y_{\theta,LE}^5$	1.000	από 0.990 ως 1.090	1.063
$y_{\theta,TE}^1$	-0.29	από -0.38 ως -0.20	-0.296
$y_{\theta,TE}^2$	-0.23	από -0.32 ως -0.14	-0.26
$y_{\theta,TE}^3$	-0.17	από -0.26 ως -0.08	-0.26
$y_{\theta,TE}^4$	-0.11	από -0.2 ως -0.02	-0.164
$y_{\theta,TE}^5$	-0.05	από -0.14 ως 0.04	-0.14
$y_{\beta,LE}^1$	-0.00	από -0.17 ως 0.17	-0.011
$y_{\beta,LE}^2$	-0.40	από -0.57 ως -0.23	-0.502
$y_{\beta,LE}^3$	-0.70	από -0.87 ως -0.53	-0.71
$y_{\beta,TE}^1$	-0.001	από -0.169 ως 0.171	-0.101
$y_{\beta,TE}^2$	-0.005	από -0.165 ως 0.175	-0.074
$y_{\beta,TE}^3$	-0.01	από -0.16 ως 0.18	-0.001
$y_{z,LE}^1$	0.50	από 0.40 ως 0.60	0.45
$y_{z,LE}^2$	0.50	από 0.40 ως 0.60	0.52
$y_{z,LE}^3$	0.50	από 0.40 ως 0.60	0.49
$y_{z,TE}^1$	0.60	από 0.50 ως 0.70	0.58
$y_{z,TE}^2$	0.60	από 0.50 ως 0.70	0.59
$y_{z,TE}^3$	0.60	από 0.50 ως 0.70	0.66
$y_{s0}^3$	0.70	από 0.20 ως 1.20	0.67
$y_{s0}^4$	1.40	από 0.90 ως 1.90	1.37
$y_{s0}^5$	1.70	από 1.20 ως 2.20	1.6
$y_{s0}^6$	2.00	από 1.50 ως 2.50	1.57
$y_{s50}^3$	3.30	από 2.80 ως 3.80	3.13
$y_{s50}^4$	4.50	από 4.00 ως 5.00	4.47
$y_{s50}^5$	2.70	από 2.20 ως 3.20	2.93
$y_{s50}^6$	2.90	από 2.40 ως 3.40	2.40
$y_{s100}^3$	3.30	από 2.80 ως 3.80	2.8
$y_{s100}^4$	4.50	από 4.00 ως 5.00	4.4
$y_{s100}^5$	2.70	από 2.20 ως 3.20	2.93
$y_{s100}^6$	2.90	από 2.40 ως 3.40	3.2
$y_{fmax}^1$	0.028	από 0.018 ως 0.058	0.026
$y_{fmax}^2$	0.033	από 0.023 ως 0.063	0.031
$y_{fmax}^3$	0.040	από 0.030 ως 0.070	0.0487
$y_{fmax}^4$	0.050	από 0.040 ως 0.080	0.048

Η πορεία της σύγκλισης φαίνεται στο σχήμα 4.4. Η καμπύλη χωρίζεται ανά γενιά. Μετά από 100 **επιτυχημένες** αξιολογήσεις λύσεων από το λογισμικό επίλυσης της ροής, φαίνεται η έναρξη χρήσης μεταπροτύπων καθώς ανά γενιά γίνονται λιγότερες





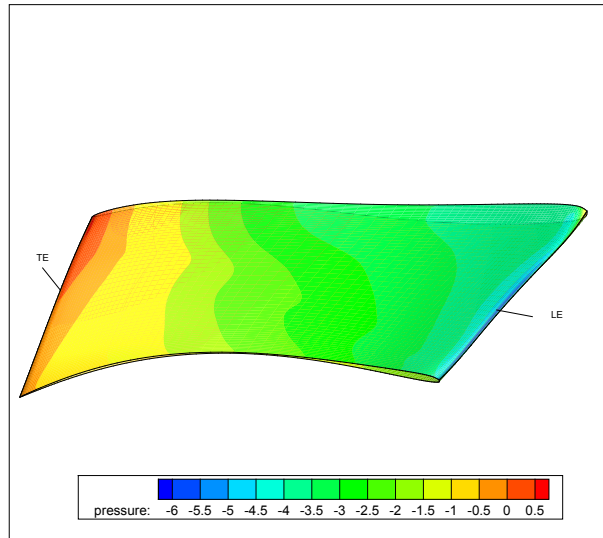
**Σχήμα 4.4:** Η πορεία σύγκλισης του εξελικτικού αλγορίθμου. Ο κατακόρυφος άξονας εκφράζει το ποσοστό της βελτίωσης του βαθμού απόδοσης συγκριτικά με την υπάρχουσα περύγωση (περύγωση αναφοράς) ενώ, ο οριζόντιος άξονας εκφράζει το πλήθος των αξιολογήσεων από το λογισμικό επίλυσης της ροής.

αξιολογήσεις. Φαίνεται πως ο βαθμός απόδοσης αυξήθηκε κατά περίπου 1% που είναι σημαντική βελτίωση.

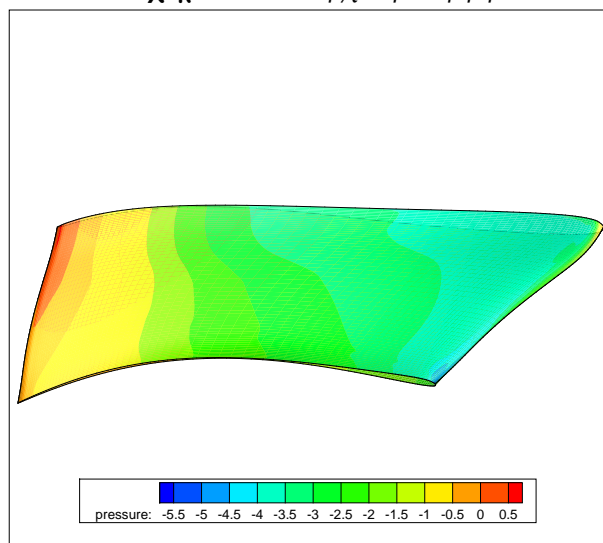
Το ολικό ύψος που δίνει η βέλτιστη μορφή είναι 11m δηλαδή το ίδιο με το ύψος που δίνει η γεωμετρία αναφοράς. Ακόμη, παρατηρείται ότι το ύψος οριακά ικανοποιεί τους περιορισμούς (από 10m ως 11m).

Στη συνέχεια, η αρχική μορφή του περυγίου συγκρίνεται οπτικά με τη βέλτιστη που προέκυψε από τη βελτιστοποίηση (σχήματα 4.7 και 4.10) σχετικά με το πεδίο της πίεσης.

Στο σχήμα 4.11 συγκρίνονται οι δύο μορφές. Η διαφορά της βέλτιστης λύσης από την αρχική είναι εμφανής.

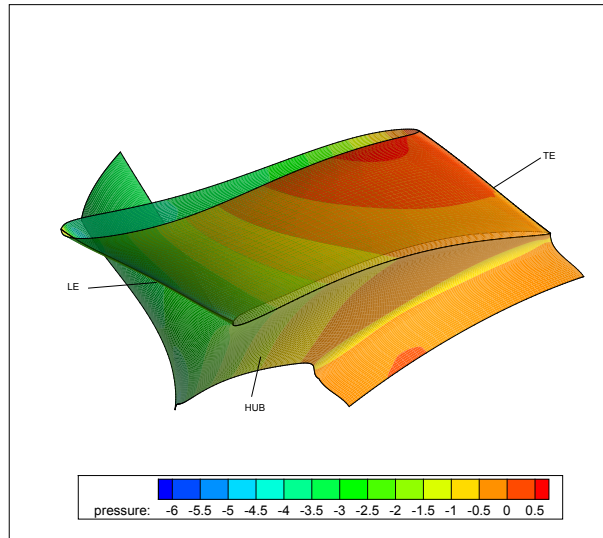


Σχήμα 4.5: Αρχική Μορφή.

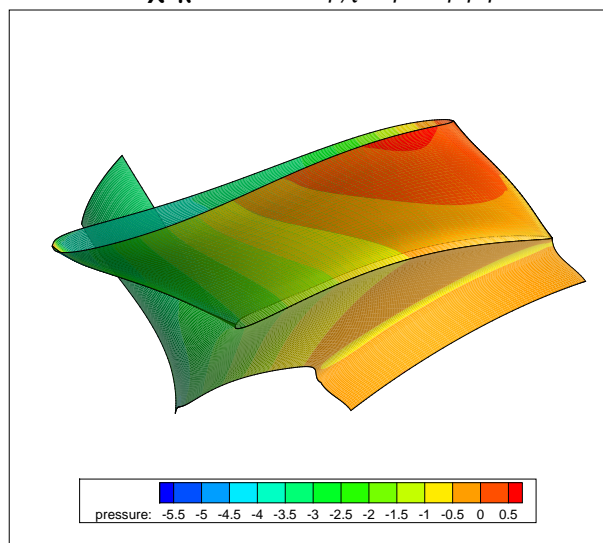


Σχήμα 4.6: Βέλτιστη Μορφή.

Σχήμα 4.7: Ισοβαρείς Ζώνες στην Πλευρά Υπερπίεσης.

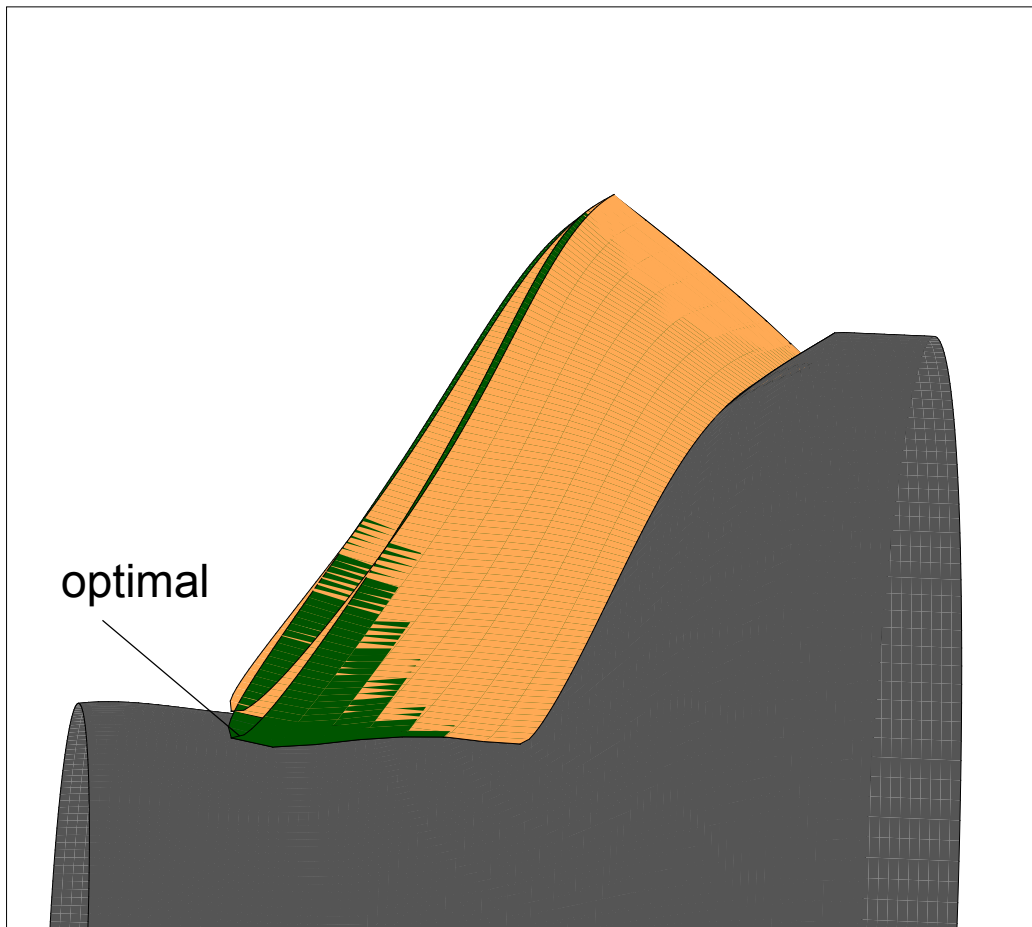


Σχήμα 4.8: Αρχική Μορφή.



