

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών
Τομέας Ρευστών
Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών
Μονάδα Παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής
& Βελτιστοποίησης

Αεροδυναμική Βελτιστοποίηση Μορφής σε Ασυμπίεστες Ροές
με Αβεβαιότητες, με τη Μέθοδο των Στατιστικών Ροπών και
Τεχνικές Προβολών. Προγραμματισμός και Εφαρμογές, σε
Περιβάλλον OpenFOAM

Διπλωματική Εργασία

Κίμων Φράγκος

Επιβλέπων: Κυριάκος Χ. Γιαννάκογλου Καθηγητής ΕΜΠ

Αθήνα, 2017

Ευχαριστίες

Πρωτίστως θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένεια μου για την απίστευτη στήριξη που μου προσέφερε όλα τα χρόνια της φοίτησής μου.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον Καθηγητή μου κ. Κυριάκο Γιαννάκογλου για το χρόνο τον οποίο μου διέθεσε, για την επιμέλεια με την οποία ασχολήθηκε με τη διπλωματική μου εργασία, για τη μεθοδικότητα και την υπομονή στις διορθώσεις καθώς και την πολύτιμη καθοδήγησή του.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον Δρ. Ε. Παπουτσή-Κιαχαγιά, για πάρα πολλούς λόγους. Με βοήθησε ουσιαστικά στη διπλωματική μου εργασία, διέθεσε πολύ από τον προσωπικό του χρόνο (βέβαια, πιστεύω ότι θα του λείψουν τα τηλεφωνήματα μου), αλλά κυρίως για το ότι μου έμαθε πάρα πολλά, μου μετέδωσε γνώσεις και το σημαντικότερο, γνώρισμα που θα με ακολουθήσουν στη μετέπειτα πορεία μου.

Ευχαριστώ επίσης όλα τα παιδιά του γραφείου Όμικρον για την παρέα και στήριξή τους.

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΡΕΥΣΤΩΝ
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΘΕΡΜΙΚΩΝ ΣΤΡΟΒΙΛΟΜΗΧΑΝΩΝ
ΜΟΝΑΔΑ ΠΑΡΑΛΛΗΛΗΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ ΡΕΥΣΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗΣ &
ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ

Αεροδυναμική Βελτιστοποίηση Μορφής σε Ασυμπίεστες Ροές με Αβεβαιότητες, με τη Μέθοδο των Στατιστικών Ροπών και Τεχνικές Προβολών. Προγραμματισμός και Εφαρμογές, σε Περιβάλλον OpenFOAM

Διπλωματική Εργασία
του

Κίμωνα Φράγκου

Επιβλέπων: Κυριάκος Χ. Γιαννάκογλου, Καθηγητής ΕΜΠ

Αθήνα, Ιούλιος 2017

Περίληψη

Η διπλωματική αυτή εργασία επικεντρώνεται στην αεροδυναμική βελτιστοποίηση μορφής - αεροδυναμικό σιβαρό σχεδιασμό σε ασυμπίεστες, χρονικά μόνιμες, στρωτές ροές, οι οποίες διέπονται από αβεβαιότητες. Η ύπαρξη αβεβαιοτήτων εισάγεται στο πρόβλημα από τις λεγόμενες περιβαλλοντικές μεταβλητές. Η αντικειμενική συνάρτηση, την οποία θα βελτιστοποιούσε ο αλγόριθμος αν δεν υπήρχαν αβεβαιότητες, επηρεάζεται από αυτές. Η αβεβαιότητα μοντελοποιείται στατιστικά και ο υπολογισμός, της μέσης τιμής και της τυπικής απόκλισης της αντικειμενικής συνάρτησης γίνεται μέσω της μεθόδου των στατιστικών ροπών. Επειδή η μέθοδος που αναπτύσσεται διατηρεί μόνο τους πρώτους όρους από τα αναπτύγματα των στατιστικών ροπών καλείται FOSM (First-Order, Second-Moment). Ο όρος σιβαρός σχεδιασμός προέρχεται από το γεγονός ότι δημιουργείται μια συνολική αντικειμενική συνάρτηση, που λαμβάνει υπόψη της τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση. Αυτή καλείται αντικειμενική συνάρτηση σιβαρού σχεδιασμού. Επιλέγοντας ως διαδικασία βελτιστοποίησης μία μέθοδο βασισμένη στην κλίση της αντικειμενικής συνάρτησης σιβαρού σχεδιασμού, προκύπτει η απαίτηση για τον υπολογισμό έως και δεύτερων μεικτών παραγώγων (μεικτών, ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού και τις περιβαλλοντικές μεταβλητές). Ο υπολογισμός αυτός γίνεται μέσω μιας μεθόδου προβολής εξισώσεων η οποία μειώνει αισθητά το απαιτούμενο υπολογιστικό κόστος. Η γενική διαδικασία

βελτιστοποίησης προγραμματίστηκε στο περιβάλλον του ελεύθερου λογισμικού OpenFOAM και εφαρμόστηκε για δύο διαφορετικές αντικειμενικές συναρτήσεις. Η πρώτη μελέτη αφορούσε τη συνάρτηση της γωνίας-στόχου για περύγωση συμπίεστη ενώ η δεύτερη την ελαχιστοποίηση ολικών απωλειών πίεσης σε αγωγό. Πρωταρχικό μέλημα της εργασίας είναι ο προγραμματισμός του σχετικού λογισμικού, η πιστοποίηση όλων των απαιτούμενων παραγώγων και η σύγκριση των αποτελεσμάτων της μεθόδου του FOSM με αντίστοιχες μεθόδους (Μη-Επεμβατικού Αναπτύγματος Πολυωνυμικού Χάους 1^{ης} και 2^{ης} Τάξης καθώς και της μεθόδου Δεύτερης-Τάξης Δεύτερης-Ροπής (SOSM)). Το εξαιρετικό πλεονέκτημα της μεθόδου που εξετάζεται είναι η οικονομία, μιας και έχει υπολογιστικό κόστος ανεξάρτητο τόσο των μεταβλητών σχεδιασμού όσο και του πλήθους των περιβαλλοντικών μεταβλητών. Έτσι για κάθε κύκλος βελτιστοποίησης κοστίζει περίπου όσο 4 ισοδύναμες επιλύσεις της ροής.

NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY OF ATHENS
SCHOOL OF MECHANICAL ENGINEERING
FLUIDS DEPARTMENT
LABORATORY OF THERMAL TURBOMACHINES
PARALLEL CFD & OPTIMIZATION UNIT

**Aerodynamic Shape Optimization in Incompressible Flows
under Uncertainties using the Method of Statistical Moments
and Projection Techniques. Programming and Implementation
in OpenFOAM Environment**

Diploma Thesis
by

Kimon Fragkos

Supervisor: Kyriakos C. Giannakoglou, Professor NTUA

Athens, July 2017

Abstract

This diploma thesis focuses on aerodynamic shape optimization - robust design for incompressible, steady state, laminar flows under uncertainties. Uncertainties are introduced through the so-called environmental variables. The objective function, used to solve the problem in the absence of uncertainties, is influenced by the stochastically varying environmental variables. Uncertainty is modeled using the theory of statistics and, therefore, the computation of the mean value and standard deviation of the deterministic objective function is performed using the method of statistical moments. Due to the fact, that the method handles only first-order terms this will be referred to as FOSM (First-Order Second-Moment). Robust design makes use of an objective function that takes into consideration both mean value and standard deviation. This expression is called robust design objective function. Choosing a procedure which is based on the gradient of the robust design objective function requires the computation up to second order mixed derivatives (mixed with respect to both design and environmental variables). This computation is based on a projection method that reduces significantly the computational cost. The whole optimization procedure was programmed in the OpenFOAM open source software and implemented in two test problems. The first study was about the target exit angle objective function in a compressor stator cascade, whereas the second was about the total pressure losses in a duct. Primary concern of this

diploma thesis is the programming of a software and the assessment of the computed derivatives, as well as the comparison of the results of the FOSM method with alternative methods such as the Non-Intrusive Polynomial Chaos Expansion 1st and 2nd Order, and the Second-Order Second-Moment (SOSM). The substantial advantage of this method is the low computational cost, which is independent of the number of the design and the environmental variables. Therefore, each optimization cycle costs as much as four equivalent flow solutions.

Ακρωνύμια

ΕΜΠ	Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
ΕΘΣ	Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών
ΜΠΥΡ&Β	Μονάδα Παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής & Βελτιστοποίησης
ΥΡΔ	Υπολογιστική Ρευστοδυναμική
<hr/>	
CFD	Computational Fluid Dynamics
NTUA	National Technical University of Athens
PCopt	Parallel CFD & Optimization unit
FOSM	First-Order Second-Moment
p-FOSM	Projected-First Order-Second Moment
SOSM	Second-Order Second-Moment
niCPE	Non-Intrusive Chaos Polynomial Expansion
iCPE	Intrusive Chaos Polynomial Expansion

Περιεχόμενα

Περιεχόμενα	i
1 Εισαγωγή	1
1.1 Στοχαστικότητα και Στιβαρός Αεροδυναμικός Σχεδιασμός	1
1.2 Μέθοδος των Στατιστικών Ροπών	2
1.3 Στόχος και Δομή της Διπλωματικής Εργασίας	4
2 Υπολογισμός Πρώτων Παραγώγων με τη Συζυγή Μέθοδο	7
2.1 Εξισώσεις Ασυμπίεστης Ροής	7
2.2 Οριακές Συνθήκες Εξισώσεων των Ροής	8
2.3 Συνάρτηση-στόχος	8
2.4 Υπολογισμός Παραγώγων Μέσω της Συνεχούς Συζυγούς Μεθόδου . .	9
2.4.1 Παραγωγή Επαυξημένης Συνάρτησης	9
2.4.2 Συζυγείς Πεδιακές Εξισώσεις	12
2.4.3 Οριακές Συνθήκες Συζυγούς Προβλήματος	13
2.4.4 Τελική Έκφραση Παραγώγων Πρώτης Τάξης	15
3 Υπολογισμός των Προβολών των Ροϊκών και Συζυγών Εξισώσεων	17
3.1 Ευθεία Διαφόριση και Δημιουργία των Προβολών των Εξισώσεων . . .	17
3.1.1 Προβολές των Εξισώσεων Ροής και Οριακές Συνθήκες	19
3.1.2 Προβολές των Συζυγών Εξισώσεων και Οριακές Συνθήκες . . .	20
4 Αλγόριθμος pFOSM και Υπολογιστικό Κόστος	23
4.1 Αλγόριθμος Βελτιστοποίησης Μορφής με τη Μέθοδο του p-FOSM . .	23
4.2 Υπολογιστικό Κόστος της Μεθόδου	25

5 Επίλυση Εξισώσεων στο Open-FOAM	27
5.1 Επίλυση της Ροής	29
5.2 Επίλυση Συζυγών Εξισώσεων	30
5.3 Επίλυση των Προβολών των Εξισώσεων	33
6 Πιστοποίηση Παραγώγων	35
6.1 Παραμετροποίηση Μορφής	35
6.2 Πιστοποίηση Παραγώγων ως προς τις Στοχαστικές Μεταβλητές	36
6.3 Πιστοποίηση Παραγώγων ως προς τις Μεταβλητές Σχεδιασμού	37
6.4 Πιστοποίηση b-c Μεικτών Παραγώγων επί Διάνυσμα	39
6.5 Υπολογισμός Μέσης Τιμής και Τυπικής Απόκλισης	41
6.6 Υπολογισμός Μέσης Τιμής και Τυπικής Απόκλισης με Πεπερασμένες Διαφορές για τη Μέθοδο του SOSM	42
7 Βελτιστοποίηση Μορφής Αεροτομής 2Δ Πτερύγωσης με Αβεβαιότητες	45
7.1 Αποτελέσματα Βελτιστοποίησης	45
8 Βελτιστοποίηση Αγωγού Σχήματος S για Ελαχιστοποίηση Απωλειών Ολικής Πίεσης	55
8.1 Στοιχεία Προσομοίωσης Αγωγού Σχήματος S	55
8.2 Μαθηματική Διατύπωση	57
8.2.1 Αντικειμενική Συνάρτηση	57
8.2.2 Οριακές Συνθήκες και Τελικές Εκφράσεις Παραγώγων	58
8.3 Επίλυση Ροής και Συζυγών Εξισώσεων στο OpenFOAM	60
8.4 Διαγράμματα Σύγκλισης των Εξισώσεων	62
8.5 Ακρίβεια Υπολογισμού Παραγώγων Μέσης Τιμής και Τυπικής Απόκλισης	64
8.5.1 Πρώτες Παράγωγοι ως προς τις Μεταβλητές Σχεδιασμού	64
8.5.2 Πρώτες Παράγωγοι ως προς τις Στοχαστικές Μεταβλητές	66
8.5.3 Δεύτερες Μεικτές b-c Παράγωγοι	66
8.5.4 Υπολογισμός Μέσης Τιμής και Τυπικής Απόκλισης	68

8.6	Βελτιστοποίηση Μορφής Αγωγού Σχήματος S	68
8.6.1	Βελτιστοποίηση μόνο για Τυπική Απόκλιση	69
8.6.2	Βελτιστοποίηση μόνο για Μέση Τιμή	72
8.6.3	Σχολιασμός και Σύγκριση Αποτελεσμάτων Βελτιστοποίησης . .	75
9	Συμπεράσματα	79
9.0.1	Προτάσεις για Μελλοντική Έρευνα	80
	Βιβλιογραφία	iii

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

1.1 Στοχαστικότητα και Στιβαρός Αεροδυναμικός Σχεδιασμός

Για την επίλυση σύνθετων προβλημάτων χρησιμοποιούνται υπολογιστικές μέθοδοι. Η μοντελοποίηση του εκάστοτε προβλήματος οφείλει να είναι όσο το δυνατόν πιο πιστή ως προς τη πραγματικότητα. Βέβαια ως γνωστόν, ο φυσικός κόσμος δεν είναι αιτιοκρατικά ορισμένος, η αβεβαιότητα που εισάγουν τα φυσικά μεγέθη θα ήταν επιθυμητό να εισαχθεί με τη σειρά της στη μοντελοποίηση. Σε ένα τέτοιο περιβάλλον, στόχος είναι ο σχεδιασμός αεροδυναμικών ή υδροδυναμικών μορφών που να αποδίδουν ικανοποιητικά όχι μόνο στο ονομαστικό σημείο λειτουργίας, αλλά και σε ένα εύρος συνθηκών λειτουργίας. Η διαδικασία εύρεσης τέτοιων μορφών ονομάζεται αεροδυναμικά στιβαρός σχεδιασμός (robust design).

Ο όρος "αεροδυναμικός στιβαρός σχεδιασμός ή βελτιστοποίηση αεροδυναμικής μορφής υπό αβεβαιότητες" (aerodynamic robust design or shape optimization under uncertainties) αναφέρεται στην αλλαγή σχήματος σώματος σε ροή με στόχο μια βελτιστοποιημένη γεωμετρία, η οποία θα διατηρεί τη σχεδόν τέλεια (ως προς τα κριτήρια που τέθηκαν) απόδοσή της, παρ' όλες τις μεταβολές του περιβάλλοντος που προκύπτουν λόγω αβεβαιότητας. Ο όρος "περιβάλλον" (και οι από αυτόν απορρέουσες περιβαλλοντικές μεταβλητές) χαρακτηρίζει τις συνθήκες λειτουργίας (ροής, στην περίπτωση αυτής της εργασίας).

Αρχικά σε ένα πρόβλημα στο οποίο υπάρχει στοχαστικότητα πρέπει να γίνει ο διαχωρισμός των μεταβλητών που το διέπουν. Αυτές χωρίζονται σε δύο κατηγορίες τις μεταβλητές περιβάλλοντος (environmental variables) και τις μεταβλητές

σχεδιασμού (design variables). Οι περιβαλλοντικές-στοχαστικές μεταβλητές c , πλήθους M ($\vec{c} \in \mathbb{R}^M$) είναι αυτές από τις οποίες πηγάζει η στοχαστικότητα του μοντέλου. Γίνεται επίσης, η παραδοχή ότι ακολουθούν κανονική κατανομή, χαρακτηριστικά παραδείγματα τέτοιων μεταβλητών είναι η γωνία της ροής, το μέτρο της ταχύτητας στην είσοδο ενός συμπιεστή, αλλά και οι κατασκευαστικές ατέλειες της γεωμετρίας. Στον αντίποδα, οι μεταβλητές σχεδιασμού b , πλήθους N ($\vec{b} \in \mathbb{R}^N$) θεωρούνται πλήρως ελεγχόμενες από τον χρήστη, υπό την έννοια ότι μπορεί να τους επιβληθούν ακριβώς οι τιμές που θα προκύψουν από τη βελτιστοποίηση.

Για να πραγματοποιηθεί η διαδικασία της βελτιστοποίησης, πρέπει αρχικώς να ορισθεί μια βασική αντικειμενική συνάρτηση F . Αυτή λ.χ. θα μπορούσε να είναι η άνωση ή η οπισθέλκουσα ή, όπως θα εξεταστεί σε αυτή τη διπλωματική εργασία, η γωνία εξόδου της ροής από τη σταθερή περύγωση συμπιεστή (1^η μελέτη), ή, οι απώλειες ολικής πίεσης σε αγωγό (2^η μελέτη).

Η βασική αντικειμενική συνάρτηση F υποδηλώνει το φυσικό μέγεθος για το οποίο βελτιστοποιείται η γεωμετρία χωρίς να λαμβάνει υπόψη τη στοχαστικότητα. Για να επιτευχθεί το τελευταίο, πρέπει να οριστεί μια τροποποιημένη αντικειμενική συνάρτηση \hat{F} η οποία προκύπτει συνήθως ως γραμμικός συνδυασμός της εκτιμώμενης μέσης τιμής (μ_F) και της τυπικής απόκλισης (σ_F) της βασικής αντικειμενικής συνάρτησης F και θα καλείται στο εξής αντικειμενική συνάρτηση σιβαρού σχεδιασμού.

1.2 Μέθοδος των Στατιστικών Ροπών

Ένας τρόπος για να επιλυθούν προβλήματα σιβαρού σχεδιασμού είναι να εκφραστεί η αντικειμενική συνάρτηση ως γραμμικός συνδυασμός της μέσης τιμής της F (first statistical moment)

$$\mu_F(b, c) = \int Fg(c)dc \quad (1.1)$$

και της τυπικής της απόκλισης

$$\sigma_F(b, c) = \sqrt{\int (F - \mu_F)^2 g(c)dc} \quad (1.2)$$

όπου η $g(c)$ είναι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της στοχαστικής μεταβλητής. Μια μέθοδος που ελαχιστοποιεί μια συνάρτηση που λαμβάνει υπόψη της και τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση καλείται μέθοδος της δεύτερης-ροπής (second-moment method).

Έχοντας θεωρήσει κανονική κατανομή για τις στοχαστικές μεταβλητές, αν αναπτυχθεί η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση με ανάπτυγμα Taylor πρώτης

τάξης [1] προκύπτει

$$\mu_F \simeq F|_{\bar{c}}, \quad \sigma_F \simeq \sqrt{\sum_{\mu=1}^M \left[\frac{\delta F}{\delta c_\mu} \right]_{\bar{c}}^2 \sigma_\mu^2} = \sqrt{\left[\frac{\delta F}{\delta c_\mu} \right]_{\bar{c}}^2 \sigma_\mu^2} \quad (1.3)$$

Η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση της συνάρτησης στόχου υπολογίζονται στη μέση τιμή των στοχαστικών μεταβλητών, ενώ ο επαναλαμβανόμενος δείκτης μ υποδηλώνει άθροιση για $\mu = 1, \dots, M$. Εδώ πρέπει να σημειωθεί ότι για ανάπτυγμα Taylor πρώτης τάξης η μέση τιμή που υπολογίζεται είναι ταυτόσημη με την τιμή της βασικής αντικειμενικής συνάρτησης που θα υπολογιζόταν και σε ένα πρόβλημα χωρίς στοχαστικότητα. Οπότε, ο παράγοντας της στοχαστικότητας εισέρχεται στην αντικειμενική συνάρτηση μόνο μέσω της τυπικής απόκλισης. Η αντικειμενική συνάρτηση σιβαρού σχεδιασμού που επιλέγεται δίνεται από την έκφραση

$$\hat{F} = w_1 \mu_F + w_2 \sigma_F \quad (1.4)$$

Για τον υπολογισμό της τιμής της \hat{F} απαιτείται η επίλυση του ροϊκού προβλήματος και ο υπολογισμός των πρώτων παραγώγων της συνάρτησης στόχου ως προς τις στοχαστικές μεταβλητές.

Για να πραγματοποιηθεί βελτιστοποίηση με οποιαδήποτε αιτιοκρατική μέθοδο είναι απαραίτητος ο υπολογισμός παραγώγων. Στη μέθοδο της απότομης καθόδου είναι απαραίτητος ο υπολογισμός των πρώτων παραγώγων της \hat{F} ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού. Οι μεταβλητές σχεδιασμού είναι οι μεταβλητές που ελέγχονται από τον χρήστη, άρα η γνώση των αντίστοιχων παραγώγων καθορίζει την κατεύθυνση ως προς την οποία πρέπει να μεταβληθούν για να επιτευχθεί βελτιστοποίηση. Παραγωγίζοντας τη σχέση 1.4 προκύπτει

$$\frac{\delta \hat{F}}{\delta b_m} = w_1 \frac{\delta F}{\delta b_m} + w_2 \frac{\sum_{\mu=1}^M \frac{\delta F}{\delta c_\mu} \frac{\delta^2 F}{\delta c_\mu \delta b_m} \sigma_\mu^2}{\sqrt{\sum_{\mu=1}^M \left[\frac{\delta F}{\delta c_\mu} \right]_{\bar{c}}^2 \sigma_\mu^2}} \quad (1.5)$$

Έτσι, για να υπολογιστούν οι παράγωγοι πρέπει να είναι γνωστές οι ακόλουθες τρεις ομάδες ποσοτήτων

$$\frac{\delta F}{\delta b_m}, \quad \left[\frac{\delta F}{\delta c_\mu} \right]_{\bar{c}}^2 \sigma_\mu^2, \quad \frac{\delta^2 F}{\delta c_\mu \delta b_m} \frac{\delta F}{\delta c_\mu} \sigma_\mu^2 \quad (1.6)$$

Οι δύο πρώτοι όροι της σχέσης 1.6 μπορούν να υπολογιστούν μέσω της επίλυσης του συνεχούς συζυγούς προβλήματος. Ο τρίτος όρος της σχέσης (1.6) κρύβει την ουσία της μεθόδου αυτής, αποτελείται από την παράγωγο $\frac{\delta^2 F}{\delta b_m \delta c_\mu}$ (η οποία πλέον θα

καλείται ως: b-c μεικτές παράγωγοι) επί ένα διάνυσμα. Τα στοιχεία του διανύσματος z δίνονται από τη σχέση (1.7) στην οποία οι αγκύλες υποδηλώνουν ότι δεν υπάρχει άθροιση ως προς μ .

$$z_\mu = \left\langle \frac{\delta F}{\delta c_\mu} \sigma_\mu^2 \right\rangle \quad (1.7)$$

Πάνω στο διάνυσμα z , του οποίου εν γένει ο υπολογισμός δεν προσθέτει υπολογιστικό κόστος, προβάλλονται οι b-c μεικτές παράγωγοι.

$$\frac{\delta^2 F}{\delta c_\mu \delta b_m} \frac{\delta F}{\delta c_\mu} \sigma_\mu^2 = \frac{\delta^2 F}{\delta c_\mu \delta b_m} z_\mu = \sum_{\mu=1}^M \frac{\delta^2 F}{\delta c_\mu \delta b_m} z_\mu \quad (1.8)$$

Η σχέση (1.5) μπορεί να γραφτεί, πιο συνοπτικά, σε μορφή αθροίσματος ή και τανυστικά ως

$$\frac{\delta \hat{F}}{\delta b_m} = \frac{\delta F}{\delta b_m} + \kappa \frac{\sum_{\mu=1}^M \frac{\delta^2 F}{\delta c_\mu \delta b_m} z_\mu}{\sqrt{\sum_{\mu=1}^M \left[\frac{\delta F}{\delta c_\mu} \right]^2 \sigma_\mu^2}} = \frac{\delta F}{\delta b_m} + \kappa \frac{\frac{\delta^2 F}{\delta c_\mu \delta b_m} z_\mu}{\sqrt{\left[\frac{\delta F}{\delta c_\mu} \right]^2 \sigma_\mu^2}} \quad (1.9)$$

Η ύπαρξη του διανύσματος z καθορίζει τη μέθοδο διότι, σε οποιαδήποτε άλλη περίπτωση, για τον υπολογισμό δευτέρων μεικτών θα γινόταν πρώτα ευθεία διαφόριση ως προς τις μεταβλητές με το μικρότερο πλήθος και στη συνέχεια, θα εφαρμοζόταν η συζυγής μέθοδος. Το υπολογιστικό κόστος μια τέτοιας προσέγγισης είναι ανάλογο του πλήθους των αθέβαιων μεταβλητών αφού $M < N$. Αντί αυτού, όπως θα παρουσιαστεί στη συνέχεια, στη μέθοδο που εξετάζεται εδώ, το υπολογιστικό κόστος είναι ανεξάρτητο του πλήθους των μεταβλητών. Η μέθοδος ονομάζεται: μέθοδος πρώτης-τάξης δεύτερης-ροπής με προβολές (projected first-order second-moment) και συνομολογραφικά θα αναφέρεται ως p-FOSM.

1.3 Στόχος και Δομή της Διπλωματικής Εργασίας

Η διπλωματική εργασία εστιάζει αρχικά στη μαθηματική διατύπωση της μεθόδου του p-FOSM. Σε δεύτερη φάση, αφότου προγραμματίστηκε ως γενικότερη διαδικασία βελτιστοποίησης στο ελεύθερο λογισμικό του OpenFOAM εξετάζεται η εφαρμογή της σε δύο ξεχωριστές αντικειμενικές συναρτήσεις. Σημαντικό τμήμα της διπλωματικής εργασίας είναι η πιστοποίηση των παραγώγων που υπολογίζονται από τον κώδικα και είναι απαραίτητες για τη βελτιστοποίηση. Επίσης, γίνεται αξιολόγηση της μεθόδου του FOSM ως προς τα αποτελέσματα υπολογισμού μέσης τιμής και τυπικής απόκλισης. Συγκρίνεται το υπολογιστικό κόστος της μεθόδου για τον υπολογισμό μέσης τιμής και τυπικής απόκλισης με άλλες αντίστοιχες μεθόδους

πρώτης τάξης, και τέλος εφαρμόζεται ο κώδικας σε προβλήματα βελτιστοποίησης και σχολιάζονται τα αποτελέσματα.

Η δομή της εργασίας έχει ως εξής:

- Κεφάλαιο 2^ο Αναλύεται η συνεχής συζυγής μέθοδος για τις εξισώσεις Navier-Stokes σε στρωτή ροή ασυμπίεστου ρευστού και αναπτύσσεται η έκφραση της πρώτης παραγώγου για τις μεταβλητές σχεδιασμού και μεταβλητές περιβάλλοντος.
- Κεφάλαιο 3^ο Παρατίθενται οι εξισώσεις των προβολών και η τελική έκφραση των μεικτών b-c παραγώγων.
- Κεφάλαιο 4^ο Παρουσιάζεται ο συνολικός αλγόριθμος της μεθόδου του pFOSM και αναλύεται το υπολογιστικό κόστος της μεθόδου.
- Κεφάλαιο 5^ο Επίλυση και σύγκλιση όλων των εξισώσεων της προσομοίωσης της αεροτομής της NACA-12, πιστοποίηση, των τριών ποσοτήτων παραγώγων, της μέσης τιμής και τυπικής απόκλισης που υπολογίζονται από τον κώδικα.
- Κεφάλαιο 6^ο Αποτελέσματα βελτιστοποίησης μορφής με αβεβαιότητες για τη διδιάστατη περύγωση της αεροτομής της NACA-12.
- Κεφάλαιο 7^ο Εφαρμογή της μεθόδου του pFOSM για τη βελτιστοποίηση μορφής με αβεβαιότητες με αντικειμενική συνάρτηση τις ολικές απώλειες πίεσης σε αγωγό σχήματος S.
- Κεφάλαιο 8^ο Συνολικά συμπεράσματα από τη μελέτη που έγινε για το pFOSM και προτάσεις για περαιτέρω έρευνα και εφαρμογές.

Κεφάλαιο 2

Υπολογισμός Πρώτων Παραγώγων με τη Συζυγή Μέθοδο

Απώτερος σκοπός αποτελεί η δημιουργία μιας μεθόδου που θα μπορεί να βελτιστοποιήσει το σχήμα σώματος σε ροή με αβεβαιότητες, σύμφωνα με τα κριτήρια που έχει θέσει ο χρήστης (βαρύτητα μεταξύ μέσης τιμής και τυπικής απόκλισης). Ειδικότερα, σε μια πρώτη μελέτη, θα εξεταστεί η βελτιστοποίηση γεωμετρίας σταθερής περυγώσης συμπίεστη στο διδιάστατο επίπεδο για μια αντικειμενική συνάρτηση. Με το πρόβλημα να διέπεται από στοχαστικότητα του μέτρου και της γωνίας της ταχύτητας στην είσοδο συμπίεστη. Σε αυτό το κεφάλαιο θα παρουσιαστούν οι εξισώσεις που επιλύονται, οι οριακές τους συνθήκες καθώς και οι τελικές σχέσεις υπολογισμού των παραγώγων πρώτης τάξεως ($\frac{\delta F}{\delta b_m}, \frac{\delta F}{\delta c_\mu}$), οι οποίες είναι απαραίτητες στην αιτιοκρατική βελτιστοποίηση.

2.1 Εξισώσεις Ασυμπίεστης Ροής

Οι δύο προσομοιώσεις που εξετάζονται στο πλαίσιο της διπλωματικής αυτής εργασίας, είναι για στρωτή ροή ασυμπίεστου ρευστού. Οι εξισώσεις που διέπουν ένα τέτοιο πρόβλημα είναι οι εξισώσεις Navier Stokes για ασυμπίεστο ρευστό, συνέχεια και ορμή, και γράφονται παρακάτω σε τανυστική γραφή για δύο ή τρεις διαστάσεις

$$R^p = -\frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0 \quad (2.1a)$$

$$R_i^v = v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right] + \frac{\partial p}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2, (, 3) \quad (2.16')$$

όπου με v_i συμβολίζονται οι συνιστώσες της ταχύτητας, p η πίεση διαιρεμένη με τη σταθερή πυκνότητα και ν η σταθερή κινηματική συνεκτικότητα του ρευστού.

2.2 Οριακές Συνθήκες των Εξισώσεων Ροής

Οι οριακές συνθήκες που συμπληρώνουν το σύστημα των εξισώσεων είναι:

$$\text{Είσοδος} = \begin{cases} v_i = v_0 \\ \frac{\partial p}{\partial x_j} n_j = 0 \\ \tilde{\nu} = \tilde{\nu}_0 \end{cases}$$

$$\text{Τοιχώματα} = \begin{cases} v_i = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial x_j} n_j = 0 \\ \tilde{\nu} = 0 \end{cases}$$

$$\text{Έξοδος} = \begin{cases} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} n_j = 0 \\ p = 0 \\ \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} n_j = 0 \end{cases}$$

Στα περιοδικά όρια επιβάλλεται συνθήκη ισότητας των τιμών των ροϊκών μεγεθών. Αυτό προκύπτει από την κυκλική συμμετρία του συμπιεστή.

2.3 Συνάρτηση-Στόχος

Όπως προαναφέρθηκε, στόχος της πρώτης μελέτης είναι η βελτιστοποίηση του αεροδυναμικού σχήματος σε ένα πρόβλημα αντίστροφου σχεδιασμού. Στόχος διαλέγεται να είναι η αλλαγή της γωνίας της ροής στην έξοδο της σταθερής περύγωσης ενός συμπιεστή, ούτως ώστε να πλησιάσει όσο το δυνατόν περισσότερο σε μια γωνία εξόδου της ροής (α_{target}) που επιθυμεί ο χρήστης. Οπότε, ορίζεται η

συνάρτηση στόχος:

$$F = \int_{S_{outlet}} \frac{1}{2} (a_{outlet} - a_{target})^2 ds = \int_{S_{out}} F_{Sout} dS \quad (2.2)$$

Η συνάρτηση-στόχος όπως παρουσιάζεται στη σχέση (2.3) είναι ένα επιφανειακό ολοκλήρωμα υπολογισμένο στην έξοδο του χωρίου. Ελαχιστοποίηση της συνάρτησης στόχου σηματοδοτεί την αλλαγή της γωνίας εξόδου, η οποία έρχεται πλέον πιο "κοντά" στη γωνία που στοχεύει ο χρήστης (a_{target}). Μια τέτοια αντικειμενική συνάρτηση έχει φυσική σημασία, διότι αν λ.χ. η γωνία-στόχος είναι μικρότερη και όντως ελαχιστοποιηθεί η συνάρτηση, τότε αυτό συνεπάγεται μείωση του μέτρου της ταχύτητας στην έξοδο άρα περαιτέρω αύξηση της στατικής πίεσης στη σταθερή πτερύγωση συμπίεστη.

2.4 Υπολογισμός Παραγώγων Μέσω της Συνεχούς Συζυγούς Μεθόδου

2.4.1 Παραγωγή Επαυξημένης Συνάρτησης

Στη σχέση (1.6) παρουσιάζονται οι τρεις ομάδες παραγώγων που χρειάζονται για τον υπολογισμό της $\frac{\partial \hat{F}}{\partial b_m}$. Οι δύο πρώτες ομάδες από αυτές θα υπολογιστούν χρησιμοποιώντας τη συνεχή συζυγή μέθοδο.

