



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών
Τομέας Ρευστών
Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών
Μονάδα Παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής
& Βελτιστοποίησης

Παραμετροποίηση Αεροτομών με Συναρτήσεις Κλάσης
και Μορφής – Εφαρμογές στην Αεροδυναμική
Βελτιστοποίηση Μορφής

Διπλωματική Εργασία

Φώτης Παπαδόπουλος

Επιβλέπων: Κυριάκος Χ. Γιαννάκογλου , Καθηγητής ΕΜΠ

Αθήνα, 2025



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών
Τομέας Ρευστών
Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών
Μονάδα Παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής
& Βελτιστοποίησης

Παραμετροποίηση Αεροτομών με Συναρτήσεις Κλάσης και Μορφής – Εφαρμογές στην Αεροδυναμική Βελτιστοποίηση Μορφής

Διπλωματική Εργασία

Φώτης Παπαδόπουλος

Επιβλέπων: Κυριάκος Χ. Γιαννάκογλου , Καθηγητής ΕΜΠ

Περίληψη

Η διπλωματική αυτή εργασία επικεντρώνεται στην παραμετροποίηση αεροτομών με χρήση της μεθόδου Μετασχηματισμού Κλάσης Μορφής (Class Shape Transformation-CST) και στην εφαρμογή της στην αεροδυναμική βελτιστοποίηση μορφής. Παρουσιάζεται η μαθηματική έκφραση της μεθόδου CST, η ανάλυση των συναρτήσεων κλάσης και μορφής, καθώς και η επιρροή τους στη γεωμετρία της αεροτομής. Αναπτύχθηκε αλγόριθμος βέλτιστης προσέγγισης του σχήματος αεροτομών σε γλώσσα Fortran 90, ο οποίος προσεγγίζει δοσμένες αεροτομές με τη μέθοδο CST. Στη συνέχεια, ενσωματώθηκε η CST παραμετροποίηση στο λογισμικό PUMA, που αναπτύχθηκε στη ΜΠΤΡ&Β του ΕΜΠ, με στόχο την επίλυση προβλημάτων βελτιστοποίησης μορφής. Πραγματοποιήθηκαν συγκριτικές μελέτες σε διαφορετικές αεροτομές (NACA 0012, NACA 4415 και NLF 0416), χρησιμοποιώντας διαφορετικές μεθόδους παραμετροποίησης (Bezier, NURBS), παράλληλα με τη CST παραμετροποίηση. Όλες οι βελτιστοποιήσεις πραγματοποιήθηκαν με τη συνεχή συζυγή μέθοδο, ενώ στις περιπτώσεις της CST παραμετροποίησης εφαρμόστηκε ο κανόνας της αλυσίδας για τον υπολογισμό των παραγώγων ευαισθησίας. Αναλυτικότερα, δημιουργήθηκε λογισμικό σε Fortran 90, όπου υπολογίζει τις παραγώγους του κάθε κόμβου της αεροτομής ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού και στη συνέχεια, μέσω του κανόνα τις αλυσίδας, επικοινωνεί με το λογισμικό PUMA, ώστε να υπολογιστούν οι παράγωγοι ευαισθησίας της συνάρ-

της στόχου. Τα αποτελέσματα δείχνουν τη σημαντική επίδραση της επιλεγμένης παραμετροποίησης στην ακρίβεια και στην αποτελεσματικότητα της βελτιστοποίησης, ενώ προτείνονται κατευθύνσεις για μελλοντική έρευνα.



National Technical University of Athens
School of Mechanical Engineering
Fluids Department
Parallel CFD & Optimization Unit

Airfoil Parametrization Using Class and Shape Functions – Applications in Aerodynamic Shape Optimization

Diploma Thesis

Fotis Papadopoulos

Advisor: Kyriakos C.Giannakoglou, Professor NTUA

Abstract

This diploma thesis focuses on the parameterization of airfoils using the Class Shape Transformation (CST) method and its application to aerodynamic shape optimization. The mathematical formulation of the CST method is presented, along with an analysis of the class and shape functions and their influence on the airfoil geometry. As part of this work, an algorithm for optimal approximation of airfoil shapes was developed in Fortran 90, enabling the reconstruction of given airfoils using the CST method. Subsequently, the CST parameterization was integrated into the PUMA software, developed by the PCOpt/NTUA, with the aim of solving shape optimization problems. Comparative studies were carried out on different airfoils (NACA 0012, NACA 4415, and NLF 0416), using various parameterization methods (Bezier, NURBS), alongside the CST parameterization. All optimizations were performed using the continuous adjoint method. In the CST parameterization cases, the chain rule was applied to compute sensitivity derivatives. Specifically, Fortran 90 software was developed to compute the derivatives of each airfoil node with respect to the design variables and, through the chain rule, communicate with the PUMA software to compute the sensitivities of the objective function. The results demonstrate the significant impact of the chosen parameterization on the accuracy and efficiency of the optimization process, and directions for future research are proposed.

Περιεχόμενα

Περιεχόμενα	i
1 Εισαγωγή	1
1.1 Εισαγωγή στην Αεροδυναμική Βελτιστοποίηση Μορφής	1
1.2 Κατηγορίες Προβλημάτων Βελτιστοποίησης	1
1.3 Μέθοδοι Παραμετροποίησης Αεροτομών	2
1.4 Δομή της Διπλωματικής Εργασίας	4
2 CST Παραμετροποίηση	6
2.1 Μαθηματική Έκφραση	6
2.1.1 Συνάρτηση Κλάσης	7
2.1.2 Συνάρτηση Μορφής	9
2.2 Μεταβλητές Σχεδιασμού	14
3 Βέλτιστη Προσέγγιση Σχήματος Αεροτομής	16
3.1 Προσέγγιση Αεροτομών με CST Παραμετροποίηση	16
3.1.1 Παράγωγοι Ευαισθησίας	20
3.1.2 Εσσιανό Μητρώο	22
3.2 Αλγόριθμος Επίλυσης	25
3.3 Παραδείγματα Προσέγγισης Αεροτομών	26
3.3.1 Αεροτομή NACA 0012	27
3.3.2 Αεροτομή NACA 4415	31
3.3.3 Αεροτομή NLF 0416	38
4 Ένταξη της CST Παραμετροποίησης στον Κύκλο Βελτιστοποίησης	45
4.1 Βήματα πριν την Έναρξη του Κύκλου Βελτιστοποίησης	45
4.2 Βήματα εντός του Κύκλου Βελτιστοποίησης	46
4.3 Διάγραμμα Ροής	48
5 Βελτιστοποίηση Μορφής Αεροτομής NACA 0012	50
5.1 Περιγραφή Προβλήματος	50
5.2 Βελτιστοποίηση με Καμπύλες Bezier	51
5.3 Βελτιστοποίηση με CST Παραμετροποίηση	53
5.4 Αποτελέσματα	56

6	Βελτιστοποίηση Μορφής Αεροτομής NACA4415	59
6.1	Περιγραφή Προβλήματος	59
6.2	Βελτιστοποίηση με Περιορισμό $C_M = C_{M,BL}$	60
6.2.1	Παραμετροποίηση με Καμπύλες Bezier	60
6.2.2	Παραμετροποίηση με CST	64
6.2.3	Αποτελέσματα	68
6.3	Βελτιστοποίηση με Περιορισμό $C_M = 0$	70
6.3.1	Παραμετροποίηση με Καμπύλες Bezier	71
6.3.2	Παραμετροποίηση με CST	74
6.3.3	Αποτελέσματα	78
7	Βελτιστοποίηση Μορφής Αεροτομής NLF0416	81
7.1	Περιγραφή Προβλήματος	81
7.2	Βελτιστοποίηση με Ογκομετρικές Καμπύλες NURBS	82
7.3	Βελτιστοποίηση με CST Παραμετροποίηση	84
7.4	Αποτελέσματα	86
8	Συμπεράσματα	90
8.1	Ανακεφαλαίωση	90
8.2	Συμπεράσματα	90
8.3	Μελλοντικές Προτάσεις Έρευνας	91
	Βιβλιογραφία	92

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

1.1 Εισαγωγή στην Αεροδυναμική Βελτιστοποίηση Μορφής

Ο όρος αεροδυναμική βελτιστοποίηση μορφής (aerodynamic shape optimisation), αναφέρεται στην κατάλληλη τροποποίηση της γεωμετρίας ενός στερεού σώματος που περιβάλλεται από ροή ρευστού, έτσι ώστε να ελαχιστοποιείται ή μεγιστοποιείται μία ποσότητα που ονομάζεται Συνάρτηση Στόχου (Objective Function), F . Παράδειγμα συνάρτησης στόχου είναι η δύναμη που ασκείται από το ρευστό στο στερεό σώμα σε κάποια συγκεκριμένη διεύθυνση, όπως η άνωση (lift) και η αντίσταση (drag). Η γεωμετρία του υπό βελτιστοποίηση σώματος περιγράφεται από ένα σύνολο μεταβλητών $\vec{b}$, οι οποίες ονομάζονται μεταβλητές σχεδιασμού (design variables). Οι τιμές των μεταβλητών σχεδιασμού καθορίζουν τη γεωμετρία του στερεού σώματος. Επομένως, ζητούμενο της βελτιστοποίησης είναι η εύρεση εκείνων των τιμών των μεταβλητών σχεδιασμού $\vec{b}$ που ελαχιστοποιούν τη συνάρτηση F .

1.2 Κατηγορίες Προβλημάτων Βελτιστοποίησης

Τα προβλήματα βελτιστοποίησης διακρίνονται κυρίως ως προς δύο κριτήρια. Το πρώτο κριτήριο αφορά το πλήθος των συναρτήσεων στόχου, ενώ το δεύτερο αφορά τις μεθόδους βελτιστοποίησης.

Αρχικά, με κριτήριο το πλήθος των συναρτήσεων στόχου, F , τα προβλήματα βελτιστοποίησης διακρίνονται σε προβλήματα ενός στόχου (Single Objective Optimisation - SOO) και σε πολλών στόχων (Multi Objective Optimisation - MOO) [1].

Επίσης, με βάση τις μεθόδους βελτιστοποίησης, υπάρχουν δύο μεγάλες κατηγορίες μεθόδων βελτιστοποίησης, οι στοχαστικές και οι αιτιοκρατικές. Οι στοχαστικές (stochas-

tic) [2, 3] μέθοδοι λειτουργούν αξιολογώντας ένα μεγάλο πλήθος συνδυασμών των μεταβλητών σχεδιασμού $\vec{b}$, και των τιμών της συνάρτησης κόστους F , στις οποίες αυτοί αντιστοιχούν. Η επιλογή των συνδυασμών αυτών οφείλεται σε κάποιο βαθμό σε οργανωμένη τυχαιότητα. Αυτός είναι ο λόγος που οι μέθοδοι αυτές ονομάζονται στοχαστικές. Η πιο γνωστή κατηγορία στοχαστικών μεθόδων βελτιστοποίησης είναι οι Εξελικτικοί Αλγόριθμοι (Evolutionary Algorithms - EAs) στους οποίους η βέλτιστη επιλογή των μεταβλητών σχεδιασμού γίνεται μέσα από διαδικασίες οι οποίες μιμούνται τις διαδικασίες της φυσικής εξέλιξης [1, 4, 5]. Η δεύτερη μεγάλη κατηγορία μεθόδων βελτιστοποίησης, οι αιτιοκρατικές (deterministic) [1] απαιτούν τον υπολογισμό των παραγώγων της συνάρτησης στόχου ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού. Μέσω μίας επαναληπτικής διαδικασίας, οι αιτιοκρατικές μέθοδοι κατευθύνουν τη λύση με τρόπο ώστε να μειώνουν τις παραγώγους ευαισθησίας σε κάθε κύκλο, με σκοπό να μηδενιστούν, επιτυγχάνοντας έτσι την βέλτιστη λύση. Η πιο απλή μέθοδος αιτιοκρατικής βελτιστοποίησης είναι η Μέθοδος της Απότομης Καθόδου (Steepest Descent). Σύμφωνα με τη μέθοδο αυτή, οι τιμές των μεταβλητών σχεδιασμού σε κάθε νέο κύκλο βελτιστοποίησης (optimisation cycle) προκύπτουν από αυτές του προηγούμενου κύκλου από τη σχέση :

$$\vec{b}_{new} = \vec{b}_{old} - \eta \frac{dF}{d\vec{b}_{old}} \quad (1.1)$$

όπου η είναι θετική παράμετρος που επιλέγεται από τον χρήστη και ονομάζεται βήμα της βελτιστοποίησης. Άλλες γνωστές αιτιοκρατικές μέθοδοι, είναι η Μέθοδος των Συζυγών Κλίσεων (Conjugate Gradients Method) [6], η Μέθοδος Newton (Newton's method) [7] και παραλλαγές αυτής (Quasi-Newton Methods) [8].

1.3 Μέθοδοι Παραμετροποίησης Αεροτομών

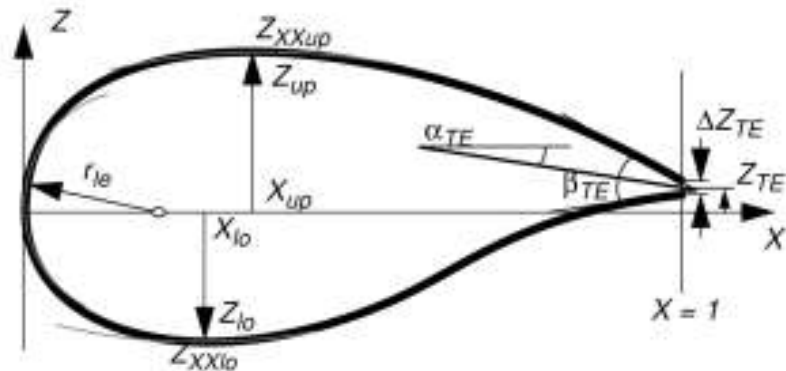
Κατά την αεροδυναμική βελτιστοποίηση μορφής απαιτείται η επιλογή μίας μεθόδου παραμετροποίησης μέσω της οποίας καθορίζονται οι μεταβλητές σχεδιασμού $\vec{b}$. Συνεπώς, αποτελεί μία εξαιρετικά σημαντική επιλογή κατά τη διαδικασία του σχεδιασμού, καθώς επηρεάζει τον χώρο των πιθανών λύσεων, την ακρίβεια της τελικής λύσης και τις απαιτήσεις σε υπολογιστική ισχύ. Όσον αφορά την παραμετροποίηση αεροτομών, έχουν αναπτυχθεί αρκετές μέθοδοι, με τις κυριότερες να είναι η Ελεύθερη Παραμόρφωση Μορφής (Free Form Deformation - FFD), οι καμπύλες NURBS (Non-Uniform Rational B-Splines), η μέθοδος PARSEC καθώς και η μέθοδος Μετασχηματισμού Κλάσης Μορφής (Class Shape Transformation - CST).

Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της Ελεύθερης Παραμόρφωσης Μορφής η τροποποίηση της γεωμετρίας δεν πραγματοποιείται με την αλλαγή των γεωμετρικών παραμέτρων της, αλλά με παραμόρφωση ενός πλέγματος ελέγχου μέσα στον οποίο βρίσκεται το αεροδυναμικό σώμα [9]. Ουσιαστικά, η τεχνική της Ελεύθερης Παραμόρφωσης Μορφής συσχετίζει τις συντεταγμένες των σημείων που περιγράφουν το αεροδυναμικό σώμα με

τις συντεταγμένες των σημείων του πλέγματος ελέγχου (οι μετατοπίσεις των οποίων αποτελούν τις μεταβλητές σχεδιασμού $\vec{b}$ με αποτέλεσμα, ο χρήστης να μην διαχειρίζεται απευθείας το σώμα, αλλά αντίθετα το πλέγμα ελέγχου.