Σχήμα 4.9: Βέλτιστη Μορφή.

Σχήμα 4.10: Ισοβαρείς Ζώνες στην Πλευρά Υποπίεσης.



**Σχήμα 4.11:** Σύγκριση βέλτιστης μορφής και της μορφής του υπάρχοντος πτερυγίου (αναφοράς).

## Κεφάλαιο 5

# Συμπεράσματα - Προτάσεις για Βελτιωμένη Έκδοση του Λογισμικού

Στην παρούσα διπλωματική εργασία, προτείνεται μια μέθοδος παραμετροποίησης πτερυγώσεων στροβιλομηχανών. Μετά το τέλος διπλωματικής εργασίας αυτής, παραδόθηκε λογισμικό δημιουργίας της μορφής της πτερύγωσης. Το λογισμικό αυτό, έγινε προσπάθεια να καλύπτει τις περισσότερες περιπτώσεις πτερυγώσεων. Η χρησιμότητα του προγράμματος αυτού και η πιθανότητα εκδήλωσης ενδιαφέροντος για το συγκεκριμένο αντικείμενο και από κάποιον άλλο σπουδαστή για την εκπόνηση της διπλωματικής του εργασίας εξηγούν την αναγκαιότητα αυτού του κεφαλαίου. Στο κεφάλαιο αυτό απαριθμούνται και παρουσιάζονται επιπρόσθετες διεργασίες που θα μπορεί να εκτελεί το λογισμικό, με προσθήκη κάποιων υποπρογραμμάτων που θα το καθιστούν χρησιμότερο.

### 5.1 Συμπεράσματα

Με την παρούσα διπλωματική εργασία, προτάθηκε μία μέθοδος παραμετροποίησης της μορφής πτερυγώσεων στροβιλομηχανών η οποία μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την αεροδυναμική βελτιστοποίηση της μορφής της πτερύγωσης με εξελικτικούς αλγορίθμους. Καθορίστηκαν πλήρως οι παράμετροι και ο τρόπος που δημιουργείται η μορφή της πτερύγωσης από αυτές, με χρήση του λογισμικού δημιουργίας της μορφής της πτερύγωσης που προγραμματίστηκε στο πλαίσιο της διπλωματικής εργασίας αυτής. Η εφαρμογή της μεθόδου που παρουσιάστηκε στο Κεφάλαιο 4, αποδεικνύει πως η μέθοδος μπορεί να

χρησιμοποιηθεί αποτελεσματικά για την αεροδυναμική βελτιστοποίηση μιας πτερύγωσης (μη-ακτινικής) στροβιλομηχανής. Η μέθοδος αυτή, ακόμη αποδείχθηκε πως δίνει τη δυνατότητα για αεροδυναμική βελτιστοποίηση μιας πτερύγωσης, με χρήση σχετικά μικρού πλήθους μεταβλητών σχεδιασμού καθιστώντας τη σύγκλιση του εξελικτικού αλγορίθμου σχετικά ταχεία σε σύγκριση με την περίπτωση που χρησιμοποιούνται πολλές μεταβλητές σχεδιασμού.

## 5.2 Δυνατές Βελτιώσεις Λογισμικού

- Θα ήταν χρήσιμο το λογισμικό να μπορεί να πραγματοποιήσει **Αντίστροφη Παραμετροποίηση**. Ως Αντίστροφη Παραμετροποίηση ορίζεται η δυνατότητα εύρεσης των παραμέτρων που αντιστοιχούν σε μια ήδη υπάρχουσα μορφή, χωρίς εμπλοκή του επιλύτη της ροής. Η Αντίστροφη Παραμετροποίηση πραγματοποιείται με βελτιστοποίηση. Η βελτιστοποίηση που πρέπει να γίνει είναι η ελαχιστοποίηση της συνάρτησης στόχου

$$F = (\vec{r}_{target} - \vec{r})^2$$

όπου  $\vec{r}$  τα σημεία της μορφής που δημιουργείται από το λογισμικό δημιουργίας της μορφής της πτερύγωσης και  $\vec{r}_{target}$  η δεδομένη μορφή.

- Επέκταση του λογισμικού, για παραμετροποίηση πτερυγώσεων ακτινικών στροβιλομηχανών. Η δυνατότητα αυτή δεν συμπεριλαμβάνεται στο παρόν λογισμικό.
- Προσθήκη διαδραστικού interactive γραφικού περιβάλλοντος ώστε να είναι ορατή σε πραγματικό χρόνο η επίδραση των τιμών των παραμέτρων σχεδιασμού στη μορφή του πτερυγίου που δημιουργείται.
- Υπολογισμός των παραγώγων ευαισθησίας της μορφής της πτερύγωσης ως προς τις παραμέτρους σχεδιασμού για σύζευξη του παρόντος λογισμικού με λογισμικό βελτιστοποίησης που χρησιμοποιεί τη συζυγή μέθοδο βελτιστοποίησης (adjoint method).

# Παράρτημα Α΄

## Μαθηματικά Εργαλεία

Το πρόγραμμα παραμετροποίησης πτερυγώσεων στροβιλομηχανών που αναπτύχθηκε σε αυτή τη διπλωματική εργασία, χρησιμοποιεί κάποια μαθηματικά εργαλεία. Ακόμη, σε κάποια σημεία απαιτείται η επίλυση μη-γραμμικών εξισώσεων και επιλέγονται διάφορες μέθοδοι επίλυσης σε κάθε περίπτωση. Στο κεφάλαιο αυτό αναπτύσσεται το καθένα από αυτά τα μαθηματικά εργαλεία που χρησιμοποιήθηκαν ώστε ο κώδικας του προγράμματος να γίνεται πιο κατανοητός και επιπλέον να μην διακόπτεται η συνοχή των άλλων κεφαλαίων από την ανάγκη για περιγραφή κάποιου από τα βοηθήματα αυτά.

### Α΄.1 Πολυώνυμα Bezier - Bernstein

Οι καμπύλες Bezier - Bernstein (ή απλά καμπύλες Bezier [3] όπως επίσης αποκαλούνται λόγω συντομίας) αποτελούν έναν πολύ απλό και ευέλικτο τρόπο να προσεγγιστεί μια γεωμετρική μορφή χρησιμοποιώντας έναν περιορισμένο αριθμό σημείων ελέγχου. Βασική ιδιότητα της καμπύλης Bezier τάξης  $N$  που θα προκύψει από τα  $N + 1$  σημεία ελέγχου  $(x_0, y_0), \dots, (x_N, y_N)$  είναι το ότι η καμπύλη ξεκινά από το πρώτο και καταλήγει στο τελευταίο σημείο της αλληλουχίας και ότι το ζεύγος των δύο πρώτων και των δύο τελευταίων σημείων καθορίζει την κλίση της καμπύλης στο πρώτο και στο τελευταίο σημείο της. Τα πολυώνυμα Bezier δημιουργούνται με βάση τον αλγόριθμο de Casteljau του οποίου η περιγραφή παραλείπεται καθώς δίνεται σημασία στην πρακτική εφαρμογή των πολυωνύμων Bezier.

Γίνεται χρήση μιας μητρικής γραφής η οποία καταλήγει να δίνει κάθε σημείο  $\vec{r}_N$  της καμπύλης Bezier ως

$$\vec{r}_N(t) \equiv \vec{r}(t) = \sum_{i=0}^N \vec{r}_i C_i(t) \quad (\text{Α΄.1})$$

δηλαδή

$$\begin{aligned}x(t) &= \sum_{i=0}^N x_i C_i(t) \\y(t) &= \sum_{i=0}^N y_i C_i(t) \\z(t) &= \sum_{i=0}^N z_i C_i(t)\end{aligned}\tag{A'.2}$$

όπου

$$\begin{bmatrix} C_0(t) \\ C_1(t) \\ \vdots \\ C_N(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{0,0} & m_{0,1} & \dots & m_{0,N} \\ m_{1,0} & m_{1,1} & \dots & m_{1,N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ m_{N,0} & m_{N,1} & \dots & m_{N,N} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} t^0 \\ t^1 \\ \vdots \\ t^N \end{bmatrix}\tag{A'.3}$$

με στοιχεία που ορίζονται ως

$$m_{i,j} = (-1)^{j-i} \binom{N}{j} \binom{j}{i}\tag{A'.4}$$

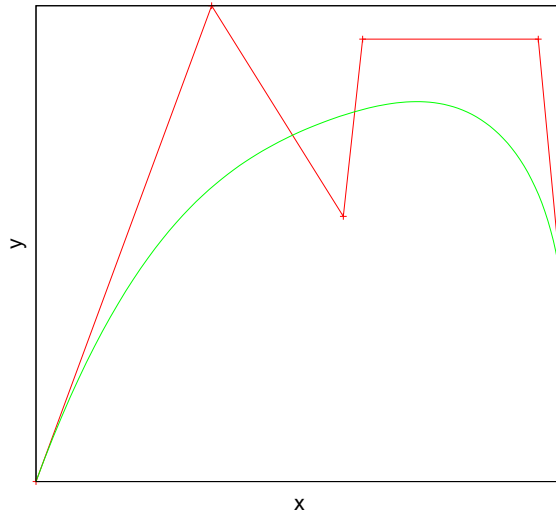
όπου

$$\binom{a}{i} = \frac{a!}{i!(a-i)!}\tag{A'.5}$$

Όπως φαίνεται παραπάνω, η καμπύλη Bezier είναι παραμετρική ως προς μία παράμετρο  $t$ . Κάθε σημείο της καμπύλης αντιστοιχεί σε μία τιμή της παραμέτρου  $t$ . Οι τιμές της παραμέτρου είναι το κλειστό διάστημα  $[0, 1]$  με το σημείο της καμπύλης Bezier που αντιστοιχεί στην τιμή  $t = 0$  να ταυτίζεται με το πρώτο σημείο ελέγχου και το σημείο που αντιστοιχεί στην τιμή  $t = 1$  να ταυτίζεται με το τελευταίο σημείο ελέγχου της καμπύλης. Πέραν των μαθηματικών διατυπώσεων, τα σημεία ελέγχου μιας καμπύλης Bezier πρέπει να γίνουν κατανοητά ως πόλοι έλξης της καμπύλης. Μετακινώντας ένα οποιοδήποτε σημείο ελέγχου υπάρχει επίδραση σε ολόκληρη την καμπύλη ενώ η τάση είναι, η καμπύλη να μετακινείται (κυρίως τοπικά) προς τη νέα θέση του σημείου ελέγχου που μετακινήθηκε. Η καθολική επίδραση που έχει η μετακίνηση έστω και ενός σημείου ελέγχου στην καμπύλη Bezier αποτελεί συγχρόνως πλεονέκτημα και μειονέκτημα, ανάλογα πάντοτε με το σκοπό που χρησιμοποιούνται οι καμπύλες Bezier. Για παράδειγμα, αν το πολύγωνο Bezier έχει μια “λογική λειότητα” με εξαίρεση ένα εσωτερικό του σημείο, το πλεονέκτημα είναι ότι το σημείο αυτό δεν θα επηρεάσει καθόλου τη λειότητα της καμπύλης Bezier. Ως μειονέκτημα (πάντοτε σε αναλογία με τη χρήση) αναφέρεται το γεγονός ότι για να τροποποιηθεί κατά κάποιον τρόπο την καμπύλη Bezier πρέπει να μετακινήθούν πολλά σημεία ελέγχου, όχι πάντοτε με προφανή τρόπο. Το σχήμα A'.1 δείχνει μια καμπύλη Bezier και το πολύγωνο που σχηματίζουν



τα σημεία ελέγχου της.