Για να εφαρμοστεί η συνεχής συζυγής μέθοδος πρέπει πρώτα να οριστεί η επαυξημένη συνάρτηση F_{aug} , η οποία προκύπτει αν προστεθούν στη συνάρτηση-στόχο τα υπόλοιπα των εξισώσεων ροής (residuals) επί τα ογκικά ολοκληρώματα των πολλαπλασιαστών Lagrange

$$F_{aug} = F + \int_{\Omega} \Psi_l R_l^U d\Omega \quad (2.3)$$

όπου το $\Psi = [q, u_i]^T$ είναι το διάνυσμα των συζυγών μεταβλητών, με q συμβολίζεται η συζυγής πίεση και με u_i οι συνιστώσες της συζυγούς ταχύτητας. Με R^U συμβολίζονται τα υπόλοιπα των εξισώσεων ροής, τα οποία είναι μηδέν αφού ικανοποιούνται οι εξισώσεις ροής και οι αντίστοιχες οριακές τους συνθήκες. Η

έκφραση (2.3) μπορεί να γραφεί εναλλακτικά ως

$$F_{aug} = F + \int_{\Omega} qR^p d\Omega + \int_{\Omega} u_i R_i^v d\Omega \quad (2.4)$$

Δεδομένου ότι τα ολοκληρώματα στο δεξί μέλος της εξίσωσης (2.4) είναι μηδενικά, η F και F_{aug} είναι ίσες. Οπότε ίσες θα είναι και οι παράγωγοί τους. Έτσι, αντί της παραγώγου ευαισθησίας $\frac{\delta F}{\delta b_m}$, μπορεί να υπολογιστεί η παράγωγος της επαυξημένης συνάρτησης $\frac{\delta F_{aug}}{\delta b_m}$ ως

$$\frac{\delta F_{aug}}{\delta b_m} = \underbrace{\frac{\delta F}{\delta b_m}}_{1^{ος} \text{ όρος}} + \underbrace{\frac{\delta}{\delta b_m} \int_{\Omega} qR^p d\Omega}_{2^{ος} \text{ όρος}} + \underbrace{\frac{\delta}{\delta b_m} \int_{\Omega} u_i R_i^v d\Omega}_{3^{ος} \text{ όρος}} \quad (2.5)$$

Ξεκινώντας από τον πρώτο όρο $\frac{\delta F}{\delta b_m}$, παραγωγίζεται η συνάρτηση-στόχος και προκύπτει

$$\frac{\delta F}{\delta b_m} = \int_{S_{out}} \frac{\partial F_{S_{out}}}{\partial v_i} \frac{\delta v_i}{\delta b_m} dS_{out} \quad (2.6)$$

Κατά την παραγωγή των χωρικών ολοκληρωμάτων ο όρος $\frac{\delta}{\delta b_m} \int_{\Omega} qR^p d\Omega$ γράφεται ως:

$$\frac{\delta}{\delta b_m} \int_{\Omega} qR^p d\Omega = \int_{\Omega} q \frac{\delta R^p}{\delta b_m} d\Omega + \int_{\Omega} \frac{\delta q}{\delta b_m} R^p d\Omega + \int_{\Omega} q R^p \frac{\delta (d\Omega)}{\delta b_m} \quad (2.7)$$

Με τον ίδιο τρόπο γράφεται και η παράγωγος του ολοκληρώματος της εξίσωσης της ορμής

$$\frac{\delta}{\delta b_m} \int_{\Omega} u_i R^v d\Omega = \int_{\Omega} u_i \frac{\delta R^v}{\delta b_m} d\Omega + \int_{\Omega} \frac{\delta u_i}{\delta b_m} R^v d\Omega + \int_{\Omega} u_i R^v \frac{\delta (d\Omega)}{\delta b_m} \quad (2.8)$$

Τα R^p και R^v είναι αντιστοίχως, τα υπόλοιπα της εξίσωσης της ορμής και της συνέχειας και ισούνται με μηδέν. Επειδή οι μεταβλητές σχεδιασμού είναι τα σημεία ελέγχου που παραμετροποιούν τη γεωμετρία υπάρχει εξάρτηση $x(b_m)$, άρα ισχύει ότι:

$$\frac{\delta}{\delta b_m} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \right) \neq \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\delta \Phi}{\delta b_m} \right) \quad (2.9)$$

Αν χρησιμοποιηθεί η ακόλουθη σχέση που συνδέει την ολική με τη μερική παράγωγο

οποιοδήποτε μεγέθους Φ

$$\frac{\delta}{\delta b_m} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\delta \Phi}{\delta b_m} \right) - \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\delta x_k}{\delta b_m} \right) \quad (2.10)$$

προκύπτει ότι

$$\int_{\Omega} q \frac{\delta R^p}{\delta b_m} d\Omega = - \int_{\Omega} q \frac{\delta}{\delta b_m} \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_j} \right) d\Omega = - \int_{\Omega} q \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\delta v_j}{\delta b_m} \right) d\Omega + \int_{\Omega} q \frac{\partial v_j}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\delta x_k}{\delta b_m} \right) d\Omega \quad (2.11)$$

Ο όρος $\frac{\delta x_k}{\delta b_m}$ της σχέσης (2.11) είναι οι παράγωγοι ευαισθησίας πλέγματος (grid sensitivities).

Εφαρμόζοντας ολοκλήρωση κατά παράγοντες και, στη συνέχεια, το θεώρημα Green-Gauss έχουμε την τελική έκφραση της παραγώγου του ολοκληρώματος της εξίσωσης της συνέχειας (2^{ος} όρος):

$$\int_{\Omega} q \frac{\delta R^p}{\delta b_m} d\Omega = - \int_S q n_j \frac{\delta v_j}{\delta b_m} dS + \int_{\Omega} \frac{\partial q}{\partial x_j} \frac{\delta v_j}{\delta b_m} d\Omega + \int_{\Omega} q \frac{\partial v_j}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\delta x_k}{\delta b_m} \right) d\Omega \quad (2.12)$$

Αντίστοιχη μεταχείριση έχει και ο τρίτος όρος, που είναι η παράγωγος του ολοκληρώματος της εξίσωσης της ορμής ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού. Δηλαδή, όπου χρειάζεται, εφαρμόζεται η σχέση (2.10) και το θεώρημα Green-Gauss.

Για τον τρίτο όρο ισχύει:

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta b_m} \int_{\Omega} u_i R_i^v d\Omega = & \int_{\Omega} \left\{ u_i \frac{\partial v_j}{\partial x_j} - v_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right\} \frac{\delta v_i}{\delta b_m} d\Omega \\ & - \int_{\Omega} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \frac{\delta p}{\delta b_m} d\Omega + \int_S \left\{ u_i v_j n_j + \nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j \right\} \frac{\delta v_i}{\delta b_m} dS \\ & - \int_S u_i n_j \frac{\delta \tau_{ij}}{\delta b_m} dS + \int_S u_i n_i \frac{\delta p}{\delta b_m} dS \\ & + \int_{\Omega} \left\{ q \frac{\partial v_j}{\partial x_k} - u_i v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + u_i \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_k} - u_j \frac{\partial p}{\partial x_k} \right\} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\delta x_k}{\delta b_m} \right) d\Omega \end{aligned} \quad (2.13)$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (2.9), (2.11), (2.13)

$$\begin{aligned}
\frac{\delta F_{aug}}{\delta b_m} = & \int_{\Omega} \left\{ u_i \frac{\partial v_j}{\partial x_j} - v_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial q}{\partial x_j} \right\} \frac{\delta v_i}{\delta b_m} d\Omega \\
& - \int_{\Omega} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \frac{\delta p}{\delta b_m} d\Omega + \int_S \left\{ u_i v_j n_j + \nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j - q n_i \right\} \frac{\delta v_i}{\delta b_m} dS \\
& - \int_S u_i n_j \frac{\delta \tau_{ij}}{\delta b_m} dS + \int_S u_i n_i \frac{\delta p}{\delta b_m} dS + \int_{S_{out}} \frac{\partial F_{S_{out}}}{\partial v_i} \frac{\delta v_i}{\delta b_m} dS_{out} + \int_{\Omega} A_{jk} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\delta x_k}{\delta b_m} \right) d\Omega
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Το A_{jk} είναι ο όρος που προκύπτει σε περίπτωση που η παραγωγή γίνεται, όπως εδώ, ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού (διότι αυτές επηρεάζουν τη γεωμετρία), ενώ ισούται με

$$A_{jk} = q \frac{\partial v_j}{\partial x_k} - u_i v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + u_i \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_k} - u_j \frac{\partial p}{\partial x_k} \tag{2.15}$$

Τελικά, αυτό που παρατηρείται στην τελική έκφραση της παραγωγού $\frac{\delta F_{aug}}{\delta b_m}$ είναι ότι αποτελείται από ένα άθροισμα ογκικών και επιφανειακών ολοκληρωμάτων. Για να υπολογιστούν οι ποσότητες $\frac{\delta v_i}{\delta b_m}$, $\frac{\delta p}{\delta b_m}$, και $\frac{\delta \tau_{ij}}{\delta b_m}$ απαιτούνται στην περίπτωση της ευθείας διαφόρισης, N επιλύσεις των εξισώσεων του πρωτεύοντος προβλήματος δηλαδή των εξισώσεων Navier-Stokes (όπου N το πλήθος των μεταβλητών σχεδιασμού). Επειδή, κατ' αυτόν τον τρόπο, το υπολογιστικό κόστος γίνεται πολύ μεγάλο, απαλείφονται όλα τα ολοκληρώματα τα οποία περιέχουν παραγωγούς ροϊκών μεγεθών ως προς μεταβλητές σχεδιασμού. Έτσι, η τελική έκφραση των παραγώνων ευαισθησίας συναρτάται μόνο των μεταβολών των γεωμετρικών ποσοτήτων ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού. Το κόστος για τον υπολογισμό τους είναι αμελητέο σε σχέση με το κόστος για την επίλυση της ροής. Σε αυτό το κόστος, όμως, προστίθεται και το κόστος επίλυσης των συζυγών εξισώσεων, παρ' όλα αυτά συνεχίζει να είναι ανεξάρτητο του πλήθους M των μεταβλητών σχεδιασμού.

2.4.2 Συζυγείς Πεδιακές Εξισώσεις

Για να αποφευχθεί λοιπόν ο υπολογισμός των παραγώνων αυτών επιβάλλεται στους συντελεστές τους στην εξίσωση (2.14) να είναι μηδενικοί. Από τα δύο πρώτα χωρικά ολοκληρώματα δημιουργούνται οι πεδιακές συζυγείς εξισώσεις. Τόσο οι συζυγείς εξισώσεις όσο και οι οριακές τους συνθήκες εξαρτώνται μόνο από το ροϊκό πεδίο που είναι ήδη γνωστό. Η συζυγής εξίσωση της συνέχειας και η συζυγής εξίσωση της

ορμής γράφονται

$$R^q = -\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \quad (2.16)$$

$$R_i^u = u_j \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - v_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial q}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2, (, 3) \quad (2.17)$$

Το κόστος της αριθμητικής επίλυσης των συζυγών εξισώσεων είναι περίπου ίδιο με αυτό του προβλήματος ροής μιας και πρόκειται για συζευγμένες εξισώσεις αντίστοιχης πολυπλοκότητας.

2.4.3 Οριακές Συνθήκες Συζυγούς Προβλήματος

Οι οριακές συνθήκες του συνεχούς συζυγούς προβλήματος καθορίζονται εξ ολοκλήρου από τα επιφανειακά ολοκληρώματα τα οποία χωρίζονται σε επιφανειακά ολοκληρώματα για την είσοδο, την έξοδο και γύρω από τα στερεά τοιχώματα.

Συζυγείς Συνθήκες στην Είσοδο

Η αντικειμενική συνάρτηση είναι μεν επιφανειακό ολοκλήρωμα, αλλά στη συγκεκριμένη περίπτωση, ορίζεται μόνο στην έξοδο του χωρίου. Οπότε σύμφωνα με την εξίσωση (2.14) τα επιφανειακά ολοκληρώματα που απομένουν είναι τα εξής

$$I_1 = \int_{Sinlet} \gamma_i \frac{\delta v_i}{\delta b_m} dS, \quad I_2 = \int_{Sinlet} c \frac{\delta p}{\delta b_m} dS, \quad I_3 = \int_{Sinlet} v_i n_j \frac{\delta \tau_{ij}}{\delta b_m} dS \quad (2.18)$$

με $\gamma_i = u_i v_j n_j + \nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j - q n_i$, $c = u_i n_i$

Για να μην υπολογίζονται οι παράγωγοι των ροϊκών μεγεθών ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού πρέπει οι τρεις όροι με τους οποίους πολλαπλασιάζονται γ_i , c , e_{ij} να είναι μηδενικοί, οπότε και τα ολοκληρώματα I_1 , I_2 , I_3 να είναι και αυτά τελικά ίσα με το μηδέν. Βέβαια, στην είσοδο, από την οριακή συνθήκη του πρωτεύοντος προβλήματος έχουμε ότι η ταχύτητα εισόδου είναι σταθερή και επιβάλλεται από τον χρήστη πράγμα που σημαίνει ότι $\frac{\delta u_i}{\delta b_m} = 0$. Για να είναι μηδενικό το ολοκλήρωμα I_2 , πρέπει το $c = 0$ δηλαδή $u_i n_i = 0$. Ενώ για να είναι μηδέν και το τρίτο ολοκλήρωμα πρέπει $u_i t_i = 0$ με t_i το εφαπτομενικό διάνυσμα στην είσοδο. Για τη συζυγή πίεση, δεν υπάρχει κάποια συνθήκη που να απορρέει από τα ολοκληρώματα, οπότε επιβάλλεται μηδενική συνθήκη Neumann. Άρα:

$$\text{Είσοδος} = \begin{cases} u_i = 0 \\ \frac{\partial q}{\partial x_j} n_j = 0 \end{cases}$$

Συζυγείς Συνθήκες στα Τοιχώματα

Στα τοιχώματα ισχύουν περίπου τα ίδια με την είσοδο, το μόνο που αλλάζει είναι ότι εδώ ισχύει μηδενική συνθήκη Dirichlet για την ταχύτητα

$$\text{Τοιχώματα} = \begin{cases} u_i = 0 \\ \frac{\partial q}{\partial x_j} n_j = 0 \end{cases}$$

Συζυγείς Συνθήκες στην Έξοδο

Στην έξοδο, πρέπει να ληφθεί υπόψη και ο όρος που προστίθεται στο επιφανειακό ολοκλήρωμα και προέρχεται από τη συνάρτηση-στόχο. Η συνάρτηση στόχος επιδρά μόνο στο I_1 και όχι στα I_2 και I_3 που παραμένουν ίδια

$$I_1 = \int_{\text{Soutlet}} \left(\gamma_i + \frac{\partial F_{\text{sout}}}{\partial v_i} \right) \frac{\delta v_i}{\delta b_m} dS \quad (2.19)$$

Η πίεση στην έξοδο είναι μηδενική λόγω οριακής συνθήκης του πρωτεύοντος προβλήματος οπότε $\frac{\delta p}{\delta b_m} = 0$ άρα και $I_2 = 0$. Εξετάζοντας τον όρο που πολλαπλασιάζει το $\frac{\delta v_i}{\delta b_m}$ και επιβάλλοντας τον μηδενισμό του, προκύπτει η διανυσματική εξίσωση

$$u_i v_j n_j + \nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j - q n_i + \frac{\partial F_{\text{sout}}}{\partial v_i} = 0 \quad (2.20)$$

Μετά από πράξεις αναλυτικής παραγωγίσης του όρου $\frac{\partial F_{\text{sout}}}{\partial v_i}$ προκύπτει ότι

$$\frac{\partial F_{\text{sout}}}{\partial v_i} = \frac{\partial \left(\frac{1}{2} (a - a_{\text{target}})^2 \right)}{\partial u_i} = \frac{(a - a_{\text{target}})}{|\mathbf{v}|^2} \begin{bmatrix} -v_y \\ v_x \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

Από τη διανυσματική εξίσωση (2.20) προκύπτουν δύο αλγεβρικές, μια για τη συζυγή πίεση και μία για την εφαπτομενική συνιστώσα της συζυγούς ταχύτητας. Υπολογιστικά πειράματα έχουν δείξει ότι το I_3 μπορεί να αμεληθεί στην έξοδο της ροής. Επειδή δεν υπάρχει άλλη σχέση που να υπαγορεύει κάποια συνθήκη για την

κάθετη συνιστώσα της συζυγούς ταχύτητας επιβάλλεται μηδενική συνθήκη Neumann. Άρα,

$$\text{Έξοδος} = \begin{cases} q = u_n v_n + \nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j n_i + \frac{\partial F_{sout}}{\partial v_i} n_i \\ u_i v_j n_j + \nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j t_i + \frac{\partial F_{sout}}{\partial v_i} t_i = 0 \\ \frac{u_i}{\partial x_j} n_j = 0 \end{cases}$$

2.4.4 Τελική Έκφραση Παραγώγων Πρώτης Τάξης

Οι σχέσεις που έχουν παρουσιαστεί μέχρι στιγμής αφορούν αποκλειστικά παραγωγή ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού. Η τελική έκφραση της παραγώγου, μετά και την επίλυση του συζυγούς προβλήματος, είναι:

$$\frac{\delta F}{\delta b_m} = \int_{\Omega} A_{jk} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\delta x_k}{\delta b_m} \right) d\Omega = \int_{\Omega} \left\{ q \frac{\partial v_j}{\partial x_k} - u_i v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + u_i \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_k} - u_j \frac{\partial p}{\partial x_k} \right\} d\Omega \quad (2.22)$$

Όλοι οι υπόλοιποι όροι έχουν μηδενιστεί από το συζυγές πρόβλημα και τις οριακές του συνθήκες.

Για τον τελικό υπολογισμό της πρώτης παραγώγου της αντικειμενικής ως προς τις στοχαστικές μεταβλητές, ισχύει ότι ακριβώς ίσχυσε και κατά την παραγωγή ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού, με δύο ουσιαστικές διαφοροποιήσεις.

Ειδικότερα, όταν η παραγωγή γίνεται ως προς τις στοχαστικές μεταβλητές (αντί των μεταβλητών σχεδιασμού), ισχύει η ισότητα

$$\frac{\delta}{\delta c_{\mu}} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\delta \Phi}{\delta c_{\mu}} \right) \quad (2.23)$$

μιας και δεν υπάρχει εξάρτηση της γεωμετρίας από τις στοχαστικές μεταβλητές. Λόγω της ανεξαρτησίας αυτής απαλείφεται ο όρος A_{jk} από την τελική έκφραση της παραγώγου

Η άλλη διαφορά συναντάται στο επιφανειακό ολοκλήρωμα στην είσοδο της ροής

όπου το $\frac{\delta u_i}{\delta c_\mu}$ δεν είναι μηδενικό

$$I_1 = \int_{Sinlet} \gamma_i \frac{\delta v_i}{\delta c_\mu} dS = \int_{Sinlet} \left\{ u_i v_j n_j + \nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j - q n_i \right\} \frac{\delta v_i}{\delta c_\mu} dS \quad (2.24)$$

Όμως, παρά τις διαφορές στη παραγωγή που μόλις επισημάνθηκαν, οι δύο παράγωγοι $\frac{\delta F}{\delta b_m}$ και $\frac{\delta F}{\delta c_\mu}$ υπολογίζονται επιλύοντας μία φορά το ίδιο συζυγές πρόβλημα. Αυτό ισχύει διότι, οι διαφοροποιήσεις αλλάζουν τον τελικό τύπο υπολογισμού της παραγωγού, αλλά οι συζυγείς οριακές συνθήκες και οι συζυγείς εξισώσεις παραμένουν οι ίδιες.

Η παράγωγος $\frac{\delta v_i}{\delta c_\mu}$ είναι διάφορη του μηδενός και υπολογίζεται εύκολα αναλυτικά αφού οι στοχαστικές μεταβλητές δεν είναι άλλες από το μέτρο της ταχύτητας και τη γωνία που σχηματίζει το ρευστό εισερχόμενο στο χωρίο. Λόγω μηδενικής οριακής συνθήκης της συζυγούς ταχύτητας, ο όρος που την περιέχει στο ολοκλήρωμα, απαλείφεται. Έτσι, η τελική τιμή της παραγωγού δίνεται από τη σχέση

$$\frac{\delta F}{\delta c_\mu} = \int_{Sinlet} \left\{ \nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j - q n_i \right\} \frac{\delta v_i}{\delta c_\mu} dS \quad (2.25)$$

Αν $\mathbf{r} = \begin{bmatrix} \cos(a_{in}) \\ \sin(a_{in}) \end{bmatrix}$ και $\mathbf{c} = \begin{bmatrix} |\mathbf{v}| \\ a \end{bmatrix}$ τότε για την παράγωγο $\frac{\delta v_i}{\delta c_\mu}$ ισχύει

$$\frac{\delta v_i}{\delta c_\mu} = \frac{\delta (|\mathbf{v}| r_i)}{\delta c_\mu} = \frac{\delta |\mathbf{v}|}{\delta c_\mu} r_i + |\mathbf{v}| \frac{\delta r_i}{\delta c_\mu} = \begin{bmatrix} \cos(a_{in}) & -|\mathbf{v}| \sin(a_{in}) \\ \sin(a_{in}) & |\mathbf{v}| \cos(a_{in}) \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

$$\frac{\partial F_{sout}}{\partial v_i} = \frac{\partial \left(\frac{1}{2} (a - a_{target})^2 \right)}{\partial u_i} = \frac{(a - a_{target})}{|\mathbf{v}|^2} \begin{bmatrix} -v_y \\ v_x \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

Κεφάλαιο 3

Υπολογισμός των Προβολών των Ροϊκών και Συζυγών Εξισώσεων

Για τον τελικό υπολογισμό της παραγώγου της αντικειμενικής συνάρτησης ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού $\frac{\delta \bar{F}}{\delta b_m}$ χρειάζεται ο υπολογισμός των τριών προαναφερθεισών ομάδων ποσοτήτων της σχέσης (1.5). Με την επίλυση του πρωτεύοντος και συζυγούς προβλήματος, έχουν υπολογιστεί οι δύο πρώτες ομάδες όρων. Εκκρεμεί όμως, ο υπολογισμός των b-c μεικτών παραγώγων, επί ένα διάνυσμα z σχέσεις (1.7) και (1.8). Στο κεφάλαιο αυτό θα αναπτυχθεί η μέθοδος του απευθείας υπολογισμού του όρου $\frac{\delta^2 F}{\delta c_\mu \delta b_m} z_\mu$, καθώς και οι λόγοι για τους οποίους επιλέχτηκε. Στο εξής όπου αναφέρεται η έκφραση "προβολή εξίσωσης" θα εννοείται η προβολή της εκάστοτε εξίσωσης πάνω στο διάνυσμα z_μ .

3.1 Ευθεία Διαφόριση και Δημιουργία των Προβολών των Εξισώσεων

Για να υπολογιστούν οι b-c μεικτές παράγωγοι, πρέπει να παραγωγιστεί ως προς τις στοχαστικές μεταβλητές η σχέση (2.22), που αποτελεί την αναλυτική έκφραση του $\frac{\delta F}{\delta b_m}$. Όπως έχει προαναφερθεί υπάρχει ανεξαρτησία μεταξύ γεωμετρίας και στοχαστικών μεταβλητών (εξ ου και ο μηδενισμός του δεύτερου όρου της σχέσης

((3.1)), ως εκ τούτου, χρησιμοποιείται η σχέση (2.23). Συνεπώς, ισχύει

$$\frac{\delta}{\delta c_\mu} \left(\frac{\delta F}{\delta b_m} \right) = \frac{\delta}{\delta c_\mu} \left(\int_{\Omega} A_{jk} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\delta x_k}{\delta b_m} \right) d\Omega \right) = \int_{\Omega} \frac{\delta A_{jk}}{\delta c_\mu} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\delta x_k}{\delta b_m} \right) d\Omega + \int_{\Omega} A_{jk} \frac{\delta}{\delta c_\mu} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\delta x_k}{\delta b_m} \right) \right) d\Omega \quad (3.1)$$

Εκτελώντας αναλυτικά την παραγωγή, η (3.1) γράφεται

$$\begin{aligned} \frac{\delta^2 F}{\delta c_\mu \delta b_m} = \int_{\Omega} \left\{ \frac{\delta q}{\delta c_\mu} \frac{\partial v_j}{\partial x_k} + q \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\delta v_j}{\delta c_\mu} - v_j \frac{\delta u_i}{\delta c_\mu} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} - u_i \frac{\delta v_j}{\delta c_\mu} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \nu \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\delta u_i}{\delta c_\mu} \right) \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right. \\ \left. - \nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\delta v_i}{\delta c_\mu} + \frac{\delta u_i}{\delta c_\mu} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right. \\ \left. + u_i \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\delta v_i}{\delta c_\mu} + \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\delta v_j}{\delta c_\mu} \right) - \frac{\delta u_j}{\delta c_\mu} \frac{\partial p}{\partial x_k} - u_j \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\delta p}{\delta c_\mu} \right\} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\delta x_k}{\delta b_m} \right) d\Omega \end{aligned} \quad (3.2)$$

Η σχέση (3.2) περιέχει άγνωστες ποσότητες, οι οποίες δεν είναι άλλες, από τις παραγώγους των μεταβλητών του πρωτεύοντος και συζυγούς προβλήματος ως προς τις στοχαστικές μεταβλητές. Για τον υπολογισμό αυτών των ποσοτήτων, εν γένει, θα ακολουθείτο η μέθοδος της ευθείας διαφόρισης (Direct Differentiation) των εξισώσεων της ροής και των εξισώσεων του συζυγούς προβλήματος, ως προς κάθε μια από τις στοχαστικές μεταβλητές. Παρ' όλα αυτά, επειδή η ζητούμενη προς υπολογισμό ποσότητα περιέχει μεικτές παραγώγους επί ένα διάνυσμα ((1.8)) προτιμάται η εξής αντιμετώπιση: Αρχικά, γίνεται προβολή των μεικτών παραγώγων πάνω στο διάνυσμα z

$$\begin{aligned} \frac{\delta^2 F}{\delta c_\mu \delta b_m} z_\mu = \int_{\Omega} \left\{ \frac{\delta q}{\delta c_\mu} z_\mu \frac{\partial v_j}{\partial x_k} + q \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\delta v_j}{\delta c_\mu} z_\mu - v_j \frac{\delta u_i}{\delta c_\mu} z_\mu \frac{\partial v_i}{\partial x_k} - u_i \frac{\delta v_j}{\delta c_\mu} z_\mu \frac{\partial v_i}{\partial x_k} - u_i v_j \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\delta v_i}{\delta c_\mu} z_\mu \right) \right. \\ \left. - \nu \left[\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\delta u_i}{\delta c_\mu} z_\mu \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\delta u_j}{\delta c_\mu} z_\mu \right) \right] \frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\delta v_i}{\delta c_\mu} z_\mu \right) \right. \\ \left. + \frac{\delta u_i}{\delta c_\mu} z_\mu \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + u_i \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\nu \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\delta v_i}{\delta c_\mu} z_\mu \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\delta v_j}{\delta c_\mu} z_\mu \right) \right) \right] \right. \\ \left. - \frac{\delta u_j}{\delta c_\mu} z_\mu \frac{\partial p}{\partial x_k} - u_j \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\delta p}{\delta c_\mu} z_\mu \right) \right\} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\delta x_k}{\delta b_m} \right) d\Omega \end{aligned} \quad (3.3)$$

Πλέον οι άγνωστες ποσότητες έχουν πολλαπλασιαστεί επί το διδιάστατο διάνυσμα z και στο εξής θα ονομάζονται προβεβλημένες μεταβλητές, και θα συμβολίζονται ως: $\frac{\delta p}{\delta c_\mu} z_\mu = \tilde{p}$, $\frac{\delta v_i}{\delta c_\mu} z_\mu = \tilde{v}_i$, $\frac{\delta q}{\delta c_\mu} z_\mu = \tilde{q}$, και $\frac{\delta u_i}{\delta c_\mu} z_\mu = \tilde{u}_i$.

Αντικαθιστώντας στη σχέση (3.3) τις προβεβλημένες μεταβλητές προκύπτει ο τελικός

τύπος

$$\begin{aligned}
\frac{\delta^2 F}{\delta c_\mu \delta b_m} z_\mu = \int_\Omega \left\{ \tilde{q} \frac{\partial v_j}{\partial x_k} + q \frac{\partial \tilde{v}_j}{\partial x_k} - v_j \tilde{u}_i \frac{\partial v_i}{\partial x_k} - u_i \tilde{v}_j \frac{\partial v_i}{\partial x_k} - u_i v_j \frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial x_k} \right. \\
- \nu \left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial x_k} \\
+ \tilde{u}_i \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + u_i \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\nu \left(\frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{v}_j}{\partial x_i} \right) \right] \\
\left. - \tilde{u}_j \frac{\partial p}{\partial x_k} - u_j \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x_k} \right\} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\delta x_k}{\delta b_m} \right) d\Omega \quad (3.4)
\end{aligned}$$

Αντί της ευθείας διαφόρισης των εξισώσεων ως προς κάθε στοχαστική μεταβλητή, οι εξισώσεις παραγωγίζονται ως προς το διάνυσμα των στοχαστικών μεταβλητών και προβάλλονται στο διάνυσμα z . Τα διανύσματα c και z , όπως υποδεικνύουν και οι δείκτες τους, έχουν το ίδιο μέγεθος, ίσο με το πλήθος (M) των στοχαστικών μεταβλητών. Στη συνέχεια παρουσιάζονται οι εξισώσεις που επιλύονται για να υπολογιστούν τα προβλεβλημένα μεγέθη \tilde{p} , \tilde{v}_i , \tilde{q} και \tilde{u}_i .

3.1.1 Προβολές των Εξισώσεων Ροής και Οριακές Συνθήκες

Προβολές των Εξισώσεων Ροής

Οι εξισώσεις της ροής όπως δίνονται από τις σχέσεις (2.1α') και (2.1β') παραγωγίζονται ως προς c και προβάλλονται στο z έτσι προκύπτουν οι δύο προβολές των εξισώσεων του πρωτεύοντος προβλήματος

$$\tilde{R}^p = -\frac{\delta R^p}{\delta c_\mu} z_\mu = -\frac{\delta}{\delta c_\mu} \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_j} \right) z_\mu = -\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\delta v_j}{\delta c_\mu} z_\mu \right) = -\frac{\partial \tilde{v}_j}{\partial x_j} = 0 \quad (3.5a')$$

$$\tilde{R}_i^v = \tilde{v}_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + v_j \frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \left(\frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{v}_j}{\partial x_i} \right) \right] + \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2, (, 3) \quad (3.5b')$$

Οι προβολές των εξισώσεων ροής διαφέρουν από τις εξισώσεις του πρωτεύοντος προβλήματος, τόσο ως προς τις ίδιες τις μεταβλητές, όπως είναι λογικό, αλλά και ως προς τον όρο της μεταφοράς (convection term). Βέβαια, το υπολογιστικό κόστος επίλυσης τους, είναι ίδιο με αυτό των εξισώσεων του πρωτεύοντος προβλήματος.

Οριακές Συνθήκες των Προβολών των Εξισώσεων Ροής

Οι οριακές συνθήκες των προβολών των εξισώσεων ροής προκύπτουν αν παραγωγιστούν και προβληθούν αντίστοιχα οι οριακές συνθήκες του πρωτεύοντος προβλήματος. Πιο συγκεκριμένα, οι οριακές συνθήκες δεν διαφοροποιούνται, εκτός από την περίπτωση της ταχύτητας στην είσοδο, όπου ισχύουν τα εξής κατά την παραγωγή:

Στο πρωτεύον πρόβλημα, ισχύει σύμφωνα με τη σχέση (2.26)

$$\frac{\delta v_i}{\delta c_\mu} \Big|_{inlet} = \begin{bmatrix} \cos(a_{in}) & -|\mathbf{v}|\sin(a_{in}) \\ \sin(a_{in}) & |\mathbf{v}|\cos(a_{in}) \end{bmatrix}, \text{ πολλαπλασιάζοντας επί το διάνυσμα}$$

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} \frac{\delta F}{\delta c_1} \sigma_1^2 & \frac{\delta F}{\delta c_2} \sigma_2^2 \end{bmatrix} \text{ το οποίο έχει ήδη υπολογιστεί, προκύπτει ότι:}$$

$$\tilde{v}_i \Big|_{inlet} = \frac{\delta v_i}{\delta c_\mu} \Big|_{inlet} z_\mu = \tilde{\mathbf{v}}_0 \text{ και οι οριακές συνθήκες γράφονται}$$

$$\text{Είσοδος} = \begin{cases} \tilde{v}_i = \tilde{\mathbf{v}}_0 \\ \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x_j} n_j = 0 \end{cases}$$

$$\text{Τοιχώματα} = \begin{cases} \tilde{v}_i = 0 \\ \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x_j} n_j = 0 \end{cases}$$

$$\text{Έξοδος} = \begin{cases} \frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial x_j} n_j = 0 \\ \tilde{p} = 0 \end{cases}$$

3.1.2 Προβολές των Συζυγών Εξισώσεων και Οριακές Συνθήκες

Προβολές των Συζυγών Εξισώσεων

Η ίδια συλλογιστική ακολουθείται και για τη δημιουργία των προβολών των συζυγών εξισώσεων. Ειδικότερα, παραγωγίζονται ως προς τις στοχαστικές μεταβλητές οι συζυγείς εξισώσεις (2.16), (2.17) και προβάλλονται στο διάνυσμα \mathbf{z} ,

$$\tilde{R}^a = \frac{\delta R^a}{\delta c_\mu} z_\mu = \frac{\delta}{\delta c_\mu} \left(-\frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right) z_\mu = -\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\delta u_j}{\delta c_\mu} z_\mu \right) = -\frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_j} = 0 \quad (3.6a')$$

$$\tilde{R}_i^u = \tilde{u}_j \frac{\partial v_j}{\partial x_i} + u_j \frac{\partial \tilde{v}_j}{\partial x_i} - \tilde{v}_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - v_j \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} \right) \right] + \frac{\partial \tilde{q}}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2, (, 3) \quad (3.6b')$$

Στη σχέση (3.6b') υπάρχουν πλέον τέσσερις όροι που "θυμίζουν" τούς όρους μεταφοράς (convection terms). Το υπολογιστικό κόστος επίλυσής των προβολών

των συζυγών εξισώσεων, θεωρείται παραπλήσιο εκείνου της επίλυσης του πρωτεύοντος προβλήματος.

Οριακές Συνθήκες των Προβολών των Συζυγών Εξισώσεων

Οι οριακές συνθήκες που επιβάλλονται στις προβεβλημένες συζυγείς εξισώσεις προκύπτουν από την παραγωγή των συζυγών οριακών συνθηκών ως προς c_μ και προβολή τους πάνω στο z_μ ,

$$\text{Είσοδος} = \begin{cases} \tilde{u}_i = 0 \\ \frac{\partial \tilde{q}}{\partial x_j} n_j = 0 \end{cases}$$

$$\text{Τοιχώματα} = \begin{cases} \tilde{u}_i = 0 \\ \frac{\partial \tilde{q}}{\partial x_j} n_j = 0 \end{cases}$$

Ιδιαιτερότητα παρουσιάζεται στην έξοδο, λόγω της παραγωγής της βασικής αντικειμενικής συνάρτησης,

$$\text{Έξοδος} = \begin{cases} \tilde{q} = \tilde{u}_n v_n + u_n \tilde{v}_n + \nu \left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} \right) n_j n_i + \frac{\delta}{\delta c_\mu} \left(\frac{\partial F_{sout}}{\partial v_i} n_i \right) z_\mu \\ \tilde{u}_t v_j n_j + u_t \tilde{v}_j n_j + \nu \left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} \right) n_j t_i + \frac{\delta}{\delta c_\mu} \left(\frac{\partial F_{sout}}{\partial v_i} t_i \right) z_\mu = 0 \\ \frac{\tilde{u}_i}{\partial x_j} n_j = 0 \end{cases}$$

όπου

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta c_\mu} \left(\frac{\partial F_{sout}}{\partial v_i} n_i \right) z_\mu &= \frac{\delta}{\delta c_\mu} \left[\frac{(a - a_{target})}{|\mathbf{v}|^2} (-n_x v_y + n_y v_x) \right] z_\mu = \frac{\delta}{\delta c_\mu} (a - a_{target}) z_\mu \frac{-n_x v_y + n_y v_x}{|\mathbf{v}|^2} \\ &+ \frac{\delta}{\delta c_\mu} \left(\frac{1}{|\mathbf{v}|^2} \right) z_\mu (a - a_{target}) (-n_x v_y + n_y v_x) \\ &+ \frac{\delta}{\delta c_\mu} (-n_x v_y + n_y v_x) z_\mu \frac{(a - a_{target})}{|\mathbf{v}|^2} \end{aligned} \quad (3.7)$$

Κάνοντας τις επί μέρους αναλυτικές παραγωγίσεις υπολογίζεται ο τελικός τύπος

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta c_\mu} \left(\frac{\partial F_{sout}}{\partial v_i} n_i \right) z_\mu &= (v_x \tilde{v}_y - v_y \tilde{v}_x) \frac{-n_x v_y + n_y v_x}{|\mathbf{v}|^4} - 2 \frac{(a - a_{target})}{|\mathbf{v}|^4} (-n_x v_y + n_y v_x) (v_x \tilde{v}_x + v_y \tilde{v}_y) \\ &+ \frac{(a - a_{target})}{|\mathbf{v}|^2} (-\tilde{v}_y n_x + \tilde{v}_x n_y) \end{aligned} \quad (3.8)$$

Κατά την παραγωγή του $\frac{\delta}{\delta c_\mu} \left(\frac{\partial F_{sout}}{\partial v_i} t_i \right) z_\mu$ προκύπτουν τα ίδια αποτελέσματα με αυτά της σχέσης (3.8), με τη διαφορά ότι αντί για τις συνιστώσες του κάθετου διανύσματος n_i , εμφανίζονται αυτές του εφαπτομενικού t_i .