Η παραμετροποίηση με καμπύλες NURBS είναι μια ευρέως χρησιμοποιούμενη τεχνική που παρέχει έναν ευέλικτο τρόπο ορισμού σύνθετων σχημάτων [10]. Βασίζεται στη θεωρία των καμπυλών B-Spline και αντίθετα με τη μέθοδο της Ελεύθερης Παραμόρφωσης Μορφής, χρησιμοποιώντας καμπύλες NURBS, ο χρήστης διαχειρίζεται απευθείας το σώμα. Επιπλέον, η χρήση καμπυλών NURBS επιτυγχάνει ομαλές μεταβάσεις μεταξύ διαφορετικών περιοχών του σχήματος και παρέχει μεγάλη ακρίβεια στην αναπαράσταση, για αυτό και έχει υιοθετηθεί από πολλά πακέτα CAD.

Η παραμετροποίηση PARSEC αφορά αποκλειστικά περιπτώσεις αεροτομών και χρησιμοποιεί ένα σύνολο γεωμετρικών παραμέτρων για να περιγράψει βασικά χαρακτηριστικά της αεροτομής, προσφέροντας μια προσέγγιση με σχετικά λίγες μεταβλητές σχεδιασμού. Υπάρχουν διάφορες εκδοχές της μεθόδου PARSEC, με την πιο διαδεδομένη να αποτελείται από 11 μεταβλητές σχεδιασμού, όπως φαίνεται στο σχήμα 1.1.



Σχήμα 1.1: Γεωμετρικά χαρακτηριστικά αεροτομής που λειτουργούν ως μεταβλητές σχεδιασμού στην παραμετροποίηση PARSEC [11].

Η μαθηματική έκφραση της μεθόδου παρουσιάζεται λεπτομερώς στα [1, 11].

Τέλος, η CST παραμετροποίηση προτάθηκε στην εργασία [12] και αποτελεί μία μέθοδο απεικόνισης 2Δ και 3Δ γεωμετρικών σχημάτων. Η διπλωματική εργασία μελετά την εφαρμογή της μεθόδου στην περιγραφή αεροτομών, οπότε παρουσιάζεται αποκλειστικά η διδιάστατη εκδοχή της. Με τη CST παραμετροποίηση, η γεωμετρία της αεροτομής μετασχηματίζεται με τέτοιον τρόπο, ώστε να περιγράφεται από μία μή γραμμική σχέση μεταξύ της Συνάρτησης Κλάσης (Class Function) και της Συνάρτησης Μορφής

(Shape Function). Λεπτομέρειες, σχετικά με τη μαθηματική έκφραση της μεθόδου, τις συναρτήσεις κλάσης και μορφής, καθώς και τον ρόλο τους στην τελική γεωμετρία της αεροτομής θα παρουσιαστούν στη συνέχεια.

Σκοπός της διπλωματικής εργασίας είναι η παρουσίαση της μεθόδου και η εφαρμογή της στην κατασκευή αεροτομών, καθώς επίσης και η ένταξή της στη διαδικασία αεροδυναμικής βελτιστοποίησης της μορφής τους. Πιο συγκεκριμένα, θα παρουσιαστεί αρχικά, ένας αλγόριθμος βέλτιστης ταύτισης του σχήματος αεροτομών κατασκευασμένος σε Fortran 90 με σκοπό την προσέγγισή τους και την εύρεση του αρχικού διανύσματος των μεταβλητών σχεδιασμού $\vec{b}$. Στη συνέχεια, θα περιγραφεί το πλαίσιο ένταξης της CST παραμετροποίησης στον αλγόριθμο βελτιστοποίησης, μαζί με τα επιπλέον λογισμικά που δημιουργήθηκαν για τον σκοπό αυτόν. Τέλος, θα ακολουθήσουν διάφορες περιπτώσεις βελτιστοποίησης των συγκεκριμένων αεροτομών που προσεγγίστηκαν από τον αλγόριθμο αντίστροφου σχεδιασμού. Στις διάφορες περιπτώσεις βελτιστοποίησης θα χρησιμοποιηθεί η συνεχής συζυγής μέθοδος (continuous adjoint method) [13, 14], χρησιμοποιώντας τόσο τη CST παραμετροποίηση, όσο και άλλες μεθόδους που αναφέρθηκαν προηγουμένως, ώστε να προκύψουν συγκριτικά συμπεράσματα. Όσον αφορά το κομμάτι της υπολογιστικής ρευστοδυναμικής (CFD) για την επίλυση της ροής και την επίλυση των συζυγών εξισώσεων για τον υπολογισμό των παραγώγων ευαισθησίας, θα χρησιμοποιηθεί το λογισμικό PUMA [15, 16] που έχει αναπτυχθεί στη ΜΠΥΡ&Β του ΕΘΣ της Σχολής Μηχανολόγων Μηχανικών του ΕΜΠ.

1.4 Δομή της Διπλωματικής Εργασίας

Η δομή της διπλωματικής εργασίας είναι:

- Κεφάλαιο 2: Περιγράφει το μαθηματικό πλαίσιο της CST παραμετροποίησης, τα δομικά της στοιχεία που αποτελούνται από τη συνάρτηση κλάσης και τη συνάρτηση μορφής, καθώς επίσης και την επίδρασή τους στην τελική γεωμετρία της αεροτομής.
- Κεφάλαιο 3: Αναφέρεται στον αλγόριθμο βέλτιστης προσέγγισης σχήματος αεροτομής που δημιουργήθηκε και παρουσιάζει την εφαρμογή του σε διάφορες περιπτώσεις αεροτομών.
- Κεφάλαιο 4: Περιγράφει τις επεμβατικές ενέργειες που πραγματοποιήθηκαν στο λογισμικό PUMA, ώστε να ενταχθεί η CST παραμετροποίηση στον κύκλο βελτιστοποίησης.
- Κεφάλαιο 5: Παρουσιάζει συγκριτικά τα αποτελέσματα της αεροδυναμικής βελτιστοποίησης μορφής της αεροτομής NACA 0012, χρησιμοποιώντας τη CST παραμετροποίηση και καμπύλες Bezier.
- Κεφάλαιο 6: Παρουσιάζει συγκριτικά τα αποτελέσματα της αεροδυναμικής βελτιστοποίησης μορφής της αεροτομής NACA 4415 χρησιμοποιώντας τη CST παρα-

μετροποίηση και καμπύλες Bezier.

- Κεφάλαιο 7: Παρουσιάζει συγκριτικά τα αποτελέσματα της αεροδυναμικής βελτιστοποίησης μορφής της αεροτομής NLF 0416 χρησιμοποιώντας, τη CST παραμετροποίηση και ογκομετρικές καμπύλες NURBS.
- Κεφάλαιο 8: Πραγματοποιεί ανακεφαλαίωση της εργασίας και συνοψίζει τα βασικά συμπεράσματα.

Κεφάλαιο 2

CST Παραμετροποίηση

Στο κεφάλαιο αυτό, περιγράφεται με λεπτομέρεια η CST παραμετροποίηση, η μαθηματική της έκφραση, καθώς και ο ρόλος των συναρτήσεων κλάσης και μορφής στη δημιουργία της αεροτομής.

2.1 Μαθηματική Έκφραση

Με τη CST παραμετροποίηση, κάθε πλευρά της αεροτομής μοντελοποιείται χωριστά. Η μαθηματική έκφραση της μεθόδου για την πλευρά υπερπίεσης (ps) και υποπίεσης (ss) μίας αεροτομής είναι αντίστοιχα:

$$y_{ps}(x) = C_{N_2,ps}^{N_1,ps}(x)S_{ps}(x) + x\Delta y_{TE} \quad (2.1)$$

$$y_{ss}(x) = C_{N_2,ss}^{N_1,ss}(x)S_{ss}(x) + x\Delta y_{TE} \quad (2.2)$$

όπου

$y(x) = y/c$ είναι η αδιάστατη συντεταγμένη της αεροτομής στον άξονα y .

$x = x/c$ είναι η αδιάστατη συντεταγμένη της αεροτομής στον άξονα x .

$\Delta y_{TE} = y_{TE}/c$ είναι το αδιάστατο πάχος της ακμής εκφυγής (Trailing Edge).

$C_{N_2}^{N_1}(x)$ είναι η συνάρτηση κλάσης (Class Function), η οποία ορίζει την καμπυλότητα των ακμών προσβολής και εκφυγής.

$S(x)$ είναι η συνάρτηση μορφής (Shape Function), η οποία παρέχει τοπικό έλεγχο κατά μήκος της αεροτομής.

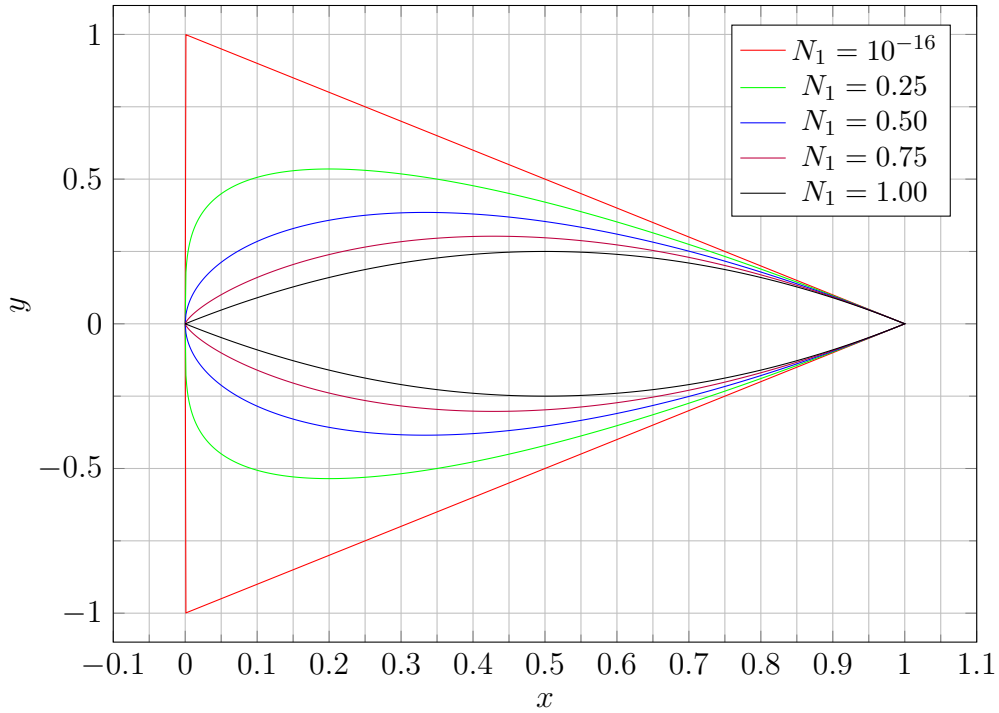
Στη συνέχεια, θα παρουσιαστούν με λεπτομέρεια η συνάρτηση κλάσης και η συνάρτηση μορφής, καθώς και θα διερευνηθεί ο ρόλος τους στην κατασκευή της αεροτομής.

2.1.1 Συνάρτηση Κλάσης

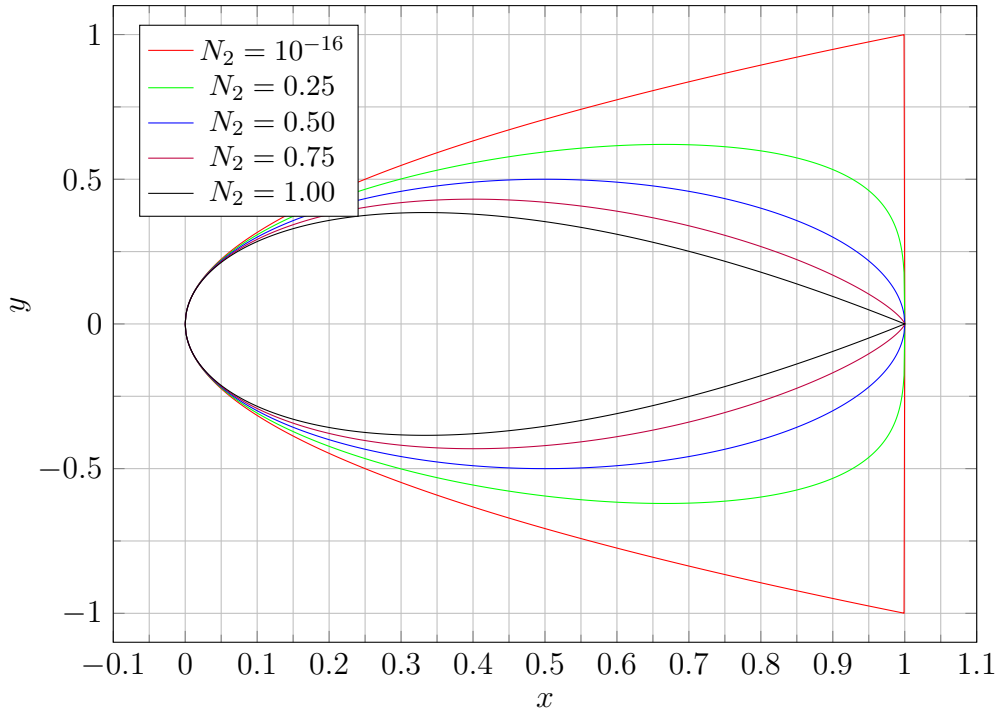
Η συνάρτηση κλάσης για την κάθε πλευρά της αεροτομής, δίνεται από τη σχέση:

$$C_{N_2}^{N_1}(x) = x^{N_1}(1-x)^{N_2} \quad (2.3)$$

όπου N_1 ο εκθέτης που καθορίζει τη συμπεριφορά της γεωμετρίας κοντά στην ακμή προσβολής και N_2 ο εκθέτης που προσδιορίζει τη συμπεριφορά της γεωμετρίας κοντά στην ακμή εκφυγής, αντίστοιχα. Αξίζει να δοθεί έμφαση στην επίδραση που έχουν οι εκθέτες N_1 και N_2 στην κατασκευή της αεροτομής. Θεωρώντας σταθερή συνάρτηση μορφής $S(x) = 1$ και μηδενικό αδιάστατο πάχος της ακμής εκφυγής $\Delta y_{TE} = 0$, τα σχήματα 2.1 και 2.2 παρουσιάζουν γεωμετρίες που προκύπτουν για διαφορετικές τιμές των εκθετών N_1 και N_2 .



Σχήμα 2.1: Γεωμετρικά σχήματα για διάφορες τιμές του εκθέτη N_1 , σταθερή τιμή του εκθέτη $N_2 = 1$ και σταθερή συνάρτηση μορφής $S(x) = 1$.