**Σχήμα Α'.1:** Μία καμπύλη Bezier και το πολύγωνο που σχηματίζεται από τα σημεία ελέγχου της.

### Α'.1.1 Αύξηση τάξης Bezier καμπύλης (Bezier degree elevation)

Υπάρχει η περίπτωση να χρειάζεται να αυξηθεί το πλήθος των σημείων ελέγχου (control points) μιας καμπύλης Bezier χωρίς να αλλάξει το σχήμα της καμπύλης [7]. Τέτοιο παράδειγμα είναι, όπως συναντήθηκε και στην παρούσα διπλωματική εργασία, η περίπτωση κατά την οποία πρέπει δύο καμπύλες Bezier να δίνονται από το ίδιο πλήθος σημείων ώστε να βρεθούν ενδιάμεσες καμπύλες με παρεμβολή μεταξύ των σημείων ελέγχου. Για την αύξηση του αριθμού των σημείων ελέγχου που δίνουν μια καμπύλη Bezier κατά **ένα σημείο** (από  $N + 1$  σημεία ελέγχου  $\vec{r}$  σε  $N + 2$  σημεία ελέγχου  $\vec{R}$ ) ισχύει:

$$\vec{R}_0 = \vec{r}_0 \quad (\text{A'.6})$$

$$\vec{R}_i = \frac{i}{N+1} \vec{r}_{i-1} + \left(1 - \frac{i}{N+1}\right) \vec{r}_i, 1 \leq i \leq N \quad (\text{A'.7})$$

$$\vec{R}_{N+1} = \vec{r}_N \quad (\text{A'.8})$$

Για την αύξηση του πλήθους των σημείων ελέγχου κατά περισσότερα από ένα σημείο, η παραπάνω διαδικασία επαναλαμβάνεται τόσες φορές, όσες χρειάζεται ώστε το τελικό πλήθος των σημείων ελέγχου να είναι το επιθυμητό. Σημειώνεται πως πέρα από ειδικές

περιπτώσεις είναι αδύνατη η αντίστροφη διαδικασία, δηλαδή η μείωση του πλήθους των σημείων ελέγχου, καθώς καθίσταται αδύνατη η απόδοση της ίδιας ακριβώς καμπύλης λόγω μη-μηδενικής παραγώγου, τάξης ίσης με το βαθμό του πολυωνύμου που χάθηκε λόγω αφαίρεσης σημείου ελέγχου.

## A'.2 Αριθμητική Παρεμβολή με Κυβικές B Splines

Οι κυβικές B-Splines ([3],[23]) χρησιμοποιούνται ευρύτατα ως μέθοδος τμηματικά συνεχούς παρεμβολής. Τα  $N + 1$  δεδομένα κομβικά σημεία  $(x_i, y_i)$  αντιμετωπίζονται κατά πεντάδες (διαδοχικών σημείων) όπου μεταξύ τους εφαρμόζεται κυβική παρεμβολή. Σχηματίζονται πολυώνυμα τρίτου βαθμού ως προς την παράμετρο  $u$ , τα οποία καταλαμβάνουν εύρος τεσσάρων διαδοχικών διαστημάτων.

Έστω  $(x_{i-2}, y_{i-2}), \dots, (x_{i+2}, y_{i+2})$  τα σημεία. Επειδή το κάθε πολυώνυμο καταλαμβάνει εύρος τεσσάρων διαστημάτων, το πεδίο ορισμού της παραμέτρου  $u$  ορίζεται ως το  $[-2, 2]$  και στις τιμές  $-2, -1, 0, 1$  και  $2$  αντιστοιχεί το καθένα από τα πέντε δεδομένα κομβικά σημεία. Στο διάστημα  $[-2, 2]$ , ορίζονται διαφορετικές εκφράσεις για τα πολυώνυμα τρίτου βαθμού σε κάθε μοναδιαίο εύρος της  $u$ . Οι εκφράσεις αυτές ονομάζονται κυβικές B-Splines και είναι οι

$$B(u) = \begin{cases} b_{-2}(u+2) = \frac{(2+u)^3}{6} & -2 \leq u \leq -1 \\ b_{-1}(u+1) = \frac{4-6u^2-3u^3}{6} & -1 \leq u \leq 0 \\ b_0(u) = \frac{4-6u^2+3u^3}{6} & 0 \leq u \leq 1 \\ b_1(u-1) = \frac{(2-u)^3}{6} & 1 \leq u \leq 2 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases} \quad (A'.9)$$

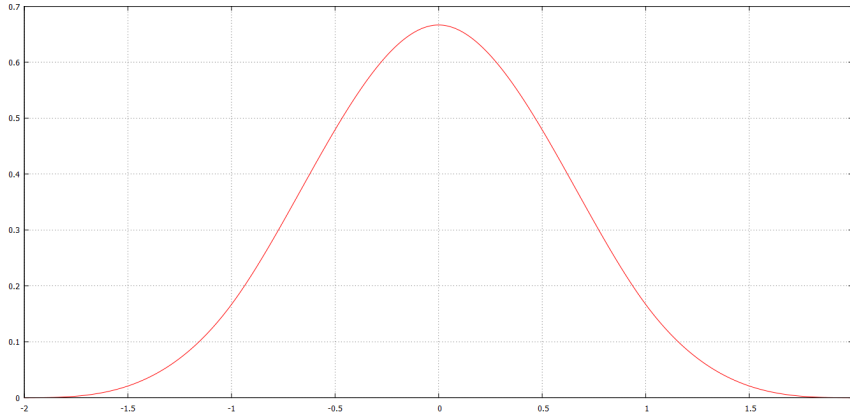
Στο σχήμα A'.2 φαίνεται η γραφική παράσταση των κυβικών B-Splines.

Μια ιδιότητα της κυβικής B Spline είναι

$$B(u-2) + B(u-1) + B(u) + B(u+1) = 1 \quad , \quad 0 \leq u \leq 1 \quad (A'.10)$$

Με βάση τη σχέση A'.10, σε μία θέση στο διάστημα  $(x_i, y_i) \rightarrow (x_{i+1}, y_{i+1})$  που αντιστοιχεί σε ορισμένη τιμή του  $u (0 \leq u < 1)$ , από τον ορισμό των κυβικών B Splines προκύπτει πως από το σημείο αυτό διέρχονται τέσσερις μη-μηδενικές συναρτήσεις με άθροισμα μονάδα.

Σε αυτό το σημείο ορίζεται η παράμετρος  $\mu$ . Η παράμετρος αυτή, κάνει την "ολική" παραμετροποίηση των  $N + 1$  προς παρεμβολή κομβικών σημείων. μεταξύ  $N$  και  $\mu$  ισχύει



**Σχήμα Α'.2:** Γραφική παράσταση της συνάρτησης κυβικής B Spline.

η σχέση

$$u = N\mu$$

Η παράμετρος  $\mu$  μεταβάλλεται συνολικά από την τιμή  $\mu = 0$  την οποία έχει στον πρώτο κόμβο  $(x_0, y_0)$  ως την τιμή  $\mu = 1$  την οποία έχει στον τελευταίο κόμβο  $(x_N, y_N)$ . Ενδιάμεσα, στο κομβικό σημείο  $i$ , η παράμετρος  $\mu$  παίρνει την τιμή  $\mu = \frac{i}{N}$ . Έτσι, η σχέση Α'.10 γράφεται

$$B(N\mu - 2) + B(N\mu - 1) + B(N\mu) + B(N\mu + 1) = 1 \quad , \quad 0 \leq \mu \leq \frac{1}{N} \quad (\text{Α'.11})$$

Με βάση τα παραπάνω, γίνεται χρήση των κυβικών B Splines στην παρεμβολή  $N + 1$  δεδομένων σημείων με την εξίσωση παρεμβολής

$$\vec{r}(\mu) = \sum_{i=-1}^{N+1} B(N\mu - i)\vec{R}_i \quad (\text{Α'.12})$$

όπου  $\vec{R}_i = (X_i, Y_i), i = -1, \dots, N + 1$  ένα σύνολο  $N + 3$  φανταστικών βοηθητικών σημείων που συντελούν ώστε η καμπύλη που προκύπτει να παρεμβάλλει τα  $N + 1$  δεδομένα κομβικά σημεία. Η ύπαρξη των δύο επιλέον σημείων (για  $i = -1$  και  $i = N + 1$ ) εισάγει τις οριακές συνθήκες για παραγώγους στο πρώτο και στο τελευταίο δεδομένο κομβικό σημείο. Για την παρεμβολή των  $N + 1$  δεδομένων κομβικών σημείων

$\vec{r}(x_i, y_i)$ , μετά από πράξεις, το τελικό προς επίλυση σύστημα είναι το

$$\begin{bmatrix} -N & 0 & N & & & \\ 1 & 4 & 1 & & & \\ & & 1 & 4 & 1 & \\ & & & & \vdots & \\ & & & & & 1 & 4 & 1 \\ & & & & & -N & 0 & N \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vec{R}_{-1} \\ \vec{R}_0 \\ \vec{R}_1 \\ \vdots \\ \vec{R}_N \\ \vec{R}_{N+1} \end{bmatrix} = 6 \begin{bmatrix} \frac{1}{3}\vec{d}_0 \\ \vec{r}_0 \\ \vec{r}_1 \\ \vdots \\ \vec{r}_N \\ \frac{1}{3}\vec{d}_N \end{bmatrix} \quad (\text{A'.13})$$

όπου  $\vec{d}_0$  και  $\vec{d}_N$  είναι οι τιμές των πρώτων παραγώγων στο πρώτο και στο τελευταίο κομβικό σημείο αντίστοιχα. Οι παράγωγοι είτε είναι γνωστές, είτε γίνεται υπόθεση για τις τιμές τους με βάση την εμπειρία και τη φύση του προβλήματος. Τα υποπρογράμματα που εισάγουν τις κυβικές B Splines, όπου αυτές χρησιμοποιούνται στο λογισμικό γέσης της μορφής της πτερύγωσης, είναι οι **contol1**, **geosimpl**, **splif** και **intpl**.