Κεφάλαιο 4

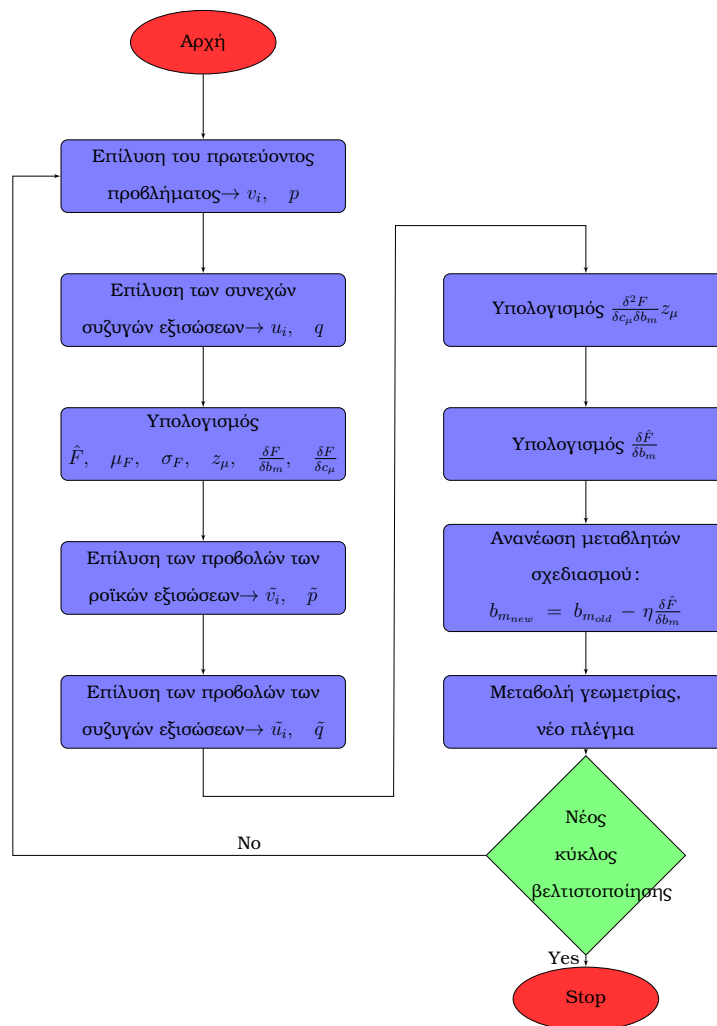
Αλγόριθμος pFOSM και Υπολογιστικό Κόστος

4.1 Αλγόριθμος Βελτιστοποίησης Μορφής με τη Μέθοδο του p-FOSM

Μετά την επίλυση των δύο προβλημάτων με τις προβολές των εξισώσεων έχουν βρεθεί τα πεδία των προβεβλημένων μεταβλητών και μπορεί πλέον να υπολογιστεί το $\frac{\delta^2 F}{\delta c_\mu \delta b_m} z_m$ σχέση (3.2). Έχοντας υπολογίσει τις τρεις αρχικώς άγνωστες ποσότητες $\frac{\delta F}{\delta b_m}$, $\frac{\delta F}{\delta c_\mu}$ και $\frac{\delta^2 F}{\delta c_\mu \delta b_m} z_m$ υπολογίζεται από τη σχέση (1.9) η παράγωγος της τροποποιημένης αντικειμενικής. Έχοντας υπολογίσει το $\frac{\delta \hat{F}}{\delta b_m}$, με τη μέθοδο της απότομης καθόδου ανανεώνονται οι μεταβλητές σχεδιασμού και πραγματοποιείται αιτιοκρατική βελτιστοποίηση

$$b_{m_{new}} = b_{m_{old}} - \eta \frac{\delta \hat{F}}{\delta b_m} \quad (4.1)$$

Από τη στιγμή που οι μεταβλητές σχεδιασμού b_m είναι οι συντεταγμένες των σημείων ελέγχου (control points) της γεωμετρίας, ανανέωση τους θα προκαλέσει την αλλαγή σχήματος, του υπό βελτιστοποίηση αντικειμένου, καθώς και τη δημιουργία νέου πλέγματος.



Αν το κάθε ένα από τα μπλέ κουτάκια του αλγορίθμου, θεωρηθεί ότι είναι ένα βήμα της μεθόδου του pFOSM πιο αναλυτικά ισχύει:

- Βήμα 1⁰ επίλυση του πρωτεύοντος προβλήματος εξισώσεις (2.1α), (2.1β) με οριακές συνθήκες αυτές του υποκεφαλαίου 2.2.
- Βήμα 2⁰ επίλυση του συζυγούς προβλήματος εξισώσεις (2.16), (2.17) με οριακές συνθήκες αυτές του υποκεφαλαίου 2.4.3.
- Βήμα 3⁰ υπολογισμός \hat{F} σχέση (1.4), μ_F και σ_F σχέση (1.3), z_μ σχέση (1.7), $\frac{\delta F}{\delta b_m}$ σχέση (2.22), $\frac{\delta F}{\delta c_\mu}$, σχέση (2.25).
- Βήμα 4⁰ επίλυση των προβολών των ροϊκών εξισώσεων (3.5α), (3.5β) με οριακές συνθήκες αυτές του υποκεφαλαίου 3.1.1.
- Βήμα 5⁰ επίλυση των προβολών των ροϊκών εξισώσεων (3.6α), (3.6β) με οριακές συνθήκες αυτές του υποκεφαλαίου 3.1.2.
- Βήμα 6⁰ υπολογισμός σχέση $\frac{\delta^2 F}{\delta b_m \delta c_\mu}$, σχέση 3.4.

- Βήμα 7^ο υπολογισμός $\frac{\delta \hat{F}}{\delta b_m}$, σχέση 1.5.

4.2 Υπολογιστικό Κόστος της Μεθόδου

Το υπολογιστικό κόστος για τον υπολογισμό μέσης τιμής και τυπικής απόκλισης αντικειμενικής συνάρτησης με τη μέθοδο του FOSM είναι σταθερό, ανεξάρτητο του πλήθους των στοχαστικών μεταβλητών και αντιστοιχεί σε 2 IEP (ισοδύναμες επιλύσεις ροής). Διότι η μέση τιμή απαιτεί 1 IEP αυτό της επίλυσης των εξισώσεων της ροής και η τυπική απόκλιση άλλο 1 IEP για την επίλυση του συζυγούς προβλήματος και τον υπολογισμό της πρώτης παραγώγου ως προς τις στοχαστικές μεταβλητές.

Στην προσπάθεια να αξιολογηθεί το υπολογιστικό κόστος της μεθόδου του FOSM συγκρίνεται με το αντίστοιχο των μεθόδων επεμβατικού και μη-επεμβατικού αναπτύγματος πολυωνυμικού χάους πρώτης τάξης. Το υπολογιστικό κόστος του επεμβατικού αναπτύγματος πολυωνυμικού χάους δίνεται από τον τύπο:

$ΥΚ = \frac{(Q+n)}{Q!n!}$ όπου η Q η τάξη χάους και n το πλήθος των αβέβαιων μεταβλητών.

Το υπολογιστικό κόστος του μη-επεμβατικού αναπτύγματος πολυωνυμικού χάους δίνεται από τον τύπο: $ΥΚ = (Q + 1)^n$ όπου η Q η τάξη χάους και n το πλήθος των αβέβαιων μεταβλητών.

Ειδικότερα, συγκρίνοντας μεταξύ τους τα πρώτης τάξης μοντέλα, ισχύει ότι:

Συντομογραφίες	Πλήθος Αβέβαιων Μεταβλητών	Υπολογιστικό κόστος
FOSM	1	2
iPCE	1	2
niPCE	1	2
FOSM	2	2
iPCE	2	3
niPCE	2	4
FOSM	3	2
iPCE	3	4
niPCE	3	8

Πίνακας 4.1: Υπολογιστικό κόστος FOSM, iPCE και niPCE πρώτης τάξης.

Το υπολογιστικό κόστος της μεθόδου του p-FOSM κατά τη βελτιστοποίηση είναι το χαμηλότερο δυνατό, αφού είναι ανεξάρτητο του πλήθους των στοχαστικών μεταβλητών (M) και ισούται με 4 ισοδύναμες επίλυσεις ροής (IEP). Οι 4 IEP προκύπτουν από:

- 1 IEP για την επίλυση των εξισώσεων ροής του ρευστού.
- 1 IEP για την επίλυση των εξισώσεων της συζυγούς ροής.
- 1 IEP για την επίλυση των προβολών των εξισώσεων της ευθείας διαφοράρισης του προβλήματος ροής του ρευστού.
- 1 IEP για την επίλυση των προβολών των εξισώσεων της ευθείας διαφοράρισης του προβλήματος της συζυγούς ροής.

Σε οποιαδήποτε άλλη προσέγγιση ενός προβλήματος σιβαρού σχεδιασμού, με μέθοδο πρώτης-τάξης δεύτερης-ορμής (FOSM) το υπολογιστικό κόστος θα ήταν $2M+2$ IEP [1]. Το κόστος αυτό προκύπτει επειδή δεν χρησιμοποιείται η μέθοδος της προβολής και για να υπολογιστούν οι άγνωστες ποσότητες των παραγώγων των ροϊκών και συζυγών μεταβλητών ως προς της στοχαστικές μεταβλητές που βρίσκονται στην τελική έκφραση (πριν την προβολή) των $b-c$ μεικτών παραγώγων 3.3 επιλύονται $2M$ το πλήθος ισοδύναμες εξισώσεις. Αυτές προκύπτουν πλέον από ευθεία διαφοράριση των δύο εξισώσεων του πρωτεύοντος και συζυγούς προβλήματος επί τον αριθμό M των αβέβαιων μεταβλητών, ως προς τις οποίες γίνεται η ευθεία διαφοράριση.

Όπως γίνεται αντιληπτό, σε αυτήν την περίπτωση το κόστος αυξάνει γραμμικά σε σχέση με το πλήθος των στοχαστικών μεταβλητών. Αν το πλήθος είναι μεγάλο, μια τέτοια προσέγγιση είναι ασύμφορη από πλευράς υπολογιστικού κόστους. Στη διπλωματική αυτή εργασία, υπάρχουν δύο στοχαστικές μεταβλητές, συνεπώς, όπως παρουσιάζεται και στον πίνακα 4.2 το κέρδος σε υπολογιστικό κόστος του p-FOSM έναντι μιας μεθόδου ευθείας διαφοράρισης για τον υπολογισμό της δεύτερης $b-c$ μεικτής παραγώγου, είναι 2 IEP σε κάθε κύκλο βελτιστοποίησης. Στον πίνακα 4.2 με τον όρο FOSM εννοείται η μέθοδος που δεν χρησιμοποιεί τη τεχνική των προβολών για τον υπολογισμό των $b-c$ μεικτών παραγώγων αλλά αποκλειστικά την ευθεία διαφοράριση των εξισώσεων.

Συντομογραφίες	M	Υπολογιστικό κόστος
p-FOSM	2	4
FOSM	2	6

Πίνακας 4.2: Υπολογιστικό κόστος p-FOSM και FOSM

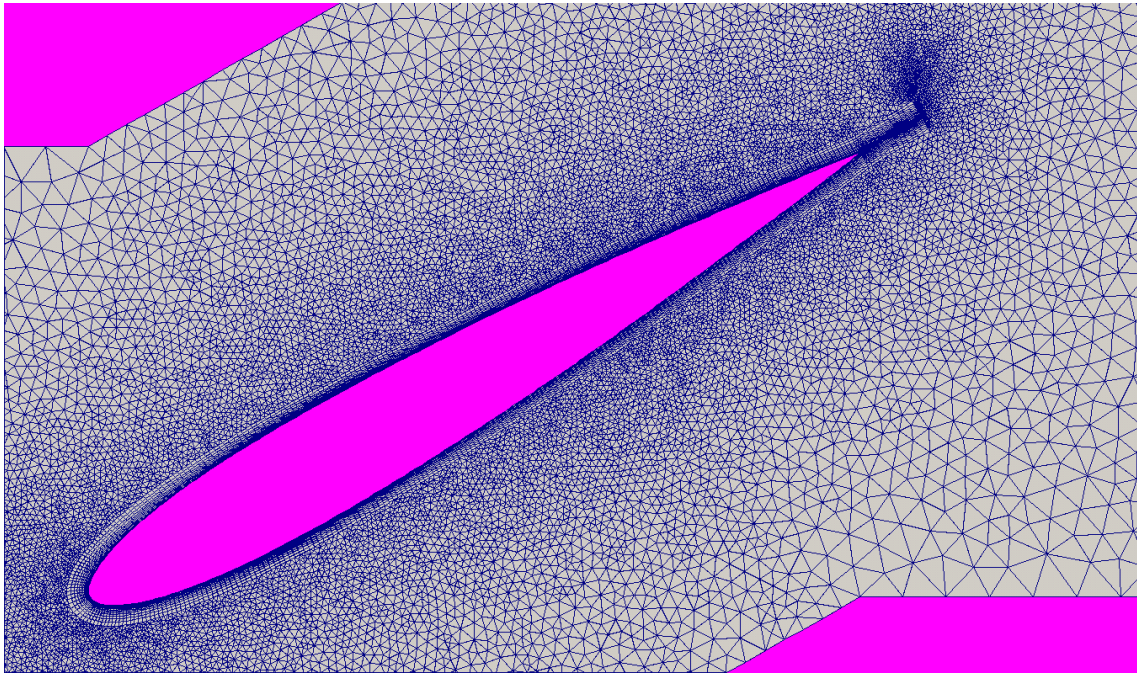
Κεφάλαιο 5

Επίλυση Εξισώσεων στο Open-FOAM

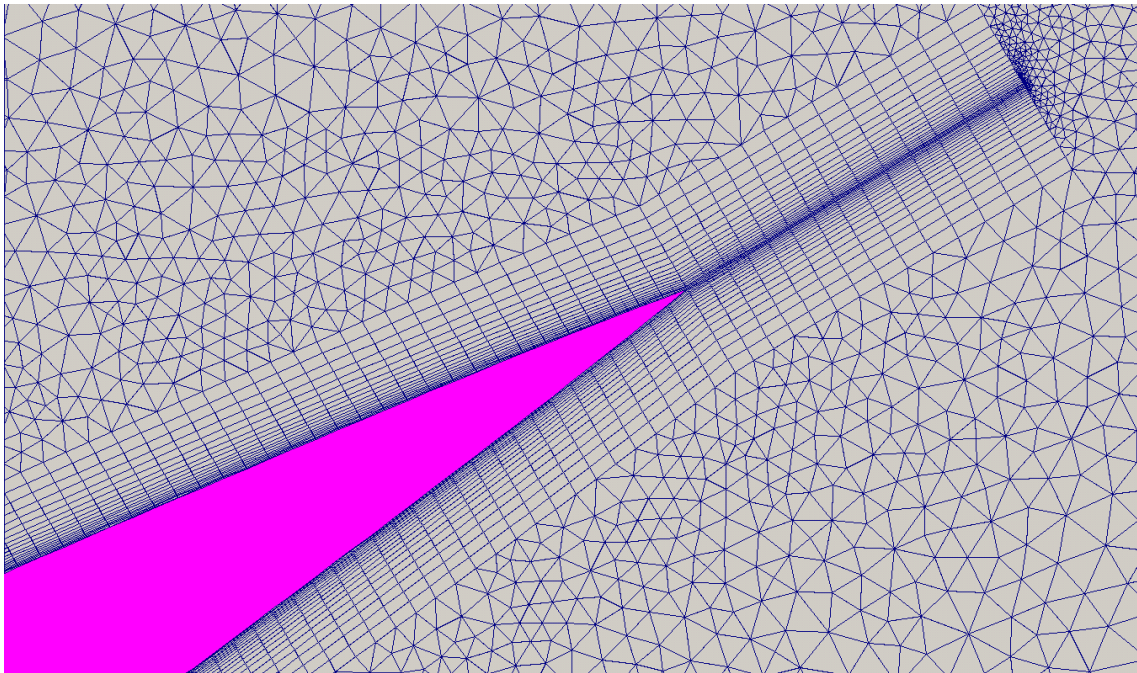
Χρησιμοποιώντας την παραπάνω μαθηματική ανάλυση, δημιουργήθηκε κώδικας σε περιβάλλον του ελεύθερου λογισμικού Open-FOAM, ο οποίος πραγματοποιεί βελτιστοποίηση σχήματος με την μέθοδο του p-FOSM. Για να εξεταστεί ο κώδικας που αναπτύχθηκε, χρησιμοποιούνται προσομοιώσεις (test cases). Η πρώτη προσομοίωση έγινε σε περύγωση συμμετρικής αεροτομής (NACA-12), για στρωτή ροή.

Η προσομοίωση έχει τα εξής χαρακτηριστικά: πρόκειται για μια διδιάστατη περύγωση στροβιλομηχανής, η γωνία κλίσης της περύγωσης είναι 30° , η γωνία πρόσπτωσης $+10^{\circ}$ και ο αριθμός Reynolds 1000.

Για να επιλυθεί η ροή υπάρχει η ανάγκη δημιουργίας πλέγματος. Το πλέγμα δημιουργήθηκε από προϋπάρχον λογισμικό της ΜΠΥΡ&Β /ΕΜΠ. Είναι μεικτού τύπου, κοντά στην περύγωση είναι τύπου C, ενώ το υπόλοιπο είναι μη-δομημένο αποτελούμενο από τριγωνικά στοιχεία. Συνολικά έχει 40.692 κυψέλες, είναι αρκετά πυκνό κοντά στην περύγωση για να επιτευχθεί κατάλληλη πύκνωση για το οριακό στρώμα, και αραιώνει σταδιακά καθώς απομακρύνεται κανείς από τα όρια της περύγωσης. Κατ' αυτόν τον τρόπο επιτυγχάνεται κατάλληλη πύκνωση εκεί που κρίνεται επιθυμητό και, συγχρόνως, οικονομία στον αριθμό των κυψελών. Τα χαρακτηριστικά του πλέγματος παρουσιάζονται στα παρακάτω σχήματα 5.1 και 5.2.



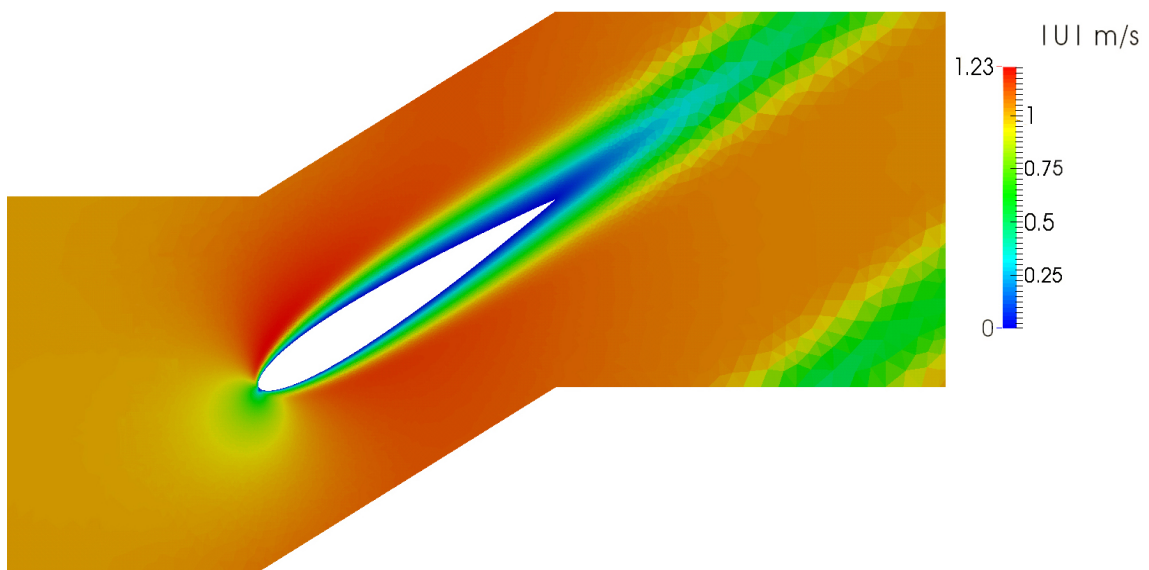
Σχήμα 5.1: Υπολογιστικό πλέγμα στην περύγωση της NACA-12, υπό γωνία κλίσης 30 μοιρών και στερεότητα 1.



Σχήμα 5.2: Υπολογιστικό πλέγμα στο χείλος εκφυγής της αεροτομής της περύγωσης.

5.1 Επίλυση της Ροής

Για να επιλυθεί οι εξισώσεις της ροής σε περιβάλλον Open-FOAM χρησιμοποιείται ο αλγόριθμος Simple (Semi-Implicit Method for Pressure Linked Equations) [1]. Επειδή ισχύει η συμμετρία εκ περιστροφής και η περιοδικότητα της ροής, η επίλυση γίνεται για ένα και μόνο βήμα περύγωσης. Ακολουθούν τα σχήματα 5.3, 5.4 των πεδίων του μέτρου της ταχύτητας και πίεσης.

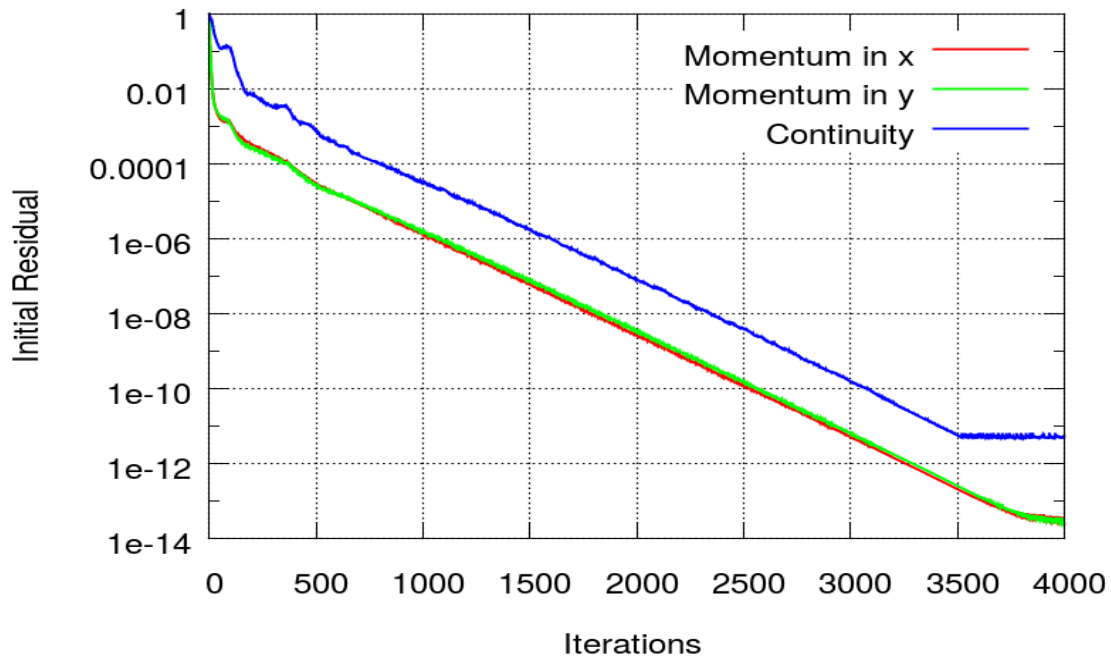


Σχήμα 5.3: Πεδίο μέτρου ταχύτητας στην περύγωση της NACA-12 για στρωτή ροή.



Σχήμα 5.4: Πεδίο πιέσεων στην περύγωση της NACA-12 για στρωτή ροή.

Για να πιστοποιηθεί το κατά πόσον έχουν συγκλίνει οι εξισώσεις ροής παρουσιάζεται στο σχήμα (5.5), η πορεία των αδιάστατων υπολοίπων των τριών εξισώσεων (ορμή κατά x , ορμή κατά y και συνέχεια).



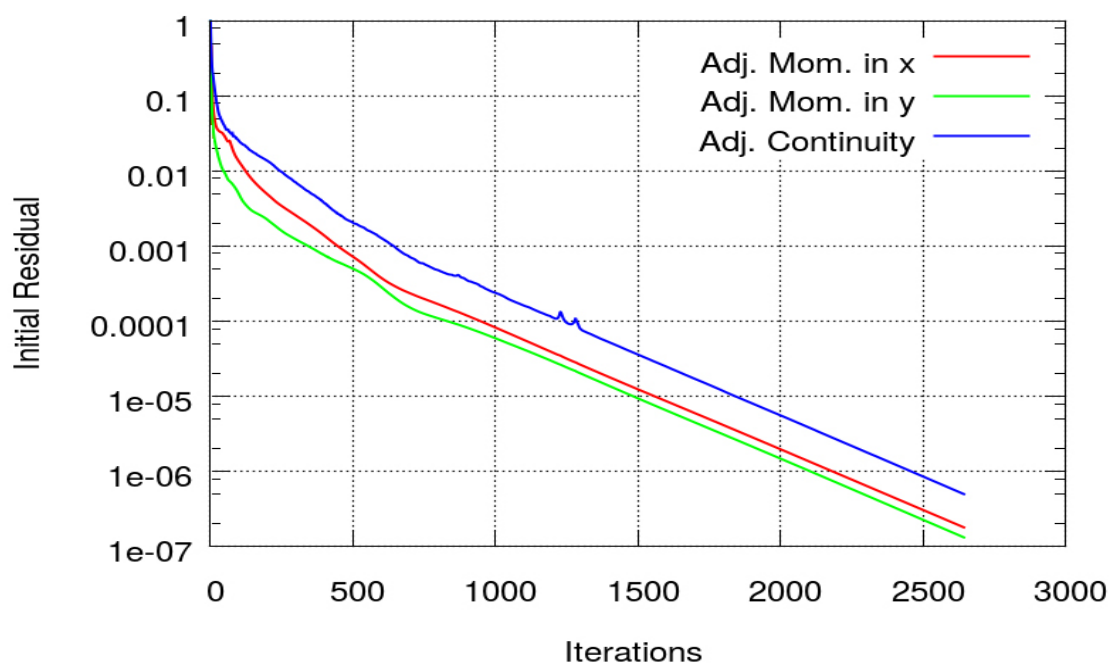
Σχήμα 5.5: Διάγραμμα σύγκλισης πρωτεύοντος προβλήματος για την περύγωση της NACA-12.

Τα αδιάστατα υπόλοιπα των εξισώσεων στις 4.000 επαναλήψεις είναι περίπου 10^{-11} για τη συνέχεια και 10^{-13} για την ορμή, και κατά x και κατά y . Σε πραγματικό χρόνο οι 4.000 επαναλήψεις αντιστοιχούν σε 123s. Όλα τα αποτελέσματα προσομοιώσεων στα οποία γίνεται αναφορά από εδώ και στο εξής έχουν προκύψει από παράλληλα "τρεξίματα" σε 4 πυρήνες (τύπου Intel 64 bit @ 2.6GHz). Για οικονομία χρόνου κατά τη διάρκεια της βελτιστοποίησης τίθεται ως κριτήριο σύγκλισης μικρότερα υπόλοιπα, της τάξης του $5 \cdot 10^{-7}$ και για τις τρεις εξισώσεις. Πρέπει να σημειωθεί ότι τέτοια υπόλοιπα κρίνονται πλήρως ικανοποιητικά ως προς τη σύγκλιση των εξισώσεων, ενώ οδηγούν σε επίλυση τις ροής σε χρόνο 70 s.

5.2 Επίλυση Συζυγών Εξισώσεων

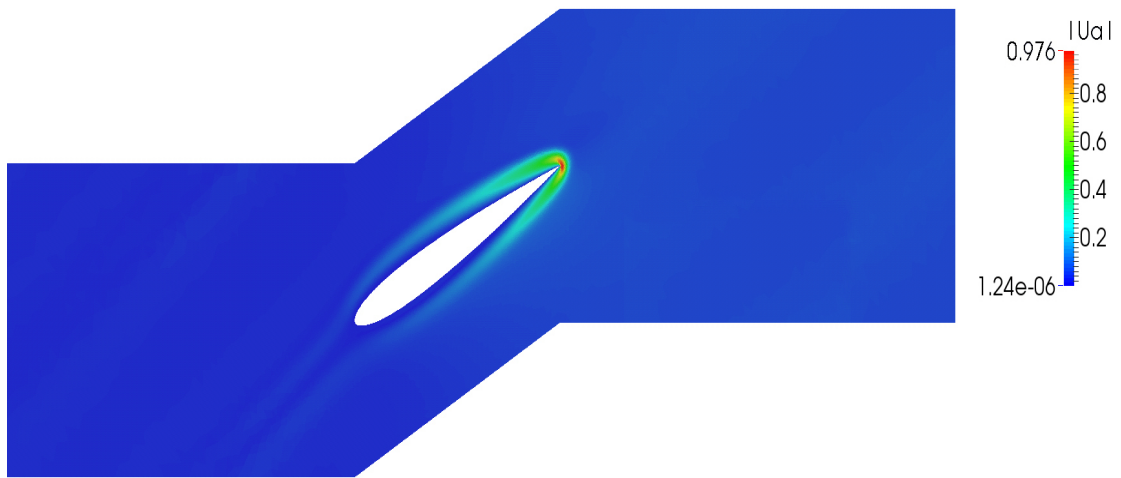
Μέχρι στιγμής έχει παρουσιαστεί η επίλυση του πρωτεύοντος προβλήματος και η σύγκλισή του. Για να διεξαχθεί όμως βελτιστοποίηση με τη μέθοδο του p-FOSM απαιτείται η επίλυση άλλων τριών ομάδων εξισώσεων, των συζυγών, των προβολών των εξισώσεων ροής και των προβολών των εξισώσεων του συζυγούς προβλήματος.

Για να επιλυθεί το συζυγές πρόβλημα χρησιμοποιήθηκε ο κώδικας της ΜΠΥΡ&Β /ΕΜΠ, παρ' όλα αυτά χρειάστηκε να προγραμματιστεί η προκειμένη αντικειμενική συνάρτηση και οι επιδράσεις της στις οριακές συνθήκες του συζυγούς προβλήματος σχέση (2.21). Στο παρακάτω σχήμα παρουσιάζεται το διάγραμμα σύγκλισης των συζυγών εξισώσεων. Ο χρόνος που απαιτείται για να συγκλίνουν οι εξισώσεις του συζυγούς προβλήματος σε αδιάστατα υπόλοιπα της τάξης $5 \cdot 10^{-7}$ είναι 113 s και απαιτούνται 2.642 επαναλήψεις.



Σχήμα 5.6: Διάγραμμα σύγκλισης συζυγούς προβλήματος για την περιύγωση της NACA-12.

Τα συζυγή πεδία που προέκυψαν παρουσιάζονται στα σχήματα 5.2 και 5.8



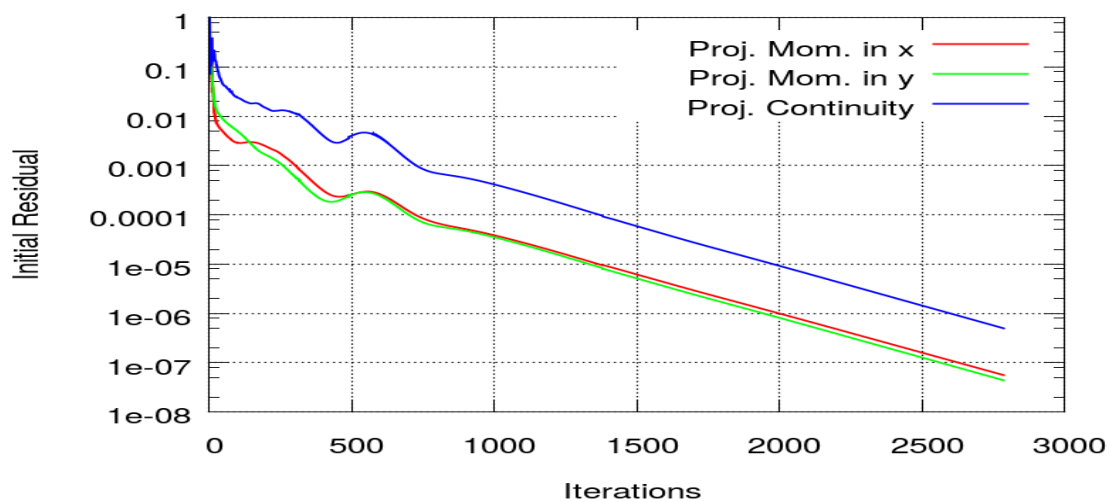
Σχήμα 5.7: Πεδίο μέτρου της συζυγούς ταχύτητας για την περύγωση της NACA-12.



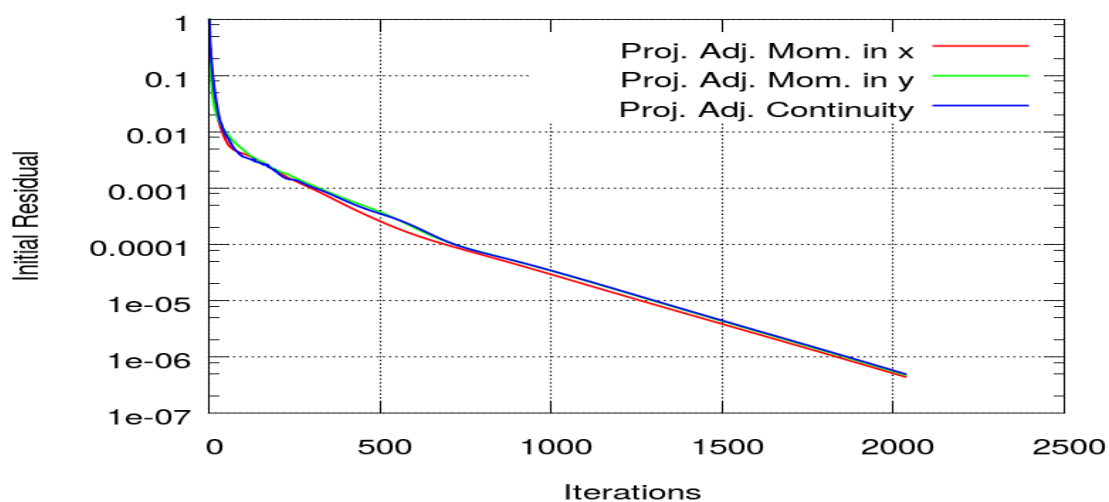
Σχήμα 5.8: Πεδίο της συζυγούς πίεσης για την περύγωση της NACA-12.

5.3 Επίλυση των Προβολών των Εξισώσεων

Για να επιλυθούν στο Open-FOAM οι προβολές των εξισώσεων του πρωτεύοντος και συζυγούς προβλήματος προγραμματίστηκε κώδικας σε περιβάλλον OpenFOAM, αφού προγραμματίστηκαν και οι οριακές τους συνθήκες συνυπολογίζοντας και την επίδραση της αντικειμενικής σχέση (3.7), επιλύονται. Ακολουθούν τα διαγράμματα σύγκλισης.



Σχήμα 5.9: Διάγραμμα σύγκλισης των εξισώσεων των προβολών του πρωτεύοντος προβλήματος για την περύγωση της NACA-12.



Σχήμα 5.10: Διάγραμμα σύγκλισης των εξισώσεων των προβολών του συζυγούς προβλήματος για την περύγωση της NACA-12.