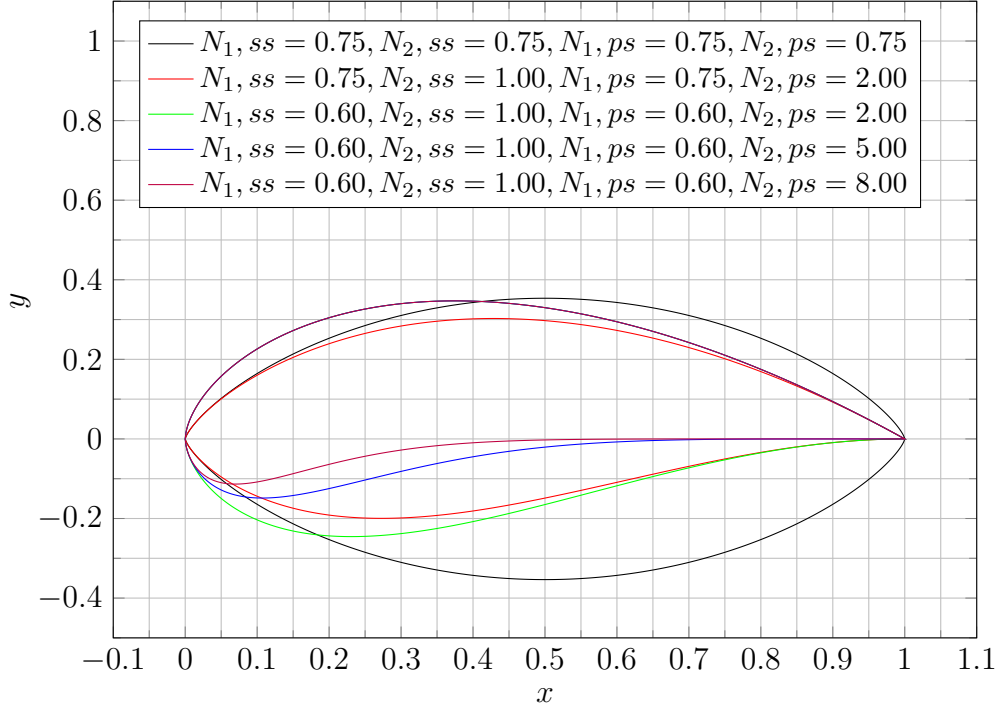


Σχήμα 2.2: Γεωμετρικά σχήματα για διάφορες τιμές του εκθέτη N_2 , σταθερή τιμή του εκθέτη $N_1 = 0.5$ και σταθερή συνάρτηση μορφής $S(x) = 1$.

Αρχικά το σχήμα 2.1 απεικονίζει την επίδραση του εκθέτη N_1 στην ακμή προσβολής. Διατηρώντας σταθερή την τιμή του εκθέτη $N_2 = 1$, φαίνεται ότι όσο αυξάνει ο εκθέτης N_1 από την τιμή 0 προς την τιμή 1 τόσο σταδιακά στρογγυλεύει η ακμή προσβολής. Μία χαρακτηριστική αεροτομή που παρουσιάζεται στο σχήμα με μαύρο χρώμα είναι η αμφίκυρτη (biconvex) αεροτομή για $N_1 = 1$, $N_2 = 1$. Στη συνέχεια, το σχήμα 2.2 απεικονίζει την επίδραση του εκθέτη N_2 στην ακμή εκφυγής. Διατηρώντας σταθερή την τιμή του εκθέτη $N_1 = 0.5$, φαίνεται ότι όσο μειώνεται ο εκθέτης N_2 από την τιμή 1 προς την τιμή 0 παρατηρείται η ίδια συμπεριφορά με προηγουμένως για την ακμή εκφυγής αυτή τη φορά. Επομένως, παρόλο που οι εκθέτες N_1 και N_2 κάνουν το ίδιο πράγμα, είναι ένας έμμεσος τρόπος προσδιορισμού της ακτίνας της ακμής προσβολής και της κλίσης της ακμής εκφυγής. Επιπλέον μία χαρακτηριστική αεροτομή που παρουσιάζεται στο σχήμα με μπλέ χρώμα είναι η ελλειπτική αεροτομή για $N_1 = 0.5$, $N_2 = 0.5$ και πήρε το όνομά της επειδή το σχήμα της ταυτίζεται με μία έλλειψη.

Όπως φαίνεται λοιπόν από τα σχήματα 2.1 και 2.2, ένα ευρύ φάσμα αεροτομών και γενικότερα γεωμετρικών σχημάτων μπορούν να κατασκευαστούν από τη συνάρτηση κλάσης. Το φάσμα αυτό ξεκινά από το τετράγωνο για $N_1 = 0$, $N_2 = 0$ και καταλήγει στην αμφίκυρτη αεροτομή για $N_1 = 1$, $N_2 = 1$, αντίστοιχα. Φυσικά αυτό δεν είναι το πλήρες φάσμα, καθώς οι εκθέτες N_1, N_2 μπορούν να πάρουν τιμές και εκτός του εύρους $[0, 1]$. Το σχήμα 2.3 παρουσιάζει κάποιες αεροτομές για τιμές $N_2 > 1$ και σταθερές τιμές του εκθέτη $N_1 = 0.6$ και $N_1 = 0.75$. Επίσης, με μαύρο χρώμα απεικονίζει την

Sears-Haack αεροτομή για $N_1 = 0.75, N_2 = 0.75$.



Σχήμα 2.3: Γεωμετρικά σχήματα για διάφορες τιμές των εκθετών N_1, N_2 και σταθερή συνάρτηση μορφής $S(x) = 1$.

Φαίνεται, λοιπόν, ότι μόνο με τη χρήση της συνάρτησης κλάσης μπορούν να παραχθούν πολλές διαφορετικές αεροτομές ή γενικότερα γεωμετρικά σχήματα.

2.1.2 Συνάρτηση Μορφής

Η μαθηματική έκφραση της συνάρτησης μορφής για κάθε πλευρά της αεροτομής είναι:

$$S(x) = \sum_{i=0}^{BPO} A_i B_i^{BPO}(x) \quad (2.4)$$

όπου

A_i είναι οι συντελεστές των πολυωνύμων Bernstein

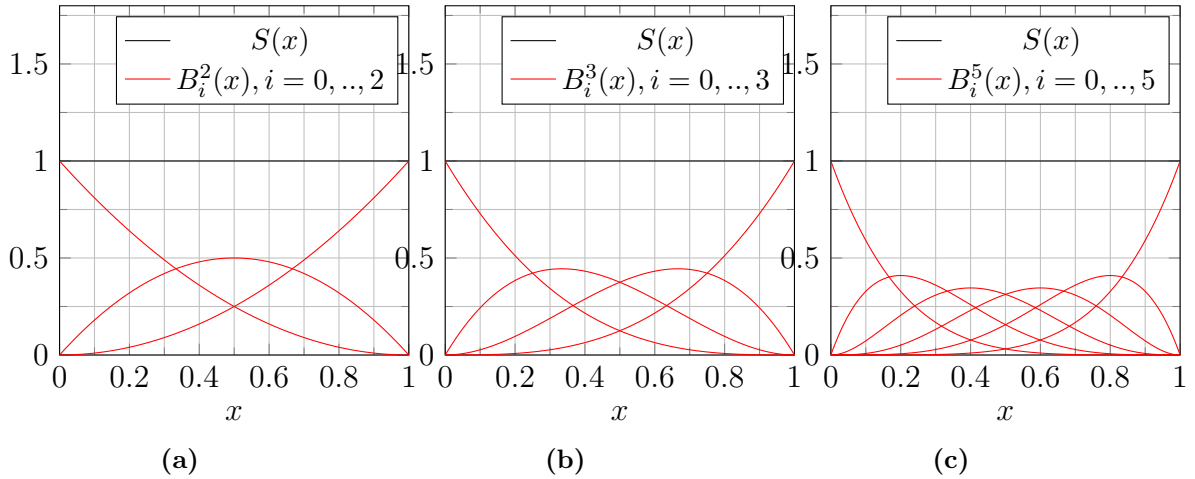
$B_i^{BPO}(x)$ είναι τα πολυώνυμα Bernstein τάξης BPO

Η αναλυτική έκφραση των πολυωνύμων Bernstein είναι:

$$B_i^{BPO}(x) = K_i^{BPO} x^i (1-x)^{BPO-i} \quad (2.5)$$

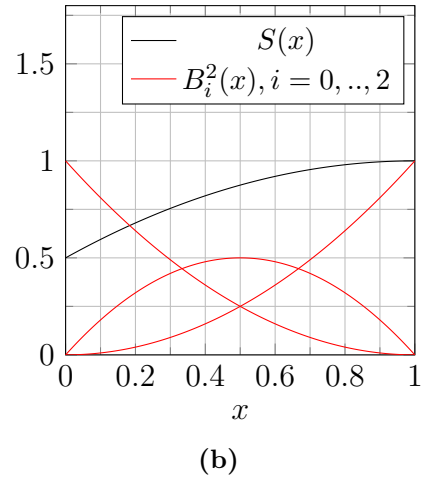
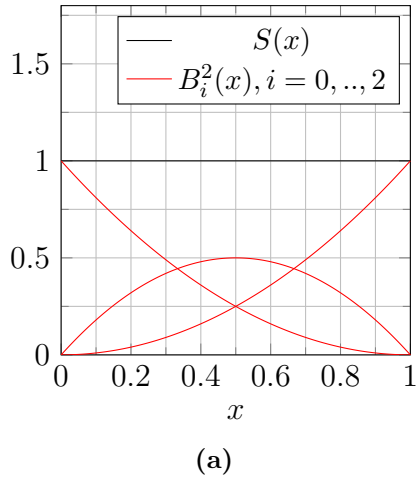
$$K_i^{BPO} = \binom{BPO}{i} = \frac{BPO!}{i!(BPO-i)!} \quad (2.6)$$

Για να γίνει κατανοητή η επίδραση της συνάρτησης μορφής στη γεωμετρία της αεροτομής, αξίζει να δοθεί έμφαση στον τρόπο με τον οποίο κατασκευάζεται. Για αυτόν τον λόγο θα παρουσιαστεί αρχικά, η πιο απλή συνάρτηση μορφής που είναι η μοναδιαία ($S(x) = 1$). Η μοναδιαία συνάρτηση μορφής παράγεται, θέτοντας τους συντελεστές A_i της εξίσωσης (2.4) ίσους με τη μονάδα. Αυτό συμβαίνει εξαιτίας μίας χαρακτηριστικής ιδιότητας που έχουν τα πολυώνυμα Bernstein σύμφωνα με την οποία, το άθροισμά τους ισούται με τη μονάδα για κάθε τάξη. Στο παρακάτω σχήμα 2.4, παρουσιάζονται τα πολυώνυμα 2^{ns} , 3^{ns} και 5^{ns} τάξης αντίστοιχα, καθώς και η παραγόμενη συνάρτηση μορφής.

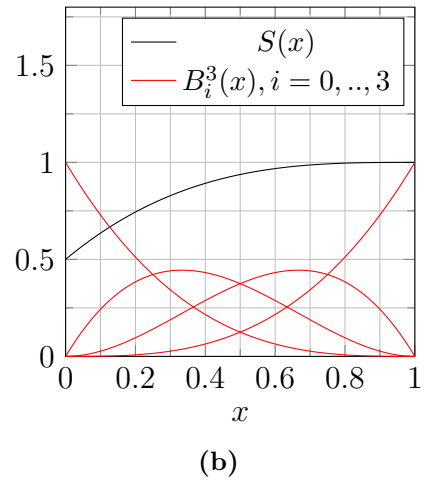
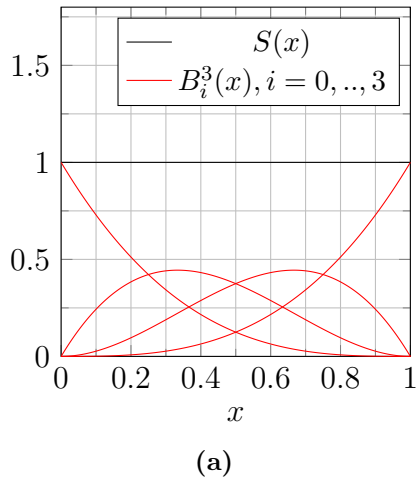


Σχήμα 2.4: Πολυώνυμα Bernstein: (a) 2^{ns} τάξης, (b) 3^{ns} τάξης, (c) 5^{ns} τάξης.

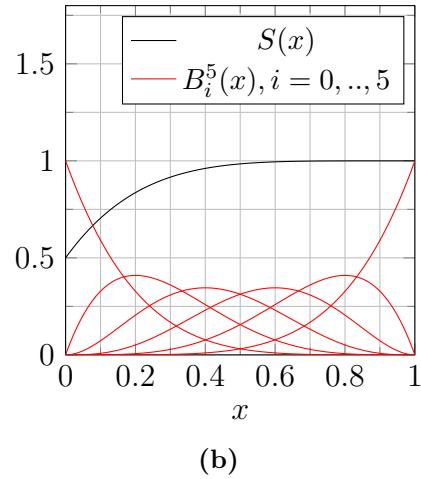
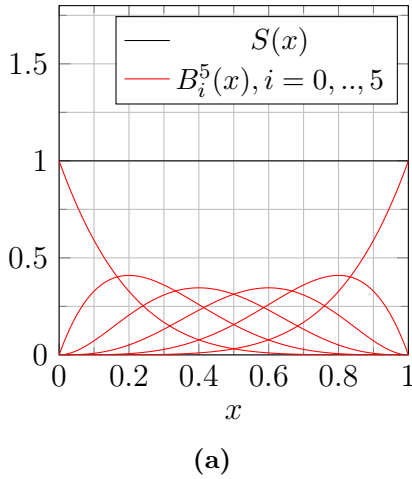
Όπως φαίνεται από το σχήμα 2.4, χρησιμοποιώντας μοναδιαίους συντελεστές πολυωνύμων Bernstein A_i προκύπτει η μοναδιαία συνάρτηση μορφής $S(x) = 1$, και από τα πολυώνυμα 2^{ns} , 3^{ns} και 5^{ns} τάξης. Αντίστοιχα, χρησιμοποιώντας συντελεστές A_i με τιμές διάφορες της μονάδας, ουσιαστικά πολλαπλασιάζεται το i πολυώνυμο με την τιμή του συντελεστή A_i και έτσι αλλάζει η μορφή της συνάρτησης μορφής. Στα σχήματα 2.5, 2.6 και 2.7 παρουσιάζονται συγκριτικά, με διαφορετικούς συνδιασμούς συντελεστών, τα πολυώνυμα Bernstein 2^{ns} , 3^{ns} και 5^{ns} τάξης αντίστοιχα, μαζί με την παραγόμενη συνάρτηση μορφής.



Σχήμα 2.5: Πολυώνυμα Bernstein 2^{ης} τάξης και η παραγόμενη συνάρτηση μορφής $S(x)$, με συντελεστές: (a) $A_0 = 1, A_1 = 1, A_2 = 1$, (b) $A_0 = 0.5, A_1 = 1, A_2 = 1$.