## A'.3 Επίλυση Μη-Γραμμικών Εξισώσεων

### A'.3.1 Μέθοδος Διχοτόμησης του Διαστήματος

Για την επίλυση μιας μη-γραμμικής εξίσωσης [3] για την οποία είναι γνωστό πως η ζητούμενη ρίζα  $x_r$  αναμένεται να βρεθεί σε ένα διάστημα ( $x_a < x_r < x_b$ ), οπότε θα ισχύει  $f(a) \cdot f(b) < 0$  μπορεί να χρησιμοποιηθεί η μέθοδος διχοτόμησης του διαστήματος. Ο αλγόριθμος της μεθόδου αυτής ξεκινά με τον έλεγχο του πρόσημου της συνάρτησης στο μέσο του εύρους τιμών  $[a, b]: x_1 = (a + b)/2$ . Η συνάρτηση  $f(x_1)$  θα έχει πρόσημο  $[signf(x_1)]$  είτε ίδιο με το  $[signf(x_a)]$ , οπότε η ρίζα θα βρίσκεται στο διάστημα  $x_1 < x_r < b$  είτε ίδιο με  $[signf(x_b)]$ , οπότε η ρίζα θα βρίσκεται στο διάστημα  $a < x_r < x_1$ . Η διαδικασία συνεχίζεται στο νέο διάστημα, το οποίο υποδιπλασιάζεται σε κάθε βήμα του αλγόριθμου, έως ότου προσεγγισθεί η ρίζα με την προκαθορισμένη ακρίβεια. Το απόλυτο σφάλμα της μεθόδου θα είναι το πολύ ίσο με το μισό του εύρους του τρέχοντος διαστήματος τιμών. Επομένως ο αλγόριθμος θα τερματισθεί (συγκλίνει) όταν

$$|x_m - x_{m-1}| < E_r \quad (\text{A'.14})$$

όπου  $E_r$  η επιθυμητή ακρίβεια (απόλυτο σφάλμα) και  $m$  ο αριθμός των επαναλήψεων του αλγόριθμου. Ο αλγόριθμος πρέπει επίσης να συγκλίνει και στην απίθανη αλλά όχι αδύνατη περίπτωση που θα συμβεί  $f(x_m) = 0$ .

### Α'.3.2 Μέθοδος Εσφαλμένης Θέσης ή Γραμμικής Παρεμβολής

Εκτός της μεθόδου διχοτόμησης που αναπτύχθηκε παραπάνω χρησιμοποιείται σε κάποια σημεία του προγράμματος η Μέθοδος Εσφαλμένης Θέσης (Regular Falsi) η οποία είναι μια παραλλαγή της μεθόδου της διχοτόμησης. Οι δύο μέθοδοι έχουν τον ίδιο αλγόριθμο με τη μοναδική διαφορά να βρίσκεται στον τρόπο υπολογισμού της νέας προσέγγισης της ρίζας σε κάθε επανάληψη του αλγορίθμου: αντί για το μέσο του διαστήματος, γίνεται γραμμική παρεμβολή μεταξύ των άκρων του διαστήματος, δηλαδή ως να επρόκειτο για γραμμική συνάρτηση. Επομένως, αντί για  $x_1 = (a + b)/2$ , λαμβάνεται εδώ

$$x_1 = a - \frac{f(a) \cdot (b - a)}{f(b) - f(a)} \quad (\text{A'.15})$$

ενώ ο υπόλοιπος αλγόριθμος παραμένει ακριβώς ίδιος.

### Α'.3.3 Εφαρμογή στις καμπύλες Bezier

Πολλές φορές, όταν χρησιμοποιούνται καμπύλες Bezier, χρειάζεται να βρεθούν σημεία των καμπυλών στα οποία είναι γνωστή η τιμή κάποιας από τις συντεταγμένες και αναζητούνται οι υπόλοιπες. Η εύρεση των υπολοίπων συντεταγμένων γίνεται μέσω της εύρεσης της τιμής της παραμέτρου  $t$  που αντιστοιχεί σε καθένα από τα σημεία αυτά. Για την εύρεση της τιμής αυτής, δημιουργείται για το κάθε σημείο, μία μη-γραμμική εξίσωση ως προς  $t$  η οποία μπορεί να επιλυθεί με μία από τις μεθόδους που παρουσιάστηκαν στις ενότητες Α'.3.1 και Α'.3.2. Αν η γνωστή συντεταγμένη είναι η  $x$  και  $x_{cp,0}, x_{cp,1}, \dots, x_{cp,N}$  οι συντεταγμένες  $x$  των σημείων ελέγχου της καμπύλης Bezier, τότε η εξίσωση που επιλύεται σε κάθε σημείο είναι η

$$\sum_{i=0}^N x_{cp,i} C_i(t) - x = 0 \quad (\text{A'.16})$$

όπου οι παράμετροι  $C_i$  υπολογίζονται σύμφωνα με τη σχέση Α'.13.

## A'.4 Επίλυση Μη-Γραμμικών Συστημάτων

### A'.4.1 Μέθοδος Newton-Raphson

Αν επιδιώκεται η επίλυση ενός συστήματος δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους (όπως χρειάστηκε και στον κώδικα του προγράμματος για την εύρεση, στο μεσημβρινό επίπεδο, των σημείων τομής της προβολής μιας ακμής του πτερυγίου με μια καμπύλη σταθερού ύψους πτερυγίου) μπορεί να χρησιμοποιηθεί η μέθοδος Newton-Raphson [3]. Για την εύρεση των ριζών  $x_0, y_0$  του συστήματος των εξισώσεων

$$f(x_0, y_0) = 0 \quad (\text{A'.17})$$

$$g(x_0, y_0) = 0 \quad (\text{A'.18})$$

χρησιμοποιούνται οι παρακάτω αναγωγικοί τύποι

$$x^{(n+1)} = x^{(n)} - \frac{f g_y - g f_y}{J(f, g)} \quad (\text{A'.19})$$

$$y^{(n+1)} = y^{(n)} - \frac{g f_x - f g_x}{J(f, g)} \quad (\text{A'.20})$$

οι οποίοι προέκυψαν από την προσέγγιση κατά Taylor των συναρτήσεων  $f$  και  $g$  αγνοώντας τους όρους δεύτερης τάξης και άνω. Στους παραπάνω τύπους,  $(x^{(n)}, y^{(n)})$  είναι η νιοστή προσέγγιση στη ρίζα του συστήματος και  $f_x, f_y, g_x, g_y$  είναι οι μερικές παράγωγοι των συναρτήσεων  $f$  και  $g$  ως προς  $x$  και  $y$  στη θέση  $(x^{(n)}, y^{(n)})$ .  $J(f, g)$  είναι η Ιακωβιανή των συναρτήσεων  $f, g$  υπολογιζόμενη στη θέση  $(x^{(n)}, y^{(n)})$ . Η Ιακωβιανή δίνεται από τον παρακάτω τύπο

$$J(f, g) = f_x g_y - g_x f_y \quad (\text{A'.21})$$

### A'.4.2 Μέθοδος Ανάλυσης LU (Μέθοδος Crout)

Η μέθοδος ανάλυσης LU [3] είναι η δημοφιλέστερη μέθοδος για την επίλυση γραμμικών συστημάτων. Ένα γραμμικό σύστημα έχει τη μορφή

$$A \cdot \vec{x} = \vec{b} \quad (\text{A'.22})$$

Ο  $A$  είναι τετραγωνικός πίνακας διάστάσεων  $N \times N$  και τα  $\vec{x}$ ,  $\vec{b}$  διανύσματα διάστασης  $N$ . Ένα παράδειγμα με  $N = 3$  είναι το παρακάτω.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 10 \\ 5 \end{bmatrix} \quad (\text{A'.23})$$

Η μέθοδος εφαρμόζεται με την ανάλυση του  $A$  σε γινόμενο δύο τριγωνικών πινάκων ως

$$A = L \cdot U$$

όπου  $L$  είναι ένας κάτω τριγωνικός πίνακας (έχει μη-μηδενικά στοιχεία μόνο στην κύρια διαγώνιο και κάτω από αυτή, ενώ τα υπόλοιπα στοιχεία του είναι μηδενικά) και  $U$  είναι ένας άνω τριγωνικός πίνακας (έχει μη-μηδενικά στοιχεία μόνο στην κύρια διαγώνιο και πάνω από αυτή, ενώ τα υπόλοιπα στοιχεία του είναι μηδενικά).

Ο Crout πρότεινε έναν έξυπνο και σύντομο τρόπο για τον υπολογισμό των στοιχείων των πινάκων  $L$  και  $U$  (μέθοδος Crout). Για την εύρεση των στοιχείων των δύο πινάκων οι άγνωστοι είναι  $N + N^2$  ενώ οι εξισώσεις που υπάρχουν προς επίλυση είναι  $N^2$ . Έτσι, υπάρχει δυνατότητα καθορισμού  $N$  αγνώστων στοιχείων. Ο Crout επέλεξε τα στοιχεία της διαγώνιου του πίνακα  $U$  να είναι ίσα με μονάδα. Επειδή τα διαγώνια στοιχεία του πίνακα  $U$  ισούνται με τη μονάδα, εξοικονομείται μνήμη υπολογιστή αν στη θέση του πίνακα  $A$  μετά την αποσύνθεση σε  $L$  και  $U$  πίνακες αποθηκευθεί το αποτέλεσμα. Αυτό για  $N = 3$  γίνεται ως

$$\begin{bmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \alpha_{1,3} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \alpha_{2,3} \\ \alpha_{3,1} & \alpha_{3,2} & \alpha_{3,3} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} l_{1,1} & u_{1,2} & u_{1,3} \\ l_{2,1} & l_{2,2} & u_{2,3} \\ l_{3,1} & l_{3,2} & l_{3,3} \end{bmatrix} \quad (\text{A'.24})$$

όπου υπονοείται ότι τα διαγώνια στοιχεία του πίνακα  $U$  ισούνται με τη μονάδα και οι πίνακες  $L$  και  $U$  γράφονται συντηρημένα σε έναν πίνακα. Ακόμη, το στοιχείο  $\alpha_{1,1}$  του πίνακα  $A$ , ο Crout επέλεξε να είναι ίσα με τη μονάδα (γίνεται με διαίρεση όλων των στοιχείων της πρώτης γραμμής του  $A$  και του  $b_1$  με  $\alpha_{1,1}$ ). Η μέθοδος Crout αλγοριθμικά, λαμβάνοντας υπόψη τα παραπάνω, γράφεται

$$\alpha_{1,j} = \frac{\alpha_{1,j}}{\alpha_{1,1}} \quad \text{για} \quad j = 2, 3, \dots, N$$

$$b_1 = \frac{b_1}{\alpha_{1,1}}$$

$$l_{i,1} = \alpha_{i,1} \quad \text{για} \quad i = 1, 2, \dots, N$$

$$u_{1,j} = \alpha_{1,j} \quad \text{για} \quad j = 2, 3, \dots, N$$

Για  $j = 2, 3, \dots, N - 1$

$$l_{i,j} = \alpha_{i,j} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{i,k} u_{k,j} \quad \text{για} \quad i = j, j+1, \dots, N$$

$$u_{j,k} = \frac{\alpha_{j,k} - \sum_{i=1}^{j-1} l_{j,i} u_{i,k}}{l_{j,j}} \quad \text{για} \quad k = j+1, j+2, \dots, N$$