Για να πραγματοποιηθεί ο πρώτος κύκλος βελτιστοποίησης απαιτείται λοιπόν ένα χρονικό διάστημα 329s, ήτοι περίπου 5,5min. Οι υπόλοιποι κύκλοι βελτιστοποίησης αναμένεται ότι θα χρειαστούν λιγότερο χρόνο για να ολοκληρωθούν. Αυτό οφείλεται στην καλύτερη αρχικοποίηση των πεδίων σε σχέση με την αρχική (του πρώτου κύκλου βελτιστοποίησης).

Κεφάλαιο 6

Πιστοποίηση Παραγώγων

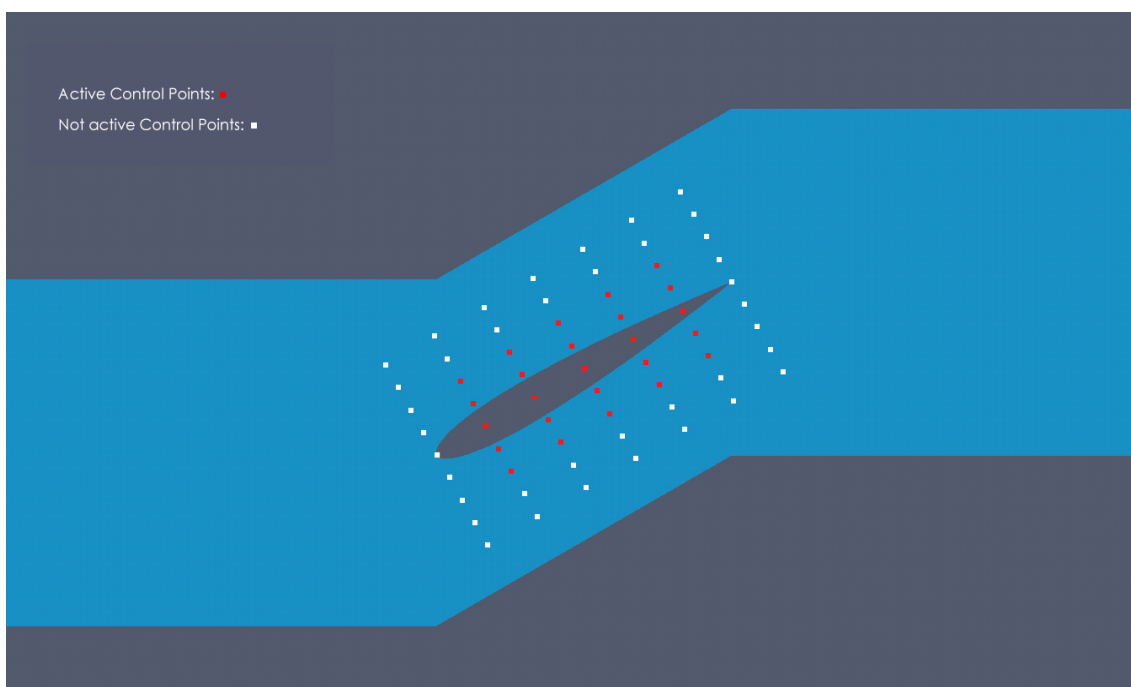
Η επίλυση των τεσσάρων ομάδων εξισώσεων δίνει τη δυνατότητα υπολογισμού των παραγώγων $\frac{\delta F}{\delta b_m}$, $\frac{\delta F}{\delta c_\mu}$, και των παραγώγων επί διάνυσμα $\frac{\delta^2 F}{\delta b_m \delta c_\mu} z_\mu$ οι οποίες είναι απαραίτητες για τον υπολογισμό της τυπικής απόκλισης αλλά και για την ανανέωση των μεταβλητών σχεδιασμού. Στο κεφάλαιο αυτό θα γίνει σύγκριση των τιμών των παραπάνω παραγώγων που προκύπτουν με τη μέθοδο του p-FOSM συγκριτικά με τις τιμές που προκύπτουν με τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών για την προσομοίωση της NACA-12. Επίσης θα αντιπαρατεθούν τα αποτελέσματα για τον υπολογισμό της μέσης τιμής και της τυπικής απόκλισης μεταξύ του λογισμικού που υλοποιεί τη μέθοδο του μη-επεμβατικού αναπτύγματος πολυωνυμικού χάους [6] και του κώδικα του FOSM.

6.1 Παραμετροποίηση Μορφής

Πρέπει να γίνει μια σύντομη πλην απαραίτητη αναφορά στην παραμετροποίηση της γεωμετρίας. Πιο συγκεκριμένα, αυτή γίνεται με τη χρήση των Volumetric B-Splines. Ο κώδικας για την παραμετροποίηση της γεωμετρίας με Volumetric B-Splines στο Open-FOAM προϋπήρχε στη ΜΠΥΡ&B/ΕΜΠ. Όπως φαίνεται και στο σχήμα 6.1, διαμορφώνεται ένα κουτί μέσα στο οποίο περιέχεται η προς βελτιστοποίηση γεωμετρία. Τα όρια του κουτιού καθορίζονται από τα εξωτερικά σημεία ελέγχου (control points). Με βάση τα σημεία ελέγχου γίνεται η παραμετροποίηση της γεωμετρίας. Οι συντεταγμένες στο επίπεδο, των σημείων ελέγχου είναι στην ουσία οι μεταβλητές σχεδιασμού της βελτιστοποίησης. Αλλαγή της θέσης των σημείων ελέγχου προκαλεί αλλαγή της γεωμετρίας, του πλέγματος, της ροής και εν τέλει αλλαγή στην τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης. Δεν είναι όμως όλα τα σημεία ελέγχου ελεύθερα να κινηθούν, υπάρχει περιορισμός τόσο στη

μέγιστη μετατόπιση τους όσο και στην κίνηση των ακριανών σημείων ελέγχου, στα οποία επιβάλλεται να παραμένουν παγωμένα στις θέσεις τους.

Όπως παρουσιάζεται στο σχήμα 6.1 οι κοντά στα όρια σειρές περιμετρικά των σημείων ελέγχου είναι παγωμένες. Η συνθήκη ακινησίας στην είσοδο και έξοδο του κουτιού (κατά τη διεύθυνση της ροής) κρατά το μήκος της χορδής της πτερύγωσης σταθερό. Η ανάλυση που έγινε έδειξε ότι οι προτελευταίες σειρές των σημείων ελέγχου πάνω και κάτω δεν επηρεάζουν τη γεωμετρία λόγω απόστασης. Ενώ οι τελευταίες σειρές κατά την κάθετη διεύθυνση στη ροή κρατήθηκαν σταθερές για να μην εξέλθουν τα σημεία ελέγχου εκτός γεωμετρίας και να μεταβάλουν τα περιοδικά όρια.



Σχήμα 6.1: *Ενεργά και ανενεργά σημεία ελέγχου των Volumetric B-Splines για την πτερύγωση της NACA-12.*

6.2 Πιστοποίηση Παραγώγων ως προς τις Στοχαστικές Μεταβλητές

Επειδή η μέθοδος με βάση την οποία διεξάγεται η βελτιστοποίηση ακολουθεί την πορεία που υποδεικνύουν οι παράγωγοι, πρέπει να γίνει πιστοποίηση της αξιοπιστίας των παραγώγων που υπολογίζονται. Η σύγκρισή τους θα γίνει με τα αποτελέσματα που προκύπτουν με πεπερασμένες διαφορές δεύτερης τάξης, τα οποία θεωρούνται

αξιόπιστα.

$$\frac{\delta F}{\delta c_{\mu}} = \frac{F_{c_{\mu}+\varepsilon} - F_{c_{\mu}-\varepsilon}}{2\varepsilon} \quad (6.1)$$

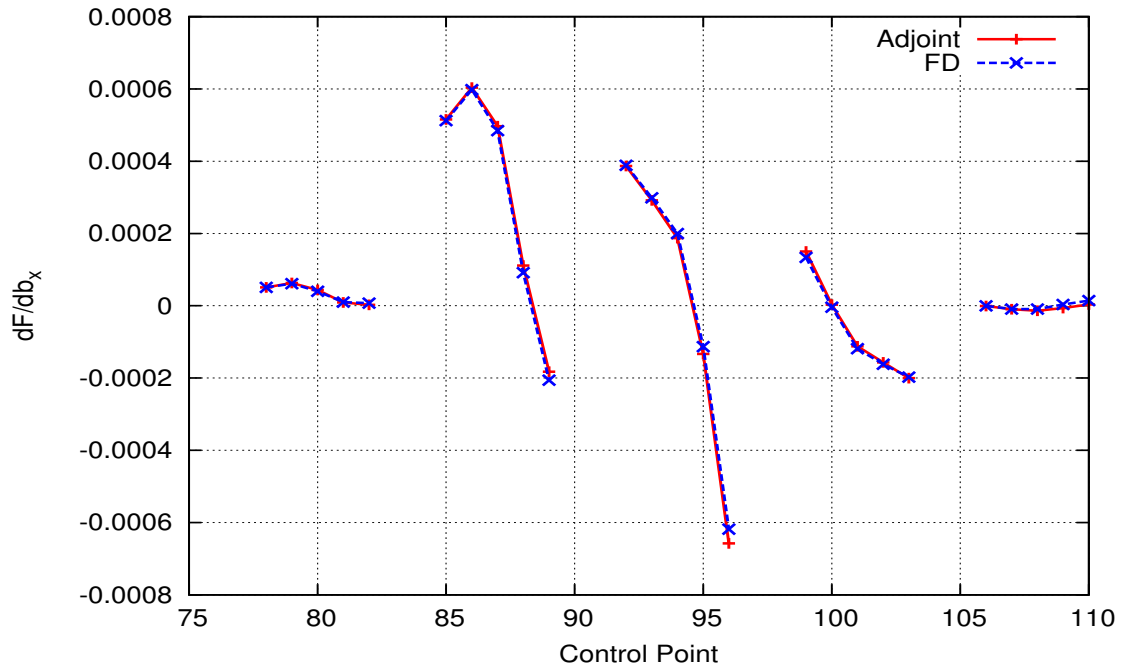
Στον πίνακα που ακολουθεί υπάρχουν οι τιμές των παραγώγων της συνάρτησης-στόχου προς τις στοχαστικές μεταβλητές (μέτρο της ταχύτητας στην είσοδο, γωνία εισόδου της ροής). Παρατηρείται, πρακτικά, ταύτιση στις τιμές των παραγώγων, το μέγιστο σχετικό σφάλμα είναι κατά τον υπολογισμό της παραγώγου $\frac{\delta F}{\delta |v|}$ με τιμή -1,5%.

Παράγωγοι ως προς c_{μ}	Παράγωγοι με FD	Παράγωγοι με τη Συζυγή Μέθοδο
$\frac{\delta F}{\delta v_{in} }$	$5.345 \cdot 10^{-4}$	$5.266 \cdot 10^{-4}$
$\frac{\delta F}{\delta a_{in}}$	$1.340 \cdot 10^{-2}$	$1.343 \cdot 10^{-2}$

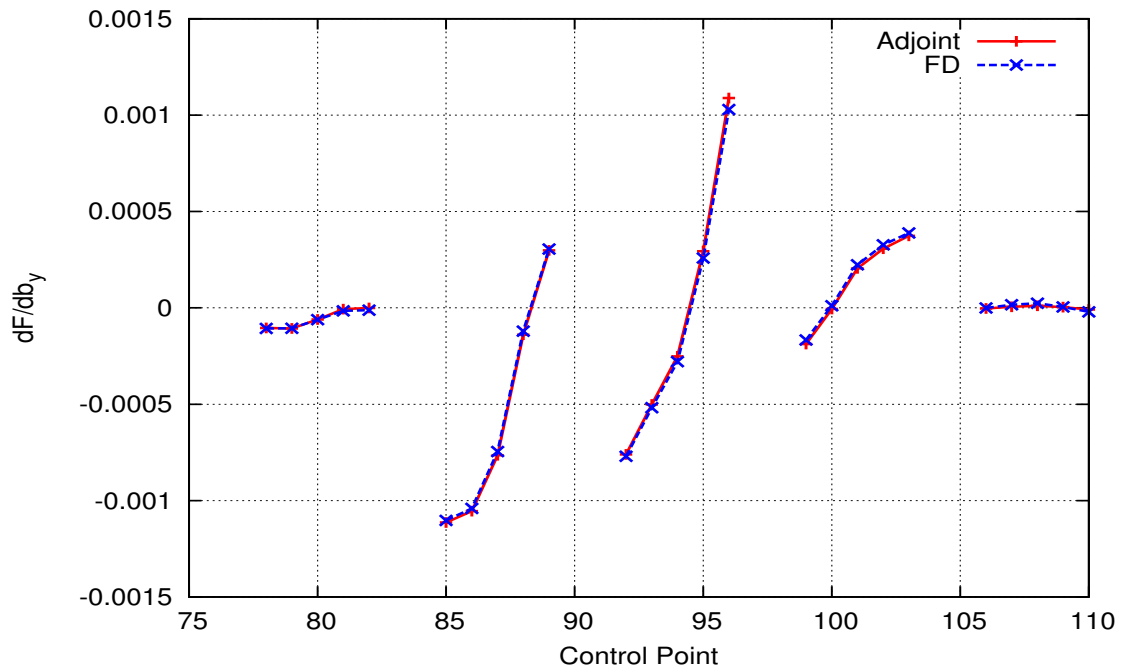
Πίνακας 6.1: Παράγωγοι ως προς τις στοχαστικές μεταβλητές με πεπερασμένες διαφορές και τη συνεχή συζυγή μέθοδο για την περυγώση της NACA-12.

6.3 Πιστοποίηση Παραγώγων ως προς τις Μεταβλητές Σχεδιασμού

Τα ενεργά σημεία ελέγχου είναι 25, συνεπώς οι μεταβλητές σχεδιασμού είναι 50 στο διδιάστατο επίπεδο (κίνηση κατά x και y). Όπως φαίνεται στα σχήματα 6.2, 6.3 οι παράγωγοι $\frac{\delta F}{\delta b_m}$ που υπολογίζονται με τη συζυγή μέθοδο και με τις πεπερασμένες διαφορές δεύτερης τάξης είναι σχεδόν ταυτόσημες. Επομένως, όλες οι πρώτες παράγωγοι (και ως προς c και ως b) που υπολογίζονται μέσω της συνεχούς συζυγούς μεθόδου κρίνονται ως πολύ αξιόπιστες,



Σχήμα 6.2: Παράγωγοι $\frac{\delta F}{\delta b_x}$ υπολογισμένες με πεπερασμένες διαφορές και τη συζυγή μέθοδο για την περύγωση της NACA-12.



Σχήμα 6.3: Παράγωγοι $\frac{\delta F}{\delta b_y}$ υπολογισμένες με πεπερασμένες διαφορές και τη συζυγή μέθοδο για την περύγωση της NACA-12.

6.4 Πιστοποίηση b-c Μεικτών Παραγώγων επί Διάνυσμα

Έχοντας πιστοποιήσει τα αποτελέσματα για τις πρώτες παραγώγους απομένει η εξακρίβωση των αποτελεσμάτων για τις δεύτερες. Η μέθοδος του p-FOSM υπολογίζει απευθείας τις b-c μεικτές παραγώγους επί διάνυσμα (παρουσιάστηκε αναλυτικά στο κεφάλαιο 3, σχέση (3.4)). Για τη σύγκριση των ποσοτήτων του όρου $\frac{\delta^2 F}{\delta b_m \delta c_\mu} z_\mu$, αρχικά χρησιμοποιούνται πεπερασμένες διαφορές δεύτερης τάξης για να υπολογιστούν οι b-c μεικτές παράγωγοι (για κάθε μια από τις στοχαστικές μεταβλητές ξεχωριστά),

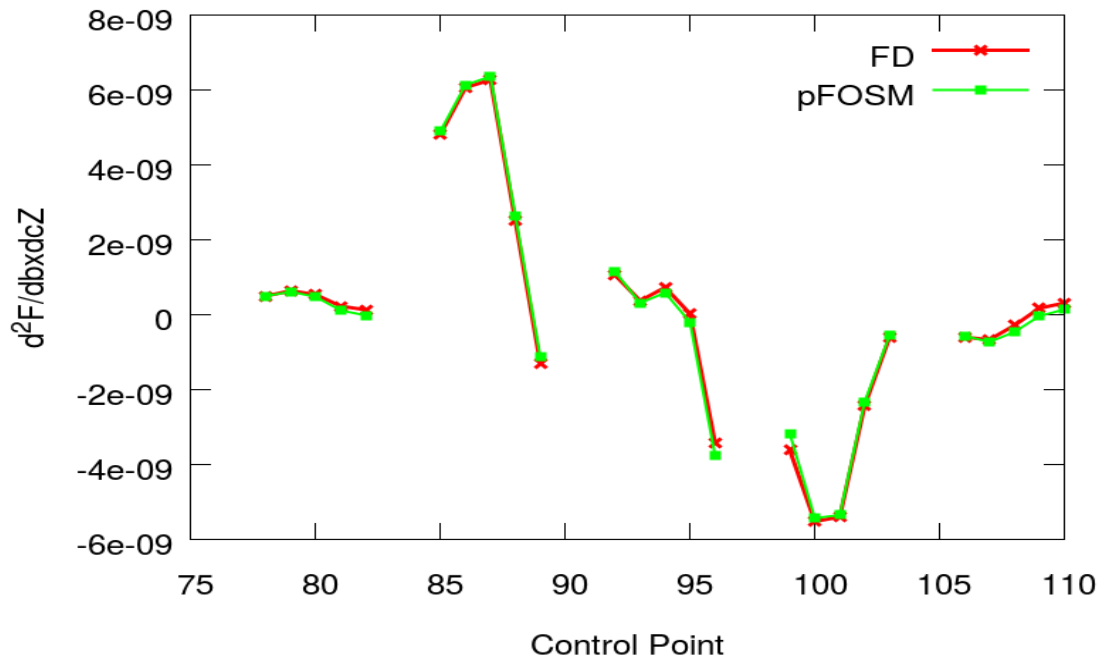
$$\frac{\delta^2 F}{\delta b_m \delta c_\mu} = \frac{F(b_m + \varepsilon_i, c_\mu + \varepsilon_j) - F(b_m - \varepsilon_i, c_\mu + \varepsilon_j) - F(b_m + \varepsilon_i, c_\mu - \varepsilon_j) + F(b_m - \varepsilon_i, c_\mu - \varepsilon_j)}{4\varepsilon_i \varepsilon_j} \quad (6.2)$$

και, στη συνέχεια, γίνεται η άθροιση σύμφωνα με τη σχέση

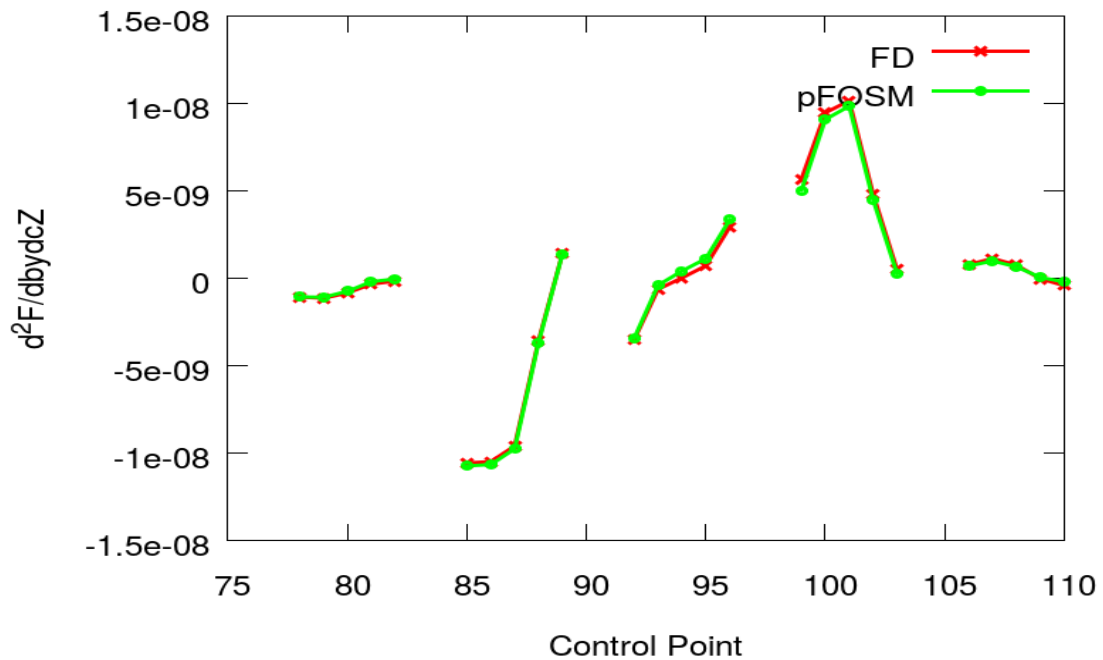
$$\frac{\delta^2 F}{\delta b_m \delta c_\mu} z_\mu = \frac{\delta^2 F}{\delta b_m \delta c_1} z_1 + \frac{\delta^2 F}{\delta b_m \delta c_2} z_2 = \frac{\delta^2 F}{\delta b_m \delta |v|} \left[\frac{\delta F}{\delta |v|} \sigma_{|v|}^2 \right] + \frac{\delta^2 F}{\delta b_m \delta a} \left[\frac{\delta F}{\delta a} \sigma_a^2 \right] \quad (6.3)$$

Οι συνιστώσες του διανύσματος $\mathbf{z} = \left[\frac{\delta F}{\delta |v|} \sigma_{|v|}^2 \quad \frac{\delta F}{\delta a} \sigma_a^2 \right]$ υπολογίζονται με ακρίβεια, διότι αποτελούνται από τις πρώτες παραγώγους της F ως προς τις στοχαστικές μεταβλητές (πίνακας 8.1) επί την τυπική απόκλιση των αβέβαιων μεταβλητών $\sigma_{|v|_{inlet}} = 0.1 m/s$ και $\sigma_{a_{inlet}} = 0.01 rad = 0.573^\circ$.

Τα αποτελέσματα της σύγκρισης των b-c μεικτών παραγώγων επί διάνυσμα με τη μέθοδο του pFOSM και με τις πεπερασμένες διαφορές παρουσιάζονται στα σχήματα 6.4 και 6.5.



Σχήμα 6.4: Παράγωγοι $\frac{\delta^2 F}{\delta b_x \delta c_z}$ υπολογισμένες με πεπερασμένες διαφορές και με τη συζυγή μέθοδο.



Σχήμα 6.5: Παράγωγοι $\frac{\delta^2 F}{\delta b_y \delta c_z}$ υπολογισμένες με πεπερασμένες διαφορές και με τη συζυγή μέθοδο.

Είναι εμφανές ότι τα αποτελέσματα είναι εξαιρετικά "κοντά" μεταξύ τους, γεγονός που αποδεικνύει την ακρίβεια με την οποία υπολογίζονται και οι δεύτερες b-c μεικτές παράγωγοι. Έχοντας πλέον αποδείξει ότι όλες οι αναγκαίες για τη βελτιστοποίηση παράγωγοι υπολογίζονται με ακρίβεια στην αρχική γεωμετρία, συνάγεται ότι και η διαδικασία βελτιστοποίηση που θα ακολουθήσει γίνεται με ορθά "μέσα".

6.5 Υπολογισμός Μέσης Τιμής και Τυπικής Απόκλισης

Η μέθοδος FOSM υπολογίζει τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση της συνάρτησης-στόχου χρησιμοποιώντας μόνο τους όρους πρώτης τάξης σχέση (1.3). Για εξακρίβωση της ακρίβειας υπολογισμού της μέσης τιμής και της τυπικής απόκλισης, γίνεται σύγκριση των αποτελεσμάτων του FOSM με αυτά του κώδικα του μη-επεμβατικού αναπτύγματος πολυωνυμικού χάους $1^{ηs}$ και $2^{ηs}$ τάξης (Non-Intrusive Polynomial Chaos). Το μη-επεμβατικό ανάπτυγμα πολυωνυμικού χάους (niPCE) $2^{ηs}$ τάξης έχει επαληθευθεί ότι παρέχει αξιόπιστα αποτελέσματα [6].

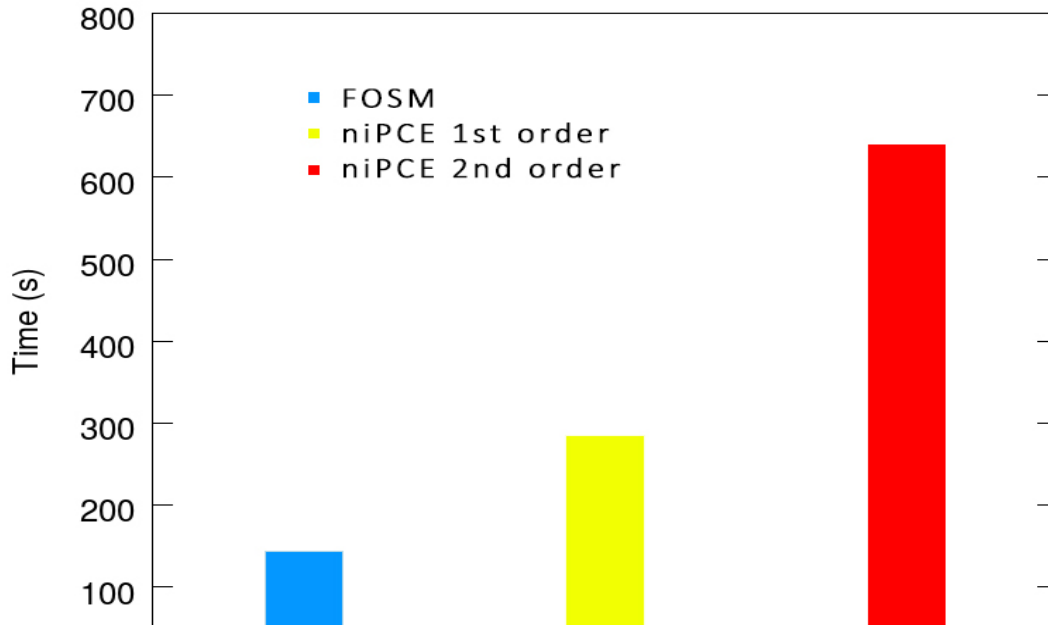
Στοχαστική μέθοδος	Μέση τιμή μ_F	Τυπική απόκλιση σ_F
FOSM	$1.1063 \cdot 10^{-3}$	$1.4474 \cdot 10^{-4}$
niPCE 1 st order	$1.1148 \cdot 10^{-3}$	$1.4475 \cdot 10^{-4}$
niPCE 2 nd order	$1.11482 \cdot 10^{-3}$	$1.4660 \cdot 10^{-4}$

Πίνακας 6.2: Σύγκριση μέσης τιμής και τυπικής απόκλισης συνάρτησης-στόχου με FOSM, niPCE $1^{ηs}$ τάξης, και niPCE $2^{ηs}$ τάξης για την περύγωση της NACA-12.

Τα αποτελέσματα των τριών μεθόδων κρίνονται ότι βρίσκονται εξαιρετικά "κοντά" μεταξύ τους. Παρά το γεγονός ότι η μέθοδος του FOSM είναι μέθοδος πρώτης τάξης, υπολογίζει τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση με μεγάλη ακρίβεια, συγκρίνοντας τα αποτελέσματα με μια πιστοποιημένη μέθοδο δεύτερης τάξης (niPCE $2^{ηs}$ τάξης). Ενώ το υπολογιστικό κόστος του FOSM, όπως θα φανεί και παρακάτω είναι σαφώς μικρότερο από αυτό των άλλων δύο niPCE μεθόδων.

Στο σχήμα 6.6 γίνεται σύγκριση του χρόνου που απαιτεί η κάθε μέθοδος για υπολογισμούς μέσης τιμής και τυπικής απόκλισης. Εδώ πρέπει να σημειωθεί ότι η μέθοδος του FOSM απαιτεί σταθερό χρόνο για τον υπολογισμό της μ_F και σ_F , ανεξαρτήτως του αριθμού των στοχαστικών μεταβλητών, σε αντίθεση με το niPCE, όπου το υπολογιστικό κόστος αυξάνει σημαντικά με την αύξηση των στοχαστικών

μεταβλητών. Ήδη, με τις 2 στοχαστικές μεταβλητές, η μέθοδος του FOSM (απαιτεί μια επίλυση του πρωτεύοντος και μια επίλυση του συζυγούς προβλήματος) είναι 2 φορές πιο γρήγορο από τη μέθοδο του niPCE 1^{ης} τάξης (απαιτεί 4 επιλύσεις της ροής) και 4,5 φορές από το niPCE 2^{ης} τάξης (απαιτεί 9 επιλύσεις της ροής). Όσο αυξάνει ο αριθμός των στοχαστικών μεταβλητών, αυξάνει και το συγκριτικό κέρδος (σε υπολογιστικό κόστος) από τη χρήση της μεθόδου του FOSM.



Σχήμα 6.6: Χρόνος υπολογισμού μέσης τιμής και τυπικής απόκλισης με FOSM, niPCE 1st order niPCE 2nd order για δύο στοχαστικές μεταβλητές για την περύγωση της NACA-12.

6.6 Υπολογισμός Μέσης Τιμής και Τυπικής Απόκλισης με Πεπερασμένες Διαφορές για τη Μέθοδο του SOSM

Στο προηγούμενο υποκεφάλαιο, έγινε παράθεση αποτελεσμάτων για τον υπολογισμό μέσης τιμής και τυπικής απόκλισης χρησιμοποιώντας τη μη-επεμβατική μέθοδο του αναπτύγματος πολυωνυμικού χάους 1^{ης} και 2^{ης} τάξης. Στο παρόν, θα γίνει σύγκριση μεταξύ των μεθόδων: πρώτης τάξης δεύτερων στατιστικών ροπών και δεύτερης τάξης δεύτερων στατιστικών ροπών (FOSM έναντι

SOSM). Να σημειωθεί, ότι δεν εφαρμόζεται η μέθοδος του SOSM, αλλά οι τύποι της μεθόδου με πεπερασμένες διαφορές.

Στο SOSM, στην ουσία προστίθενται στους τύπους υπολογισμού μέσης τιμής και τυπικής απόκλισης και οι δεύτεροι όροι του αναπτύγματος Taylor. Με τις σχέσεις να είναι

$$\mu_F \simeq F|_{\bar{c}} + \frac{1}{2} \sum_{\mu=1}^M \left[\frac{\delta^2 F}{\delta c_\mu^2} \right]_{\bar{c}} \sigma_\mu^2 = F|_{\bar{c}} + \frac{1}{2} \left[\frac{\delta^2 F}{\delta c_\mu^2} \right]_{\bar{c}} \sigma_\mu^2 \quad (6.4)$$

$$\sigma_F \simeq \sqrt{\sum_{\mu=1}^M \sum_{k=1}^M \left\{ \left[\frac{\delta F}{\delta c_\mu} \right]_{\bar{c}}^2 \sigma_\mu^2 + \frac{1}{2} \left[\frac{\delta^2 F}{\delta c_\mu \delta c_k} \right]_{\bar{c}}^2 \sigma_\mu^2 \sigma_k^2 \right\}} = \sqrt{\left[\frac{\delta F}{\delta c_\mu} \right]_{\bar{c}}^2 \sigma_\mu^2 + \frac{1}{2} \left[\frac{\delta^2 F}{\delta c_\mu \delta c_k} \right]_{\bar{c}}^2 \sigma_\mu^2 \sigma_k^2} \quad (6.5)$$

Για τον υπολογισμό των δύο επιπρόσθετων όρων δεύτερης τάξης χρησιμοποιούνται πεπερασμένες διαφορές, μιας και ο υπολογισμός τους γίνεται ενδεικτικά για λόγους σύγκρισης.

Για δύο στοχαστικές μεταβλητές το συμμετρικό μητρώο γράφεται ως

$$\frac{\delta^2 F}{\delta c_\mu \delta c_k} = \begin{bmatrix} \frac{\delta^2 F}{\delta^2 |v_{in}|} & \frac{\delta^2 F}{\delta |v_{in}| \delta a_{in}} \\ \frac{\delta^2 F}{\delta a_{in} \delta |v_{in}|} & \frac{\delta^2 F}{\delta^2 a_{in}} \end{bmatrix} \quad (6.6)$$

Για τις δεύτερες ορθές παραγώγους χρησιμοποιείται ο τύπος των κεντρικών διαφορών

$$\frac{\delta^2 F}{\delta^2 c_m} = \frac{F_{c_m+\varepsilon} - 2F_{c_m} + F_{c_m-\varepsilon}}{\varepsilon^2} \quad (6.7)$$

ενώ για τις μεικτές ισχύει η σχέση (6.2).

Τελικά προκύπτουν τα αποτελέσματα του πίνακα 6.3. Μεταξύ των μεθόδων παρατηρούνται ελαφρές αποκλίσεις, γεγονός που υποδεικνύει ότι στις παρούσες προσομοιώσεις οι πρώτης τάξης μέθοδοι υπολογίζουν με αρκετή αξιοπιστία μέση τιμή και τυπική απόκλιση. Βέβαια αυτό δεν συμβαίνει πάντα, εξαρτάται από την αντικειμενική συνάρτηση που επιλέγεται, τις στοχαστικές μεταβλητές και τη μεταξύ τους σχέση.

Στοχαστική μέθοδος	Μέση τιμή μ_F	Τυπική απόκλιση σ_F
FOSM	$1.1063 \cdot 10^{-3}$	$1.4474 \cdot 10^{-4}$
SOSM	$1.1207 \cdot 10^{-3}$	$1.4489 \cdot 10^{-4}$
niPCE 2 nd order	$1.11482 \cdot 10^{-3}$	$1.4660 \cdot 10^{-4}$

Πίνακας 6.3: Σύγκριση μέσης τιμής και τυπικής απόκλισης συνάρτησης-στόχου μεταξύ FOSM, SOSM και μη-επεματικού πολυωνυμικού χάους 2^{ης} τάξης για την προσομοίωση της NACA-12.

Κεφάλαιο 7

Βελτιστοποίηση Μορφής Αεροτομής 2Δ Πτερύγωσης με Αβεβαιότητες

Έχοντας υπολογίσει με ακρίβεια όλες τις αναγκαίες παραγώγους, είναι δυνατόν πλέον να διεξαχθεί βελτιστοποίηση μορφής σε πρόβλημα που οι συνθήκες της ροής στην είσοδο διέπονται από αβεβαιότητα, λαμβάνοντας όμως υπόψη, την επιθυμία του χρήστη να επιτυγχάνεται μια τελική γεωμετρία, η οποία να έχει και καλύτερη μέση τιμή αντικειμενικής συνάρτησης αλλά και τυπική απόκλιση. Διότι το επιθυμητό πάντα σενάριο σε ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης είναι οι μείωση και των δύο ποσοτήτων, παρ' όλα αυτά η πορεία που θα ακολουθήσει καθεμία από αυτές δεν είναι κατ' ανάγκη η ίδια. Αντικειμενική συνάρτηση της βελτιστοποίησης για τη συγκεκριμένη προσομοίωση είναι η γωνία εξόδου της ροής, στόχο δηλαδή, αποτελεί η έξοδος του ρευστού με γωνία όσο το δυνατόν πιο "κοντά" στη γωνία που ορίζει ο χρήστης.

7.1 Αποτελέσματα Βελτιστοποίησης

Επιλύοντας τη ροή στο OpenFOAM για την αρχική γεωμετρία υπολογίζεται ότι η μέση γωνία εξόδου της ροής είναι $\bar{\alpha}_{outlet} = 33.687^\circ$. Ως στόχος επιλέγεται γωνία εξόδου $\alpha_{outlet} = 31^\circ$, με απώτερο σκοπό την επίτευξη μεγαλύτερης συμπίεσης στη σταθερή πτερύγωση συμπίεστή. Τα δύο μεγέθη που εισάγουν τη αβεβαιότητα στο πρόβλημα είναι το μέτρο της ταχύτητας και η γωνία της ροής στην είσοδο, και τα δύο θεωρείται ότι ακολουθούν κανονική κατανομή, όπου $|V_{inlet}| = 1 \pm 3 \cdot 0.1m/s$ και $\alpha_{inlet} = 40 \pm 3 \cdot 0.57^\circ$.