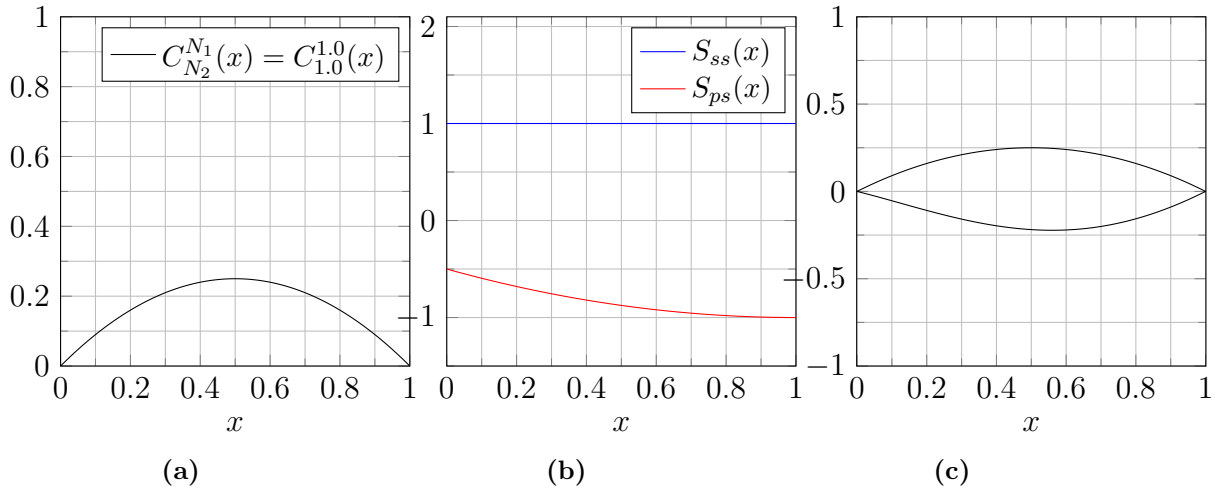
Σχήμα 2.6: Πολυώνυμα Bernstein 3^{ης} τάξης και η παραγόμενη συνάρτηση μορφής $S(x)$, με συντελεστές: (a) $A_0 = 1, A_1 = 1, A_2 = 1, A_3 = 1$, (b) $A_0 = 0.5, A_1 = 1, A_2 = 1, A_3 = 1$.



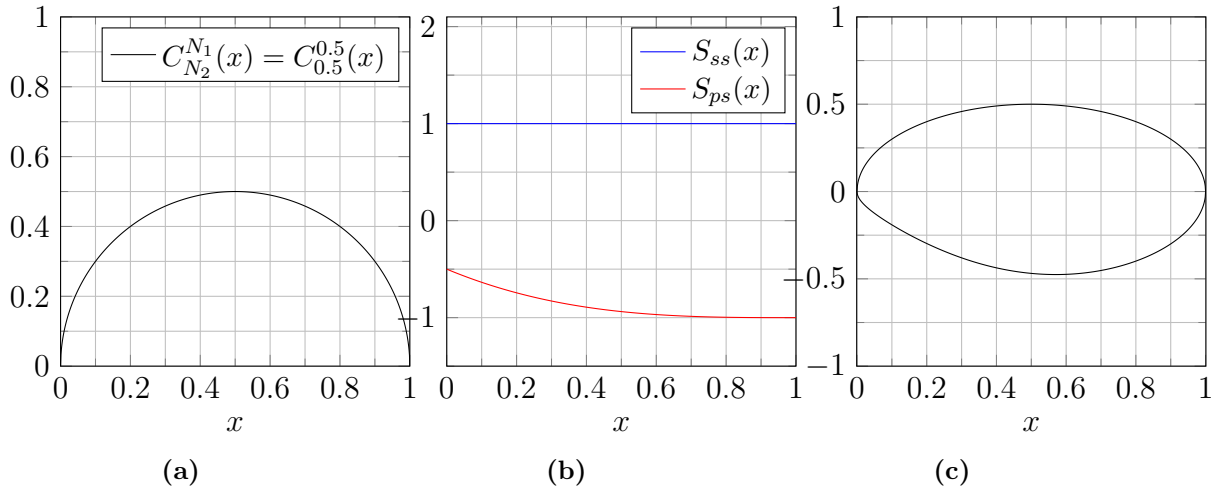
Σχήμα 2.7: Πολυώνυμα Bernstein 5^{ης} τάξης και η παραγόμενη συνάρτηση μορφής $S(x)$, με συντελεστές: (a) $A_0 = 1, A_1 = 1, A_2 = 1, A_3 = 1, A_4 = 1, A_5 = 1$, (b) $A_0 = 0.5, A_1 = 1, A_2 = 1, A_3 = 1, A_4 = 1, A_5 = 1$.

Συγκρίνοντας τα σχήματα 2.5, 2.6 και 2.7 παρατηρείται η επίδραση των συντελεστών A_i στη συνάρτηση μορφής. Γίνεται επίσης αντιληπτό ότι, χρησιμοποιώντας πολυώνυμα μεγαλύτερης τάξης ως πολυώνυμα βάσης της συνάρτησης μορφής, αυξάνεται ο αριθμός των συντελεστών και επομένως, παρέχεται περισσότερος έλεγχος κατά μήκος της συνάρτησης μορφής.

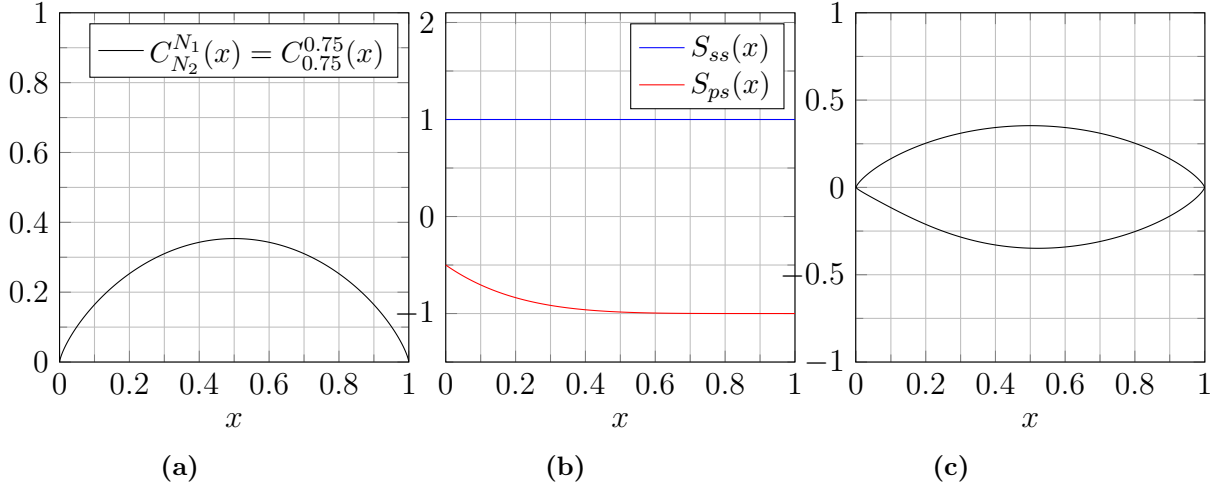
Αφού λοιπόν έγινε πλήρης περιγραφή του τρόπου κατασκευής της συνάρτησης μορφής, σειρά έχει η ανάλυση της επίδρασής της στην τελική γεωμετρία της αεροτομής. Για τον σκοπό αυτό θα κατασκευαστούν τρεις αεροτομές, όπου καθεμιά ξεχωριστά θα έχει κοινή συνάρτηση κλάσης και διαφορετική συνάρτηση μορφής, μεταξύ των πλευρών υπερπίεσης και υποπίεσης. Η διαφορά στη συνάρτηση μορφής της κάθε πλευράς θα προκύπτει από τους διαφορετικούς συντελεστές και όχι από τη διαφορετική τάξη πολυωνύμων Bernstein. Τέλος, οι πλευρές των αεροτομών θα αποτελούνται από πολυώνυμα Bernstein 2^{ης}, 3^{ης} και 5^{ης} τάξης αντίστοιχα. Όλα τα παραπάνω παρουσιάζονται στα σχήματα 2.8, 2.9 και 2.10.



Σχήμα 2.8: Επίδραση της συνάρτησης μορφής στη γεωμετρία της αεροτομής: (a) Κοινή συνάρτηση κλάσης των πλευρών υποπίεσης και υπερπίεσης της αεροτομής, (b) Διαφορετικές συναρτήσεις μορφής των πλευρών υποπίεσης και υπερπίεσης κατασκευασμένες με πολυώνυμο Bernstein 2^{ης} τάξης, όπως ορίστηκαν στο σχήμα 2.5, (c) Τελική γεωμετρία αεροτομής.



Σχήμα 2.9: Επίδραση της συνάρτησης μορφής στη γεωμετρία της αεροτομής: (a) Κοινή συνάρτηση κλάσης των πλευρών υποπίεσης και υπερπίεσης της αεροτομής, (b) Διαφορετικές συναρτήσεις μορφής των πλευρών υποπίεσης και υπερπίεσης κατασκευασμένες με πολυώνυμο Bernstein 3^{ης} τάξης, όπως ορίστηκαν στο σχήμα 2.6, (c) Τελική γεωμετρία αεροτομής.



Σχήμα 2.10: Επίδραση της συνάρτησης μορφής στη γεωμετρία της αεροτομής: (a) Κοινή συνάρτηση κλάσης των πλευρών υποπίεσης και υπερπίεσης της αεροτομής, (b) Διαφορετικές συναρτήσεις μορφής των πλευρών υποπίεσης και υπερπίεσης κατασκευασμένες με πολυώνυμα Bernstein 5^{ης} τάξης, όπως ορίστηκαν στο σχήμα 2.7, (c) Τελική γεωμετρία αεροτομής.

Ουσιαστικά ο ρόλος της συνάρτησης μορφής είναι να καλιμπράρει την γεωμετρία της αεροτομής. Όπως φαίνεται από τις σχέσεις (2.1) και (2.2) η συνάρτηση μορφής πολλαπλασιάζεται με τη συνάρτηση κλάσης. Έτσι η συνάρτηση μορφής δίνει βαρύτητα σε κάθε σημείο κατά μήκος της αρχικής αεροτομής που προέκυψε από τη συνάρτηση κλάσης, διαμορφώνοντας τη γεωμετρία της τελικής αεροτομής.

2.2 Μεταβλητές Σχεδιασμού

Έχοντας διατυπώσει τις μαθηματικές εκφράσεις των συναρτήσεων κλάσης και μορφής οι σχέσεις (2.1) και (2.2) των πλευρών υπερπίεσης και υποπίεσης προκύπτουν αντίστοιχα:

$$y_{ss}(x) = C_{N_{2,ss}}^{N_{1,ss}}(x)S_{ss}(x) + x\Delta y_{TE} \Rightarrow$$

$$y_{ss}(x) = x^{N_{1,ss}}(1-x)^{N_{2,ss}} \sum_{i=0}^{BPO^{ss}} A_{i,ss} B_i^{BPO^{ss}}(x) + x\Delta y_{TE} \quad (2.7)$$

$$y_{ps}(x) = C_{N_{2,ps}}^{N_{1,ps}}(x)S_{ps}(x) + x\Delta y_{TE} \Rightarrow$$

$$y_{ps}(x) = x^{N_{1,ps}}(1-x)^{N_{2,ps}} \sum_{i=0}^{BPO^{ps}} A_{i,ps} B_i^{BPO^{ps}}(x) + x \Delta y_{TE} \quad (2.8)$$

Παρατηρώντας τις σχέσεις (2.7) και (2.8), η τεταγμένη του σημείου της ακμής εκφυγής Δy_{TE} είναι κοινή για τις πλευρές υποπίεσης και υπερπίεσης αφού το σημείο της ακμής εκφυγής αποτελεί την ένωση των δύο πλευρών. Σε πολλές περιπτώσεις οι συντεταγμένες του σημείου είναι το $(1, 0)$. Ακόμα όμως και στις περιπτώσεις, όπου το σημείο της ακμής εκφυγής δεν έχει συντεταγμένες το $(1, 0)$ αλλά, είναι της μορφής $(1, \Delta y_{TE})$, με $\Delta y_{TE} \neq 0$, μπορεί εύκολα να μετατραπεί στο $(1, 0)$, απλά με μία περιστροφή του οριζόντιου άξονα με αποτέλεσμα, να μπορεί να παραλειφθεί εντελώς από τις εξισώσεις. Το διάνυσμα των μεταβλητών σχεδιασμού θα είναι:

$$\vec{b} = \begin{bmatrix} N_{1,ss} \\ N_{2,ss} \\ A_{0,ss} \\ A_{1,ss} \\ \dots \\ A_{BPO^{ss},ss} \\ N_{1,ps} \\ N_{2,ps} \\ A_{0,ps} \\ A_{1,ps} \\ \dots \\ A_{BPO^{ps},ps} \end{bmatrix}$$

Όπως φαίνεται από το διάνυσμα των μεταβλητών σχεδιασμού η τεταγμένη της ακμής εκφυγής Δy_{TE} δεν αποτελεί μεταβλητή σχεδιασμού. Επομένως, ο συνολικός αριθμός των μεταβλητών σχεδιασμού που προκύπτουν από την CST παραμετροποίηση είναι:

$$nbDV_{CST} = BPO^{ss} + BPO^{ps} + 6 \quad (2.9)$$

Για να υπάρχει μία ποσοτική αίσθηση σχετικά με αυτόν τον αριθμό, δεδομένου ότι οι περισσότερες αεροτομές μπορούν να κατασκευαστούν με πολυώνυμα Bernstein από 5^{ης} μέχρι και 20^{ης} τάξης, ένα εύρος τιμών είναι από 16 έως 48 μεταβλητές σχεδιασμού. Ωστόσο, στις περισσότερες βιομηχανικές εφαρμογές, ο αριθμός των μεταβλητών σχεδιασμού κυμαίνεται μεταξύ του 20 και 30.

Κεφάλαιο 3

Βέλτιστη Προσέγγιση Σχήματος Αεροτομής

Ο όρος βέλτιστη προσέγγιση σχήματος αεροτομής αναφέρεται στη μεθοδολογία κατά την οποία δίνεται μία δεδομένη γεωμετρία αεροτομής και ο μηχανικός χρησιμοποιώντας παραμετρικές καμπύλες προσπαθεί να την προσεγγίσει. Στη συνέχεια θα παρουσιαστεί, το πλαίσιο γύρω από το οποίο προσεγγίζεται μία αεροτομή αναφοράς χρησιμοποιώντας ως εργαλείο προσέγγισης την CST παραμετροποίηση.

3.1 Προσέγγιση Αεροτομών με CST Παραμετροποίηση

Η αεροτομή αναφοράς αποτελείται από ένα σύνολο σημείων (x_i, y_i) , $i = 1, \dots, N$. Συνήθως τα σημεία (x_i, y_i) είναι αδιαστατοποιημένα με τη χορδή της αεροτομής c , με αποτέλεσμα το σημείο που αναφέρεται στην ακμή προσβολής να έχει συντεταγμένες $(0, 0)$ και το σημείο που αναφέρεται στην ακμή εκφυγής να έχει συντεταγμένες $(1, \Delta y_{TE})$. Επιπλέον μία κοινότυπη δομή αρχείων αεροτομών ξεκινά με το σημείο (x_1, y_1) από την ακμή εκφυγής $(1, \Delta y_{TE})$ και καταλήγει στο σημείο (x_N, y_N) ξανά στην ακμή εκφυγής $(1, \Delta y_{TE})$, είτε δεξιόστροφα, είτε αριστερόστροφα. Στόχος του αντίστροφου σχεδιασμού είναι να βρεθεί ένα εργαλείο έτσι ώστε τα σημεία της αεροτομής αναφοράς να ταυτίζονται με τα σημεία της αεροτομής που παράγεται από τη CST παραμετροποίηση (x_i^{CST}, y_i^{CST}) , $i = 1, \dots, N$, δηλαδή να βρεθούν οι μεταβλητές σχεδιασμού $\vec{b}$ ώστε:

$$y(\vec{b}, x_i) \equiv y_i^{CST} = y_i, \forall i = 1, \dots, N \quad (3.1)$$

Ένα τέτοιο εργαλείο είναι πολύτιμο για κάθε σχεδιαστή αεροτομών γιατί στις περισσότερες εφαρμογές ο μηχανικός καλείται να βελτιώσει ένα προϋπάρχον σχέδιο ως προς

ένα σύνολο στόχων. Για να καταφέρει να βελτιώσει το σχέδιο αναφοράς απαιτείται πρωτίστως η ορθή αποτύπωση του σχεδίου με ένα σύνολο μεταβλητών σχεδιασμού και στη συνέχεια, η εύρεση εκείνου του συνδυασμού που θα οδηγήσει σε καλύτερο σχέδιο.