και

$$l_{n,n} = \alpha_{n,n} - \sum_{i=1}^{n-1} l_{n,i} u_{i,n}$$

Για την επίλυση προς τους αγνώστους, ο πίνακας  $A$  αναλύεται σε  $L$  και  $U$  και η εξίσωση Α'.22 γράφεται

$$(L \cdot U) \cdot \vec{x} = \vec{b}$$

ή

$$L \cdot (U \cdot \vec{x}) = \vec{b}$$

Ο πίνακας  $U \cdot \vec{x}$  είναι ένα διάνυσμα στήλης  $\vec{y}$

$$U \cdot \vec{x} = \vec{y} \quad (\text{Α'.25})$$

και προκύπτει

$$L \cdot \vec{y} = \vec{b} \quad (\text{Α'.26})$$

Το αρχικό πρόβλημα, έτσι αναλύεται σε δύο επιμέρους προβλήματα, η επίλυση των οποίων όμως αποδεικνύεται πως είναι ταχύτατη. Η εξίσωση Α'.26 λύνεται με εμπρός αντικατάσταση και οι τιμές των στοιχείων του διανύσματος  $\vec{y}$  υπολογίζονται από τις σχέσεις

$$y_1 = \frac{b_{1,1}}{l_{1,1}}$$

$$y_i = \frac{1}{l_{i,i}} \left[ b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{i,j} y_j \right] \quad \text{για} \quad i = 2, 3, \dots, N$$

Η εξίσωση Α'.25, επιλύεται με πίσω αντικατάσταση και δίνει τη λύση  $\vec{x}$  του αρχικού προβλήματος.

$$x_N = \frac{y_N}{u_{N,N}}$$

$$x_i = \frac{1}{u_{i,i}} \left[ y_i - \sum_{j=i+1}^N u_{i,j} x_j \right] \quad \text{για} \quad i = N-1, N-2, \dots, 1$$



Η μέθοδος Crout, χρησιμοποιείται από το λογισμικό δημιουργίας της μορφής της περρύγωσης μέσω των υποπρογραμμάτων **crout** και **croutSol**. Το πρώτο πραγματοποιεί τη διαδικασία που απεικονίζεται με τη σχέση Α'.24 ενώ, το δεύτερο πραγματοποιεί τις αντικαταστάσεις που περιγράφηκαν για την επίλυση των εξισώσεων Α'.25 και Α'.26.

## Α'.5 Συστήματα Συντεταγμένων

Οποιαδήποτε θέση στον χώρο μπορεί να περιγραφεί με την τιμή τριών παραμέτρων. Οι παράμετροι αυτές είναι οι συντεταγμένες του σημείου. Έχουν αναπτυχθεί και συναντώνται στα μαθηματικά διάφορα συστήματα συντεταγμένων. Ανάλογα με τη μορφή που απαιτείται να περιγραφεί, αποφασίζεται σε κάθε περίπτωση ποιο σύστημα είναι πιο βολικό να χρησιμοποιηθεί. Η μεταφορά μεταξύ δύο οποιωνδήποτε συστημάτων συντεταγμένων γίνεται με μετασχηματισμό, με τη χρήση μαθηματικών σχέσεων. Το πιο σύνηθες σύστημα συντεταγμένων είναι το σύστημα καρτεσιανών συντεταγμένων. Το πρόγραμμα που παρουσιάζεται σε αυτή τη διπλωματική εργασία εκτός του συστήματος των καρτεσιανών συντεταγμένων χρειάζεται και κάνει χρήση και του συστήματος των κυλινδρικών συντεταγμένων.

### Α'.5.1 Καρτεσιανές Συντεταγμένες

Το καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων στον χώρο αποτελείται από τρεις προσανατολισμένες ευθείες, κάθετες ανά δύο μεταξύ τους και τεμνόμενες σε ένα σημείο. Το σημείο όπου τέμνονται λέγεται αρχή του καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων. Επομένως, προκύπτουν άξονες  $xx', yy'$  και  $zz'$ . Έτσι, κάθε σημείο στο χώρο μπορεί να παρασταθεί από μία μοναδική τριάδα αριθμών  $(x, y, z)$ , με κάθε συντεταγμένη να αντιστοιχεί στην απόσταση της προβολής του σημείου σε κάθε έναν από τους τρεις άξονες αντίστοιχα με την αρχή του συστήματος συντεταγμένων, το σημείο  $O(0, 0, 0)$ . Σημειώνεται πως πρέπει να έχει οριστεί απόσταση ίση με 1, σύμφωνα με την οποία αριθμούνται οι άξονες.

### Α'.5.2 Κυλινδρικές Συντεταγμένες

Το κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων στον χώρο, αντί για την τριάδα αριθμών  $(x, y, z)$  χρησιμοποιεί την τριάδα αριθμών  $(r, \vartheta, z)$ . Οι συντεταγμένες  $r, \vartheta$  και  $z$  μετριοούνται όπως συμβαίνει και στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων σχετικά με το σημείο  $O(0, 0, 0)$ . Η συντεταγμένη  $r$ , δηλώνει την απόσταση μεταξύ της προβολής του σημείου στο επίπεδο  $xy$  και του σημείου  $O$ .

Η συντεταγμένη  $\vartheta$  δηλώνει τη γωνία που σχηματίζει το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει

την προβολή του σημείου στο επίπεδο  $xy$  με το  $O$ , με τον θετικό ημιάξονα  $x+$ . Η συντεταγμένη  $z$  είναι η ίδια με αυτή των καρτεσιανών συντεταγμένων.

### A'.5.3 Μετασχηματισμοί Μεταξύ Κυλινδρικών και Καρτεσιανών Συντεταγμένων

Ο μετασχηματισμός από τις καρτεσιανές συντεταγμένες στις κυλινδρικές, δίνεται από τις σχέσεις:

$$R = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (A'.27)$$

$$\theta = \text{atan}\left(\frac{y}{x}\right) \quad (A'.28)$$

$$z_{cyl} = z_{kart} \quad (A'.29)$$

Αντίστροφα, ο μετασχηματισμός από κυλινδρικές συντεταγμένες σε καρτεσιανές, δίνεται από τις σχέσεις:

$$x = R\cos(\theta) \quad (A'.30)$$

$$y = R\sin(\theta) \quad (A'.31)$$

$$z_{kart} = z_{cyl} \quad (A'.32)$$

## A'.6 Αεροδυναμική Βελτιστοποίηση

**Μέθοδος αεροδυναμικής βελτιστοποίησης** ([7],[10],[8],[17],[17],[9]) ονομάζεται το εργαλείο που εντοπίζει τη βέλτιστη λύση ενός προβλήματος αεροδυναμικής, ανιχνεύοντας τον χώρο των υποψήφιων λύσεων. Οι στόχοι του προβλήματος παίρνουν τη μορφή μίας ή περισσότερων **αντικειμενικών συναρτήσεων** για τις οποίες αναζητείται το ακρότατο (η μέγιστη ή η ελάχιστη τιμή, ανάλογα την περίπτωση) που αντιστοιχεί στην αεροδυναμικά βέλτιστη λύση. Κάθε λύση, αξιολογείται μέσω του **λογισμικού αξιολόγησης**, το οποίο δίνει τιμές στις αντικειμενικές συναρτήσεις. Για την αεροδυναμική βελτιστοποίηση, το λογισμικό αξιολόγησης σχετίζεται με την επίλυση των εξισώσεων Navier-Stokes. Οι λύσεις συνήθως είναι πολλαπλά άπειρες, και αυτός είναι ο λόγος που ο χρόνος εντοπισμού της βέλτιστης λύσης είναι σημαντικός παράγοντας για της επιλογή της μεθόδου. Οι μέθοδοι βελτιστοποίησης διακρίνονται σε **αιτιοκρατικές** και **στοχαστικές**. Οι αιτιοκρατικές μέθοδοι χρησιμοποιούν τη

γενικευμένη έννοια της παραγωγού των αντικειμενικών συναρτήσεων, των οποίων τις τιμές καλούνται να τις υπολογίσουν ή τα τις προσεγγίσουν. Οι στοχαστικές μέθοδοι χρησιμοποιούν στοιχεία τυχαίας ή οργανωμένα τυχαίας αναζήτησης της βέλτιστης λύσης και δεν εγκλωβίζονται σε τοπικά ακρότατα. Το μειονέκτημα που παρουσιάζουν οι στοχαστικές μέθοδοι είναι πως χρειάζονται μεγαλύτερη υπολογιστική ισχύ. Το μειονέκτημα αυτό δεν αποτελεί εμπόδιο στη σύγχρονη εποχή καθώς η υπολογιστική ισχύς έχει αναπτυχθεί σε βαθμό που να μπορούν να πραγματοποιηθούν οι πολυάριθμες αξιολογήσεις που χρειάζονται. Μία από τις επικρατέστερες στοχαστικές μεθόδους βελτιστοποίησης, είναι οι **εξελικτικοί αλγόριθμοι βελτιστοποίησης** (evolutionary algorithms, EA).

### Α'.6.1 Αεροδυναμική Βελτιστοποίηση με Εξελικτικούς Αλγορίθμους

Οι EA εξελικτικοί αλγόριθμοι έχουν επικρατήσει ευρέως λόγω του ενδιαφέροντος, μη-μαθηματικού υποβάθρου τους και της ευκολίας με την οποία προσαρμόζονται σε κάθε νέο πρόβλημα, αρκεί να υπάρχει προγραμματισμένο λογισμικό αξιολόγησης για τις υποψήφιες λύσεις. Βασικό γνώρισμα των EA, σε αντίθεση με άλλες στοχαστικές μεθόδους, είναι ότι χρειάζονται πληθυσμούς υποψηφίων λύσεων και όχι μια μεμονωμένη λύση σε κάθε επανάληψη. Οι EA μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την επίλυση προβλημάτων πολλών στόχων και υπερτερούν έναντι άλλων μεθόδων στο γεγονός ότι τελικά αποδίδουν ένα σύνολο λύσεων (όπου κάθε λύση μπορεί να είναι βέλτιστη χάρη στην εύρεση ακρότατου διαφορετικής συνάρτησης στόχου).

Η βασική διαδικασία αναζήτησης της βέλτιστης λύσης είναι η **εξέλιξη**. Στη φύση, ως εξέλιξη χαρακτηρίζεται η αυτόματη διαδικασία της προσαρμογής κάθε συστήματος στο περιβάλλον. Στη βελτιστοποίηση με εξελικτικούς αλγορίθμους, χρησιμοποιούνται στοχαστικοί μηχανισμοί εξέλιξης που προέρχονται από τη φύση και βασίζονται στις αρχές εξέλιξης των ειδών που διατύπωσε ο Δαρβίνος. Στους φυσικούς πληθυσμούς, πραγματοποιείται η **φυσική επιλογή**, δηλαδή η διαδικασία εξέλιξης των ειδών μέσω της οποίας οι οργανισμοί που είναι καλύτερα προσαρμοσμένοι στο περιβάλλον τους, αφήνουν περισσότερους απογόνους από εκείνους που είναι λιγότερο προσαρμοσμένοι. Οι EA προσομοιώνουν μερικώς και απλουστευμένα την εξέλιξη των φυσικών πληθυσμών.