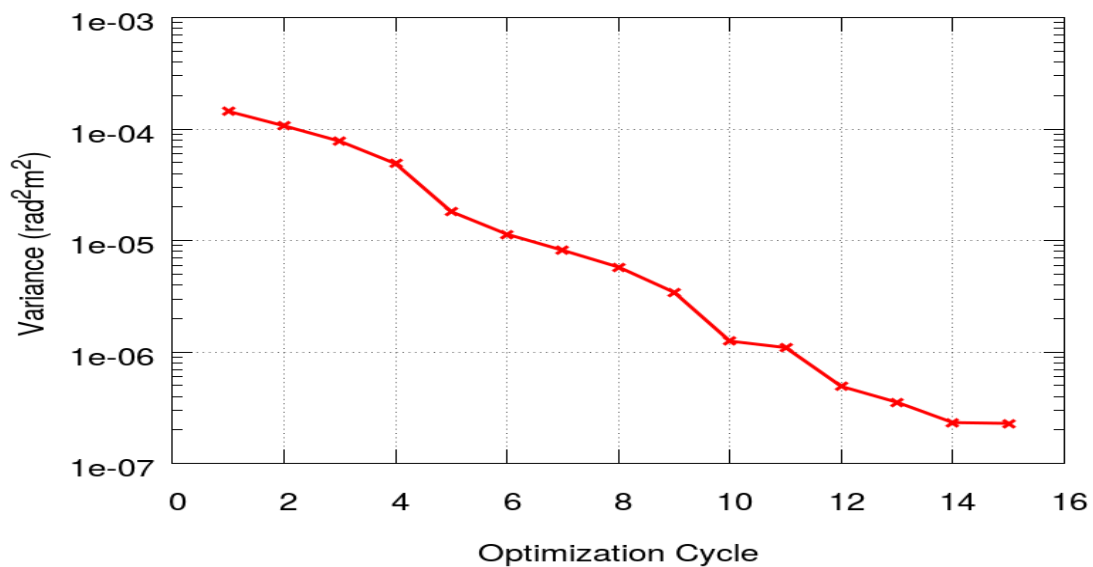
Η αντικειμενική συνάρτηση αεροδυναμικού σχεδιασμού υπό αβεβαιότητες για την οποία γίνεται η βελτιστοποίηση, επιλέγεται να δίνεται από τη σχέση (7.1), στην οποία ο χρήστης επιλέγει τις τιμές των συντελεστών w_1 και w_2 ανάλογα με τη βαρύτητα που θέλει να προσδώσει στις δύο ποσότητες, μέσης τιμής και τυπικής απόκλισης.

$$\hat{F} = w_1 \mu_F + w_2 \sigma_F \quad (7.1)$$

Πρώτα θα εξεταστεί η περίπτωση βαρών $w_1 = 0$ και $w_2 = 1$. Με την αντικειμενική συνάρτηση σιβαρού σχεδιασμού να αποτελείται πλέον μόνο από την τυπική απόκλιση. Η συγκεκριμένη επιλογή βαρών αντιστοιχεί στην περίπτωση που ο χρήστης θέλει να βελτιώσει μόνο την τιμή της τυπικής απόκλισης "αδιαφορώντας" για την πορεία που θα ακολουθήσει η μέση τιμή. Ως πρόβλημα δεν έχει τεχνικά ενδιαφέρον αλλά είναι μια εξαιρετική δοκιμή της προγραμματισθείσας μεθόδου. Τελικά, η αντικειμενική συνάρτηση σιβαρού αεροδυναμικού και η παράγωγός της ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού γράφεται

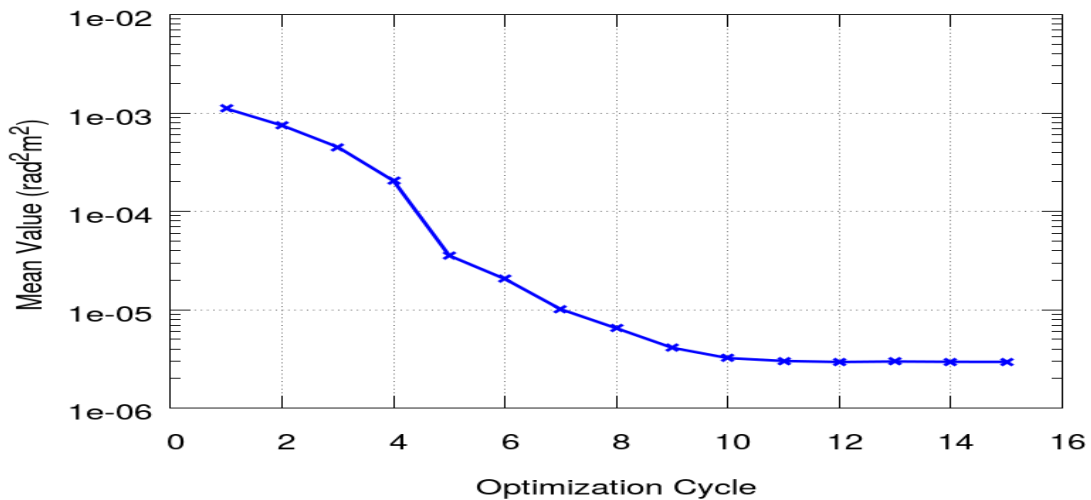
$$\hat{F} = \sigma_F, \quad \frac{\delta \hat{F}}{\delta b_m} = \frac{\delta \sigma_F}{\delta b_m} = \frac{\frac{\delta^2 F}{\delta b_m \delta c_\mu} z_\mu}{\sigma_F} \quad (7.2)$$

Η βελτιστοποίηση διήρκεσε 57 λεπτά "τρέχοντας" παράλληλα σε 4 επεξεργαστές Intel 64 bit @ 2.6GHz, μέσα σε αυτά τα λεπτά ολοκληρώθηκαν 15 κύκλοι βελτιστοποίησης. Τα αποτελέσματα για την πορεία της τιμής της τυπικής απόκλισης παρουσιάζονται στο σχήμα 7.1



Σχήμα 7.1: Ρυθμός σύγκλισης της τυπικής απόκλισης με αντικειμενική συνάρτηση μόνο την τυπική απόκλιση της F .

Μέσα σε 15 κύκλους, σημειώθηκε πτώση της τιμής της τυπικής απόκλισης κατά τρεις τάξεις μεγέθους από $1.44 \cdot 10^{-4}$ σε $2.29 \cdot 10^{-7}$. Η μείωση της τυπικής απόκλισης σε τόσο μεγάλο βαθμό σημαίνει ότι η τελική γεωμετρία είναι πλέον αεροδυναμικά πολύ πιο σταθερή από την αρχική. Δηλαδή, μπορεί τα μέτρο και η γωνία της ταχύτητας στην είσοδο να μεταβάλλονται (λόγω αβεβαιότητας) αλλά στη τελική βελτιστοποιημένη γεωμετρία έχει προκύψει κατανομή τιμής αντικειμενικής συνάρτησης πολύ πιο "μαζεμένη" γύρω από τη μέση τιμή. Η πορεία μέσης τιμής που προκύπτει κατά τη διάρκεια της βελτιστοποίησης, παρουσιάζεται στο σχήμα 7.2



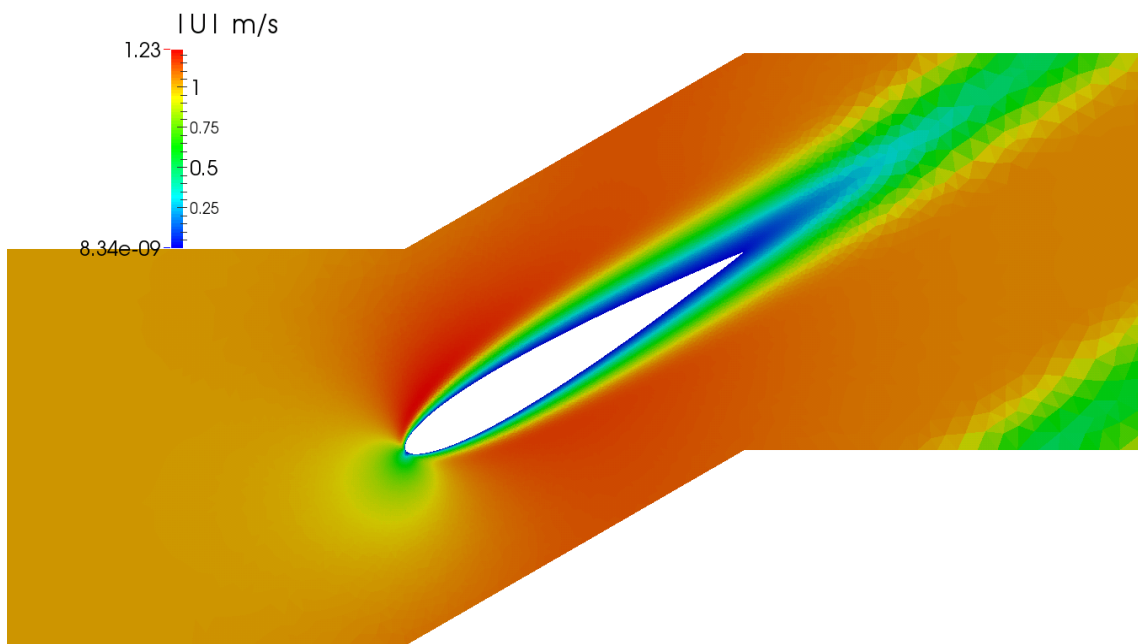
Σχήμα 7.2: Διάγραμμα μέσης τιμής με αντικειμενική συνάρτηση μόνο την τυπική απόκλιση της F .

Τα αποτελέσματα του σχήματος 7.2 για τη μέση τιμή, υποδηλώνουν ότι η τελική γεωμετρία έχει και πολύ καλύτερη μέση τιμή. Αν τεθεί ότι το προφίλ των διανυσμάτων των ταχυτήτων στην έξοδο είναι σταθερό, μπορεί να υπολογιστεί μια "μέση" γωνία εξόδου (που θα έδινε την ίδια τιμή αντικειμενικής συνάρτησης), σύμφωνα με τη σχέση

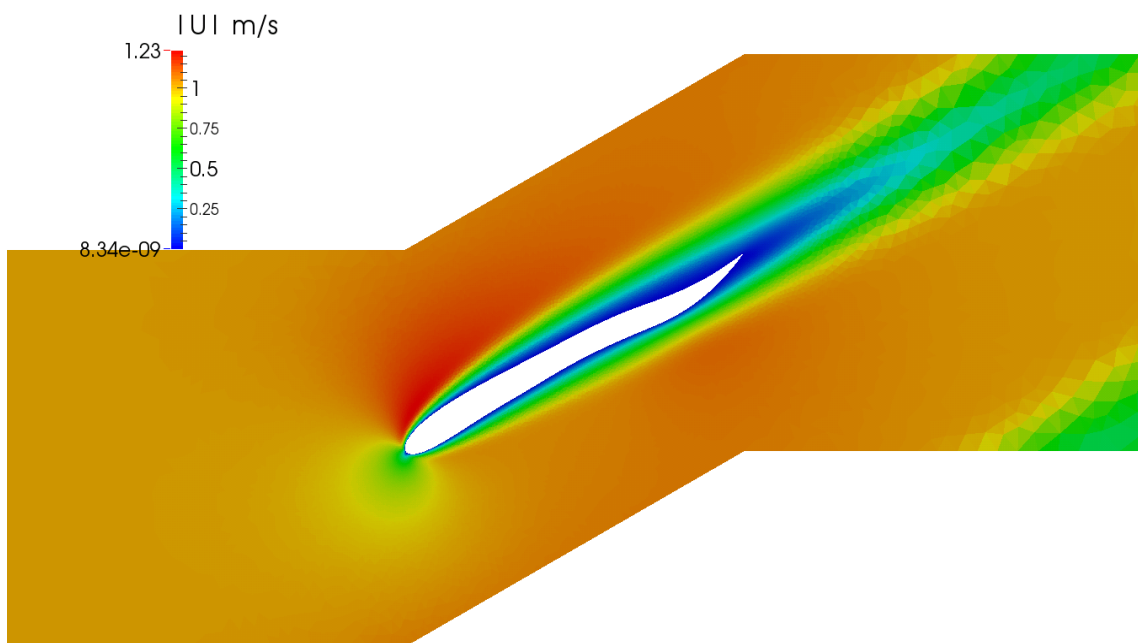
$$F = \frac{1}{2} \int_{S_{out}} (\hat{a} - a_{tar})^2 dS \Rightarrow \hat{a} = a_{tar} + \sqrt{\frac{2F}{S_{out}}} \quad (7.3)$$

Εφαρμόζοντας τη σχέση 7.3, η μέση γωνία εξόδου της τελικής γεωμετρίας είναι $\hat{a} = 31.172^\circ$, πολύ κοντά στον στόχο $a_{tar} = 31^\circ$.

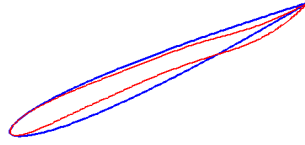
Οι γεωμετρίες του 1 και 15 κύκλου μαζί με τις αντίστοιχες κατανομές ταχυτήτων παρουσιάζονται στα σχήματα 7.3, 7.4 και 7.5.



Σχήμα 7.3: Γεωμετρία και πεδίο ταχύτητας για τον 1^0 κύκλο βελτιστοποίησης με $w_1 = 0, w_2 = 1$.



Σχήμα 7.4: Γεωμετρία και πεδίο ταχύτητας για τον 15^0 κύκλο βελτιστοποίησης με $w_1 = 0, w_2 = 1$.



Σχήμα 7.5: Περίγραμμα της περιύγωσης της αεροτομής της NACA-12 για τον 1° και 15° κύκλο βελτιστοποίησης με $w_1 = 0, w_2 = 1$.

Αν και ένα τέτοιο αποτέλεσμα φαντάζει ιδανικό με τελική γεωμετρία που χαρακτηρίζεται από πολύ καλή μέση τιμή και τυπική απόκλιση, στην πραγματικότητα έτσι αναιρείται ο λόγος ύπαρξης διαφορετικών βαρών (στη συγκεκριμένη πάντα προσομοίωση). Ενώ λοιπόν, η βαρύτητα δίνεται αποκλειστικά στην τυπική απόκλιση και η παράγωγός της καθορίζει την πορεία της βελτιστοποίησης, βελτιστοποιείται σημαντικά και η μέση τιμή.

Αντιστρέφοντας τις τιμές των βαρών σε $w_1 = 1$ και $w_2 = 0$, σχηματίζεται αντικειμενική συνάρτηση σιβαρού αεροδυναμικού σχεδιασμού που αποτελείται μόνο από τη μέση τιμή της F . Αυτή και η παράγωγός της δίνονται

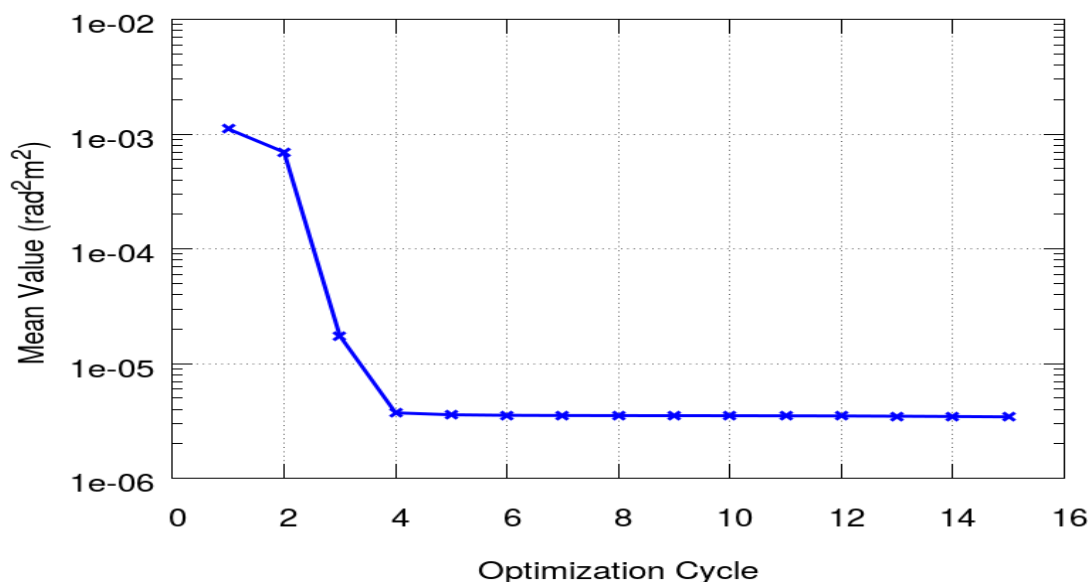
$$\hat{F} = \mu_F, \quad \frac{\delta \hat{F}}{\delta b_m} = \frac{\delta \mu_F}{\delta b_m} = \frac{\delta F}{\delta b_m} \quad (7.4)$$

Στην περίπτωση όπως εδώ, που διεξάγεται βελτιστοποίηση μόνο για τη μέση τιμή υπάρχει ταύτιση με τη βελτιστοποίηση που γίνεται και σε ένα "κλασικό" πρόβλημα, στο οποίο δεν υφίσταται η έννοια της αβεβαιότητας. Αυτό ισχύει διότι, στη μέθοδο του FOSM, η μέση τιμή και η παράγωγός της κατ' επέκταση, δεν λαμβάνουν υπόψη τους την αβεβαιότητα του προβλήματος. Αφού, η μέση τιμή ισούται με την τιμή της αντικειμενική συνάρτησης υπολογισμένης στη μέση τιμή των αβέβαιων μεταβλητών

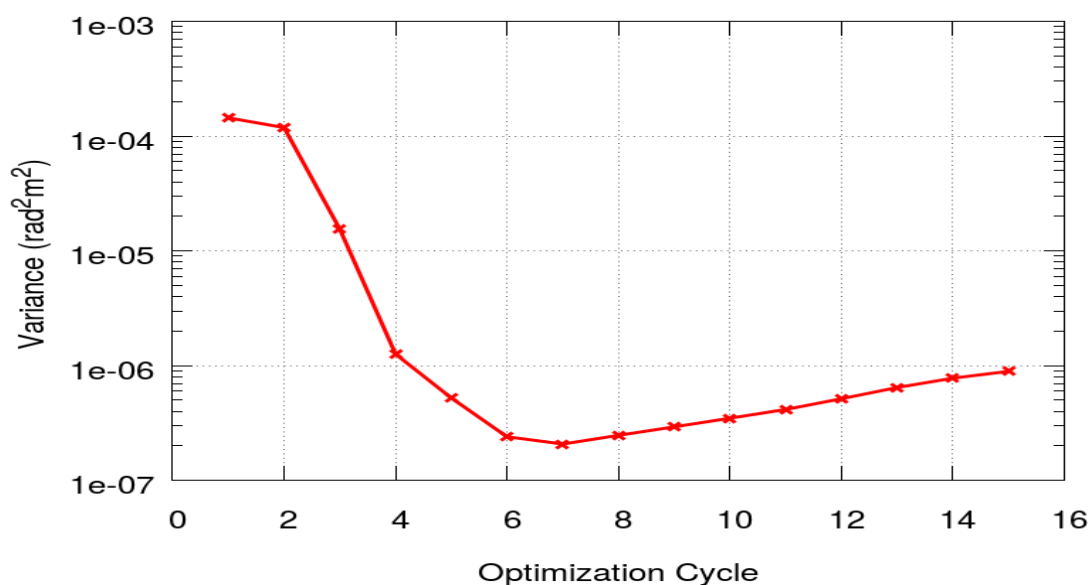
$$\mu_F \simeq F|_{\bar{\epsilon}} \quad (7.5)$$

Εν αντιθέσει, στη μέθοδο του SOSM σχέση 6.4 ο δεύτερος όρος του αναπτύγματος Taylor εισάγει την ύπαρξη στοχαστικότητας στον υπολογισμό της μέσης τιμής.

Η βελτιστοποίηση αυτή χρειάστηκε σχεδόν το μισό χρόνο (30 λεπτά) σε σχέση με την προηγούμενη (στον ίδιο αριθμό και τύπο επεξεργασιών), από τη στιγμή που εδώ δεν απαιτείται η επίλυση των εξισώσεων των προβολών. Τα αποτελέσματα για τη πορεία των δύο μεγεθών παρουσιάζονται στα σχήματα 7.6 και 7.7

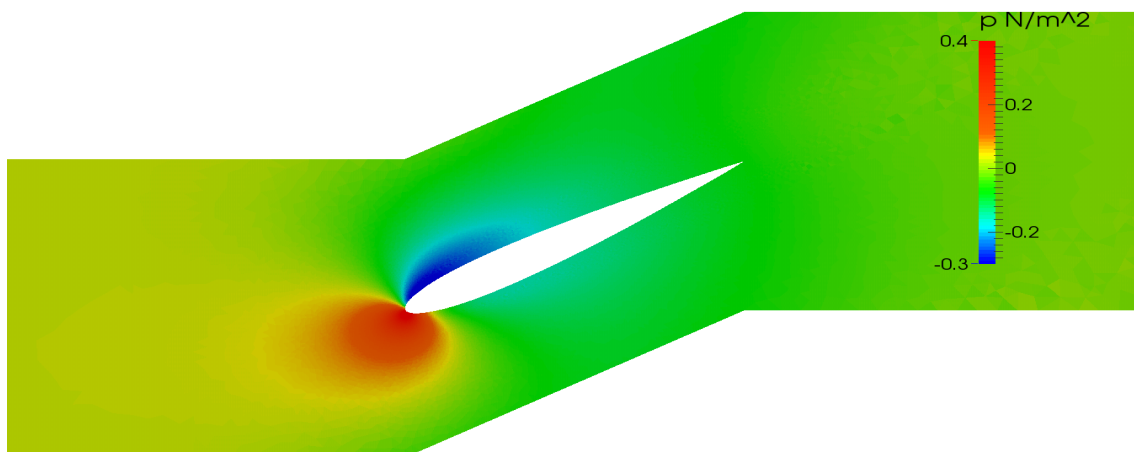


Σχήμα 7.6: Διάγραμμα σύγκλισης μέσης τιμής, βελτιστοποιώντας την περιύψωση της αεροτομής της NACA-12 με αντικειμενική συνάρτηση μόνο τη μέση τιμή της F .

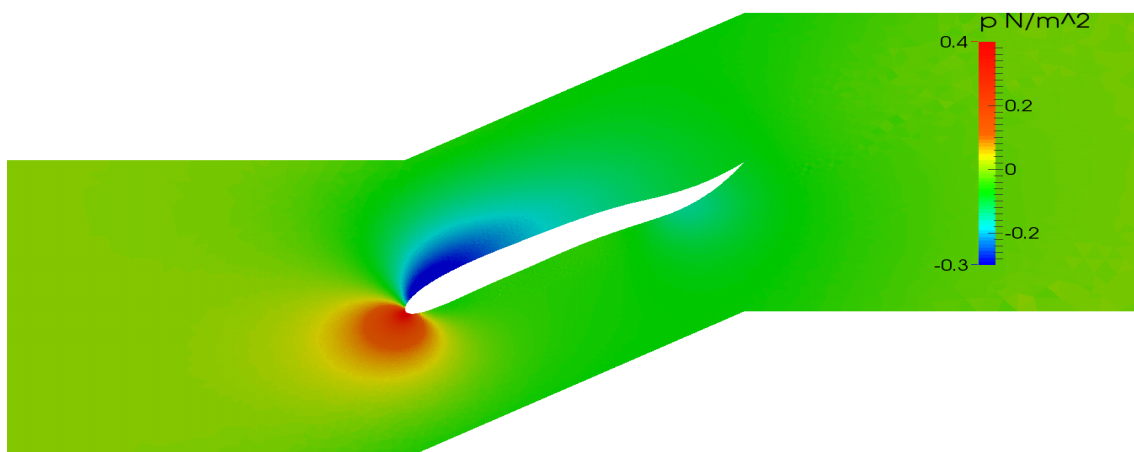


Σχήμα 7.7: Διάγραμμα τυπικής απόκλισης, βελτιστοποιώντας την περιύψωση της αεροτομής της NACA-12 με αντικειμενική συνάρτηση μόνο τη μέση τιμή της F .

Όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα, η τελική γεωμετρία έχει καλύτερη μέση τιμή (από την αρχική), η οποία υπήρξε ζητούμενο της βελτιστοποίησης, αλλά και καλύτερη τυπική απόκλιση. Στο σχήμα 7.7 διαφαίνεται ότι από τον 7^ο κύκλο και μετά η τυπική απόκλιση δεν βελτιώνεται, το οποίο δεν έρχεται σε αντίθεση με τις απαιτήσεις της βελτιστοποίησης που για το συγκεκριμένο παράδειγμα αφορούσαν μόνο τη μέση τιμή.



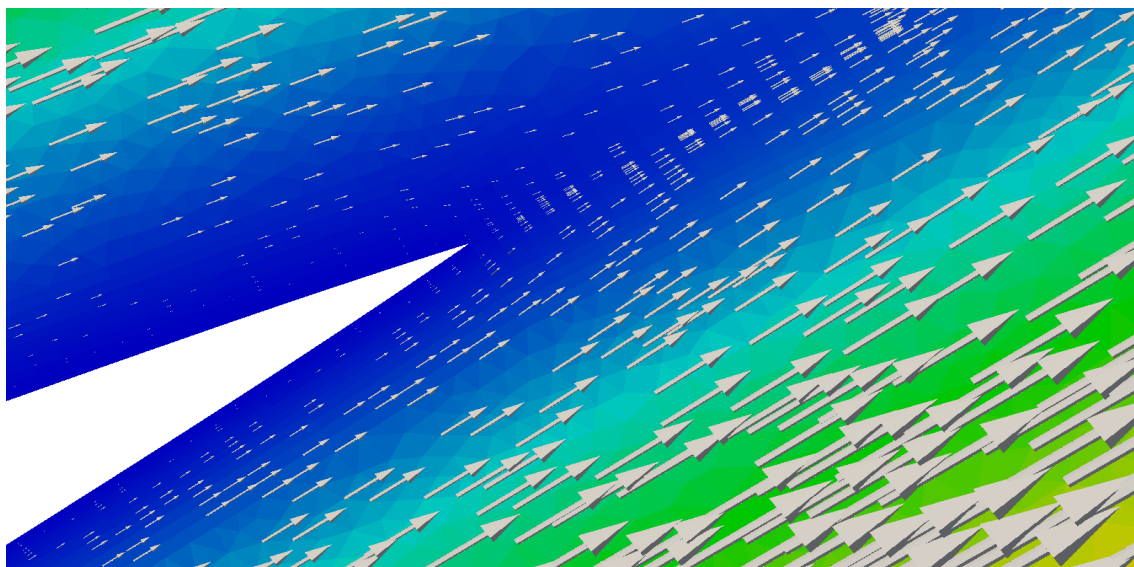
Σχήμα 7.8: Γεωμετρία και πεδίο πιέσεων στον 1^ο κύκλο βελτιστοποίησης και αντικειμενική συνάρτηση τη γωνία-στόχο.



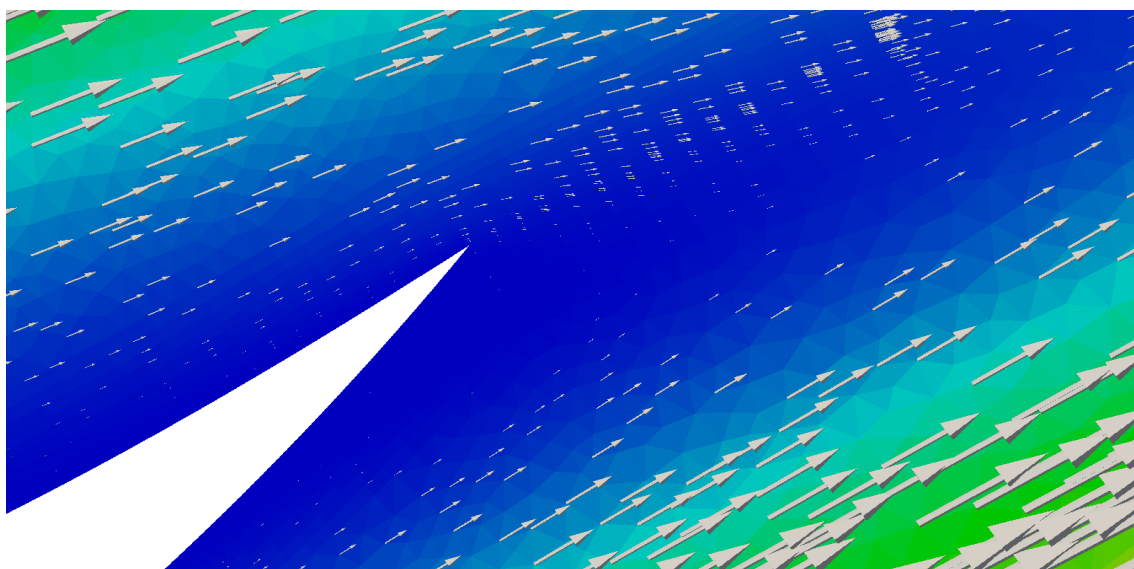
Σχήμα 7.9: Γεωμετρία και πεδίο πιέσεων στον 15^ο κύκλο βελτιστοποίησης.

Μια περίεργη αλλά και συνάμα ερμηνεύσιμη συμπεριφορά κατά τη βελτιστοποίηση είναι η τάση που παρατηρείται στο χείλος εκφυγής της αεροτομής, το οποίο αντί να καμπυλώνεται με κοιλότητα που να δείχνει προς τα κάτω (ώστε να καθοδηγήσει

την ροή σε πιο μικρή γωνία εξόδου από την αρχική), καμπυλώνεται ανάποδα. Αυτό συμβαίνει διότι έτσι το ρευστό της πλευράς υποπίεσης επιβραδύνει κοντά στο χείλος εκφυγής, η πίεση αυξάνει και γίνεται μεγαλύτερη από το αντίστοιχο κομμάτι της πλευράς υπερπίεσης, αυτή η διαφορά πίεσης (στο χείλος εκφυγής) ουσιαστικά ωθεί το ρευστό να στρίψει προς τα κάτω, και είναι ο φυσικός μηχανισμός που ακολουθεί η βελτιστοποίηση σχήμα 7.10.



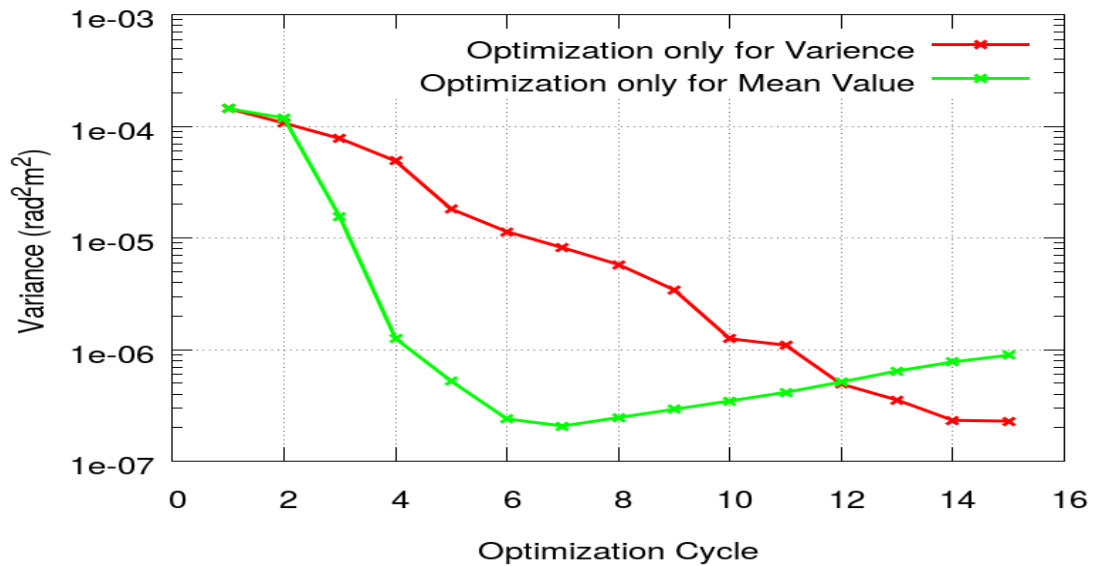
(α')



(β')

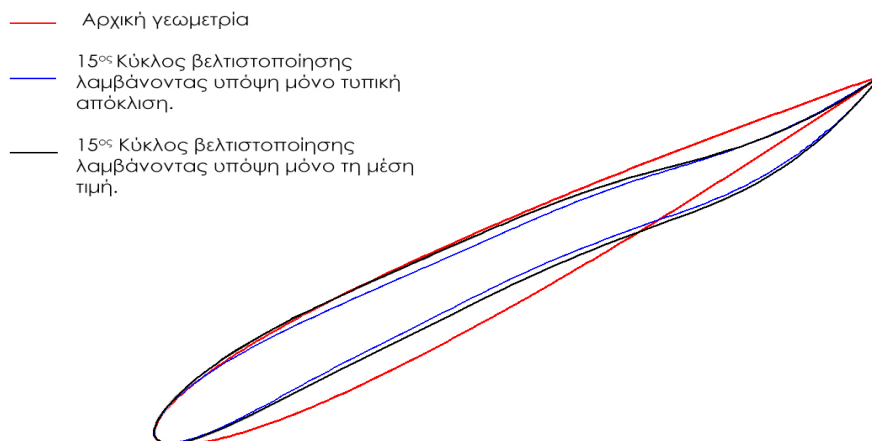
Σχήμα 7.10: Αεροτομή NACA-12: α) Διανύσματα ταχυτήτων 1^{ου} κύκλου βελτιστοποίησης β) Διανύσματα ταχυτήτων 15^{ου} κύκλου βελτιστοποίησης .

Αν συγκριθεί σε κοινό διάγραμμα η τυπική απόκλιση για τις δύο διαφορετικές επιλογές βαρών προκύπτει το παρακάτω σχήμα



Σχήμα 7.11: Διάγραμμα σύγκλισης τυπικής απόκλισης, βελτιστοποιώντας την περύγωση της αεροτομής της NACA-12 για δύο αντικειμενικές συναρτήσεις μια μόνο για τη μέση τιμή της F , και μια μόνο για την τυπική της απόκλιση.

Στο σχήμα 7.11 φαίνεται ότι υπάρχει διαφοροποίηση για την τελική τυπική απόκλιση που επιτυγχάνεται, όταν η βελτιστοποίηση λαμβάνει υπόψη της μόνο την τυπική απόκλιση η τελική τιμή είναι καλύτερη και η σύγκλιση συνεχής.



Σχήμα 7.12: Σύγκριση σχημάτων ανάμεσα στο 1^ο και 15^ο κύκλο βελτιστοποίησης για την περύγωση της αεροτομής της NACA-12.

Οι τελικές γεωμετρίες παρουσιάζονται στο σχήμα 7.12 φαίνεται ακολουθούν το ίδιο γεωμετρικό μοτίβο με την χαρακτηριστική καμπυλότητα στο χείλος εκφυγής, η μόνη ουσιαστική διαφοροποίηση βρίσκεται στο πάχος της αεροτομής.