Για τον σκοπό αυτό δημιουργήθηκε λογισμικό με όνομα *bestFitCST.exe*, σε γλώσσα προγραμματισμού Fortran 90, το οποίο αναζητεί το σύνολο των μεταβλητών σχεδιασμού της CST παραμετροποίησης που απεικονίζει όσο πιο πιστά την αεροτομή αναφοράς, ώστε στη συνέχεια να αποτελέσει αφετηρία για τη διαδικασία της βελτιστοποίησης. Το λογισμικό πρακτικά εκτελεί μία βελτιστοποίηση, η λύση της οποίας είναι ο συνδυασμός των μεταβλητών σχεδιασμού που απεικονίζουν βέλτιστα την αεροτομή αναφοράς. Διευκρινίζεται ότι η βελτιστοποίηση που εκτελείται από το λογισμικό για την εύρεση των μεταβλητών σχεδιασμού που αποτυπώνουν πλησιέστερα την αεροτομή αναφοράς είναι διαφορετική από τη διαδικασία της βελτιστοποίησης που θα γίνει με τη χρήση του λογισμικού PUMA. Η πρώτη βελτιστοποίηση βρίσκει τη γεωμετρία που αποτυπώνει βέλτιστα την αεροτομή αναφοράς χρησιμοποιώντας τη CST παραμετροποίηση και δεν γίνεται χρήση CFD, ενώ η δεύτερη βελτιστοποίηση βρίσκει τη γεωμετρία που ικανοποιεί βέλτιστα την εκάστοτε συνάρτηση κόστους και γίνεται χρήση CFD. Έτσι η πρώτη θα αναφέρεται ως βέλτιστη προσέγγιση σχήματος αεροτομής (airfoil best fit optimization) ενώ η δεύτερη ως βελτιστοποίηση ροής (CFD optimization). Για τη βέλτιστη προσέγγιση σχήματος αεροτομής ορίζεται η προς ελαχιστοποίηση συνάρτηση κόστους:

$$F = \sum_{i=2}^{N-1} |\Delta x_i| (y_i^{CST} - y_i)^2 \quad (3.2)$$

όπου

$\Delta x_i = x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}}$ είναι το μήκος μεταξύ των ενδιάμεσων σημείων των διαστημάτων $[i-1, i]$, $[i, i+1]$, κατά μήκος της αεροτομής.

$x_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(x_{i+1} + x_i)$ είναι η τετμημένη του ενδιάμεσου σημείου του διαστήματος $[i, i+1]$.

$x_{i-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(x_{i-1} + x_i)$ είναι η τετμημένη του ενδιάμεσου σημείου του διαστήματος $[i-1, i]$.

$\vec{b} = [\vec{b}_{ss} \quad \vec{b}_{ps}]^T$ είναι το διάνυσμα των μεταβλητών σχεδιασμού που αποτελείται από τις μεταβλητές σχεδιασμού της πλευράς υποπίεσης $\vec{b}_{ss}$ και τις μεταβλητές σχεδιασμού της πλευράς υπερπίεσης $\vec{b}_{ps}$.

$\vec{b}_{ss} = [N_{1,ss} \quad N_{2,ss} \quad A_{0,ss} \quad \cdots \quad A_{BPO^{ss},ss}]^T$ είναι το διάνυσμα των μεταβλητών σχεδιασμού της πλευράς υποπίεσης.

$\vec{b}_{ps} = [N_{1,ps} \ N_{2,ps} \ A_{0,ps} \ \cdots \ A_{BPO^{ps},ps}]^T$ είναι το διάνυσμα των μεταβλητών σχεδιασμού της πλευράς υπερπίεσης.

Ακολουθούν σχόλια σχετικά με τη σχέση (3.2). Αρχικά, τα σημεία y_i^{CST} αναφέρονται στις τεταγμένες που προκύπτουν από την CST παραμετροποίηση, χρησιμοποιώντας τις τετμημένες της αεροτομής αναφοράς x_i . Επομένως, τα y_i^{CST} και y_i , αναφέρονται σε κοινές τιμές τετμημένων x_i . Επίσης, εκ πρώτης όψεως μοιάζει με τη συνάρτηση κόστους της μεθόδου των ελαχίστων τετραγώνων με τη διαφορά της ύπαρξης του όρου $|\Delta x_i|$. Ο όρος $|\Delta x_i|$ αποτελεί το μήκος μεταξύ των ενδιαμέσων σημείων των διαστημάτων $[i-1, i]$, $[i, i+1]$ και λειτουργεί ως βάρος, σταθμίζοντας τα σφάλματα που έχουν μεγαλύτερο μήκος. Επιπλέον, το άθροισμα δεν περιλαμβάνει τα σημεία $i=1$ και $i=N$. Ο πρώτος λόγος είναι προγραμματιστικός και συμβαίνει γιατί δεν μπορούν να οριστούν τα μήκη $|\Delta x_1|$ και $|\Delta x_N|$. Ο δεύτερος λόγος είναι γιατί παρατηρείται ότι ισχύει $|\Delta x_1|(y_1^{CST} - y_1)^2 = 0$ και $|\Delta x_N|(y_N^{CST} - y_N)^2 = 0$, μιάς και αποτελούν το σημείο εκφυγής. Ένα ακόμα σημείο που μπορεί να εξαιρεθεί από το άθροισμα είναι το σημείο που αναφέρεται στην ακμή προσβολής. Έστω (x_k, y_k) , το σημείο που αντιστοιχεί στην ακμή προσβολής. Η σχέση (3.2) γίνεται:

$$F = \sum_{i=2}^{k-1} |\Delta x_i| (y_i^{CST} - y_i)^2 + |\Delta x_k| (y_k^{CST} - y_k)^2 + \sum_{i=k+1}^{N-1} |\Delta x_i| (y_i^{CST} - y_i)^2 \Rightarrow$$

$$F = \sum_{i=1}^{N_{ss}} |\Delta x_i| [y_{ss}(x_i) - y_i]^2 + \sum_{i=1}^{N_{ps}} |\Delta x_i| [y_{ps}(x_i) - y_i]^2 = F_{ss} + F_{ps} \quad (3.3)$$

όπου

$[1, \dots, N_{ss}] = [2, \dots, k-1]$ είναι το πλήθος των σημείων της πλευράς υποπίεσης.

$[1, \dots, N_{ps}] = [k+1, \dots, N-1]$ είναι το πλήθος των σημείων της πλευράς υπερπίεσης.

Η μέθοδος ελαχιστοποίησης της συνάρτησης κόστους είναι η μέθοδος Newton. Η μαθηματική έκφραση της μεθόδου είναι:

$$\vec{b}_{k+1} = \vec{b}_k - \eta \left(\frac{d^2 F}{d\vec{b}_k^2} \right)^{-1} \frac{dF}{d\vec{b}_k} \quad (3.4)$$

όπου

$\vec{b}_k$ είναι το διάνυσμα των μεταβλητών σχεδιασμού στον k κύκλο βελτιστοποίησης.

$\frac{dF}{db_k}$ είναι το διάνυσμα των παραγώγων ευαισθησίας (sensitivity derivatives) στον ίδιο κύκλο.

$\frac{d^2 F}{db_k^2}$ είναι το Εσσιανό μητρώο (Hessian matrix).

η είναι το βήμα της βελτιστοποίησης.

Προτού υπολογιστούν οι αναλυτικές εκφράσεις των παραγώγων ευαισθησίας και του Εσσιανού μητρώου κρίνεται σκόπιμο να γίνει μια πρώιμη επεξεργασία τους, ώστε να παρουσιαστούν κάποιες ενδιαφέρουσες ιδιότητες της CST παραμετροποίησης. Με λίγες, απλές μαθηματικές πράξεις προκύπτει:

$$\vec{b} = \begin{bmatrix} N_{1,ss} \\ N_{2,ss} \\ A_{0,ss} \\ \vdots \\ A_{BPO^{ss},ss} \\ N_{1,ps} \\ N_{2,ps} \\ A_{0,ps} \\ \vdots \\ A_{BPO^{ps},ps} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{b}_{ss} \\ \vec{b}_{ps} \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

$$\frac{dF}{d\vec{b}} = \begin{bmatrix} \frac{dF_{ss}}{db_{1,ss}} \\ \frac{dF_{ss}}{db_{2,ss}} \\ \vdots \\ \frac{dF_{ss}}{db_{n,ss}} \\ \frac{dF_{ps}}{db_{1,ps}} \\ \frac{dF_{ps}}{db_{2,ps}} \\ \vdots \\ \frac{dF_{ps}}{db_{n,ps}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{dF_{ss}}{d\vec{b}_{ss}} \\ \frac{dF_{ps}}{d\vec{b}_{ps}} \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

$$\frac{d^2 F}{d\vec{b}^2} = \begin{bmatrix} \frac{d^2 F_{ss}}{db_{1,ss}^2} & \frac{d^2 F_{ss}}{db_{1,ss}db_{2,ss}} & \cdots & \frac{d^2 F_{ss}}{db_{1,ss}db_{n,ss}} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{d^2 F_{ss}}{db_{2,ss}db_{1,ss}} & \frac{d^2 F_{ss}}{db_{2,ss}^2} & \cdots & \frac{d^2 F_{ss}}{db_{2,ss}db_{n,ss}} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{d^2 F_{ss}}{db_{n,ss}db_{1,ss}} & \frac{d^2 F_{ss}}{db_{n,ss}db_{2,ss}} & \cdots & \frac{d^2 F_{ss}}{db_{n,ss}^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{d^2 F_{ps}}{b_{1,ps}^2} & \frac{d^2 F_{ps}}{db_{1,ps}db_{2,ps}} & \cdots & \frac{d^2 F_{ps}}{db_{1,ps}db_{n,ps}} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{d^2 F_{ps}}{b_{2,ps}db_{1,ps}} & \frac{d^2 F_{ps}}{db_{2,ps}^2} & \cdots & \frac{d^2 F_{ps}}{db_{2,ps}db_{n,ps}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{d^2 F_{ps}}{b_{n,ps}db_{1,ps}} & \frac{d^2 F_{ps}}{db_{n,ps}db_{2,ps}} & \cdots & \frac{d^2 F_{ps}}{db_{n,ps}^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d^2 F_{ss}}{db_{ss}^2} & 0 \\ 0 & \frac{d^2 F_{ps}}{db_{ps}^2} \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

Όπως φαίνεται από τη σχέση (3.3) η συνάρτηση κόστους της βέλτιστης προσέγγισης σχήματος αεροτομής μπορεί να διασπαστεί σε δύο επιμέρους όμοιες συναρτήσεις κόστους, όπου η μία αναφέρεται στην πλευρά υποπίεσης, ενώ η άλλη αναφέρεται στην πλευρά υπερπίεσης. Επίσης, η σχέση (3.5) φανερώνει ότι και το διάνυσμα των μεταβλητών σχεδιασμού μπορεί να διαιρεθεί σε δύο όμοια διανύσματα, όπου το κάθε διάνυσμα θα αναφέρεται στην εκάστοτε πλευρά. Επιπλέον η συνάρτηση κόστους της πλευράς υποπίεσης είναι ανεξάρτητη των μεταβλητών σχεδιασμού που αναφέρονται στην πλευρά υπερπίεσης και αντίστροφα. Επομένως, όλες οι παράγωγοι της μορφής $\frac{dF_{ps}}{db_{ss}}, \frac{dF_{ss}}{db_{ps}}, \frac{d^2 F_{ps}}{db_{ss}^2}, \frac{d^2 F_{ss}}{db_{ps}^2}$, ισούνται με 0, όπως απεικονίζεται στις σχέσεις (3.6) και (3.7). Οι ιδιότητες της ομοιότητας και της ανεξαρτησίας που προσφέρει η CST παραμετροποίηση επιτρέπουν τον διαχωρισμό του προβλήματος σε δύο επιμέρους, ίδια προβλήματα, ένα για την πλευρά υποπίεσης και ένα για την πλευρά υπερπίεσης, αντίστοιχα. Αυτό βοηθά πολύ την προγραμματιστική διαδικασία του λογισμικού βέλτιστης προσέγγισης σχήματος αεροτομής διότι δεν χρειάζεται να υπολογιστούν όλα τα μεγέθη και για τις δύο πλευρές. Αρκεί η κατασκευή υπορουτινών που θα υπολογίζουν μία συνάρτηση κόστους F όμοια με τις F_{ss} και F_{ps} , ένα διάνυσμα παραγώγων ευαισθησίας $\frac{dF}{db}$ όμοιο με τα $\frac{dF}{db_{ss}}$ και $\frac{dF}{db_{ps}}$, ένα Εσσιανό μητρώο $\frac{d^2 F}{db^2}$ όμοιο με τα $\frac{d^2 F_{ss}}{db_{ss}^2}$ και $\frac{d^2 F_{ps}}{db_{ps}^2}$ και απλά θα εκτελούνται για κάθε πλευρά.

3.1.1 Παράγωγοι Ευαισθησίας

Ο κάθε όρος $\frac{dF}{db_n}$ των παραγώγων της F περιγράφεται από την έκφραση:

$$\frac{dF}{db_n} = 2 \sum_{i=1}^N |\Delta x_i| [y^{CST}(x_i) - y_i] \frac{dy^{CST}(x_i)}{db_n} \quad (3.8)$$

όπου

$\frac{dy^{CST}(x_i)}{db_n}$ είναι το μητρώο των παραγώγων ευαισθησίας της CST παραμετροποίησης.