Σε έναν EA, ένας πληθυσμός  $\mu$  υποψηφίων λύσεων (γονείς) εξελίσσεται στον πληθυσμό των  $\lambda$  απογόνων. Οι νέες λύσεις, προκύπτουν από τους γονείς και ενδέχεται να έχουν καλύτερα χαρακτηριστικά. Από τον πληθυσμό  $\lambda$ , επιλέγονται οι  $\mu$  γονείς της επόμενης γενιάς. Η διαδικασία αυτή συνεχίζεται γενιά με γενιά μέχρι να ικανοποιηθεί κάποιο κριτήριο σύγκλισης του αλγορίθμου. Πιθανά τέτοια κριτήρια είναι τα παρακάτω.

- Να μη βελτιώνεται περαιτέρω η λύση για κάποιον αριθμό αξιολογήσεων ή γενεών.
- Να έχει ομογενοποιηθεί ο πληθυσμός.

- Να έχει περάσει το χρονικό διάστημα που όρισε ο χρήστης.

Αυστηρότερα, για μια γενιά  $g$  ενός ΕΑ, ορίζονται τρία διακριτά σύνολα ατόμων. Το **σύνολο των γονιών**  $S^{g,\mu}$  με  $\mu$  μέλη, το **σύνολο των απογόνων**  $S^{g,\lambda}$  με  $\lambda$  μέλη και το **σύνολο των επίλεκτων ή ελίτ ατόμων**  $S^{g,e}$ . Ο λόγος ύπαρξης του συνόλου ελίτ είναι διπλός. Ο πρώτος λόγος είναι ότι οποτεδήποτε και να σταματήσει η εξέλιξη το σύνολο αυτό περιέχει τις βέλτιστες λύσεις που έχουν βρεθεί ως εκείνη τη στιγμή. Ο δεύτερος λόγος ή **ελιτισμός** όπως ονομάζεται, είναι πως επιθυμείται η αύξηση της πιθανότητας να περάσουν τα καλά χαρακτηριστικά των ελίτ ατόμων στην επόμενη γενιά.

Η παραπάνω εισαγωγική περιγραφή ενός ΕΑ, για πρόβλημα ενός στόχου, περιγράφεται βήμα-βήμα ως εξής.

- Επιλέγονται τα μεγέθη των βασικών πληθυσμών  $S^{g,\mu}$  και  $S^{g,\lambda}$ , δηλαδή οι τιμές των  $\mu$  και  $\lambda$ , ενώ για την πρώτη γενιά (γενιά 0), επιλέγονται **τυχαία** τα άτομα του αρχικού πληθυσμού  $S^{0,\lambda}$ .
- Αξιολογούνται τα  $\lambda$  άτομα του συνόλου  $S^{g,\lambda}$ . Για προβλήματα αεροδυναμικής βελτιστοποίησης, όπου απαιτούνται αριθμητικές αναλύσεις του πεδίου ροής, απαιτούνται  $\lambda$  κλήσεις του κώδικα ανάλυσης της ροής (λογισμικό αριθμητικής επίλυσης των εξισώσεων Navier-Stokes). Το τμήμα αυτό του αλγορίθμου πρακτικά φέρει ολόκληρο το υπολογιστικό κόστος.
- Ανανεώνεται το σύνολο των ελίτ ατόμων  $S^{g,e}$  με όσα άτομα του συνόλου  $S^{g,\lambda}$  αξίζουν να ενταχθούν σε αυτό. Το κριτήριο για την επιλογή των νέων μελών ελίτ είναι η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης. Τα άτομα του  $S^{g,\lambda}$  που αποκτούν καλύτερη τιμή αντικειμενικής συνάρτησης αντικαθιστούν τα άτομα του  $S^{g,e}$  με χειρότερη τιμή. Σημειώνεται πως το σύνολο  $S^{g,e}$  μπορεί να περιέχει περισσότερα του ενός στοιχεία, ακόμη και στην περίπτωση ενός στόχου. Τα επίλεκτα μέλη εντοπίζονται μέσω του **τελεστή εντοπισμού των επίλεκτων μελών**  $T_e$  και με χρήση της σχέσης Α'.33.

$$S^{g+1,e} = T_e(S^{g,\lambda} \cup S^{g,e}) \quad (\text{Α'.33})$$

Στην απλή περίπτωση προβλήματος ενός στόχου που εξετάζεται εδώ, ο τελεστής  $T_e$  απλά βρίσκει τα άτομα που ανήκουν σε κάποιο από τα σύνολα  $S^{g,e}$  και  $S^{g,\lambda}$  και δίνουν καλύτερες τιμές στην αντικειμενική συνάρτηση. Σημειώνεται ότι ο ΕΑ δεν είναι υποχρεωτικό πως θα αλλάξει κάποιο από τα άτομα του συνόλου  $S^{g,e}$  σε κάθε γενιά.

- Χρησιμοποιείται ο **τελεστής επιλεκτικότητας ή ελιτισμού**  $T_{e2}$ . Ο τελεστής  $T_{e2}$  αντικαθιστά κάποια άτομα από το σύνολο  $S^{g,\lambda}$  με άτομα του συνόλου  $S^{g,e}$ , μέσω της σχέσης Α'.34.

$$S^{g,\lambda} = T_{e2}(S^{g,\lambda} \cup S^{g+1,e}) \quad (\text{Α'.34})$$

Το ποια άτομα του συνόλου  $S^{g,e}$  θα αντικατασταθούν εξαρτάται από την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης (συνήθως αντικαθίστανται τα χειρότερα) αν και κάποια μπορεί να επιλέγονται τυχαία. Μέσω του ελιτισμού, συν τοις άλλοις αποφεύγεται μία νέα γενιά να δώσει βέλτιστη λύση χειρότερη από αυτήν της προηγούμενης γενιάς.

- Χρησιμοποιείται ο **τελεστής επιλογής γονέων**  $T_\mu$ , μέσω του οποίου επιλέγεται ο νέος πληθυσμός γονέων  $S^{g+1,\mu}$ . Ο σχηματισμός του πληθυσμού γονέων  $S^{g+1,\mu}$  γίνεται με τον τρόπο που φαίνεται στη σχέση Α'.35.

$$S^{g+1,\mu} = T_\mu(S^{g,\mu} \cup S^{g,\lambda}) \quad (\text{Α'.35})$$

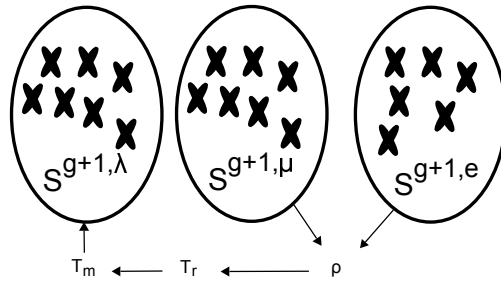
Όπως φαίνεται και στην παραπάνω σχέση, χρησιμοποιούνται οι τρέχοντες πληθυσμοί γονέων και απογόνων, παρ' όλα αυτά σε κάποιες περιπτώσεις μπορεί να χρησιμοποιηθούν μόνο απόγονοι και όχι γονείς.

- Στη συνέχεια, ακολουθεί η διαδικασία της **αναπαραγωγής** για τη δημιουργία του συνόλου απογόνων της επόμενης γενιάς  $S^{g+1,\lambda}$ . Για τη δημιουργία καθενός από τα  $\lambda$  άτομα της γενιάς  $S^{g+1,\lambda}$ , επιλέγονται τυχαία  $\rho$  (συνήθως  $\rho = 2$  αλλά μπορεί και  $\rho > 2$ ) γονείς από το σύνολο των γονέων  $S^{g+1,\mu}$  και δημιουργούνται από αυτούς  $\rho$  απόγονοι. Σε κάποιες αλγοριθμικές παραλλαγές, κάποιο από τα  $\rho$  στοιχεία δίνεται η πιθανότητα να επιλέγεται από το σύνολο  $S^{g+1,e}$ . Με τον τρόπο αυτό ο αλγόριθμος εμφανίζει ισχυρότερα χαρακτηριστικά ελιτισμού. Μεταξύ των  $\rho$  γονέων που επιλέχθηκαν, εφαρμόζονται διαδοχικά διάφοροι τελεστές, μεταξύ των οποίων οι πιο γνωστοί είναι ο **τελεστής διασταύρωσης** ή **επανασυνδυασμού**  $T_r$  και ο **τελεστής μετάλλαξης**  $T_m$  οι οποίοι εξηγούνται παρακάτω με τη βοήθεια του σχήματος Α'.3. Η σχέση που περιγράφει τη διαδικασία που πραγματοποιείται σε αυτό το βήμα είναι η Α'.36.

$$S^{g+1,\lambda} = T_m(T_r(S^{g+1,\mu} \cup S^{g+1,e})) \quad (\text{Α'.36})$$

- Εφαρμόζεται το κριτήριο σύγκλισης της μεθόδου και αν η μέθοδος θεωρείται ότι δεν έχει συγχλίνει αρχίζει μια νέα γενιά, δηλαδή επαναλαμβάνονται όλα τα προηγούμενα βήματα εκτός από το πρώτο θέτοντας  $g \leftarrow g + 1$

Η πιο διαδεδομένη κατηγορία ΕΑ είναι οι **γενετικοί αλγόριθμοι** (ΓΑ). Και το λογισμικό EASY που χρησιμοποιήθηκε για τη βελτιστοποίηση στην παρούσα διπλωματική χρησιμοποιεί γενετικούς αλγορίθμους. Χαρακτηριστικά των ΓΑ, είναι ότι οι μεταβλητές του προβλήματος κωδικοποιούνται με δυαδικούς αριθμούς και ότι ο αριθμός των απογόνων είναι ίσος με τον αριθμό των γονιών ( $\mu = \lambda$ ). Στη δυαδική κωδικοποίηση, η διασταύρωση συνδυάζει δύο ή περισσότερους τυχαία επιλεγμένους γονείς για να δημιουργήσει ισόποσους απογόνους. Η επιλογή γίνεται μέσω των τελεστών επιλογής. Στην πιο απλή περίπτωση διασταύρωσης, στη **διασταύρωση απλού σημείου** επιλέγονται τυχαία δύο γονείς οι οποίοι γίνεται η υπόθεση ότι στη δυαδική κωδικοποίηση



**Σχήμα Α'.3:** Η διαδικασία της αναπαραγωγής για τη δημιουργία της νέας γενιάς απογόνων, με τη χρήση των τελεστών  $T_m$  και  $T_r$ .