Κεφάλαιο 8

Βελτιστοποίηση Αγωγού Σχήματος S για Ελαχιστοποίηση Απωλειών Ολικής Πίεσης

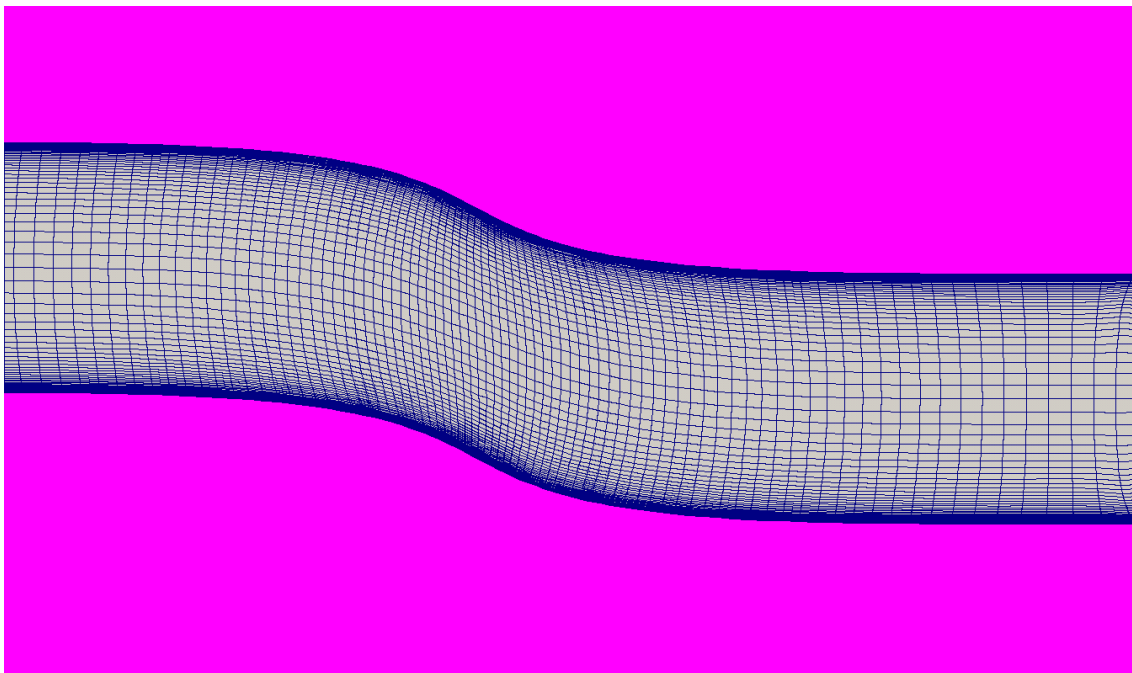
Σε αυτό το κεφάλαιο παρατίθενται αποτελέσματα βελτιστοποίησης μορφής αγωγού σχήματος S, με παράλληλα αλλά μετατοπισμένα ευθεία τμήματα εισόδου και εξόδου της ροής. Υιοθετείται νέα αντικειμενική συνάρτηση (απώλειες ολικής πίεσης) για την οποία πραγματοποιείται η νέα μαθηματική διατύπωση της προτεινόμενης μεθόδου και η πιστοποίηση των παραγώγων που υπολογίζονται.

8.1 Στοιχεία Προσομοίωσης Αγωγού Σχήματος S

Στην προσπάθεια πιστοποίησης των αποτελεσμάτων του κώδικα του pFOSM στο OpenFOAM, χρησιμοποιείται μια διαφορετική αντικειμενική συνάρτηση, αυτή των απωλειών ολικής πίεσης μεταξύ της εισόδου και της εξόδου του αγωγού. Η προσομοίωση γίνεται σε διδιάστατο αγωγό μήκους $l = 6.82m$ με σταθερό πλάτος $d = 0.38m$. Ως προς τα στοιχεία της ροής, η ταχύτητα εισόδου έχει συνιστώσα μόνο κατά τη διεύθυνση x , με μέτρο $|u|_{inlet} = 0.0394m/s$, ενώ η κινηματική συνεκτικότητα έχει τιμή $\nu = 1.5 \cdot 10^{-5}m^2/s$.

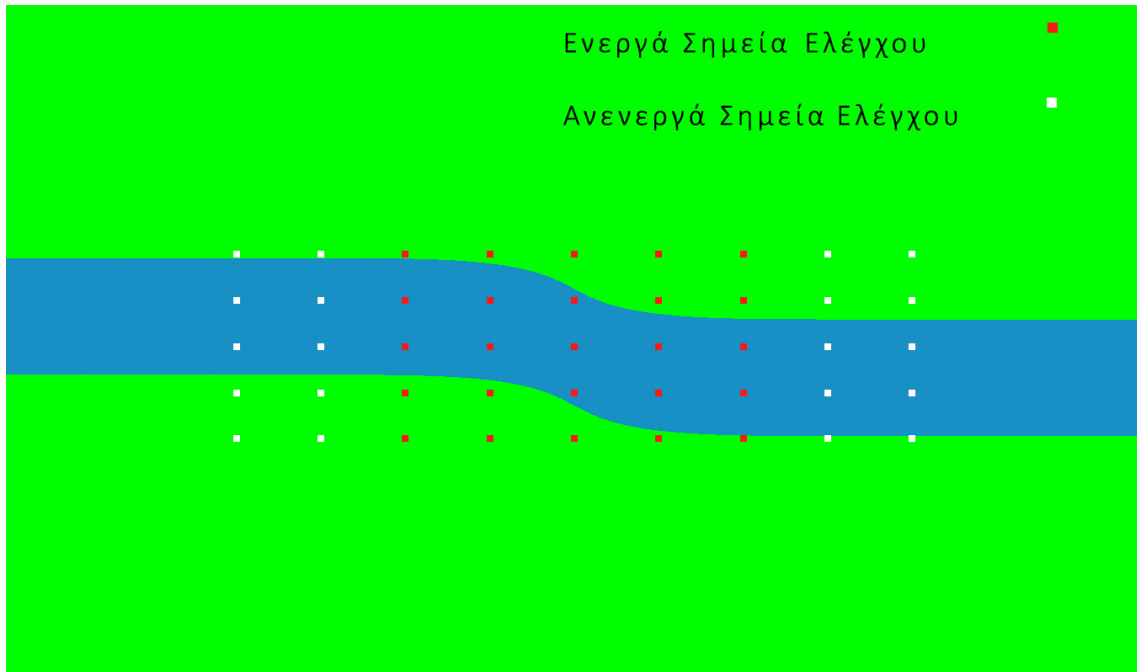
Το πλέγμα αποτελείται από 24000 κυψέλες, είναι δομημένο με πολύ καλή πύκνωση κοντά στα τοιχώματα, ούτως ώστε, να επιτυγχάνεται κατάλληλη ακρίβεια για το στρωτό οριακό στρώμα. Δημιουργήθηκε, χρησιμοποιώντας λογισμικό που

έχει αναπτυχθεί στη ΜΠΥΡ&Β /ΕΜΠ.



Σχήμα 8.1: Υπολογιστικό πλέγμα για αγωγό σχήματος S.

Οι περιοχές της ροής στις οποίες εστιάζονται κατά κύριο λόγο οι απώλειες ολικής πίεσης, είναι τα σημεία στροφής του αγωγού. Σε εκείνη την περιοχή εστιάζει και η βελτιστοποίηση. Η παραμετροποίηση της γεωμετρίας γίνεται με τη χρήση ενός δομημένου πλέγματος ελέγχου που υλοποιεί την θεωρία των ογκομετρικών (Volumetric) B-Splines. Οι δύο πρώτες και δύο τελευταίες κατακόρυφες σειρές σημείων ελέγχου παραμένουν σταθερές, σχήμα 8.2, για να εξασφαλιστεί η συνέχεια παραγώγου της γεωμετρίας.



Σχήμα 8.2: Ενεργά και ανενεργά σημεία ελέγχου των Volumetric B-Splines για αγωγή σχήματος S .

8.2 Μαθηματική Διατύπωση

8.2.1 Αντικειμενική Συνάρτηση

Η αντικειμενική συνάρτηση ελαχιστοποίησης των ογκικά ολοκληρωμένων ολικών απωλειών πίεσης, δίνεται από τον τύπο

$$F = - \int_{S_{inlet}} \left(p + \frac{1}{2} v_i^2 \right) v_k n_k dS - \int_{S_{outlet}} \left(p + \frac{1}{2} v_i^2 \right) v_k n_k dS \quad (8.1)$$

και τα δύο επιφανειακά ολοκληρώματα της εισόδου και εξόδου έχουν ένα μείον μπροστά. Το μείον προέρχεται από τη σύμβαση του OpenFOAM σύμφωνα με την οποία το κάθετο διάνυσμα n_k έχει φορά από το γεωμετρικό όριο και προς τα έξω. Έτσι, επιτυγχάνεται η διαφορά ολικής πίεσης εισόδου-εξόδου ανηγμένη στην παροχή όγκου του ρευστού. Η διαφορά αυτή είναι μια θετική ποσότητα και στόχος της βελτιστοποίησης είναι η ελαχιστοποίησή της.

8.2.2 Οριακές Συνθήκες και Τελικές Εκφράσεις Παραγώγων

Για να υπολογιστούν παράγωγοι μιας οποιασδήποτε αντικειμενικής συνάρτησης, ακολουθείται η διαδικασία που αναπτύχθηκε στο Κεφάλαιο 2. Εν συντομία, δημιουργείται η επαυξημένη αντικειμενική συνάρτηση και παραγωγίζεται, σχέση (2.5), οι παράγωγοι των ογκικών ολοκληρωμάτων των εξισώσεων ροής επί τους πολλαπλασιαστές Lagrange είναι πάντα η ίδιες, (εφόσον δεν αλλάζουν οι εξισώσεις της ροής) αυτό που μεταβάλλεται είναι οι εκφράσεις των παραγώγων της εκάστοτε αντικειμενικής συνάρτησης. Για αντικειμενικές συναρτήσεις που ορίζονται ως επιφανειακά ολοκληρώματα (όπως εδώ), οι εκφράσεις των παραγώγων χρησιμοποιούνται για τη δημιουργία των οριακών συζυγών συνθηκών (με εξαίρεση τον 1^ο όρο της σχέσης 8.3).

Η παραγωγή της αντικειμενικής συνάρτησης ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού δίνει

$$\begin{aligned}
 \frac{\delta F}{\delta b_m} &= - \int_{S_{I,O}} \frac{\delta}{\delta b_m} \left(p + \frac{1}{2} v_i^2 \right) v_k n_k dS - \int_{S_{I,O}} \left(p + \frac{1}{2} v_i^2 \right) n_k \frac{\delta v_i}{\delta b_m} dS \\
 &= - \int_{S_{I,O}} \left[\left(p + \frac{1}{2} v_i^2 \right) n_i + v_i v_k n_k \right] \frac{\delta v_i}{\delta b_m} dS - \int_{S_{I,O}} v_i n_i \frac{\delta p}{\delta b_m} dS \\
 &= - \int_{S_I} \left[\left(p + \frac{1}{2} v_i^2 \right) n_i + v_i v_k n_k \right] \frac{\delta v_i}{\delta b_m} dS - \int_{S_O} \left[\left(p + \frac{1}{2} v_i^2 \right) n_i + v_i v_k n_k \right] \frac{\delta v_i}{\delta b_m} dS \\
 &\quad - \int_{S_I} v_i n_i \frac{\delta p}{\delta b_m} dS - \int_{S_O} v_i n_i \frac{\delta p}{\delta b_m} dS \\
 &= - \int_{S_O} \underbrace{\left[\left(p + \frac{1}{2} v_i^2 \right) n_i + v_i v_k n_k \right]}_{\text{Συζυγείς οριακές συνθήκες}} \frac{\delta v_i}{\delta b_m} dS - \int_{S_I} \underbrace{v_i n_i}_{\text{Συζυγείς οριακές συνθήκες}} \frac{\delta p}{\delta b_m} dS
 \end{aligned} \tag{8.2}$$

Απλοποιήσεις όρων, έγιναν επειδή η ταχύτητα στην είσοδο και η πίεση στην έξοδο καθορίζονται από τον χρήστη και έτσι η παραγωγός τους (ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού) ισούται με μηδέν. Οι δύο εναπομείναντες όροι της σχέσης (8.2) θα δώσουν συνεισφορά στις οριακές συνθήκες του συζυγούς προβλήματος στην έξοδο και την είσοδο, αντιστοίχως.

Οριακές Συνθήκες Συζυγούς Προβλήματος

$$\text{Είσοδος} = \begin{cases} u_n = u_n \\ u_t = 0 \\ \frac{\partial q}{\partial x_j} n_j = 0 \end{cases}$$

$$\text{Έξοδος} = \begin{cases} q = u_n v_n + \nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j n_i - \left(p + \frac{1}{2} v_i^2 \right) - v_n^2 \\ u_t v_j n_j + \nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j t_i - v_t v_n = 0 \\ \frac{u_i}{\partial x_j} n_j = 0 \end{cases}$$

Οι ολικές απώλειες πίεσης, όπως και η αντικειμενική της γωνίας-στόχου ορίζονται ως επιφανειακά ολοκληρώματα και δεν δίνουν συνεισφορές κατά την παραγωγή στα χωρικά ολοκληρώματα, από τα οποία προκύπτουν οι συζυγείς εξισώσεις. Για αυτόν τον λόγο, οι εξισώσεις του συζυγούς προβλήματος σχέσεις (2.16) και (2.17) είναι ίδιες και για τη νέα αντικειμενική συνάρτηση. Έχοντας πλέον καθορίσει και τις οριακές συνθήκες, είναι σε θέση να επιλυθούν οι εξισώσεις του συζυγούς προβλήματος.

Ο τελικός τύπος της παραγώγου $\frac{\delta F}{\delta b_m}$ υπολογίζεται όπως και στην αντικειμενική της γωνίας-στόχου μέσω της σχέσης (2.22)

Η παραγωγή F ως προς c_μ δίνει

$$\begin{aligned} \frac{\delta F}{\delta c_\mu} = & - \int_{S_I} \underbrace{\left[\left(p + \frac{1}{2} v_i^2 \right) n_i + v_i v_k n_k \right]}_{1^{\text{ος}} \text{ όρος}} \frac{\delta v_i}{\delta c_\mu} dS - \int_{S_O} \underbrace{\left[\left(p + \frac{1}{2} v_i^2 \right) n_i + v_i v_k n_k \right]}_{\text{Όρος συζυγών οριακών συνθηκών}} \frac{\delta v_i}{\delta c_\mu} dS \\ & - \int_{S_I} \underbrace{v_i n_i \frac{\delta p}{\delta c_\mu}}_{\text{Όρος συζυγών οριακών συνθηκών}} dS - \int_{S_I} v_i n_i \frac{\delta p}{\delta c_\mu} dS \end{aligned} \quad (8.3)$$

Οι όροι των συζυγών οριακών συνθηκών είναι οι ίδιοι κατά την παραγωγή και ως προς \mathbf{c} , και ως προς \mathbf{b} , για τον λόγο αυτό επιλύεται ένα μόνο συζυγές πρόβλημα, και υπολογίζονται και οι δύο παράγωγοι.

Στον τελικό τύπο υπολογισμού της παραγώγου $\frac{\delta F}{\delta c_\mu}$ σχέση (2.25) πρέπει να προστεθεί και ο 1^{ος} όρος της σχέσης (8.3) (το $\frac{\delta v_i^{inlet}}{\delta c_\mu}$ υπολογίζεται αναλυτικά σύμφωνα με τη σχέση (2.26)), οπότε

$$\frac{\delta F}{\delta c_\mu} = \int_{S_{inlet}} \left\{ \nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j - q n_i - \left(p + \frac{1}{2} v_i^2 \right) n_i - v_i v_k n_k \right\} \frac{\delta v_i}{\delta c_\mu} dS_{inlet} \quad (8.4)$$

Οριακές Συνθήκες των Προβολών των Εξισώσεων του Συζυγούς Προβλήματος

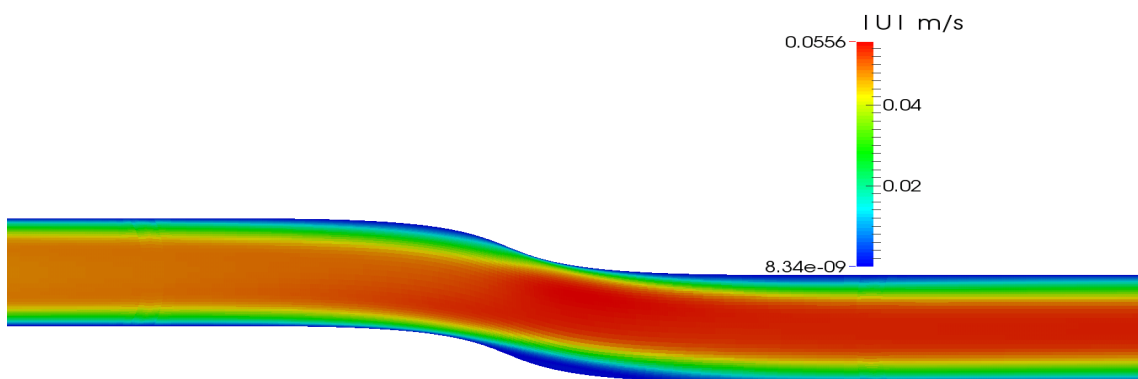
Οι οριακές συνθήκες των προβολών των εξισώσεων του πρωτεύοντος είναι όμοιες με αυτές που παρουσιάστηκαν στο Κεφάλαιο 3.1.1. Οι οριακές συνθήκες των προβολών των εξισώσεων του συζυγούς προβλήματος προκύπτουν ύστερα από παραγωγή ως προς c_μ και προβολή στο διάνυσμα z_μ των συζυγών οριακών εξισώσεων που παρουσιάστηκαν παραπάνω

$$\text{Είσοδος} = \begin{cases} \tilde{u}_n = \tilde{v}_n \\ \frac{\partial \tilde{q}}{\partial x_j} n_j = 0 \end{cases}$$

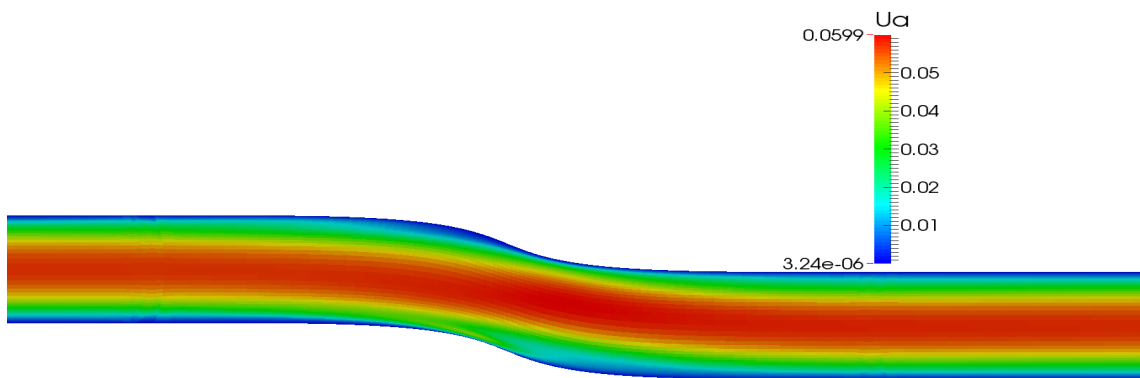
$$\text{Εξοδος} = \begin{cases} \tilde{q} = \tilde{u}_n v_n + u_n \tilde{v}_n + \nu \left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} \right) n_j n_i - \tilde{p} - v_i \tilde{v}_i - 2v_n \tilde{v}_n \\ \tilde{u}_t v_j n_j + u_t \tilde{v}_j n_j + \nu \left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} \right) n_j t_i - v_n \tilde{v}_t - v_t \tilde{v}_n = 0 \\ \frac{\tilde{u}_i}{\partial x_j} n_j = 0 \end{cases}$$

8.3 Επίλυση Ροής και Συζυγών Εξισώσεων στο OpenFOAM

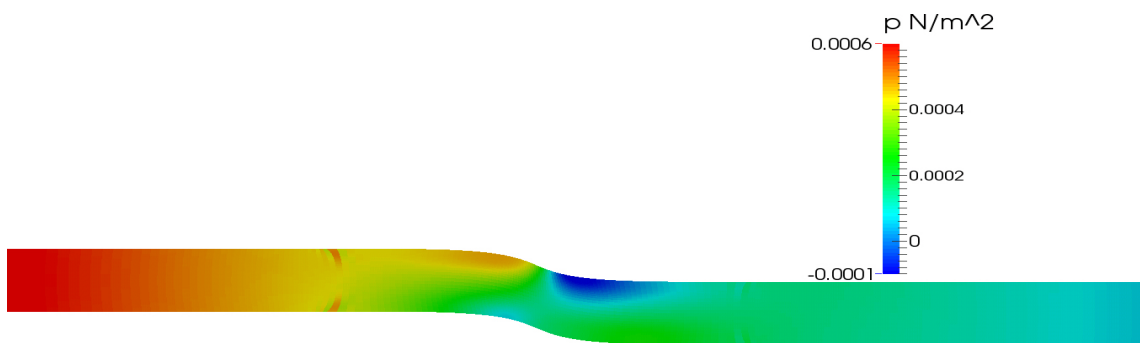
Τα αποτελέσματα των ροϊκών πεδίων ταχύτητας και πίεσης για το πρωτεύον και συζυγές πρόβλημα, παρουσιάζονται στα παρακάτω σχήματα. Η ροή όπως φαίνεται στο σχήμα (8.5) προσπαθεί να παρακάμψει όσο το δυνατόν ομαλότερα την αλλαγή γεωμετρίας και να ευθυγραμμιστεί, πάλι, μέχρι την έξοδο.



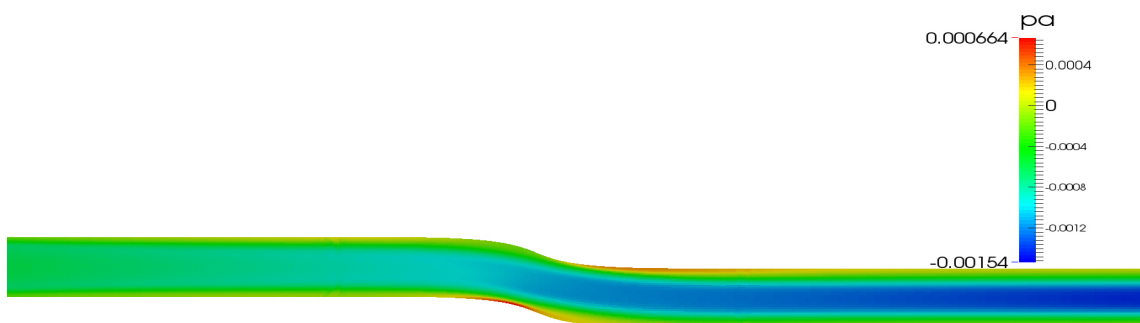
Σχήμα 8.3: Πεδίο μέτρου της ταχύτητας για τον αγωγό σχήματος S.



Σχήμα 8.4: Πεδίο μέτρου της συζυγούς ταχύτητας για τον αγωγό σχήματος S.



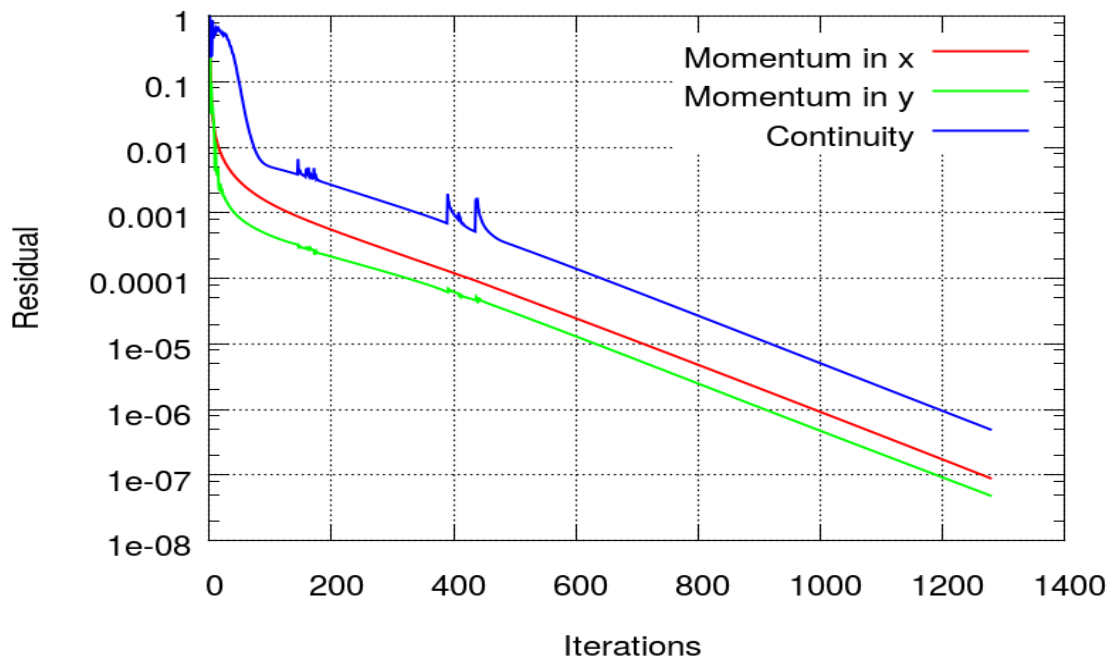
Σχήμα 8.5: Πεδίο πιέσεων για τον αγωγό σχήματος S.



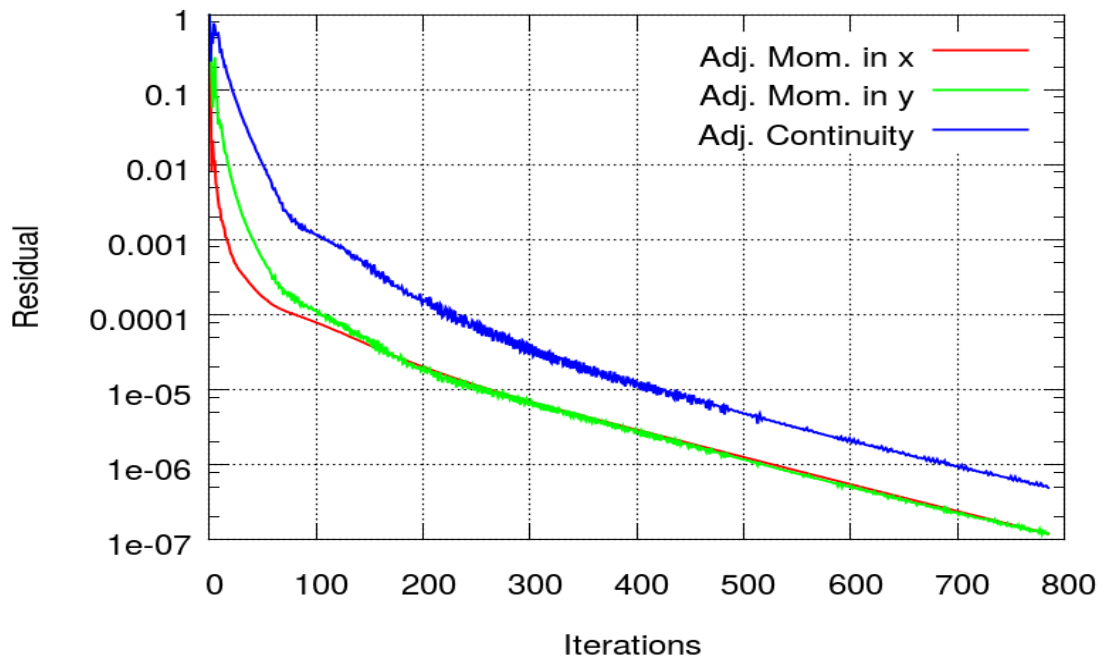
Σχήμα 8.6: Πεδίο συζυγών πιέσεων για τον αγωγό σχήματος S.

8.4 Διαγράμματα Σύγκλισης των Εξισώσεων

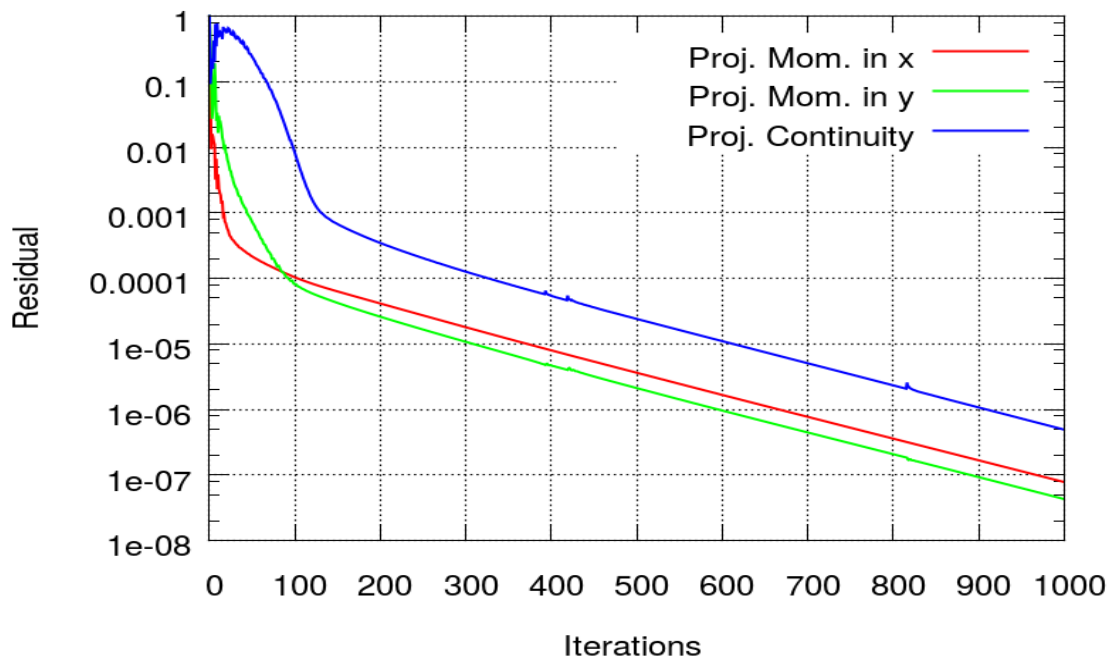
Επιλύονται 4 διαφορετικές ομάδες εξισώσεων στη μέθοδο του pFOSM. Λόγω του μικρότερου υπολογιστικού πλέγματος και της απλούστερης γεωμετρίας, η σύγκλιση των εξισώσεων στον αγωγό σχήματος S είναι γρηγορότερη σε σχέση με την περίπτωση της NACA-12. Ενδεικτικά, η σύγκλιση του πρωτεύοντος προβλήματος χρειάζεται σε πραγματικό χρόνο 43s, και επιτυγχάνεται σε 1243 επαναλήψεις. Το συζυγές πρόβλημα, σε αυτήν την προσομοίωση, είναι ταχύτερο από το πρωτεύον, και συγκλίνει σε 30s. Συνολικά, ο πρώτος κύκλος βελτιστοποίησης (επίλυση των 4 εξισώσεων) απαιτεί περί τα 110s. Τα αδιάστατα υπόλοιπα, στα οποία κρίνεται ότι έχει επέλθει η απαραίτητη σύγκλιση, είναι τα ίδια με την περίπτωση της προσομοίωσης της NACA-12 και ισούνται με $5 \cdot 10^{-7}$.



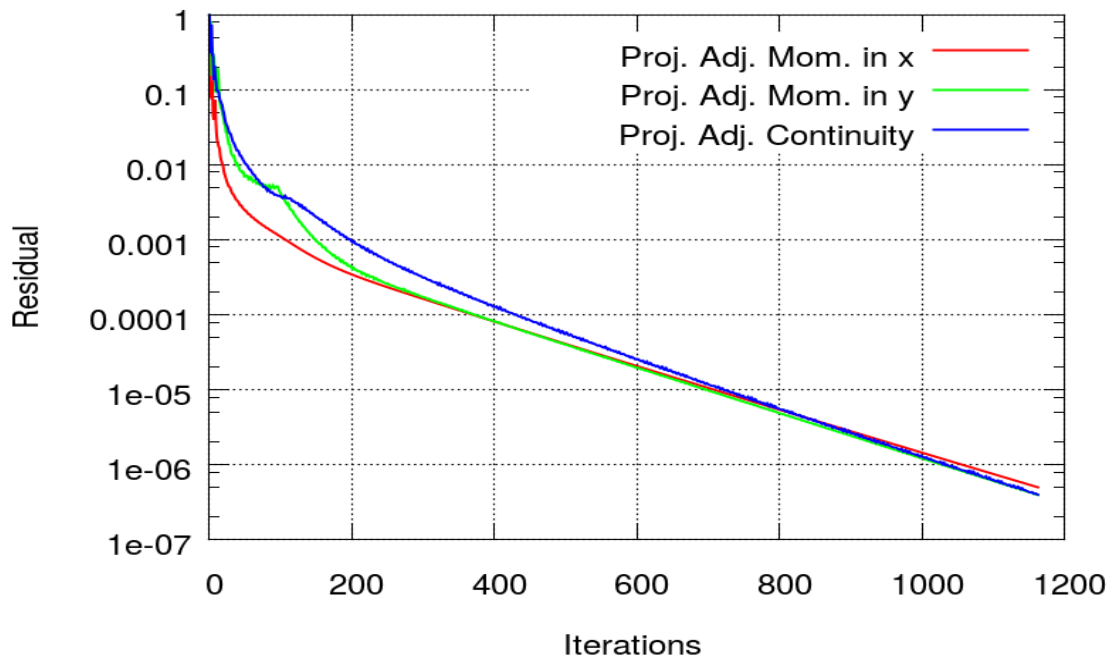
Σχήμα 8.7: Διάγραμμα σύγκλισης πρωτεύοντος προβλήματος για τον αγωγό σχήματος S.



Σχήμα 8.8: Διάγραμμα σύγκλισης συζυγούς προβλήματος για τον αγωγό σχήματος S.



Σχήμα 8.9: Διάγραμμα σύγκλισης των εξισώσεων των προβολών του πρωτεύοντος προβλήματος για τον αγωγό σχήματος S.

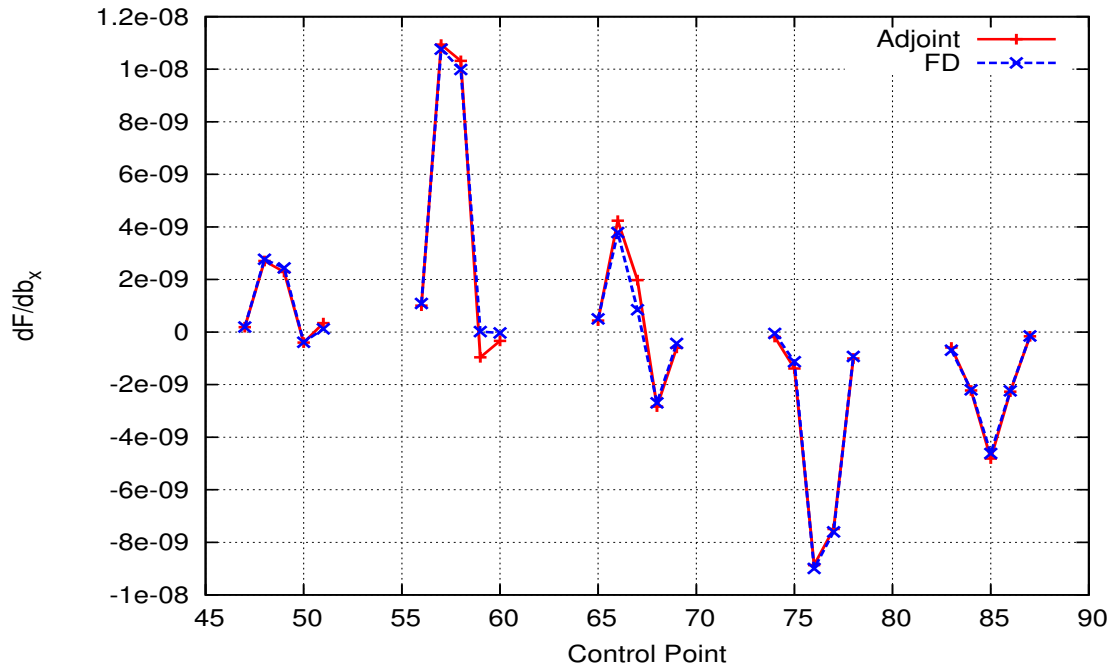


Σχήμα 8.10: Διάγραμμα σύγκλισης των εξισώσεων των προβολών του συζυγούς προβλήματος για τον αγωγό σχήματος S.