Οι παράγωγοι ευαισθησίας της CST παραμετροποίησης υπολογίζονται σύμφωνα με τον κανόνα της αλυσίδας. Έτσι προκύπτει:

$$\begin{aligned}
\frac{dy^{CST}(x_i)}{db_n} &= \frac{dC_{N_2}^{N_1}(x_i)}{db_n} S(x_i) + C_{N_2}^{N_1}(x_i) \frac{dS(x_i)}{db_n} \Rightarrow \\
\frac{dy^{CST}(x_i)}{db_n} &= S(x_i) \begin{bmatrix} \frac{dC_{N_2}^{N_1}(x_i)}{dN_1} \\ \frac{dC_{N_2}^{N_1}(x_i)}{dN_2} \\ \frac{dC_{N_2}^{N_1}(x_i)}{dA_0} \\ \vdots \\ \frac{dC_{N_2}^{N_1}(x_i)}{dA_{BPO}} \end{bmatrix} + C_{N_2}^{N_1}(x_i) \begin{bmatrix} \frac{dS(x_i)}{dN_1} \\ \frac{dS(x_i)}{dN_2} \\ \frac{dS(x_i)}{dA_0} \\ \vdots \\ \frac{dS(x_i)}{dA_{BPO}} \end{bmatrix} \Rightarrow \\
\frac{dy^{CST}(x_i)}{db_n} &= S(x_i) \begin{bmatrix} x_i^{N_1}(1-x_i)^{N_2} \ln(x_i) \\ x_i^{N_1}(1-x_i)^{N_2} \ln(1-x_i) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + C_{N_2}^{N_1}(x_i) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ B_0^{BPO}(x_i) \\ \vdots \\ B_{BPO}^{BPO}(x_i) \end{bmatrix} \Rightarrow \\
\frac{dy^{CST}(x_i)}{db_n} &= C_{N_2}^{N_1}(x_i) \begin{bmatrix} S(x_i) \ln(x_i) \\ S(x_i) \ln(1-x_i) \\ B_0^{BPO}(x_i) \\ \vdots \\ B_{BPO}^{BPO}(x_i) \end{bmatrix} \quad (3.9)
\end{aligned}$$

Έχοντας υπολογίσει τις παραγώγους της CST παραμετροποίησης, οι παράγωγοι ευαισθησίας της συνάρτησης κόστους προκύπτουν:

$$\frac{dF}{db} = 2 \sum_{i=1}^N |\Delta x_i| [y^{CST}(x_i) - y_i] C_{N_2}^{N_1}(x_i) \begin{bmatrix} S(x_i) \ln(x_i) \\ S(x_i) \ln(1-x_i) \\ B_0^{BPO}(x_i) \\ \vdots \\ B_{BPO}^{BPO}(x_i) \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

3.1.2 Εσσιανό Μητρώο

Ο κάθε όρος $\frac{d^2 F}{db_n db_m}$ περιγράφεται από την έκφραση:

$$\frac{d^2 F}{db_n db_m} = 2 \sum_{i=1}^N |\Delta x_i| \left[\frac{y^{CST}(x_i)}{db_n} \left(\frac{y^{CST}(x_i)}{db_m} \right)^T + [y^{CST}(x_i) - y_i] \frac{d^2 y^{CST}(x_i)}{db_n db_m} \right] \quad (3.11)$$

όπου

$\frac{dy^{CST}(x_i)}{db_n} \left[\frac{dy^{CST}(x_i)}{db_m} \right]^T$ είναι το γινόμενο του μητρώου των παραγώγων ευαισθησίας της CST παραμετροποίησης με το αντίστροφο του.

$\frac{d^2 y^{CST}(x_i)}{db_n db_m}$ είναι το Εσσιανό μητρώο της CST παραμετροποίησης.

Το γινόμενο του μητρώου των παραγώγων ευαισθησίας της CST παραμετροποίησης με το αντίστροφο του, υπολογίζεται εύκολα ως εξής:

$$\begin{aligned} \frac{dy^{CST}(x_i)}{db_n} \left[\frac{dy^{CST}(x_i)}{db_m} \right]^T &= C_{N_2}^{N_1}(x_i) \begin{bmatrix} S(x_i) \ln(x_i) \\ S(x_i) \ln(1-x_i) \\ B_0^{BPO}(x_i) \\ \vdots \\ B_{BPO}^{BPO}(x_i) \end{bmatrix} C_{N_2}^{N_1}(x_i) \begin{bmatrix} S(x_i) \ln(x_i) \\ S(x_i) \ln(1-x_i) \\ B_0^{BPO}(x_i) \\ \vdots \\ B_{BPO}^{BPO}(x_i) \end{bmatrix}^T = \\ &C_{N_2}^{N_1}(x_i)^2 \begin{bmatrix} S(x_i)^2 \ln(x_i)^2 & S(x_i)^2 \ln(x_i) \ln(1-x_i) & S(x_i) \ln(x_i) B_0^{BPO}(x_i) & \dots & S(x_i) \ln(x_i) B_{BPO}^{BPO}(x_i) \\ S(x_i)^2 \ln(x_i) \ln(1-x_i) & S(x_i)^2 \ln(1-x_i)^2 & S(x_i) \ln(1-x_i) B_0^{BPO}(x_i) & \dots & S(x_i) \ln(1-x_i) B_{BPO}^{BPO}(x_i) \\ S(x_i) \ln(x_i) B_0^{BPO}(x_i) & S(x_i) \ln(1-x_i) B_0^{BPO}(x_i) & B_0^{BPO}(x_i)^2 & \dots & B_0^{BPO}(x_i) B_{BPO}^{BPO}(x_i) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S(x_i) \ln(x_i) B_{BPO}^{BPO}(x_i) & S(x_i) \ln(1-x_i) B_{BPO}^{BPO}(x_i) & B_0^{BPO}(x_i) B_{BPO}^{BPO}(x_i) & \dots & B_{BPO}^{BPO}(x_i)^2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.12)$$

Επίσης, το Εσσιανό μητρώο της CST παραμετροποίησης δίνεται από τη σχέση:

$$\frac{d^2 y^{CST}(x_i)}{db_n db_m} = \frac{d}{db_m} \left(\frac{dy^{CST}(x_i)}{db_n} \right) = \frac{d}{db_m} \left(\frac{dC_{N_2}^{N_1}(x_i)}{db_n} S(x_i) + C_{N_2}^{N_1}(x_i) \frac{dS(x_i)}{db_n} \right) =$$

$$\begin{aligned}
& \underbrace{\frac{dS(x_i)}{db_m} \left[\frac{dC_{N_2}^{N_1}(x_i)}{db_n} \right]^T}_{T_1} + \underbrace{\frac{d^2 C_{N_2}^{N_1}(x_i)}{db_n db_m} S(x_i)}_{T_2} + \underbrace{\frac{dC_{N_2}^{N_1}(x_i)}{db_m} \left[\frac{dS(x_i)}{db_n} \right]^T}_{T_3} + \underbrace{\frac{d^2 S(x_i)}{db_n db_m} C_{N_2}^{N_1}(x_i)}_{T_4} \\
& \hspace{15cm} (3.13)
\end{aligned}$$

Στη συνέχεια, θα υπολογιστούν οι όροι T_1, T_2, T_3 και T_4 ξεχωριστά. Ο όρος T_1 είναι:

$$\begin{aligned}
T_1 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ B_0^{BPO}(x_i) \\ \vdots \\ B_{BPO}^{BPO}(x_i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{N_2}^{N_1}(x_i) \ln(x_i) \\ C_{N_2}^{N_1}(x_i) \ln(1-x_i) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}^T = \\
& C_{N_2}^{N_1}(x_i) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ B_0^{BPO}(x_i) \ln(x_i) & B_0^{BPO}(x_i) \ln(1-x_i) & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{BPO}^{BPO}(x_i) \ln(x_i) & B_{BPO}^{BPO}(x_i) \ln(1-x_i) & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Ο όρος T_2 είναι:

$$\begin{aligned}
T_2 &= S(x_i) \begin{bmatrix} \frac{d(C_{N_2}^{N_1}(x_i) \ln(x_i))}{dN_1} & \frac{d(C_{N_2}^{N_1}(x_i) \ln(x_i))}{dN_2} & \frac{d(C_{N_2}^{N_1}(x_i) \ln(x_i))}{dA_0} & \cdots & \frac{d(C_{N_2}^{N_1}(x_i) \ln(x_i))}{dA_{BPO}} \\ \frac{d(C_{N_2}^{N_1}(x_i) \ln(1-x_i))}{dN_1} & \frac{d(C_{N_2}^{N_1}(x_i) \ln(1-x_i))}{dN_2} & \frac{d(C_{N_2}^{N_1}(x_i) \ln(1-x_i))}{dA_0} & \cdots & \frac{d(C_{N_2}^{N_1}(x_i) \ln(1-x_i))}{dA_{BPO}} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} = \\
& S(x_i) C_{N_2}^{N_1}(x_i) \begin{bmatrix} \ln(x_i)^2 & \ln(x_i) \ln(1-x_i) & 0 & \cdots & 0 \\ \ln(x_i) \ln(1-x_i) & \ln(1-x_i)^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Ο όρος T_3 είναι:

$$T_3 = \begin{bmatrix} C_{N_2}^{N_1}(x_i) \ln(x_i) \\ C_{N_2}^{N_1}(x_i) \ln(1-x_i) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ B_0^{BPO}(x_i) \\ \vdots \\ B_{BPO}^{BPO}(x_i) \end{bmatrix}^T =$$

$$C_{N_2}^{N_1}(x_i) \begin{bmatrix} 0 & 0 & B_0^{BPO}(x_i) \ln(x_i) & \cdots & B_{BPO}^{BPO}(x_i) \ln(x_i) \\ 0 & 0 & B_0^{BPO}(x_i) \ln(1-x_i) & \cdots & B_{BPO}^{BPO}(x_i) \ln(1-x_i) \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Τέλος, ο όρος T_4 είναι:

$$T_4 = C_{N_2}^{N_1}(x_i) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{dB_0^{BPO}(x_i)}{dN_1} & \frac{dB_0^{BPO}(x_i)}{dN_2} & \frac{dB_0^{BPO}(x_i)}{dA_0} & \cdots & \frac{dB_0^{BPO}(x_i)}{dA_{BPO}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{dB_{BPO}^{BPO}(x_i)}{dN_1} & \frac{dB_{BPO}^{BPO}(x_i)}{dN_2} & \frac{dB_{BPO}^{BPO}(x_i)}{dA_0} & \cdots & \frac{dB_{BPO}^{BPO}(x_i)}{dA_{BPO}} \end{bmatrix} = 0$$

Έχοντας υπολογίσει τους όρους T_1, T_2, T_3 και T_4 η σχέση (3.13) γίνεται:

$$\frac{d^2 y^{CST}(x_i)}{db_n db_m} = C_{N_2}^{N_1}(x_i) \begin{bmatrix} S(x_i) \ln(x_i)^2 & S(x_i) \ln(x_i) \ln(1-x_i) & B_0^{BPO}(x_i) \ln(x_i) & \cdots & B_{BPO}^{BPO}(x_i) \ln(x_i) \\ S(x_i) \ln(x_i) \ln(1-x_i) & S(x_i) \ln(1-x_i)^2 & B_0^{BPO}(x_i) \ln(1-x_i) & \cdots & B_{BPO}^{BPO}(x_i) \ln(1-x_i) \\ B_0^{BPO}(x_i) \ln(x_i) & B_0^{BPO}(x_i) \ln(1-x_i) & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{BPO}^{BPO}(x_i) \ln(x_i) & B_{BPO}^{BPO}(x_i) \ln(1-x_i) & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις 3.12 και 3.14, η σχέση 3.11 γίνεται:

$$\frac{d^2 F}{d\vec{b}^2} = 2 \sum_{i=1}^N |\Delta x_i| \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

όπου

$$\begin{aligned}
a_{11} &= C_{N_2}^{N_1}(x_i)^2 S(x_i)^2 \ln(x_i)^2 + [y^{CST}(x_i) - y_i] C_{N_2}^{N_1}(x_i) S(x_i) \ln(x_i)^2 \\
a_{12} &= C_{N_2}^{N_1}(x_i)^2 S(x_i)^2 \ln(x_i) \ln(1-x_i) + [y^{CST}(x_i) - y_i] C_{N_2}^{N_1}(x_i) S(x_i) \ln(x_i) \ln(1-x_i) \\
a_{13} &= C_{N_2}^{N_1}(x_i)^2 S(x_i) \ln(x_i) B_0^{BPO}(x_i) + [y^{CST}(x_i) - y_i] C_{N_2}^{N_1}(x_i) B_0^{BPO}(x_i) \ln(x_i) \\
a_{1n} &= C_{N_2}^{N_1}(x_i)^2 S(x_i) \ln(x_i) B_{BPO}^{BPO}(x_i) + [y^{CST}(x_i) - y_i] C_{N_2}^{N_1}(x_i) B_{BPO}^{BPO}(x_i) \ln(x_i) \\
\\
a_{21} &= C_{N_2}^{N_1}(x_i)^2 S(x_i)^2 \ln(x_i) \ln(1-x_i) + [y^{CST}(x_i) - y_i] C_{N_2}^{N_1}(x_i) S(x_i) \ln(x_i) \ln(1-x_i) \\
a_{22} &= C_{N_2}^{N_1}(x_i)^2 S(x_i)^2 \ln(1-x_i)^2 + [y^{CST}(x_i) - y_i] C_{N_2}^{N_1}(x_i) S(x_i) \ln(1-x_i)^2 \\
a_{23} &= C_{N_2}^{N_1}(x_i)^2 S(x_i) \ln(1-x_i) B_0^{BPO}(x_i) + [y^{CST}(x_i) - y_i] C_{N_2}^{N_1}(x_i) B_0^{BPO}(x_i) \ln(1-x_i) \\
a_{2n} &= C_{N_2}^{N_1}(x_i)^2 S(x_i) \ln(1-x_i) B_{BPO}^{BPO}(x_i) + [y^{CST}(x_i) - y_i] C_{N_2}^{N_1}(x_i) B_{BPO}^{BPO}(x_i) \ln(1-x_i) \\
\\
a_{31} &= C_{N_2}^{N_1}(x_i)^2 S(x_i) \ln(x_i) B_0^{BPO}(x_i) + [y^{CST}(x_i) - y_i] C_{N_2}^{N_1}(x_i) B_0^{BPO}(x_i) \ln(x_i) \\
a_{32} &= C_{N_2}^{N_1}(x_i)^2 S(x_i) \ln(1-x_i) B_0^{BPO}(x_i) + [y^{CST}(x_i) - y_i] C_{N_2}^{N_1}(x_i) B_0^{BPO}(x_i) \ln(1-x_i) \\
a_{33} &= C_{N_2}^{N_1}(x_i)^2 B_0^{BPO}(x_i)^2 \\
a_{3n} &= C_{N_2}^{N_1}(x_i)^2 B_0^{BPO}(x_i) B_{BPO}^{BPO}(x_i) \\
\\
a_{n1} &= C_{N_2}^{N_1}(x_i)^2 S(x_i) \ln(x_i) B_{BPO}^{BPO}(x_i) + [y^{CST}(x_i) - y_i] C_{N_2}^{N_1}(x_i) B_{BPO}^{BPO}(x_i) \ln(x_i) \\
a_{n2} &= C_{N_2}^{N_1}(x_i)^2 S(x_i) \ln(1-x_i) B_{BPO}^{BPO}(x_i) + [y^{CST}(x_i) - y_i] C_{N_2}^{N_1}(x_i) B_{BPO}^{BPO}(x_i) \ln(1-x_i) \\
a_{n3} &= C_{N_2}^{N_1}(x_i)^2 B_0^{BPO}(x_i) B_{BPO}^{BPO}(x_i) \\
a_{nn} &= C_{N_2}^{N_1}(x_i)^2 B_{BPO}^{BPO}(x_i)^2
\end{aligned}$$

3.2 Αλγόριθμος Επίλυσης

Όπως αναφέρθηκε στην ενότητα 3.1, η μέθοδος ελαχιστοποίησης που θα χρησιμοποιηθεί είναι η μέθοδος Newton. Ο κλασικός αλγόριθμος επίλυσης αντιστρέφει το μητρώο των δεύτερων παραγώγων της συνάρτησης κόστους και σύμφωνα με τη σχέση (3.4) υπολογίζει το νέο διάνυσμα των μεταβλητών σχεδιασμού. Γενικά, ο υπολογισμός ενός

αντίστροφου μητρώου είναι μία διαδικασία που απαιτεί μεγάλο υπολογιστικό κόστος. Για να αποφευχθεί αυτό, θα χρησιμοποιηθεί ένας εναλλακτικός αλγόριθμος, σύμφωνα με τον οποίο θα επιλυθεί απλώς ένα γραμμικό σύστημα εξισώσεων. Για τον σκοπό αυτό, η σχέση (3.4) μπορεί να μετατραπεί εύκολα με αλγεβρικές πράξεις ως εξής:

$$\begin{aligned}\vec{b}_k - \vec{b}_{k+1} &= \eta \left(\frac{d^2 F}{d\vec{b}_k^2} \right)^{-1} \frac{dF}{d\vec{b}_k} \Rightarrow \\ \frac{d^2 F}{d\vec{b}_k^2} (\vec{b}_k - \vec{b}_{k+1}) &= \eta \frac{d^2 F}{d\vec{b}_k^2} \left(\frac{d^2 F}{d\vec{b}_k^2} \right)^{-1} \frac{dF}{d\vec{b}_k} \Rightarrow \\ \frac{d^2 F}{d\vec{b}_k^2} \Delta \vec{b} &= \eta \frac{dF}{d\vec{b}_k}\end{aligned}\tag{3.16}$$

Με τη μετατροπή της σχέσης (3.4) στη (3.16), ο αλγόριθμος επίλυσης δεν απαιτεί πλέον την αντιστροφή του μητρώου των δεύτερων παραγώγων της συνάρτησης κόστους, αλλά την επίλυση ενός γραμμικού συστήματος, η λύση του οποίου δίνει το $\Delta \vec{b}$ και, στη συνέχεια, προκύπτει το νέο διάνυσμα των μεταβλητών σχεδιασμού $\vec{b}_{k+1}$.