γράφονται

11010100011011

10010111010010

αφού πρώτα έχει επιλεγεί τυχαία μια θέση μεταξύ δύο διαδοχικών δυαδικών ψηφίων. Αν για παράδειγμα έχει επιλεγεί η θέση μετά το τέταρτο δυαδικό ψηφίο, αρχικά η δυαδική ακολουθία του κάθε γονέα χωρίζεται ως

1101 | 0100011011

1001 | 0111010010

και στη συνέχεια και οι γονείς διασταυρώνονται ώστε να προκύψουν οι απόγονοι

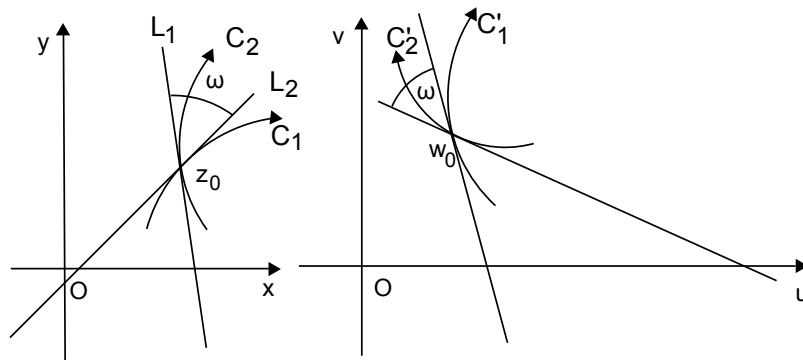
11010111010010

10010100011011

Με βάση τα παραπάνω ορίζονται και πιο σύνθετες διασταυρώσεις όπως η **διασταύρωση δύο σημείων** και η **διασταύρωση ενός σημείου ανά μεταβλητή**. Η διασταύρωση στους εξελικτικούς αλγόριθμους πραγματοποιείται με πιθανότητα  $P_r$  η οποία είναι της τάξης του 90%. Η πιθανότητα δεν είναι μοναδιαία, καθώς είναι επιθυμητό να υπάρχει το ενδεχόμενο να μεταφερθούν αναλλοίωτα τα χαρακτηριστικά των γονέων στους απογόνους. Μετά τη διασταύρωση, εφαρμόζεται σε κάθε νέο απόγονο η μετάλλαξη. Η μετάλλαξη, στη φύση στοχεύει στην εισαγωγή νέου γενετικού υλικού στον πληθυσμό των απογόνων. Κατ' αναλογία, στους ΕΑ ορίζεται η πιθανότητα μετάλλαξης  $P_m$  η οποία είναι της τάξης του 1% και εκφράζει την πιθανότητα ένα δυαδικό ψηφίο κάποιου από τους νέους απογόνους να αλλάξει (είτε από 0 σε 1 είτε από 1 σε 0).

## A'.7 Σύμμορφη Απεικόνιση (Conformal Mapping)

Έστω δύο καμπύλες  $C_1$  και  $C_2$  που τέμνονται στο σημείο  $z_0$ . Έστω επίσης ότι οι εφαπτόμενες ευθείες των καμπυλών αυτών στο  $z_0$  είναι οι  $L_1$  και  $L_2$  αντίστοιχα. Ορίζεται ως γωνία μεταξύ των  $C_1$  και  $C_2$  στο σημείο  $z_0$  η οξεία γωνία  $\omega$  που σχηματίζεται από την εφαπτόμενη  $L_1$  προς την εφαπτόμενη  $L_2$ . Αν εφαρμοστεί ένας μετασχηματισμός τέτοιος ώστε οι αντίστοιχες εικόνες  $C'_1$  και  $C'_2$ , των καμπυλών  $C_1$  και  $C_2$  να είναι λείες, τότε θα υπάρχουν οι εφαπτόμενες ευθείες στην εικόνα  $w_0$  του  $z_0$  και ορίζεται η γωνία μεταξύ των καμπυλών αυτών. Έστω θετική, η γωνία που διαγράφεται με φορά αντίθετη της φοράς περιστροφής των δεικτών του ρολογιού. Αν η γωνία μεταξύ των εικόνων των καμπυλών στο σημείο  $w_0$  είναι η ίδια με τη γωνία μεταξύ των αρχικών καμπυλών στο σημείο  $z_0$ , τότε ο μετασχηματισμός διατηρεί τη γωνία στο  $z_0$ . Όταν ένας μετασχηματισμός διατηρεί και τη γωνία και το πρόσημο της γωνίας μεταξύ δύο καμπυλών για κάθε ζεύγος καμπυλών που διέρχεται από το σημείο  $z_0$  τότε λέμε ότι ο μετασχηματισμός είναι σύμμορφος (conformal) στο σημείο  $z_0$ . Αν ο μετασχηματισμός είναι σύμμορφος σε κάθε σημείο της περιοχής στην οποία είναι ορισμένος, τότε ο μετασχηματισμός αυτός ονομάζεται σύμμορφη απεικόνιση (conformal mapping) [5]. Στο σχήμα A'.4 φαίνεται η σύμμορφη απεικόνιση της οποίας έγινε η περιγραφή ώστε να οριστεί ο σύμμορφος μετασχηματισμός.



Σχήμα A'.4: Σύμμορφος Μετασχηματισμός  $(x, y) \rightarrow (u, v)$ .

Ο σύμμορφος μετασχηματισμός χρησιμοποιείται στη μέθοδο παραμετροποίησης που προτείνεται με την παρούσα διπλωματική εργασία καθώς προσφέρει το πλεονέκτημα της εποπτείας. Με τη χρήση του σύμμορφου μετασχηματισμού, επιτυγχάνεται διατήρηση των γωνιών  $\beta$  και  $\theta$  καθώς και της παραμέτρου  $Z$  (η  $Z$  συναρτάται μόνο γωνιών), κατά τη μετάβαση από τις δύο διαστάσεις στις τρεις. Έτσι, ειδικά όταν κατά την αεροδυναμική βελτιστοποίηση επιλέγεται το εύρος τιμών των  $\beta$  και  $\theta$ , που έχουν σημαντική φυσική σημασία ανάλογα με το είδος της πτερύγωσης, δίνεται η δυνατότητα για μικρά όρια και η μέθοδος βρίσκει τη βέλτιστη γεωμετρία με λιγότερες αξιολογήσεις.





# Παράρτημα Β΄

## Αρχεία Εισόδου στο Λογισμικό

### Β΄.1 Αρχείο Επιλογών

Το παρόν λογισμικό, δίνει στον χρήστη τη δυνατότητα να κάνει κάποιες επιλογές σύμφωνα με τις ανάγκες της εκάστοτε περύγωσης. Οι επιλογές αυτές μεταφέρονται στο πρόγραμμα με τη βοήθεια ενός αρχείου δεδομένων, του **preferences.dat**. Παρακάτω αναλύονται οι επιλογές αυτές έτσι ώστε ο χρήστης, έχοντας διαβάσει το παράρτημα αυτό, να είναι σε θέση να δημιουργήσει το αρχείο preferences.dat με κατάλληλη μορφή και σύμφωνα με τις εκάστοτε ανάγκες-απαιτήσεις.

#### Β΄.1.1 Είδος περύγωσης και φορά περιστροφής ατράκτου

Οι πρώτες τρεις (3) γραμμές του αρχείου preferences.dat πρέπει να έχουν στην αρχή τους έναν από τους ακέραιους 1 και 2. Συγκεκριμένα:

Η **πρώτη γραμμή** πρέπει να έχει τον ακέραιο:

- 1 αν πρόκειται για περύγιο **συμπιεστή**
- 2 αν πρόκειται για περύγιο **στροβίλου**

Η **δεύτερη γραμμή** πρέπει να έχει τον ακέραιο:

- 1 αν πρόκειται για **κινούμενο** περύγιο
- 2 αν πρόκειται για **σταθερό** περύγιο

Η **τρίτη γραμμή** πρέπει να έχει τον ακέραιο:

- 1 για **θετική** φορά περιστροφής της ατράκτου
- 2 για **αρνητική** φορά περιστροφής της ατράκτου

(Ως **θετική** φορά περιστροφής ορίζεται η φορά που έχει τη γωνιακή ταχύτητα **ομόρροπη**, με τον άξονα  $z$ .)

Η αναγκαιότητα παροχής αυτών των πληροφοριών στο πρόγραμμα, είναι επακόλουθο του τρόπου που έχει επιλεγεί για την απόδοση του πάχους του πτερυγίου. Τα στοιχεία αυτά δίνουν τη δυνατότητα για προσδιορισμό της πλευράς υπερπίεσης και της πλευράς υποπίεσης του πτερυγίου. Οι παραπάνω τρεις επιλογές καθορίζουν ποια από τις πλευρές του πτερυγίου είναι η πλευρά υπερπίεσης και ποιά η πλευρά υποπίεσης.

### B'.1.2 Μη-Απόλυτα Καθορισμένες Παράμετροι

Η **τέταρτη** γραμμή πρέπει να έχει τον ακέραιο:

**1** αν η ενδιάμεση γραμμή καμπυλότητας είναι στο μέσο μεταξύ πλευράς υπερπίεσης και πλευράς υποπίεσης (είναι δηλαδή μέση γραμμή καμπυλότητας)

**2** αν η ενδιάμεση γραμμή καμπυλότητας **δεν** είναι στο μέσο μεταξύ πλευράς υπερπίεσης και πλευράς υποπίεσης

Η **πέμπτη** γραμμή πρέπει να έχει τον ακέραιο:

**1** για mode 1

**2** για mode 2

### B'.1.3 Συμβιβασμός Μεταξύ Οικονομίας και Ακρίβειας

Ανάλογα με το πόσο μεγάλη ακρίβεια θέλει ο χρήστης να έχουν οι υπολογισμοί του λογισμικού, μπορεί να επιλέξει τον κατάλληλο ακέραιο για κάθε μία από τις υπόλοιπες γραμμές του αρχείου preferences.dat. Η επιλογή του αυτή επηρεάζει το χρόνο που χρειάζεται το πρόγραμμα να τρέξει. Όταν για παράδειγμα γίνεται βελτιστοποίηση της πτερύγωσης με χρήση EA, το πρόγραμμα παραμετροποίησης πρέπει να τρέξει μια φορά για κάθε πιθανή λύση ώστε μετά να μπορεί να γίνει αξιολόγηση της λύσης αυτής. Έτσι:

Η **έκτη** γραμμή πρέπει να έχει τον ακέραιο που καθορίζει το πλήθος των σημείων που θα αποτελούν κάθε τμήμα της απεικόνισης που γίνεται με το υποπρόγραμμα civs. Το πλήθος αυτό δεν επηρεάζει σχεδόν καθόλου τον χρόνο εκτέλεσης του προγράμματος παραμετροποίησης.

Η **έβδομη** γραμμή πρέπει να έχει τον ακέραιο που καθορίζει το πλήθος των ενδιάμεσων καμπυλών κατά την span διεύθυνση για τις οποίες θα γίνει υπολογισμός πάχους του πτερυγίου. Το πλήθος αυτό (**ic**) έχει σημαντική επίδραση στον χρόνο εκτέλεσης του προγράμματος παραμετροποίησης καθώς καθεμιά από αυτές θα προσεγγιστεί με

καμπύλη Bezier χρησιμοποιώντας για την εύρεση της πλησιέστερης καμπύλης ελάχιστα τετράγωνα.

Η **όγδοη** γραμμή πρέπει να έχει τον ακέραιο που καθορίζει το πλήθος των σημείων που θα αποτελούν κάθε τμήμα της απεικόνισης που γίνεται με το υποπρόγραμμα `spaces`. Το πλήθος αυτό δεν επηρεάζει σχεδόν καθόλου τον χρόνο εκτέλεσης του προγράμματος παραμετροποίησης.

Η **ένατη** γραμμή πρέπει να έχει τον ακέραιο που καθορίζει το πλήθος των σημείων κάθε καμπύλης που περιγράφει το πτερύγιο (πλευρά υπερπίεσης, πλευρά υποπίεσης, μέση γραμμή καμπυλότητας). Πρόκειται για έναν αριθμό που επηρεάζει σε μεγάλο βαθμό τον χρόνο εκτέλεσης του λογισμικού.