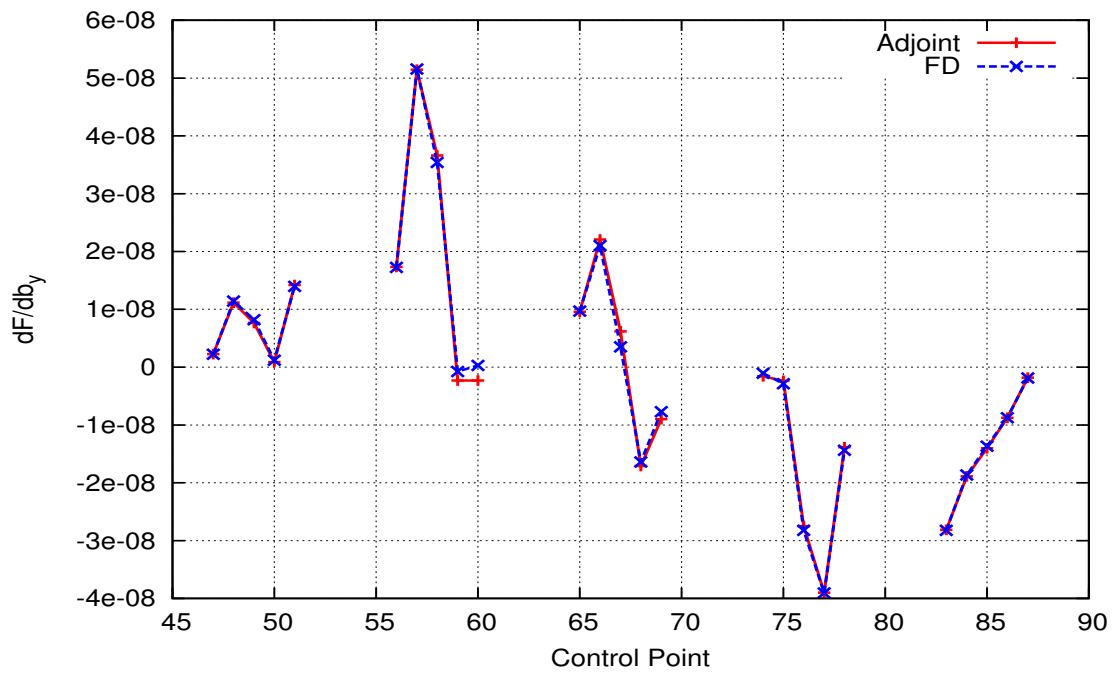
8.5 Ακρίβεια Υπολογισμού Παραγώγων Μέσης Τιμής και Τυπικής Απόκλισης

8.5.1 Πρώτες Παράγωγοι ως προς τις Μεταβλητές Σχεδιασμού

Γίνεται σύγκριση για τα αποτελέσματα των παραγώγων της αντικειμενικής συνάρτησης ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού $\frac{\delta F}{\delta b_m}$, μεταξύ πεπερασμένων διαφορών και συζυγούς μεθόδου. Τα σημεία ελέγχου είναι 25, οπότε οι μεταβλητές σχεδιασμού είναι 50. Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στα σχήματα 8.11, 8.12 ενώ οι αποκλίσεις που εμφανίζονται σε τρία σημεία (σημεία ελέγχου 59, 60 και 67) κρίνονται ως πολύ μικρές.



Σχήμα 8.11: Παράγωγοι $\frac{\delta F}{\delta b_x}$ υπολογισμένες με πεπερασμένες διαφορές και τη συζυγή μέθοδο.



Σχήμα 8.12: Παράγωγοι $\frac{\delta F}{\delta b_y}$ υπολογισμένες με πεπερασμένες διαφορές και τη συζυγή μέθοδο.

Η τάξη μεγέθους των παραγώγων $\frac{\delta F}{\delta b_m}$ που υπολογίζονται είναι φαινομενικά μικρή

(10^{-8} με 10^{-9}), σημασία έχει όμως μόνο το πρόσημο και οι σχετικές τιμές μεταξύ των παραγώγων. Αν αλλάξουν οι μονάδες μέτρησης της αντικειμενικής, μεταβάλλονται αναλόγως και οι τιμές των παραγώγων. Για παράδειγμα, αν οι ολικές απώλειες πίεσης ανηγμένες στην παροχή όγκου υπολογίζονταν σε $\frac{cm^5}{s^3}$ αντί για $\frac{m^5}{s^3}$ η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης θα αύξανε με συντελεστή 10^{10} οδηγώντας έτσι και σε αύξηση των παραγώγων $\frac{\delta F}{\delta b_m}$.

8.5.2 Πρώτες Παράγωγοι ως προς τις Στοχαστικές Μεταβλητές

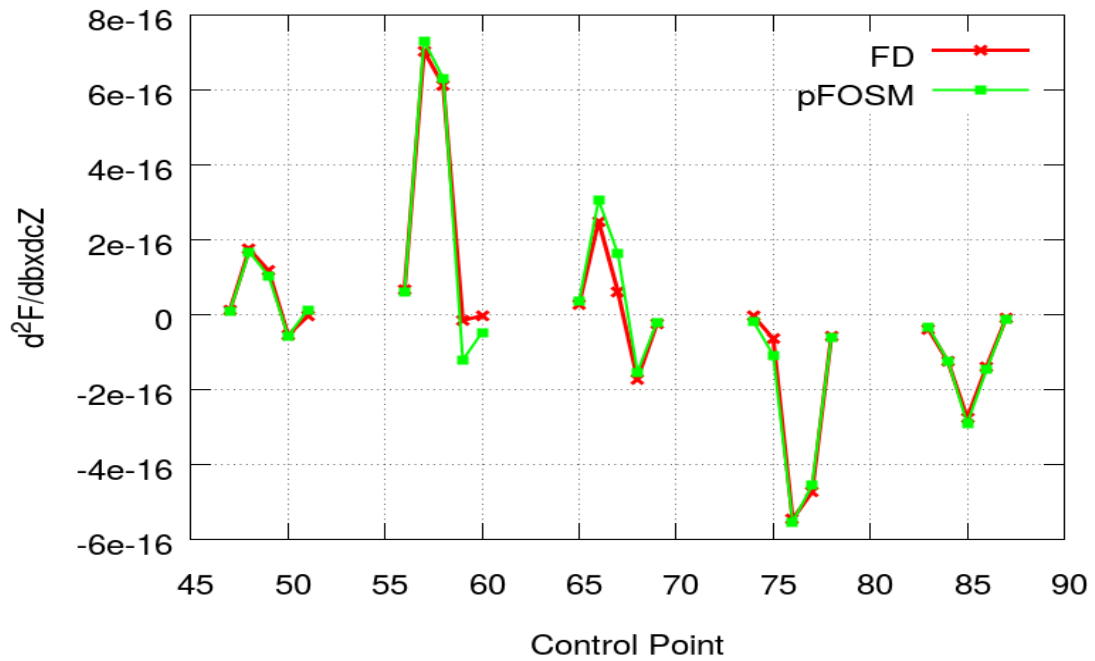
Και οι παράγωγοι ως προς τις στοχαστικές μεταβλητές $\frac{\delta F}{\delta c_\mu}$ υπολογίζονται με ακρίβεια συγκρινόμενες με τα αποτελέσματα αναφοράς των πεπερασμένων διαφορών. Παρατηρώντας τις τιμές των παραγώγων, γίνεται αντιληπτή η διαφορά τάξης στην τιμή τους, η παράγωγος $\frac{\delta F}{\delta |v_{in}|}$ είναι 4 τάξεις μεγαλύτερη της παραγώγου $\frac{\delta F}{\delta a_{in}}$, πράγμα αναμενόμενο, το οποίο οφείλεται στη γεωμετρία του αγωγού. Δηλαδή, επειδή ο αγωγός εισόδου είναι οριζόντιος, μικρές αλλαγές στη μηδενική γωνία εισόδου της ροής δεν αναμένεται να επηρεάσουν την αντικειμενική συνάρτηση από τη στιγμή που υπάρχει ο αναγκαίος χώρος ούτως ώστε η ροή να ευθυγραμμιστεί.

Παράγωγοι ως προς c_μ	Παράγωγοι με FD	Παράγωγοι με τη Συζυγή Μέθοδο
$\frac{\delta F}{\delta v_{in} }$	$4.0565 \cdot 10^{-5}$	$4.0410 \cdot 10^{-5}$
$\frac{\delta F}{\delta a_{in}}$	$-8.940 \cdot 10^{-9}$	$-9.391 \cdot 10^{-9}$

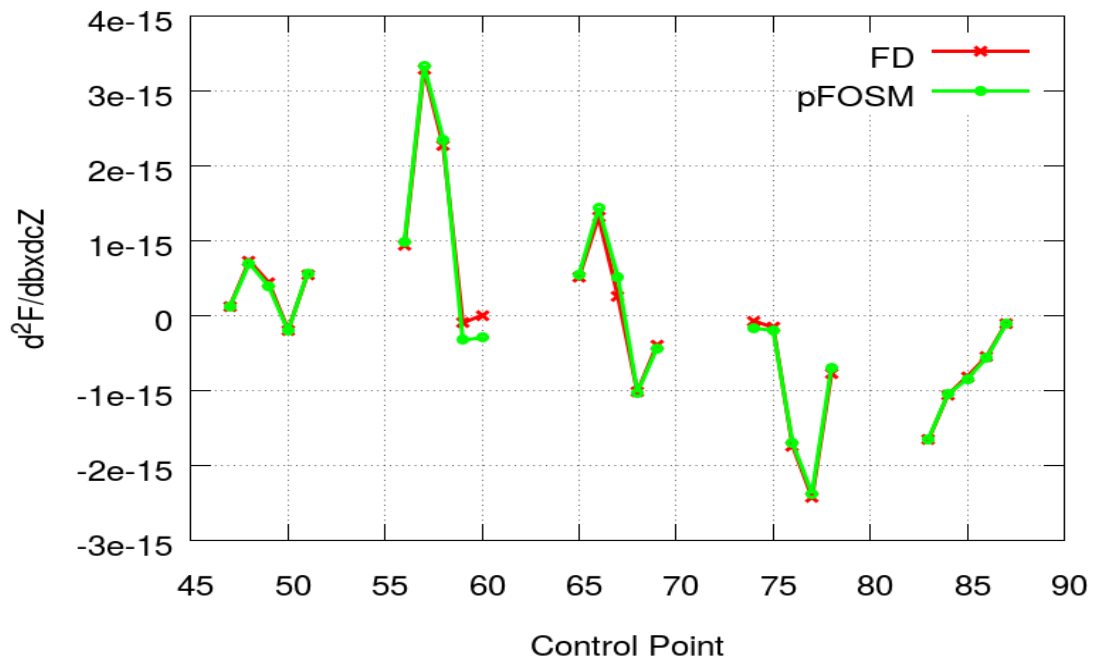
Πίνακας 8.1: Παράγωγοι ως προς τις στοχαστικές μεταβλητές με πεπερασμένες διαφορές και τη συνεχή συζυγή μέθοδο.

8.5.3 Δεύτερες Μεικτές b-c Παράγωγοι

Για να εξακριβωθεί ότι η μέθοδος του pFOSM έχει προγραμματιστεί ορθά και υπολογίζονται σωστά όλες οι απαιτούμενες παράγωγοι απομένει να γίνει η σύγκριση των δευτέρων b-c μεικτών παραγώγων επί το διάνυσμα \mathbf{z} $\frac{\delta^2 F}{\delta b_m \delta c_\mu}$ όπως υπολογίζονται με τη μέθοδο του pFOSM και με πεπερασμένες διαφορές. Τα αποτελέσματα βρίσκονται στα σχήματα 8.13 και 8.14



Σχήμα 8.13: Παράγωγοι $\frac{\delta^2 F}{\delta b_x \delta c_\mu} z_\mu$ υπολογισμένες με πεπερασμένες διαφορές και με τη συζυγή μέθοδο για τον αγωγό σχήματος S.



Σχήμα 8.14: Παράγωγοι $\frac{\delta^2 F}{\delta b_y \delta c_\mu} z_\mu$ υπολογισμένες με πεπερασμένες διαφορές και με τη συζυγή μέθοδο για τον αγωγό σχήματος S.

Οι μόνες αξιοσημείωτες διαφορές εντοπίζονται για τα σημεία ελέγχου 59, 60 και 67 στα οποία είχαν εντοπιστεί μικρές διαφορές ήδη από τον υπολογισμό της πρώτης παραγώγου (ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού) σχήματα 8.11 και 8.12. Τα αποτελέσματα κρίνονται ως αξιόπιστα, και κανείς πρέπει να λάβει υπόψη του ότι αφορούν δεύτερες παραγώγους όπου το σφάλμα υπολογισμού αναγκαστικά αυξάνει.

8.5.4 Υπολογισμός Μέσης Τιμής και Τυπικής Απόκλισης

Όπως και στην προσομοίωση της NACA-12 και σε αυτήν τη νέα περίπτωση οι τρεις μέθοδοι που χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό μέσης τιμής και τυπικής απόκλισης "θγάζουν" παρόμοια αποτελέσματα.

Στοχαστική μέθοδος	Μέση τιμή μ_F	Τυπική απόκλιση σ_F
FOSM	$7.176 \cdot 10^{-7}$	$2.020 \cdot 10^{-7}$
niPCE 1 st order	$7.340 \cdot 10^{-7}$	$2.029 \cdot 10^{-7}$
niPCE 2 nd order	$7.340 \cdot 10^{-7}$	$2.047 \cdot 10^{-7}$

Πίνακας 8.2: Σύγκριση μέσης τιμής και τυπικής απόκλισης συνάρτησης-στόχου με FOSM, niPCE 1^{ης} τάξης και niPCE 2^{ης} τάξης

Το μέγιστο σχετικό σφάλμα συναντάται στον υπολογισμό της μέσης τιμής, ανάμεσα στη μέθοδο του pFOSM και του μη-επεμβατικού αναπτύγματος πολυωνυμικού χάρους 2^{ης} τάξης, με τιμή 2,2%.

8.6 Βελτιστοποίηση Μορφής Αγωγού Σχήματος S

Το πρόβλημα διέπεται από αβεβαιότητα του μέτρου της ταχύτητας αλλά και της γωνίας εισόδου της ροής. Βέβαια, λόγω του οριζόντιου τμήματος του αγωγού και της μηδενικής γωνίας εισόδου, η επίδραση που προκαλείται από τη στοχαστικότητα του μεγέθους της γωνίας είναι μικρή. Αν μη τι άλλο, μια επιπλέον στοχαστική μεταβλητή που σε κάποια άλλη μέθοδο θα έπρεπε για λόγους οικονομίας να αμεληθεί, εδώ υπολογίζεται κανονικά χωρίς να επιβαρύνει με επιπλέον υπολογιστικό κόστος. Η ταχύτητα και οι γωνία στην είσοδο ακολουθούν κανονική κατανομή και η τιμή τους είναι: $v_{inlet} = 0.039473 \pm 3 \cdot 0.005 m/s$, $a_{inlet} = 0 \pm 3 \cdot 0.57^\circ$.

Η αντικειμενική συνάρτηση σιβαρού αεροδυναμικού σχεδιασμού για την οποία γίνεται η βελτιστοποίηση, επιλέγεται να δίνεται από τη σχέση (8.5), στην οποία ο χρήστης επιλέγει τις τιμές των συντελεστών w_1 και w_2 ανάλογα με τη βαρύτητα που θέλει να προσδώσει στις δύο ποσότητες, μέσης τιμής και τυπικής απόκλισης.

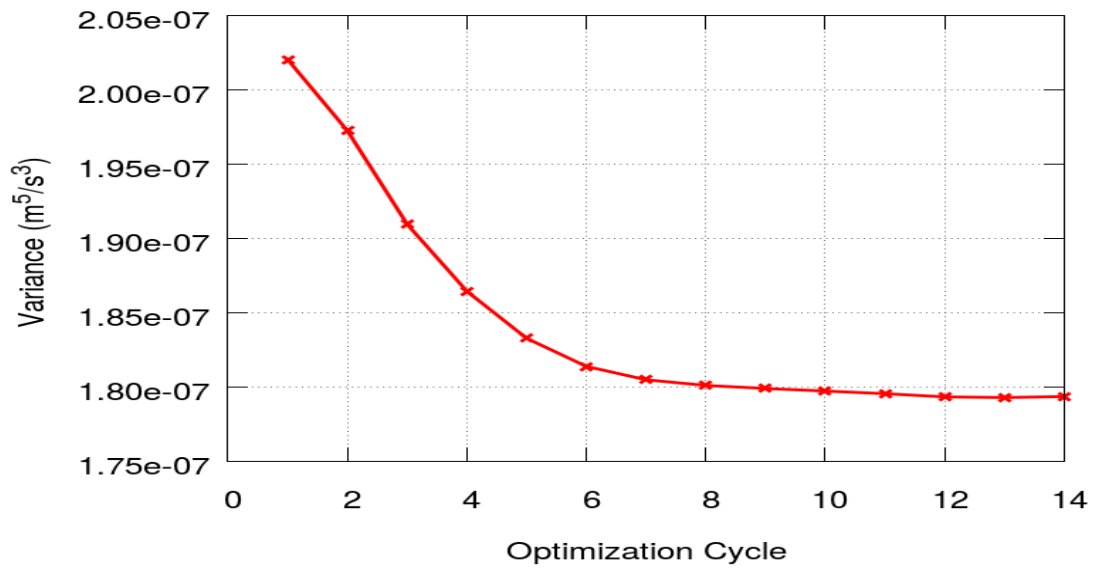
$$\hat{F} = w_1 \mu_F + w_2 \sigma_F \quad (8.5)$$

8.6.1 Βελτιστοποίηση μόνο για Τυπική Απόκλιση

Σε πρώτη φάση, θα γίνει βελτιστοποίηση επιλέγοντας τιμή $w_1 = 0$ και $w_2 = 1$. Στην ουσία γίνεται βελτιστοποίηση μόνο για την τυπική απόκλιση, "αδιαφορώντας" για τη μέση τιμή που θα προκύψει. Είναι μια θεωρητική προσέγγιση, η οποία σε πρακτικό επίπεδο μπορεί να μην έχει ιδιαίτερη ουσία, από την άλλη όμως εξάγονται σημαντικά συμπεράσματα για τη σχέση μεταξύ μέσης τιμής και τυπικής απόκλισης κατά τη βελτιστοποίηση για την προσομοίωση αυτή. Η αντικειμενική συνάρτηση σιβαρού αεροδυναμικού σχεδιασμού πλέον γράφεται

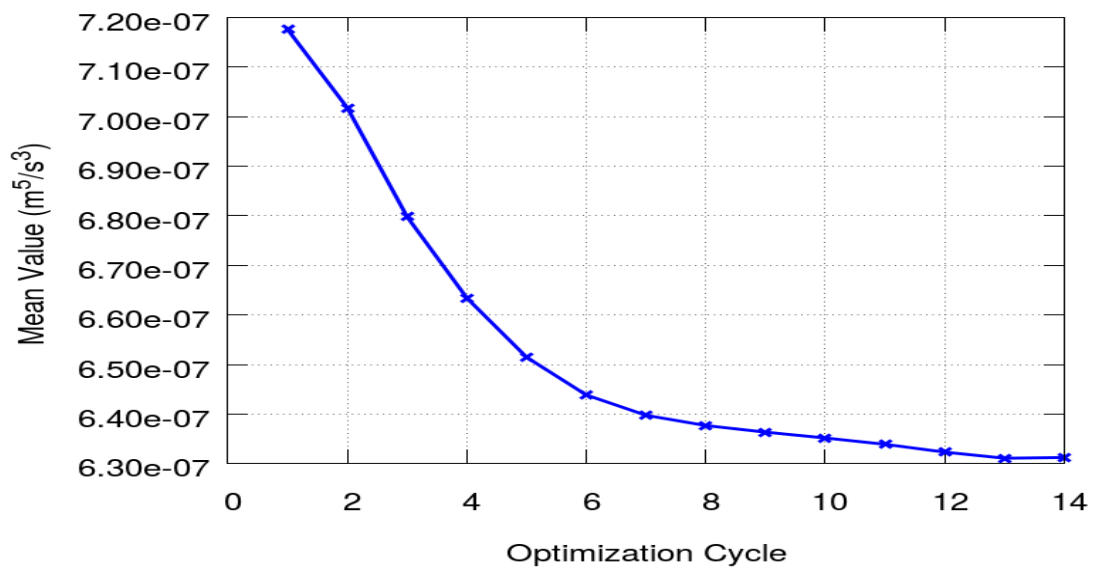
$$\hat{F} = \sigma_F, \quad \frac{\delta \hat{F}}{\delta b_m} = \frac{\delta \sigma_F}{\delta b_m} = \frac{\frac{\delta^2 F}{\delta b_m \delta c_\mu} z_\mu}{\sigma_F} \quad (8.6)$$

Η βελτιστοποίηση διήρκεσε 20 λεπτά "τρέχοντας" παράλληλα σε 4 επεξεργαστές Intel 64 bit @ 2.6GHz, μέσα σε αυτά τα 20 λεπτά ολοκληρώθηκαν 14 κύκλοι βελτιστοποίησης. Τα αποτελέσματα για την πορεία της τιμής της τυπικής απόκλισης παρουσιάζονται στο σχήμα 8.15



Σχήμα 8.15: Διάγραμμα σύγκλισης της τυπικής απόκλισης, βελτιστοποιώντας τον αγωγό σχήματος S με αντικειμενική συνάρτηση μόνο την τυπική απόκλιση των απωλειών οδικής πίεσης.

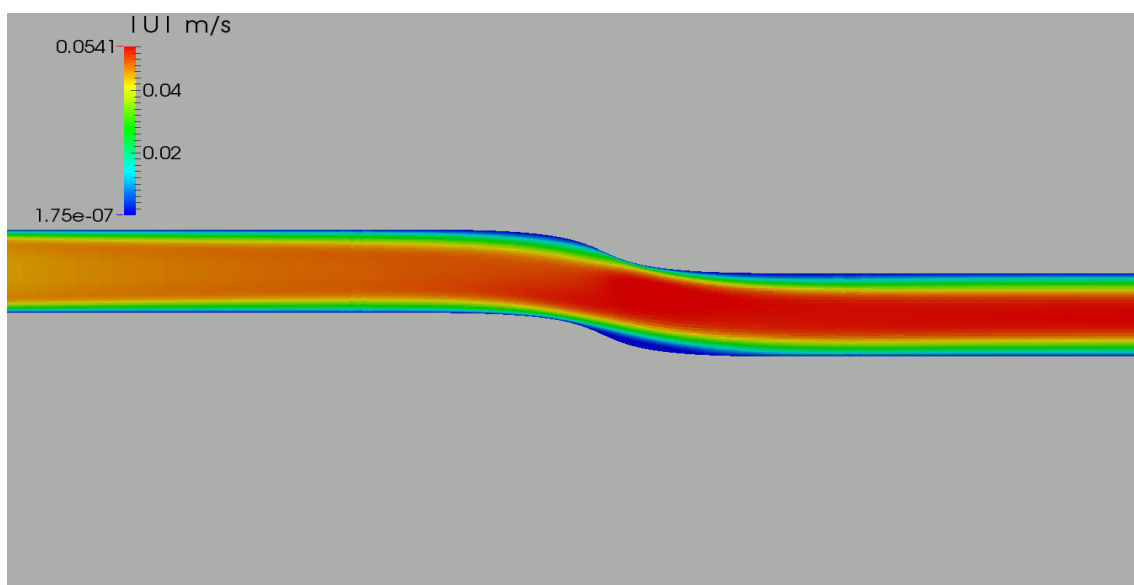
Σε 14 κύκλους βελτιστοποίησης επιτεύχθηκε μείωση της τιμής της τυπικής απόκλισης κατά 11,23%. Εδώ αξίζει να γίνει αναφορά, στο τι συμβαίνει στη μέση τιμή κατά τη διάρκεια της βελτιστοποίησης, τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στο σχήμα 8.16



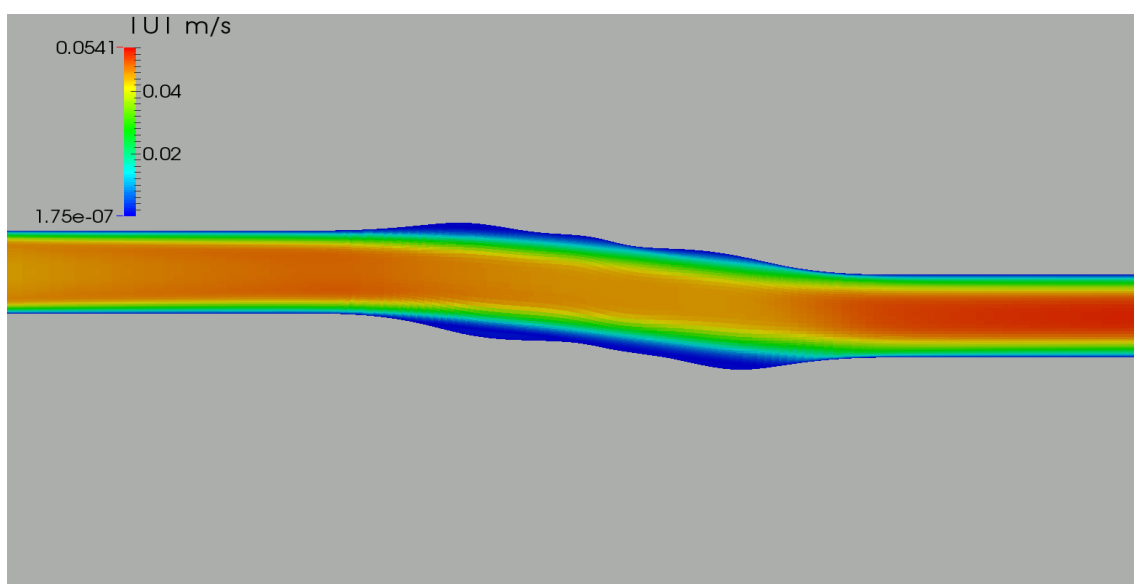
Σχήμα 8.16: Διάγραμμα μέσης τιμής, βελτιστοποιώντας τον αγωγό σχήματος S με αντικειμενική συνάρτηση μόνο την τυπική απόκλιση των απωλειών οδικής πίεσης.

Παρότι λοιπόν, η βελτιστοποίηση δεν λαμβάνει καθόλου υπόψη της τη μέση τιμή, (ο συντελεστής βαρύτητας της είναι μηδενικός) η πορεία που υπαγορεύει η παράγωγος της τυπικής απόκλισης οδηγεί και σε ταυτόχρονη μείωση της μέσης τιμής.

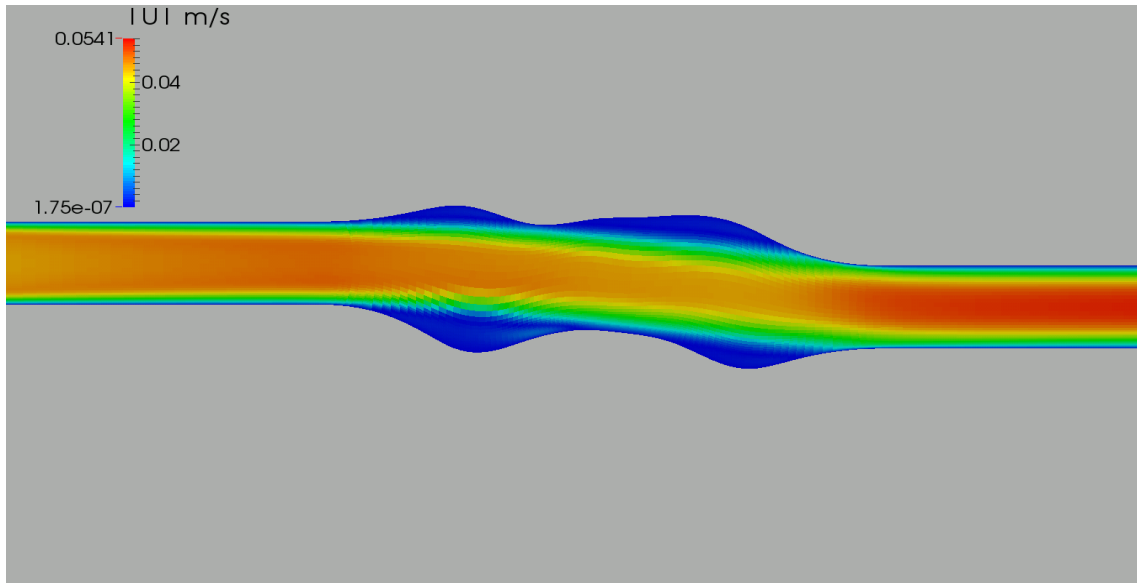
Οι γεωμετρίες μαζί με τα πεδία ταχυτήτων που προέκυψαν από τη συγκεκριμένη βελτιστοποίηση δίνονται στα σχήματα 8.17, 8.18 και 8.19



Σχήμα 8.17: Γεωμετρία και πεδίο ταχύτητας για τον 1^0 κύκλο βελτιστοποίησης του αγωγό σχήματος S.



Σχήμα 8.18: Γεωμετρία και πεδίο ταχύτητας για τον 10^0 κύκλο βελτιστοποίησης του αγωγό σχήματος S.



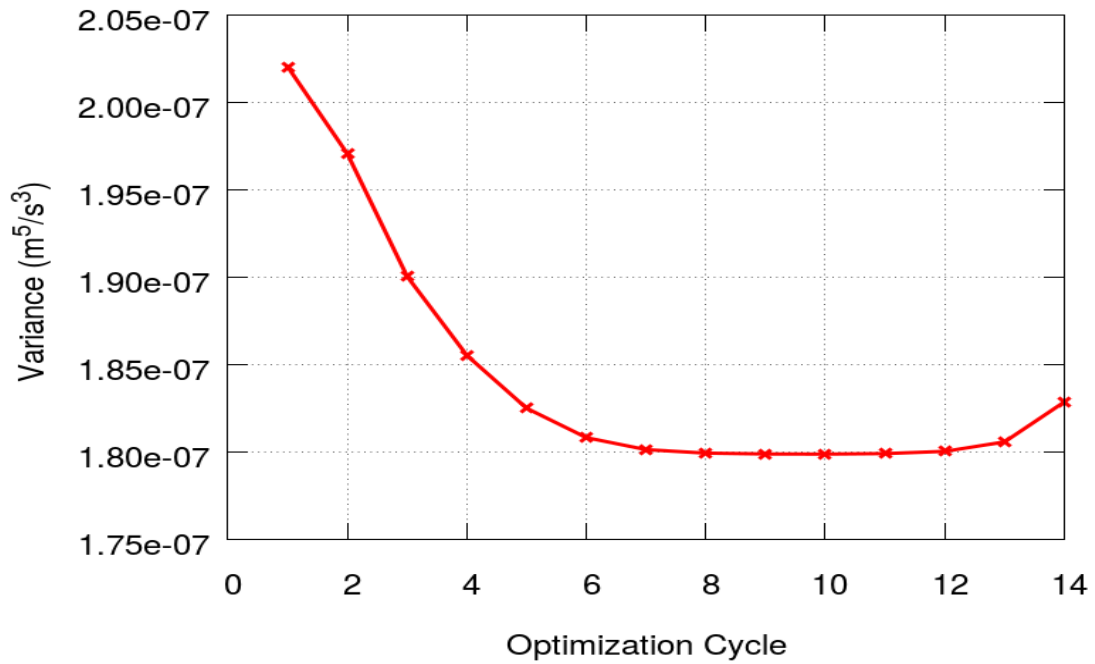
Σχήμα 8.19: Γεωμετρία και πεδίο ταχύτητας για τον 14^ο κύκλο βελτιστοποίησης του αγωγό σχήματος S .

8.6.2 Βελτιστοποίηση μόνο για Μέση Τιμή

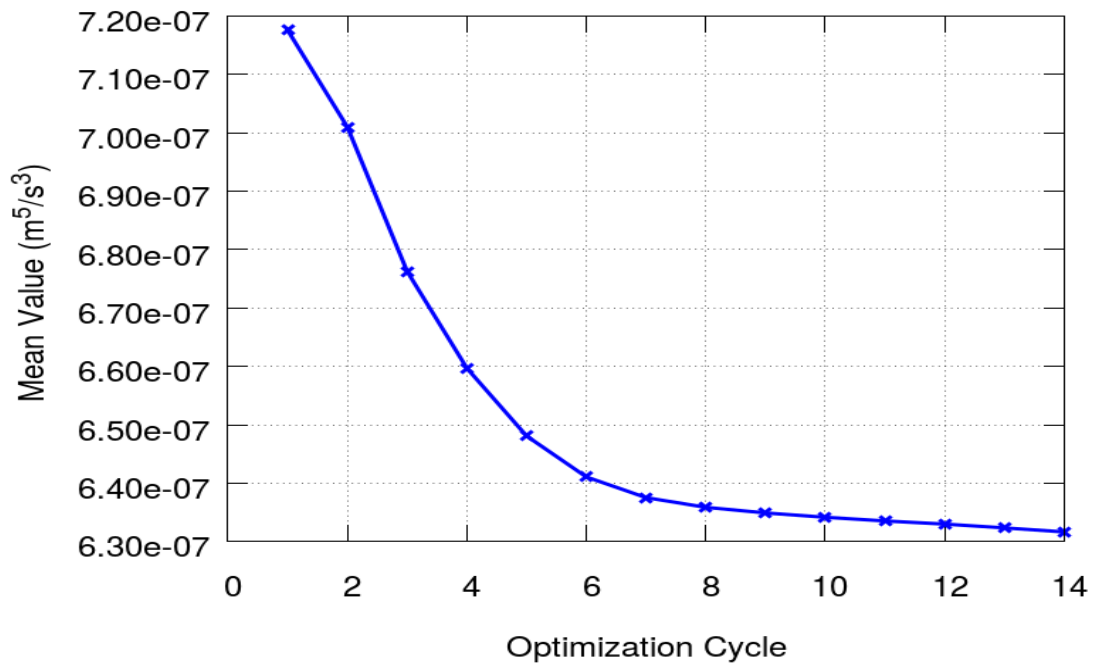
Αν οι συντελεστές βαρύτητας αντιστραφούν και γίνουν $w_1 = 1$ και $w_2 = 0$ τότε ισχύει

$$\hat{F} = \mu_F, \quad \frac{\delta \hat{F}}{\delta b_m} = \frac{\delta \mu_F}{\delta b_m} = \frac{\delta F}{\delta b_m} \quad (8.7)$$

Στην περίπτωση όπως εδώ, που διεξάγεται βελτιστοποίηση μόνο για τη μέση τιμή υπάρχει ταύτιση με τη βελτιστοποίηση που γίνεται και σε ένα "κλασικό" πρόβλημα, στο οποίο δεν υφίσταται η έννοια της αβεβαιότητας, όπως υποδηλώνεται και από τη σχέση 7.5.