3.3 Παραδείγματα Προσέγγισης Αεροτομών

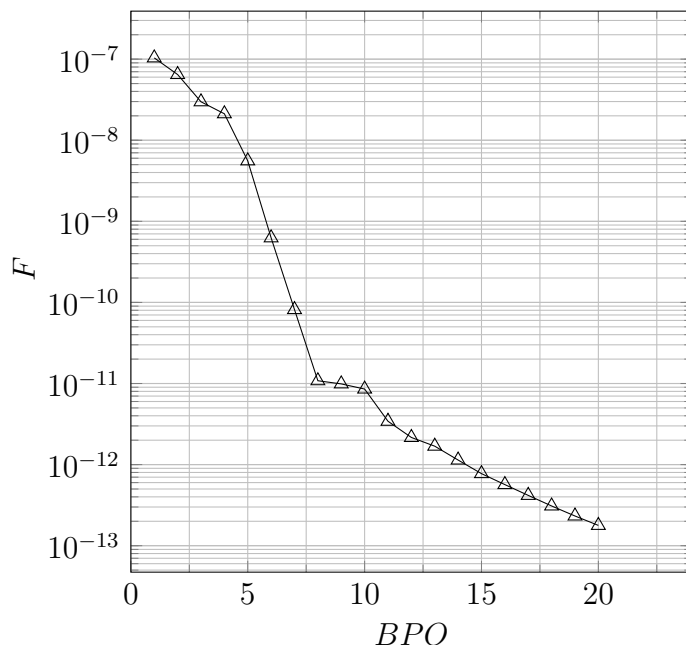
Για να παρουσιαστεί η αποτελεσματικότητα της CST παραμετροποίησης στην προσέγγιση αεροτομών, αλλά και η ορθότητα του λογισμικού που δημιουργήθηκε, παρουσιάζονται τρία παραδείγματα. Οι αεροτομές που επιλέχθηκαν είναι οι NACA 0012, NACA 4415 και NLF 0416. Αρχικά θα γίνει παραμετρική ανάλυση, για κάθε αεροτομή, της συνάρτησης κόστους F ως προς την τάξη των πολυωνύμων Bernstein (BPO) που χρησιμοποιήθηκαν ως πολυώνυμα βάσης. Στην παραμετρική ανάλυση, θα χρησιμοποιηθούν πολυώνυμα 1^{ns} τάξης, μέχρι και 20^{ns} . Κάθε πλευρά των αεροτομών θα κατασκευάζεται χρησιμοποιώντας πολυώνυμα βάσης ίδιας τάξης. Στη συνέχεια, θα πραγματοποιηθεί έλεγχος ως προς την αποτελεσματικότητα της προσέγγισης με βάση ένα κριτήριο ανοχής που χρησιμοποιείται στο [12], για όλες τις τιμές της τάξης των πολυωνύμων Bernstein. Το κριτήριο ανοχής που θα χρησιμοποιηθεί είναι:

$$e(x) = y^{CST}(x) - y < \begin{cases} 3.5 \times 10^{-4} & x \leq 0.2 \\ 7 \times 10^{-4} & x > 0.2 \end{cases}\tag{3.17}$$

Τέλος, χρησιμοποιώντας πολυώνυμα Bernstein τάξης που θα ικανοποιούν το κριτήριο ανοχής της σχέσης (3.17) θα παρουσιαστεί σε κοινό διάγραμμα η αεροτομή αναφοράς και η παρεμβολή της.

3.3.1 Αεροτομή NACA 0012

Για την προσέγγιση της αεροτομής NACA 0012 χρησιμοποιήθηκαν 401 σημεία αναφοράς. Το πάχος της ακμής εκφυγής είναι $\Delta y_{TE} = 0$. Στο σχήμα 3.1 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της παραμετρικής ανάλυσης της συνάρτησης κόστους F ως προς την τάξη των πολυωνύμων Bernstein (BPO) που χρησιμοποιήθηκαν για την κατασκευή κάθε πλευράς της αεροτομής.

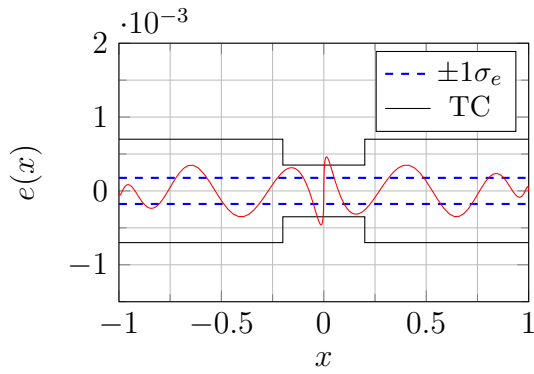


Σχήμα 3.1: Παραμετρική ανάλυση της συνάρτησης κόστους F ως προς την τάξη των πολυωνύμων Bernstein (BPO) για την αεροτομή NACA 0012, σε λογαριθμική κλίμακα.

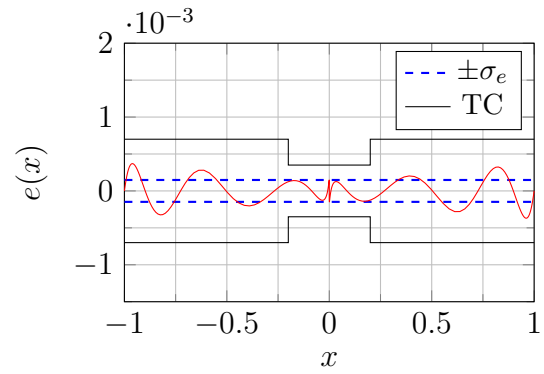
Όπως φαίνεται από το σχήμα 3.1, η τιμή της συνάρτησης κόστους μειώνεται όσο αυξάνεται η τάξη των πολυωνύμων Bernstein. Ενδεικτικά, για πολυώνυμο Bernstein 2^{ης} τάξης, η τιμή της συνάρτησης κόστους είναι μικρότερη από 10^{-7} , για 5^{ης} τάξης είναι μικρότερη από 10^{-8} , για 6^{ης} τάξης είναι μικρότερη από 10^{-9} , για 7^{ης} τάξης είναι μικρότερη από 10^{-10} , για 9^{ης} τάξης είναι μικρότερη από 10^{-11} , ενώ για 15^{ης} τάξης είναι μικρότερη από 10^{-12} . Επιπλέον, παρατηρείται ότι ενώ στην αρχή, όσο αυξάνεται ο βαθμός των πολυωνύμων υπάρχει μία ήπια πτώση της συνάρτησης κόστους, στη συνέχεια γίνεται πολύ απότομη, μέχρι να γίνει ξανά ήπια.

Στη συνέχεια, στο σχήμα 3.2 παρουσιάζονται διαγράμματα με τη συνάρτηση σφάλματος προσέγγισης $e(x)$, όπως προέκυψε από την προσέγγιση της αεροτομής NACA 0012, για τυχαία επιλεγμένες τιμές τάξης των πολυωνύμων Bernstein. Πρέπει να διευκρινιστεί ότι υπάρχουν δύο συναρτήσεις σφάλματος, όπου η πρώτη αναφέρεται στην πλευρά υποπίεσης, με πεδίο ορισμού το διάστημα $[0, 1]$, ενώ η δεύτερη αναφέρεται στην πλευρά υπερπίεσης, με πεδίο ορισμού ξανά το $[0, 1]$. Ωστόσο, στο σχήμα 3.2 παρουσιάζεται

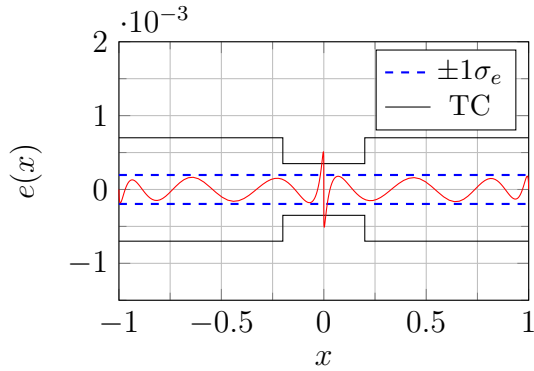
μόνο μία συνάρτηση σφάλματος, η οποία προέκυψε από την ενοποίηση των αντίστοιχων συναρτήσεων των δύο πλευρών. Το πεδίο τιμών της ενοποιημένης συνάρτησης σφάλματος είναι το $[-1, 1]$. Το διάστημα $[-1, 0]$ περιγράφει την πλευρά υπερπίεσης, όπου το $x = -1$ αναφέρεται στην ακμή εκφυγής και το $x = 0$ αναφέρεται στην ακμή προσβολής της πλευράς. Αντίστοιχα, το διάστημα $[0, 1]$ περιγράφει την πλευρά υποπίεσης, όπου το $x = 0$ αναφέρεται στην ακμή προσβολής και το $x = 1$ αναφέρεται στην ακμή εκφυγής της πλευράς. Επιπλέον, εκτός από την κατανομή του σφάλματος, παρουσιάζονται τα όρια μίας τυπικής απόκλισης της συνάρτησης του σφάλματος σ_e , καθώς επίσης και τα όρια ανοχής του κριτηρίου ανοχής (TC), όπως ορίστηκαν στη σχέση (3.17).