Η **δέκατη** γραμμή πρέπει να έχει τον ακέραιο που καθορίζει το πλήθος των σημείων ελέγχου των καμπυλών Bezier που βρίσκονται κατά τις προσεγγίσεις που γίνονται στο υποπρόγραμμα `curve2curve` για `mode 2`. Ο αριθμός αυτός έχει σχετικά μικρή επίδραση στον χρόνο εκτέλεσης του λογισμικού αλλά συμμετέχει σε σημαντικούς για την ακρίβεια του προγράμματος υπολογισμούς. Επτά σημεία ελέγχου κρίνονται αρκετά.

Η **ενδέκατη** γραμμή πρέπει να έχει τον ακέραιο που καθορίζει το πλήθος των σημείων ελέγχου των καμπυλών Bezier που βρίσκονται κατά τις προσεγγίσεις που γίνονται στο υποπρόγραμμα `gridadaptation`. Και αυτός ο αριθμός επηρεάζει τον χρόνο εκτέλεσης του προγράμματος.

## B'.2 Αρχείο Παραμέτρων

Το λογισμικό, όπως έχει αναφερθεί και παραπάνω, δέχεται μέσω ενός αρχείου δεδομένων την παραμετρική περιγραφή της πτερύγωσης και επιστρέφει την πραγματική γεωμετρία. Το αρχείο δεδομένων αυτό είναι το **bezier.dat** ή το **points.dat**, ανάλογα αν τα όρια του πτερυγίου περιγράφονται με καμπύλες Bezier ή διακριτά σημεία αντίστοιχα. Οποιοσδήποτε από τους δύο τύπους δεδομένων για τα όρια του πτερυγίου και να χρησιμοποιείται, ειδικά για τα H,S δίνεται στον χρήστη η επιλογή να χρησιμοποιήσει περισσότερες από μία καμπύλες. Χωρίζοντας την καμπύλη σε τμήματα είναι ευκολότερο να εκφραστεί, μέσω καμπυλών Bezier, μια πιο περίπλοκη καμπύλη. Σημειώνεται, πως για λειτουργικούς λόγους του προγράμματος, απαιτείται ίσο πλήθος τμημάτων μεταξύ H και S, δηλαδή αν δίνεται το H σε τρία τμήματα, πρέπει και το S να δίνεται σε τρία τμήματα. Επίσης απαιτείται το τελευταίο σημείο κάποιου τμήματος να ταυτίζεται με το πρώτο του επόμενου (αντίστοιχα το ίδιο και αν χρησιμοποιούνται σημεία ελέγχου), διαφορετικά το πρόγραμμα σταματά. Ως παράδειγμα παρουσιάζεται παρακάτω ένα α-

πλοποιημένο αρχείο όπως πρέπει να είναι το bezier.dat. Η γεωμετρία της μηχανής που περιγράφει το αρχείο αυτό είναι κυλινδρική τόσο στην ακτίνα ποδός όσο και στην ακτίνα κεφαλής του πτερυγίου και δίνεται σε δύο τμήματα για να καταστεί σαφής ο τρόπος διαχωρισμού. Η ενδιάμεση γραμμή καμπυλότητας δεν είναι η μέση γραμμή καμπυλότητας του πτερυγίου, άρα δίνονται διαφορετικές συναρτήσεις για το πάχος του πτερυγίου, μία για την κάθε πλευρά. Σημειώνεται ότι το αρχείο αυτό δεν είναι παραμετροποίηση πραγματικής πτερύγωσης, αλλά μια τυχαία μορφή. Στόχος είναι να φανεί πως πρέπει να συντάσσεται το αρχείο σύμφωνα με όσα ορίστηκαν παραπάνω στην ενότητα 2.1.

#### SHROUD

2 parts

2 CPs

150.000 -50.000

150.000 0.000

2 CPs

150.000 0.000

150.000 50.000

#### HUB

2 part

2 CPs

50.000 -50.000

50.000 0.000

2 CPs

50.000 0.000

50.000 50.000

#### LE

3 CPs

155.000 -20.000

100.000 -30.000

45.000 -20.000

#### TE

3 CPs

155.000 20.000

100.000 30.000

45.000 20.000

#### THETA LE

2 CPs

0.0000 0.0000

1.0000 0.5233

#### THETA TE

2 CPs

0.0000 0.17443

1.0000 0.40

#### VETA LE

2 CPs  
0.0000 0.17443  
1.0000 0.17443  
VETA TE  
2 CPs  
0.0000 0.17443  
1.0000 0.17443  
ZETA LE  
0.50000  
ZETA TE  
0.50000  
PRESSURE SIDE SHAPE  
3 profiles  
0 span percentance  
5 CPs  
0.0000 0.0000  
0.0000 6.0000  
0.4000 4.000  
0.7000 2.000  
1.0000 0.000  
50 span percentance  
5 CPs  
0.0000 0.0000  
0.0000 6.0000  
0.4000 4.000  
0.7000 2.000  
1.0000 0.000  
100 span percentance  
5 CPs  
0.0000 0.0000  
0.0000 6.0000  
0.4000 3.000  
0.7000 1.00  
1.0000 0.000  
PRESSURE SIDE MAX THICKNESS  
5 CPs  
0.0000 13.0000  
0.2000 11.0000  
0.4000 9.0000  
0.6500 8.0000  
1.0000 7.0000  
SUCTION SIDE SHAPE  
3 profiles  
0 span percentance

5 CPs

0.0000 0.0000

0.0000 6.0000

0.4000 3.000

0.7000 2.000

1.0000 0.000

50 span percentance

5 CPs

0.0000 0.0000

0.0000 6.0000

0.4000 4.000

0.7000 2.000

1.0000 0.000

100 span percentance

5 CPs

0.0000 0.0000

0.0000 6.0000

0.3500 3.000

0.72000 1.00

1.0000 0.000

SUCTION SIDE MAX THICKNESS

5 CPs

0.0000 19.0000

0.2000 11.0000

0.4000 14.0000

0.6500 8.0000

1.0000 7.0000

## Βιβλιογραφία

- [1] Naixing C., Hongwu Z., Yanji X. Weiguang H.: *Blade parameterization and aerodynamic design optimization for a 3d transonic compressor rotor*. Journal of Thermal Science, 16(2):105–114, 2007.
- [2] Τσιάκας, Κ.: *Ανάπτυξη μεθόδων βελτιστοποίησης με χρήση επεξεργαστών καρτών γραφικών και εφαρμογή στις στροβιλομηχανές*. Διδακτορική διατριβή, Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, Ε.Μ.Π., Αθήνα, υπό εξέλιξη.
- [3] Γιαννάκογλου Κ.Χ., Αναγνωστόπουλος Ι., Μπεργελές Ι.: *Αριθμητική Ανάλυση για Μηχανικούς*. Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, 2003.
- [4] Παπαηλιού Κ.Δ., Μαθιουδάκης Κ.Δ., Γιαννάκογλου Κ.Χ.: *Εισαγωγή στις Θερμικές Στροβιλομηχανές*. Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών ΕΜΠ, 2000.
- [5] Κακούρης, Μ.: *Η Γεωμετρία της Αντιστροφής: Ιστορική Αναδρομή, Διδακτικές Προεκτάσεις και Εφαρμογές*, 2008.
- [6] William E. Boyce, Richard C. DiPrima: *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*. John Wiley & Sons, Inc., 2001.
- [7] Γιαννάκογλου, Κ.Χ.: *Μέθοδοι Βελτιστοποίησης στην Αεροδυναμική*. Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών ΕΜΠ, 2006.
- [8] Καμπόλης, Ι.: *Πολυεπίπεδοι, Πολυεπεξεργαστικοί Αλγόριθμοι Αεροδυναμικής Βελτιστοποίησης στις Στροβιλομηχανές*. Διδακτορική διατριβή, Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, Ε.Μ.Π., Αθήνα, 2009.
- [9] *The evolutionary algorithms system*. <http://147.102.55.162/EASY/>.
- [10] Καρακάσης, Μ.: *Ιεραρχικοί, κατανεμημένοι εξελικτικοί αλγόριθμοι και υπολογιστική ευφύια στη σχεδίαση βέλτιστων αεροδυναμικών μορφών σε περιβάλλον πολυεπεξεργασίας*. Διδακτορική διατριβή, Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, Ε.Μ.Π., Αθήνα, 2006.
- [11] Τρομπούκης, Ξ.: *Αριθμητική επίλυση προβλημάτων αεροδυναμικής-αεροελαστικότητας σε επεξεργαστές καρτών γραφικών*. Διδακτορική διατριβή, Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, Ε.Μ.Π., Αθήνα, 2012.

- [12] NVIDIA CUDA<sup>TM</sup>: *NVIDIA CUDA C Programming Guide*, 4.0 edition, March 2011.
- [13] Tsiakas K.T., Trompoukis X.S., Asouti V.G. Giannakoglou K.C.: *Design-optimization of a compressor blading on a gpu cluster*. In *EUROGEN 2013*, volume Evolutionary and Deterministic Methods for Design, Optimization and Control with Applications to Industrial and Societal Problems, Las Palmas de Gran Canaria, October 2013.
- [14] Kampolis I.C., Trompoukis X.S., Asouti V.G. Giannakoglou K.C.: *Cfd-based analysis and two-level aerodynamic optimization on graphics processing units*. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199(9-12):712–722, January 2010.
- [15] Deck S., Duvéau P., d’Espiney P. Guillen P.: *Development and application of spalart–allmaras one equation turbulence model to three-dimensional supersonic complex configurations*. *Aerospace Science and Technology*, 6(3):171–183, 2002.
- [16] Γιαννάκογλου, Κ.Χ.: *Συνεκτικές Ροές στις Στροβιλομηχανές*. Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών ΕΜΠ, 2004.
- [17] Χούντα, Π.: *Βελτιστοποίηση με Εξελικτικούς Αλγορίθμους Υποβοηθούμενους από τη Μέθοδο Ανάλυσης σε Κύριες Συνιστώσες - Εφαρμογές στην Ενέργεια και στις Μεταφορές*, 2013.
- [18] Asouti V.G., Kampolis I.C., Giannakoglou K.C.: *A grid-enabled asynchronous metamodel-assisted evolutionary algorithm for aerodynamic optimization. genetic programming and evolvable machines*. (SI:Parallel and Distributed Evolutionary Algorithms, Part One), 10(3):373–389, 2009.
- [19] Kyriacou S.A., Weissenberger S., Giannakoglou K.C.: *Design of a matrix hydraulic turbine using a metamodel-assisted evolutionary algorithm with pca-driven evolution operators*. *International Journal of Mathematical Modelling and Numerical Optimization, Special Issue on Simulation-Based Optimization Techniques for Computationally Expensive Engineering Design Problems*, 3(1-2):45–63, 2012.
- [20] Giannakoglou, K.C.: *Cost-effective metamodel-assisted evolutionary algorithms*. In W. Annicchiarico, J. Periaux, M. Cerrolaza G. Winter (editor): *Evolutionary Algorithms and Intelligent Tools in Engineering Optimization*. CIMNE Series of Handbooks, 2005.
- [21] Georgopoulou C.A., Giannakoglou K.C.: *Metamodel-assisted evolutionary algorithms for the unit commitment problem with probabilistic outages*. *Applied Energy*, 87(5):1782–1792, 2010.
- [22] Mai-Duy N., Tran Cong T.: *Integrated radial-basis-function networks for computing newtonian and non-newtonian fluid flows*. *Computers & Structures*, 87(11-12):642–650, 2009.



[23] Piegl L., Tiller W.: *The Nurbs Book*. Springer, 1997.