Σχήμα 8.20: Διάγραμμα τυπικής απόκλισης, βελτιστοποιώντας τον αγωγό σχήματος S με αντικειμενική συνάρτηση μόνο τη μέση τιμή των ολικών απωλειών πίεσης.

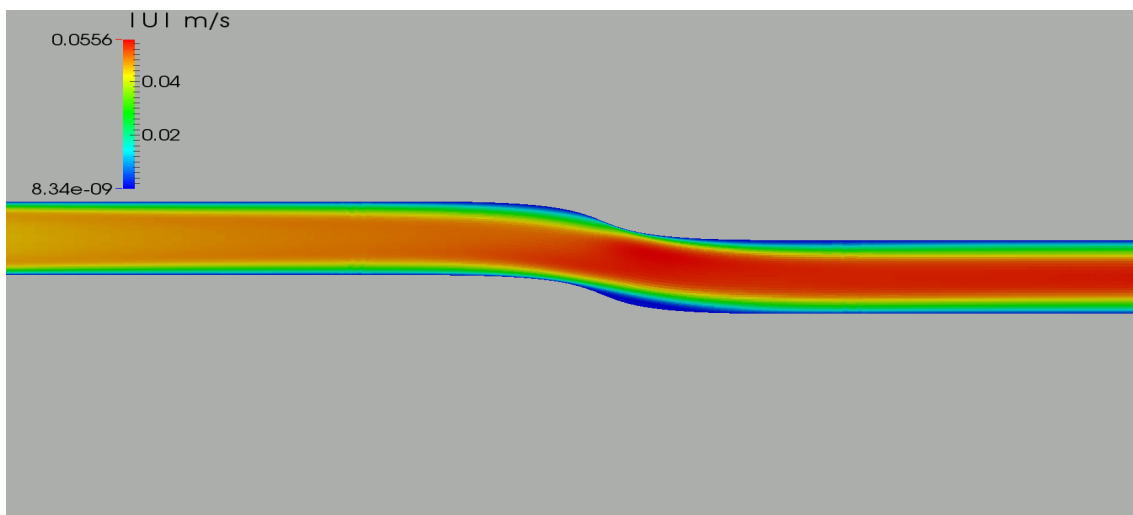


Σχήμα 8.21: Διάγραμμα σύγκλισης της μέσης τιμής, βελτιστοποιώντας τον αγωγό σχήματος S με αντικειμενική συνάρτηση μόνο τη μέση τιμή των ολικών απωλειών πίεσης.

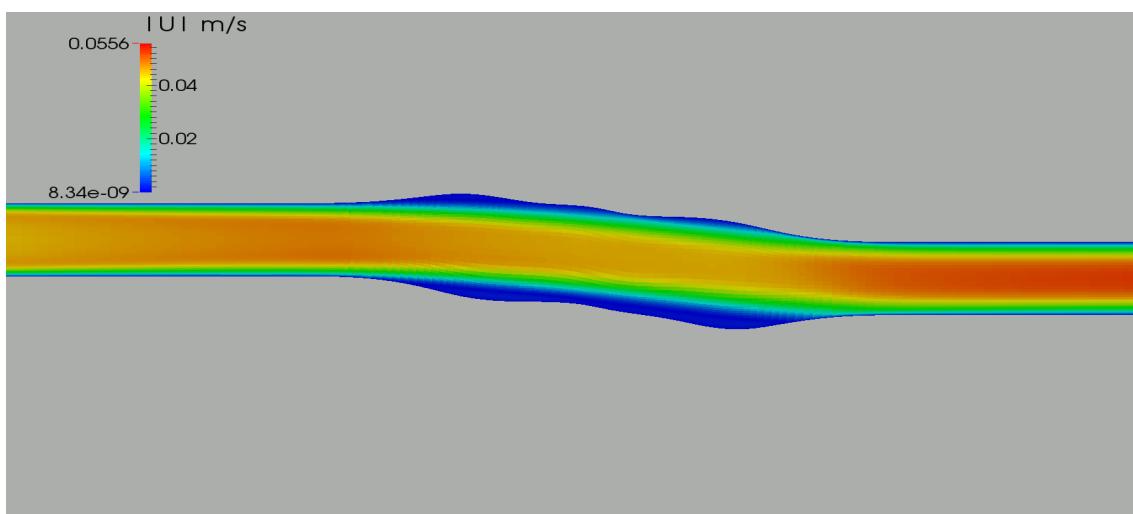
Στα σχήματα της βελτιστοποίησης 8.20, 8.21, στα οποία παρατηρείται εκ νέου η

παράλληλη πορεία των δύο μεγεθών. Με τον όρο "παράλληλη" εννοείται ότι αν και γίνεται βελτιστοποίηση ακολουθώντας την πορεία που υποδεικνύει η παράγωγος μόνο της μέσης τιμής, μειώνεται ταυτόχρονα και η τυπική απόκλιση (εκτός από τους δύο τελευταίους κύκλους).

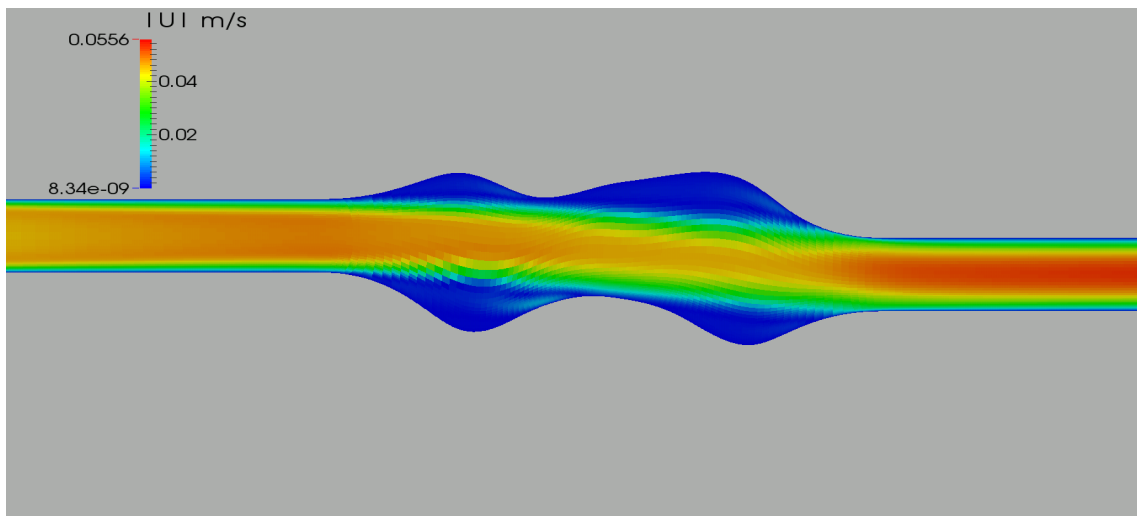
Οι γεωμετρίες μαζί με τα πεδία ταχυτήτων που προέκυψαν από τη συγκεκριμένη βελτιστοποίηση δίνονται στα σχήματα (8.22), (8.23) και (8.24)



Σχήμα 8.22: Γεωμετρία και πεδίο ταχύτητας για τον 1^0 κύκλο βελτιστοποίησης στον αγωγό σχήματος S.



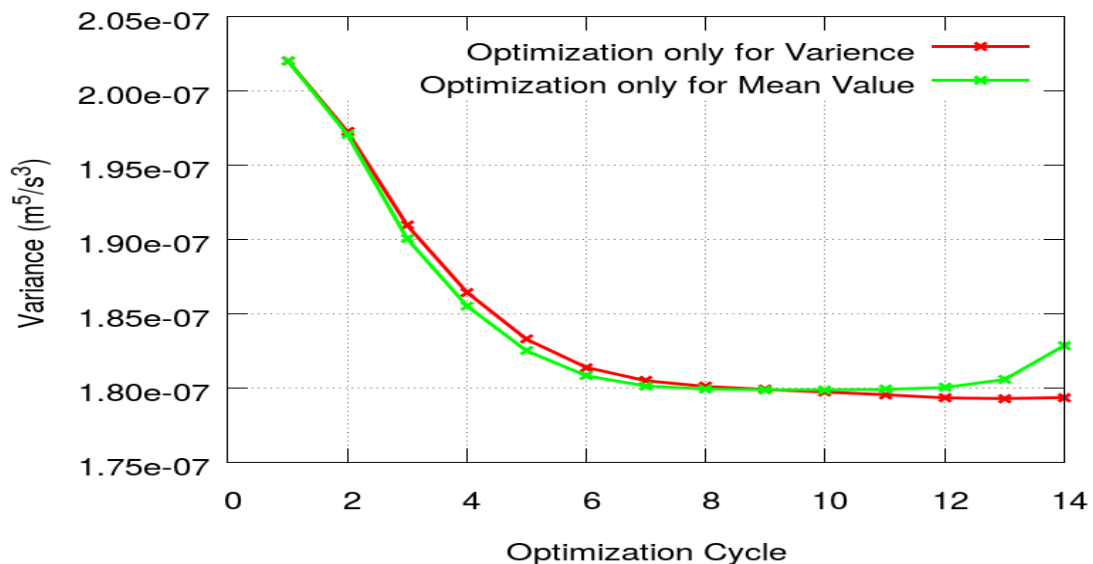
Σχήμα 8.23: Γεωμετρία και πεδίο ταχύτητας για τον 10^0 κύκλο βελτιστοποίησης στον αγωγό σχήματος S.



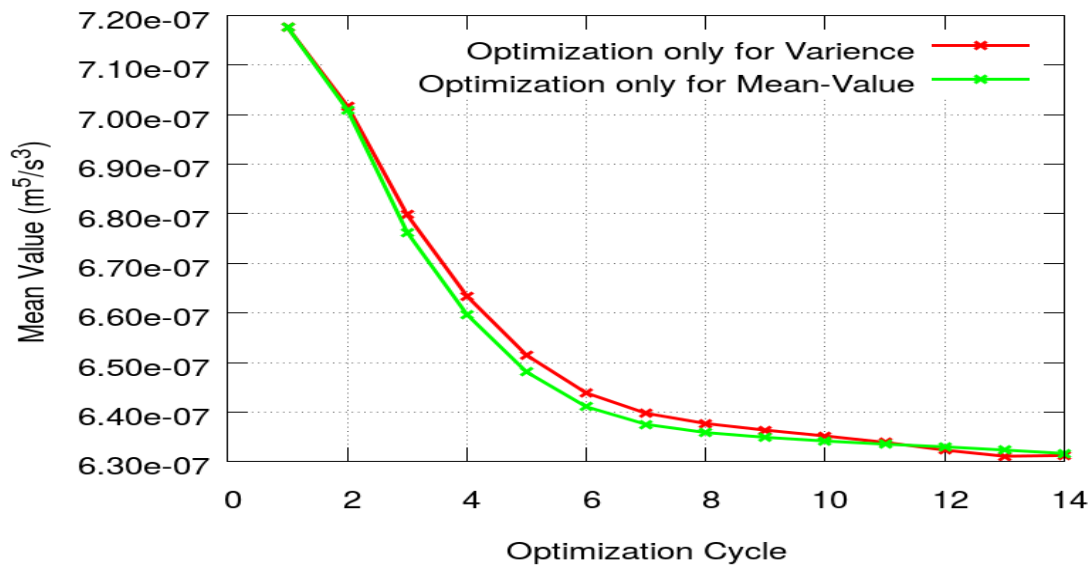
Σχήμα 8.24: Γεωμετρία και πεδίο ταχύτητας για τον 14^ο κύκλο βελτιστοποίησης στον αγωγό σχήματος S.

8.6.3 Σχολιασμός και Σύγκριση Αποτελεσμάτων Βελτιστοποίησης

Αν παρατεθούν τα αποτελέσματα για τις δύο διαφορετικές επιλογές βαρών σε κοινά διαγράμματα, σχήματα 8.25, 8.26, προκύπτουν

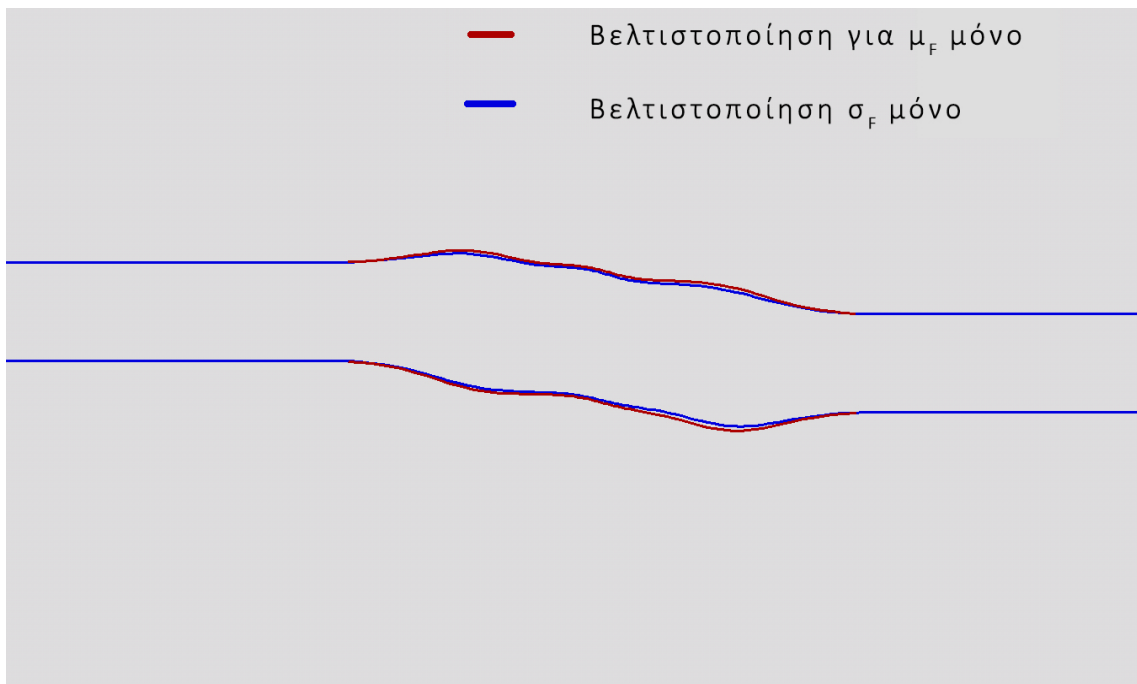


Σχήμα 8.25: Διάγραμμα τυπικής απόκλισης, βελτιστοποιώντας τον αγωγό S-Bend για δύο αντικειμενικές συναρτήσεις μια μόνο για τη μέση τιμή των ολικών απωλειών πίεσης, και μια μόνο για την τυπική τους απόκλιση.

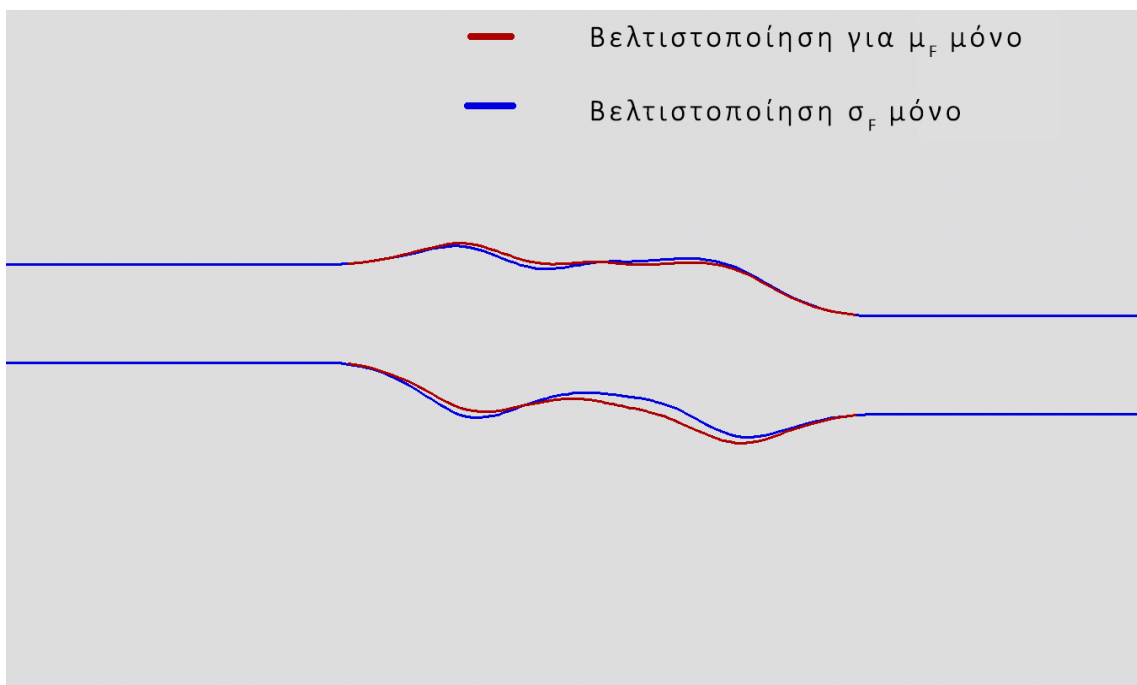


Σχήμα 8.26: Διάγραμμα μέσης τιμής, βελτιστοποιώντας τον αγωγό σχήματος S για δύο αντικειμενικές συναρτήσεις μια μόνο για τη μέση τιμή των οθλικών απωλειών πίεσης, και μια μόνο για την τυπική τους απόκλιση.

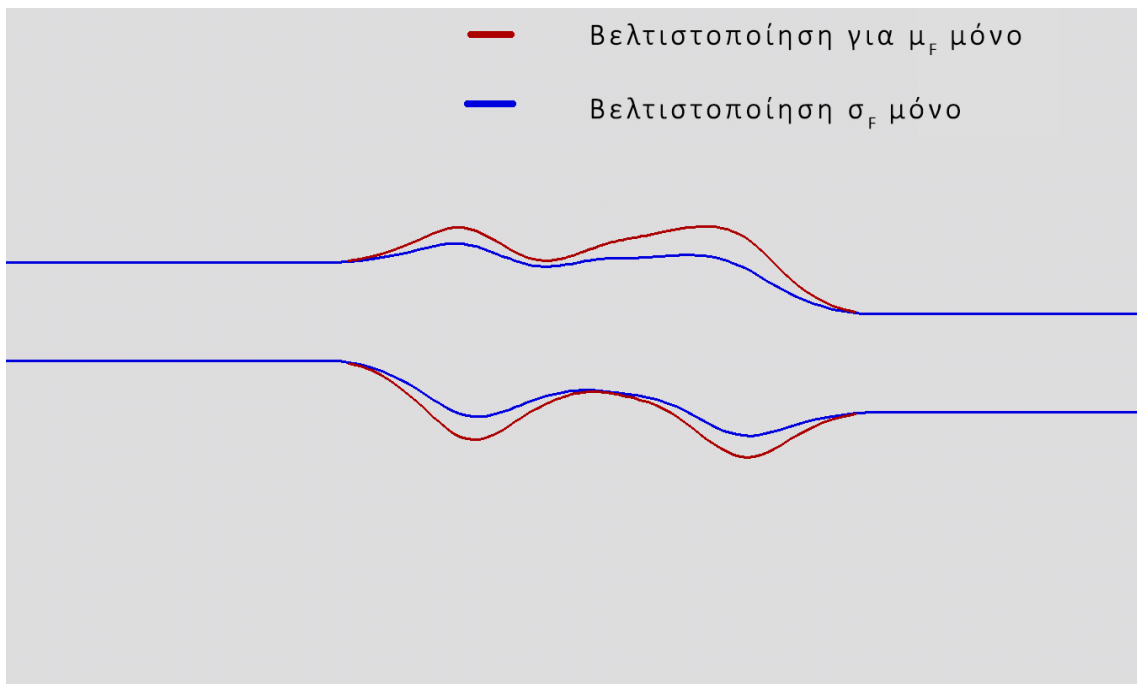
Η κοινή πορεία που έχουν τα δύο μεγέθη δεν επιτρέπει την παρουσίαση των αποτελεσμάτων σε μορφή μετώπου Pareto, διότι και τα δύο μεγέθη ακολουθούν παράλληλες πορείες (η αντικειμενική λαμβάνει υπόψη της μόνο τη μέση τιμή αλλά βελτιστοποιείται και η τυπική απόκλιση και αντιστρόφως) κατά τη διάρκεια της βελτιστοποίησης. Με αποτέλεσμα, η λογική της επιλογής διαφορετικών βαρών (για ενίσχυση στη βελτιστοποίηση του ενός από τα δύο μεγέθη) να καθίσταται άτοπη. Βέβαια, στους τελευταίους δύο κύκλους όπως φαίνεται στο σχήμα 8.25 η τιμή της τυπικής απόκλισης για βελτιστοποίηση λαμβάνοντας υπόψη μόνο την τυπική απόκλιση είναι καλύτερη από την αντίστοιχη τιμή τυπικής απόκλισης που προκύπτει κάνοντας βελτιστοποίηση μόνο για τη μέση τιμή. Δυστυχώς, η διαφορά αυτή είναι πολύ μικρή για να βασιστεί πάνω της, η λογική της δημιουργίας μετώπου Pareto.



Σχήμα 8.27: Σύγκριση σχημάτων στον 10^{ου} κύκλο βελτιστοποίησης για τον αγωγό σχήματος S.



Σχήμα 8.28: Σύγκριση σχημάτων στον 13^{ου} κύκλο βελτιστοποίησης για τον αγωγό σχήματος S.



Σχήμα 8.29: Σύγκριση σχημάτων στον 14^{ου} κύκλο βελτιστοποίησης για τον αγωγό σχήματος S.

Στα σχήματα 8.27, 8.28 και 8.29 γίνεται σύγκριση της πορείας των γεωμετριών που προκύπτουν από τις δύο βελτιστοποιήσεις, παρατηρεί κανείς ότι μέχρι τον 10 κύκλο τα δύο σχήμα είναι παρεμφερή, με πολύ μικρές αποκλίσεις. Αυτό επιβεβαιώνει τον ισχυρισμό ότι οι βελτιστοποιημένες γεωμετρίες που προέκυψαν από τη διαφορετική επιλογή βαρών, ακολουθούν το ίδιο γεωμετρικό "μοτίβο" δημιουργώντας καμπυλότητες στα ίδια ακριβώς σημεία. Μόνο στο 14 κύκλο υπάρχει αισθητή διαφοροποίηση, η οποία προξένησε και τη διαφοροποίηση στη τιμή της τυπικής απόκλισης αλλά όχι της μέσης τιμής.

Ως προς τη φυσική ερμηνεία των αποτελεσμάτων της βελτιστοποίησης, όταν αντικειμενική συνάρτηση είναι οι απώλειες ολικής πίεσης σε στρωτή ροή, παρατηρείται το εξής φαινόμενο: δημιουργούνται κοιλότητες στην επιφάνεια του αγωγού, στις οποίες προκαλείται ανακυκλοφορία το ρευστού, πλέον η κύρια δέσμη της ροής δεν έρχεται σε επαφή με το τοίχωμα αλλά με το ίδιο το ρευστό, μειώνοντας έτσι σημαντικά τις απώλειες ολικής πίεσης λόγω τριβής.

Κεφάλαιο 9

Συμπεράσματα

Ο σκοπός αυτής της διπλωματικής εργασίας υπήρξε η ανάπτυξη της μεθόδου του pFOSM στο περιβάλλον του ελεύθερου λογισμικού OpenFOAM. Η μέθοδος αυτή, πραγματοποιεί αεροδυναμική βελτιστοποίηση μορφής σε προβλήματα με αβεβαιότητες. Στην ουσία πρόκειται για μία μέθοδο βελτιστοποίησης, που βασίζεται στην κλίση της αντικειμενικής συνάρτησης στιβαρού σχεδιασμού, από εκεί δημιουργείται η ανάγκη υπολογισμού δεύτερων b-c μεικτών παραγώγων. Για τον υπολογισμό αυτό, χρησιμοποιείται τεχνική προβολής εξισώσεων με την οποία επιτυγχάνεται ανεξαρτησία υπολογιστικού κόστους από το συνολικό πλήθος των μεταβλητών του προβλήματος. Τα συμπεράσματα τα οποία εξήχθησαν κατά τη διάρκεια αυτής της διπλωματικής εργασίας είναι τα ακόλουθα:

- Η μέθοδος του FOSM υπολογίζει μέση τιμή και τυπική απόκλιση με υπολογιστικό κόστος μόλις 2 IEP (Ισοδύναμες Επιλύσεις Ροής), το υπολογιστικό κόστος της μεθόδου είναι σταθερό και ανεξάρτητο του πλήθους των στοχαστικών μεταβλητών. Αυτό αποτελεί μεγάλο συγκριτικό πλεονέκτημα απέναντι σε μεθόδους όπως τα αναπτύγματα πολυωνυμικού χάους. Καθώς αυξάνουν οι στοχαστικές μεταβλητές, το υπολογιστικό κέρδος από τη χρήση της μεθόδου του FOSM μεγαλώνει, αυτό φαίνεται χαρακτηριστικά στο σχήμα 4.1. Το να εισαχθούν στη μοντελοποίηση στοιχεία γεωμετρικών αβεβαιοτήτων σε μια μετέπειτα ανάλυση, μπορεί να γίνει μόνο μέσω μεθόδου που βασίζεται στη θεωρία των στατιστικών ροπών, διότι με οποιαδήποτε άλλη προσέγγιση αυτό θα είναι εξαιρετικά ασύμφορο εξαιτίας του μεγάλου αριθμού αβέβαιων μεταβλητών που θα προκύψει.
- Η μέθοδος των προβολών που χρησιμοποιείται διενεργεί βελτιστοποίηση με το υπολογιστικό κόστος να είναι ανεξάρτητο τόσο του αριθμού των μεταβλητών σχεδιασμού όσο και των αβέβαιων μεταβλητών. Για κάθε κύκλο βελτιστοποίησης απαιτούνται 4 IEP. Η τεράστια οικονομία της μεθόδου αν και αυταπόδεικτη, καταδεικνύεται αν αναλογιστεί κανείς ότι 4 IEP είναι το

υπολογιστικό κόστος της μη-επεμβατικής μεθόδου μόνο και μόνο για τον υπολογισμό της μέσης τιμής και της τυπικής απόκλισης για δύο αβέβαιες μεταβλητές. Με το ίδιο υπολογιστικό κόστος, η μέθοδος του pFOSM υπολογίζει μέση τιμή και τυπική απόκλιση και πραγματοποιεί βελτιστοποίηση.

- Η μέθοδος του pFOSM απαιτεί τον υπολογισμό τριών διαφορετικών παραγώγων $\frac{\delta F}{\delta b_m}$, $\frac{\delta F}{\delta c_\mu}$ και των $b - c$ μεικτών παραγώγων επί διάνυσμα $\frac{\delta^2 F}{\delta b_m \delta c_\mu} z_\mu$. Ο κώδικας που δημιουργήθηκε σε περιβάλλον OpenFOAM και εφαρμόζει τη μέθοδο του pFOSM πιστοποιήθηκε ότι υπολογίζει και τις τρεις ομάδες ποσοτήτων με εξαιρετική ακρίβεια.
- Η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση της αντικειμενικής συνάρτησης υπολογίζονται με ακρίβεια στις δύο προσομοιώσεις που εξετάστηκαν. Η σύγκριση έγινε μεταξύ των μεθόδων FOSM, SOSM, μη επεμβατικού αναπτύγματος πολυωνυμικού χάρους 1^{ης} και 2^{ης} τάξης.
- Ως προς τα αποτελέσματα της βελτιστοποίησης για τις δύο μελέτες που διενεργήθηκαν προέκυψαν τα εξής: Και στις δύο μελέτες παρατηρείται παράλληλη πορεία των δύο μεγεθών μέσης τιμής και τυπικής απόκλισης. Δηλαδή, ενώ η βελτιστοποίηση ακολουθεί την πορεία που υποδεικνύει αποκλειστικά η παράγωγος της μέσης τιμής, μειώνεται τόσο η μέση τιμή (αναμενόμενο) όσο και η τυπική απόκλιση και αντιστρόφως. Οι βελτιστοποιημένες λύσεις που προκύπτουν ακολουθούν το ίδιο γεωμετρικό "μοτίβο", η φυσική δηλαδή του προβλήματος υπαγορεύει την παράλληλη πορεία των δύο μεγεθών κάτι το οποίο δεν ισχύει κατ' ανάγκη αλλά συμβαίνει στις συγκεκριμένες προσομοιώσεις. Η συμπεριφορά αυτή δεν επιτρέπει την παρουσίαση των αποτελεσμάτων σε διάγραμμα μετώπου Pareto, καθώς η διαφορετική επιλογή βαρών δεν έχει εκ του αποτελέσματος καμία σημασία.

9.0.1 Προτάσεις για Μελλοντική Έρευνα

- Πλέον υπάρχει κώδικας για υπολογισμό μέσης τιμής και τυπικής απόκλισης και μπορεί να χρησιμοποιηθεί χωρίς να προστίθεται επιπλέον υπολογιστικό κόστος σε οποιαδήποτε βελτιστοποίηση. Διευκολύνοντας έτσι την εύρεση προσομοιώσεων που να χρειάζεται η μέθοδος pFOSM και όπου τα μεγέθη μέσης τιμής και τυπικής απόκλισης να μην οδεύουν σε παρόμοιες βέλτιστες γεωμετρίες. Όταν δηλαδή διεξάγεται η "κλασική" βελτιστοποίηση μόνο για τη μέση τιμή, να μην παρατηρείται σταθερή ελάττωση και της τυπικής απόκλισης.
- Στις προσομοιώσεις τα αποτελέσματα του FOSM είναι πολύ καλά, υπολογίζοντας μέση τιμή και τυπική απόκλιση με μικρό σχετικό σφάλμα σε σύγκριση με μία εξακριβωμένη μέθοδο (μη-επεμβατικό ανάπτυγμα

πολυωνυμικού χάους δεύτερης τάξης), αυτό πιθανότατα συμβαίνει στις εν λόγω προσομοιώσεις και οφείλεται στη γραμμική σχέση μεταξύ αντικειμενικής συνάρτησης και στοχαστικών μεταβλητών. Αυτό προκύπτει ως συμπέρασμα αφού το Hessian μητρώο των δεύτερων παραγώγων ως προς τις στοχαστικές μεταβλητές $\frac{\delta^2 F}{\delta c_\mu \delta c_k}$ είναι σχεδόν μηδέν. Υπάρχουν όμως και προσομοιώσεις στις οποίες παρατηρείται σημαντική διαφορά ανάμεσα στα αντίστοιχα μοντέλα (επεμβατικού αναπτύγματος πολυωνυμικού χάους) πρώτης και δεύτερης τάξης [5]. Επομένως, για να επιτευχθεί ακρίβεια στον υπολογισμό μέσης τιμής και τυπικής απόκλισης που να είναι ανεξάρτητη από την επιλογή της προσομοίωσης, πρέπει να γίνει η αντίστοιχη μελέτη και προγραμματισμός για τη μέθοδο του SOSM.

- Τέλος, στη διπλωματική αυτή εργασία δεν εξετάστηκαν γεωμετρικές αβεβαιότητες. Σε μια επόμενη, η βασική πηγή αβεβαιότητας μπορεί να προέρχεται από τη γεωμετρία, το μεγάλο πλήθος στοχαστικών μεταβλητών που θα προκύψει θα καταστήσει τη μέθοδο ασύγκριτα συμφέρουσα.

Βιβλιογραφία

- [1] Ε.Μ. Παπουτοής-Κιαχαγιάς. *Συζυγείς Μέθοδοι για Τυρβώδεις Ροές, με Εφαρμογή στην Βελτιστοποίηση Μορφής ή Τοπολογίας και στο Στιβαρό Σχεδιασμό*. Διδακτορική Διατριβή, Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, Ε.Μ.Π., 2013.
- [2] Ε.Μ. Παπουτοής-Κιαχαγιάς. *Συζυγείς Μέθοδοι για το Στιβαρό Σχεδιασμό Αεροδυναμικών Μορφών με Υπολογισμό Τρίτων Παραγώγων. Εφαρμογή σε Μονοδιάστατους Αγωγούς*. Διπλωματική Εργασία, Ε.Μ.Π., Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών, Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, 2009.
- [3] Ι. Καββαδίας. *Η Συνεχής Συζυγής Μέθοδος για Μόνιμες και μη-Μόνιμες Τυρβώδεις Ροές με Έμφαση στην Ακρίβεια των Παραγώγων Ευαισθησίας*. Διδακτορική Διατριβή. Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών, Ε.Μ.Π., Αθήνα, 2015
- [4] Κ.Χ Γιαννάκογλου, *Μέθοδοι Βελτιστοποίησης στην Αεροδυναμική*. ΕΜΠ, 2005.
- [5] Αναστάσιος Παπαγεωργίου. *Πρόβλεξη Ασυμπιέστων Ροών με Αβεβαιότητες με την Επεμβατική Μέθοδο Αναπτύγματος Πολυωνυμικού Χάους. Μαθηματική Διατύπωση, Προγραμματισμός και Εφαρμογές σε Περιβάλλον OpenFOAM*. Διπλωματική Εργασία, Ε.Μ.Π., Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών, Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, 2017.
- [6] Γ. Πάμπαλης *Υλοποίηση αναπτύγματος πολυωνυμικού χάους στον αεροδυναμικά στιβαρό σχεδιασμό. Βελτιστοποίηση με εξελικτικούς αλγορίθμους υπό στοχαστικές εισόδους*. Διπλωματική Εργασία. Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, Ε.Μ.Π., 2015.
- [7] Νυκτερή Γ. *Προσομοίωση Προβλημάτων με Αβεβαιότητες - Επεμβατικές Μέθοδοι Πολυωνυμικού Χάους. Διατύπωση, Προγραμματισμός και Εφαρμογές στην Ασυμπιέστη Ψευδο-1Δ Ροή*. Διπλωματική Εργασία. Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, Ε.Μ.Π., 2016.
- [8] Α.Σ. Ζυμάρης, *Συζυγείς μέθοδοι για το σχεδιασμό μορφών με βέλτιστη αεροδυναμική συμπεριφορά σε στρωτές και τυρβώδεις ροές*. Διδακτορική διατριβή, Ε.Μ.Π., Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών, Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, 2010.
- [9] Ε.Μ. Papoutsis-Kiachagias, D.I. Papadimitriou and K.C. Giannakoglou. *Discrete and Continuous Adjoint Methods in Aerodynamic Robust Design*

Problems, ACFD and Optimization. An ECCOMAS Thematic Conference. Antalya, Turkey, 23-25 May 2011

- [10] *OpenFOAM, The Open Source CFD Toolbox, User Guide, Edition 1.6.* July 2009.
- [11] F. Moukalled, L. Mangani, M. Darwish, Springer, *The Finite Volume Method in Computational Fluid Dynamics An Advanced Introduction with OpenFOAM and Matlab*, 2016, English.
- [12] D.I. Papadimitriou, K.C. Giannakoglou, *Direct, Adjoint and Mixed Approaches for the Computation of Hessian in Airfoil Design Problems.* International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol. 53, pp. 455-469, 2007.
- [13] D.I. Papadimitriou, K.C. Giannakoglou, Total Pressure Losses Minimization in Turbomachinery Cascades, Using a New Continuous Adjoint Formulation. Proc. IMechE, Part A: Journal of Power and Energy (Special Issue on Turbomachinery). Vol. 221, Pages 865-872, 2007.
- [14] M.B. Giles, N.A. Pierce. Discrete and Continuous Adjoint Methods in Aerodynamic Robust Design Problems. CFD and Optimisation 2011. Oxford University Computing Laboratory, 1997.
- [15] Lu, X. and Li, H. X. *Perturbation theory based robust design under model uncertainty.* Journal of Mechanical Design, 131(11), 2009.