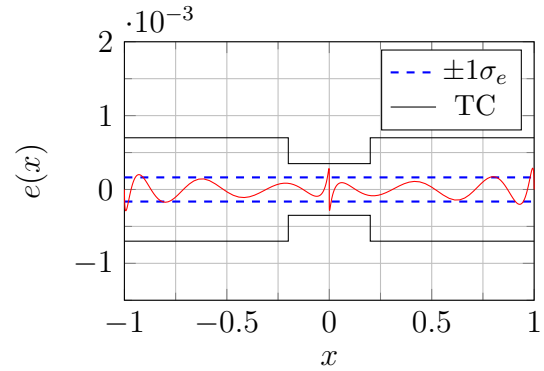
(a) $BPO = 1$



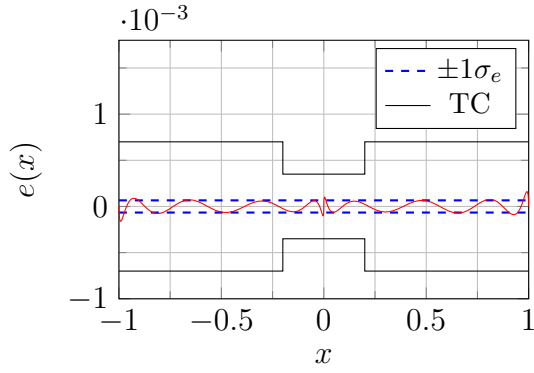
(b) $BPO = 2$



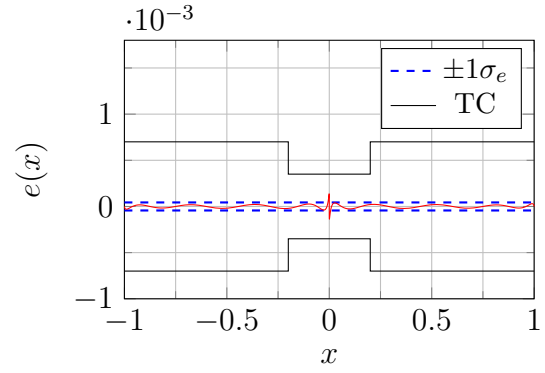
(c) $BPO = 3$



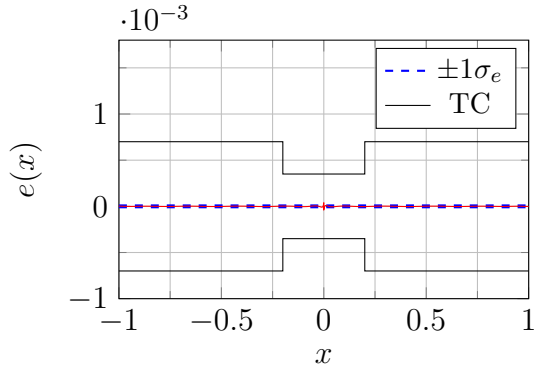
(d) $BPO = 4$



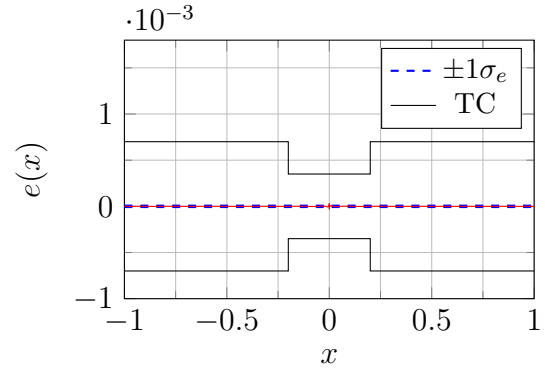
(e) $BPO = 5$



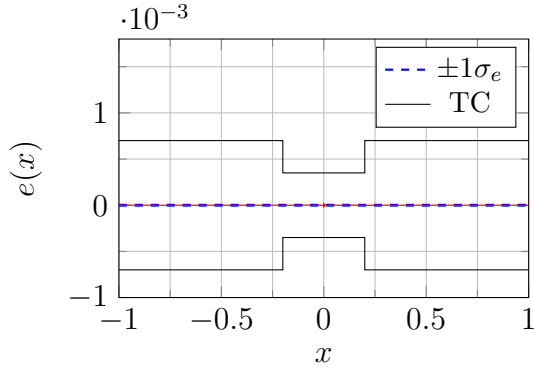
(f) $BPO = 6$



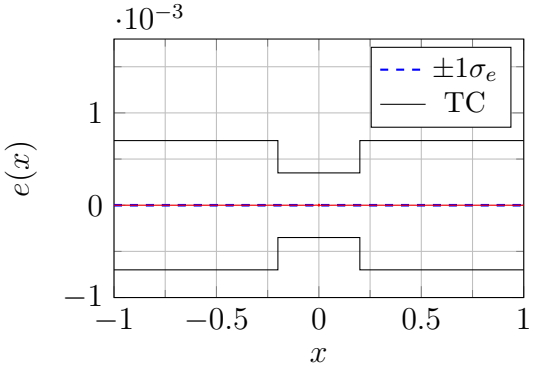
(g) $BPO = 8$



(h) $BPO = 11$



(i) $BPO = 15$



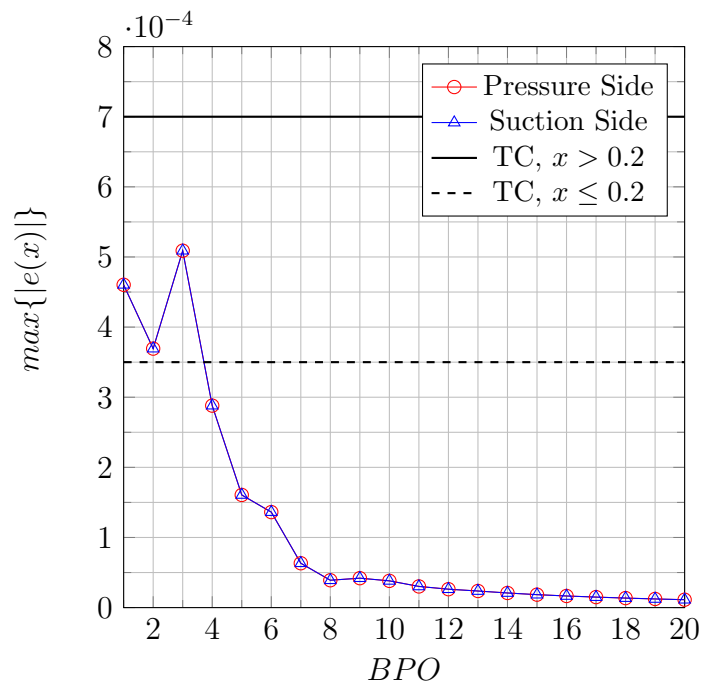
(j) $BPO = 20$

Σχήμα 3.2: Ελεγχος της προσέγγισης της αεροτομής *NACA 0012* με βάση το κριτήριο ανοχής της σχέσης (3.17), για διάφορες τιμές της τάξης των πολωνύμων *Bernstein* (BPO).

Όπως φαίνεται από το σχήμα 3.2 η ενοποιημένη συνάρτηση του σφάλματος $e(x)$ είναι περιττή για κάθε τάξη πολωνύμων *Bernstein*. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι η αεροτομή *NACA 0012* είναι συμμετρική. Επίσης, παρατηρείται ότι το εύρος τιμών της

συνάρτησης σφάλματος δεν μειώνεται ιδιαίτερα με την αύξηση των πολυωνύμων Bernstein από 1^{ης} σε 4^{ης} τάξης. Αντίθετα, με περαιτέρω αύξηση, όπως για παράδειγμα με τη χρήση πολυωνύμων 5^{ης} και 8^{ης} τάξης, η μείωση του εύρους είναι αισθητά εντονότερη. Το γεγονός αυτό, συμβαδίζει πλήρως με την απότομη πτώση που παρουσιάζει η συνάρτηση κόστους στο ίδιο εύρος τιμών τάξης των πολυωνύμων Bernstein, του σχήματος 3.1.

Ο ρόλος των διαγραμμάτων του σχήματος 3.2, όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, είναι να προσδιοριστεί η τάξη των πολυωνύμων όπου ικανοποιείται το κριτήριο ανοχής. Με άλλα λόγια, αναζητούμε σε ποιο διάγραμμα όλες οι τιμές της συνάρτησης του σφάλματος σ_e είναι εντός των ορίων της επιθυμητής ανοχής. Για να μην παρουσιαστούν όλα τα διαγράμματα με τη συνάρτηση του σφάλματος για κάθε τάξη πολυωνύμων Bernstein, επιλέχθηκε να παρουσιαστεί ένα διάγραμμα το οποίο συνοψίζει μεγάλο μέρος της απαραίτητης πληροφορίας. Το σχήμα 3.3 απεικονίζει τη μέγιστη απόλυτη τιμή της συνάρτησης σφάλματος για κάθε τάξη πολυωνύμων, καθώς και τα όρια του κριτηρίου ανοχής.

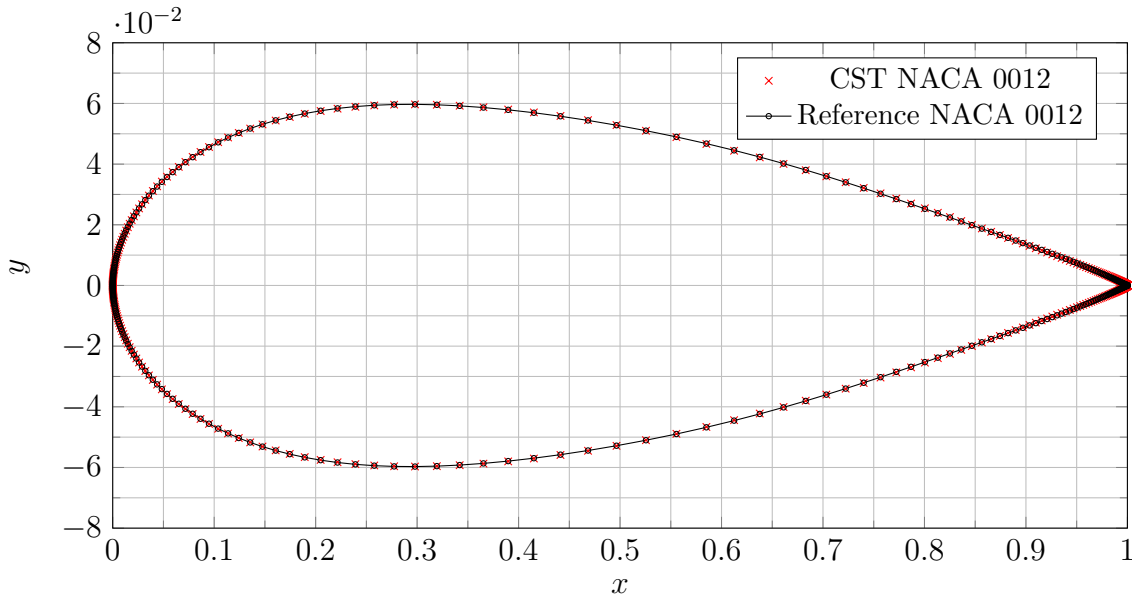


Σχήμα 3.3: Μέγιστη απόλυτη τιμή της συνάρτησης σφάλματος των πλευρών υπερπίεσης και υποπίεσης της αεροτομής NACA 0012, για κάθε τάξη πολυωνύμων Bernstein (BPO).

Από το σχήμα 3.3 προκύπτουν μερικές ενδιαφέρουσες παρατηρήσεις. Αρχικά οι μέγιστες απόλυτες τιμές της συνάρτησης σφάλματος των πλευρών υποπίεσης και υπερπίεσης είναι κοινές, αφού η αεροτομή είναι συμμετρική. Επιπλέον, σε αντίθεση με τη συνάρτηση κόστους του σχήματος 3.1, οι μέγιστες απόλυτες τιμές της συνάρτησης

σφάλματος δεν μειώνονται απαραίτητα όσο αυξάνεται η τάξη των πολυωνύμων Bernstein. Για αυτό τον λόγο ενδέχεται πολυώνυμα μικρότερης τάξης να ικανοποιούν το κριτήριο ανοχής, έναντι αντίστοιχων μεγαλύτερης τάξης. Ένα τέτοιο παράδειγμα αποτελεί η προσέγγιση με πολυώνυμα $2^{\text{ης}}$ και $3^{\text{ης}}$ τάξης. Όπως φαίνεται από το σχήμα 3.3 το μέγιστο σφάλμα με πολυώνυμα $3^{\text{ης}}$ τάξης είναι μεγαλύτερο από το σφάλμα με πολυώνυμα $2^{\text{ης}}$ τάξης. Όμως παρατηρώντας στο σχήμα 3.2, τις αντίστοιχες περιπτώσεις (b) και (c), η μέγιστη απόλυτη τιμή του σφάλματος για πολυώνυμα $2^{\text{ης}}$ τάξης είναι εντός των ορίων ανοχής, σε αντίθεση με την περίπτωση των πολυωνύμων $3^{\text{ης}}$ τάξης. Επομένως, θα ήταν προτιμότερο να προστεθεί επιπλέον συνθήκη για τον προσδιορισμό της τάξης των πολυωνύμων προσέγγισης, όπως η τιμή της συνάρτησης κόστους να είναι μικρότερη από 10^{-8} . Έτσι, συνδιαστικά από τα σχήματα 3.1, 3.2 και 3.3 προκύπτει ότι η επιθυμητή ακρίβεια για την προσέγγιση της αεροτομής επιτυγχάνεται χρησιμοποιώντας πολυώνυμα Bernstein $5^{\text{ης}}$ τάξης, σε κάθε πλευρά.

Στο σχήμα 3.4, παρουσιάζεται η προσέγγιση της αεροτομής NACA 0012 με τη CST παραμετροποίηση και πολυώνυμα Bernstein $5^{\text{ης}}$ τάξης, συγκριτικά με την αεροτομή αναφοράς.

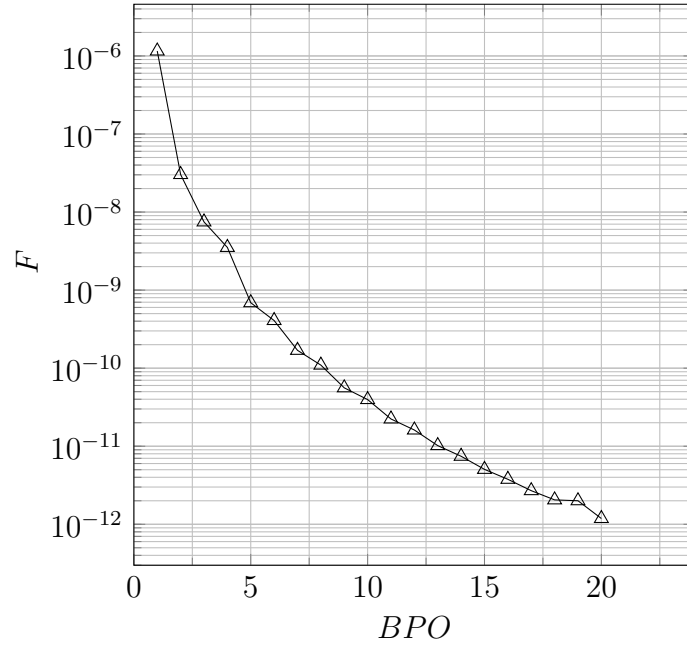


Σχήμα 3.4: Προσέγγιση της αεροτομής NACA 0012 με πολυώνυμα Bernstein $5^{\text{ης}}$ τάξης ($BPO = 5$), χωρίς κλίμακα.

3.3.2 Αεροτομή NACA 4415

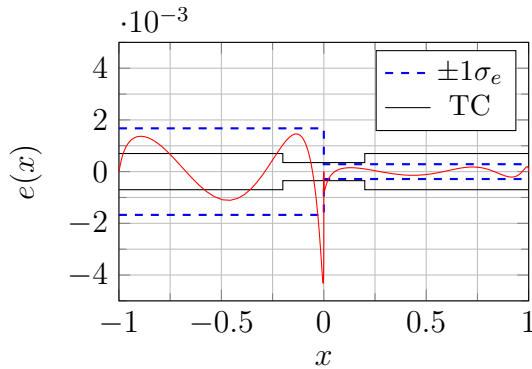
Στη περίπτωση προσέγγισης της αεροτομής NACA 4415, η αεροτομή αναφοράς αποτελείται από 401 σημεία με πάχος ακμής εκφυγής $\Delta y_{TE} = 0$. Τα αποτελέσματα της παραμετρικής ανάλυσης της συνάρτησης κόστους F ως προς την τάξη των πολυωνύμων Bernstein (BPO) που χρησιμοποιήθηκαν για την κατασκευή της κάθε πλευράς

της αεροτομής παρουσιάζονται στο σχήμα 3.5.

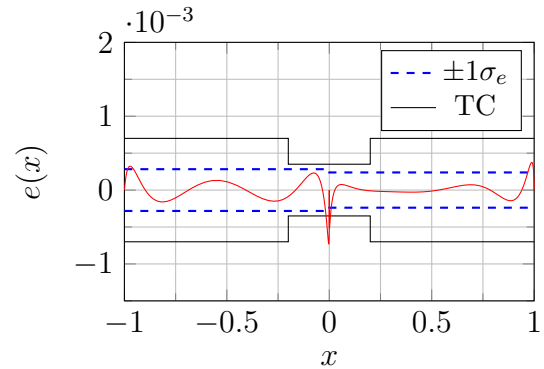


Σχήμα 3.5: Παραμετρική ανάλυση της συνάρτησης κόστους F ως προς την τάξη των πολυωνύμων Bernstein (BPO) για την αεροτομή NACA 4415, σε λογαριθμική κλίμακα.

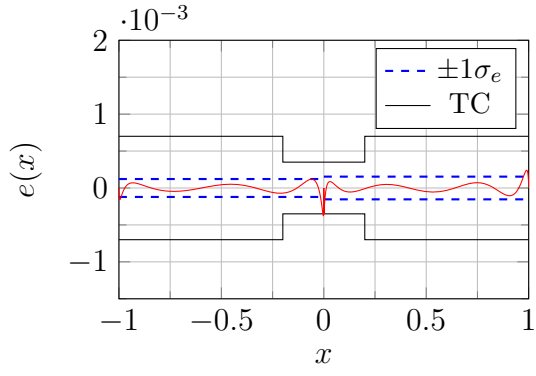
Σε αντίθεση με την περίπτωση της NACA 0012, ο ρυθμός μείωσης της συνάρτησης κόστους στην NACA 4415 είναι μεγαλύτερος στην αρχή και μειώνεται στην συνέχεια, όσο αυξάνεται η τάξη των πολυωνύμων Bernstein. Μάλιστα, για τάξη πολυωνύμων 5^{ης} και ύστερα, ο ρυθμός μείωσης της συνάρτησης κόστους φαίνεται να είναι περίπου σταθερός. Αυτό υποδεικνύει ότι μεγάλο κομμάτι στη βελτίωση της προσέγγισης γίνεται με πολυώνυμα Bernstein χαμηλής τάξης και, στη συνέχεια, η αύξηση της τάξης των πολυωνύμων βάσης να μην βελτιώνει την προσέγγιση, αλλά η βελτίωση δεν είναι τόσο επιδραστική όσο στην αρχή. Αυτό φαίνεται και στο σχήμα με τις συναρτήσεις σφάλματος προσέγγισης για διάφορες τιμές τάξης των πολυωνύμων Bernstein που ακολουθεί.



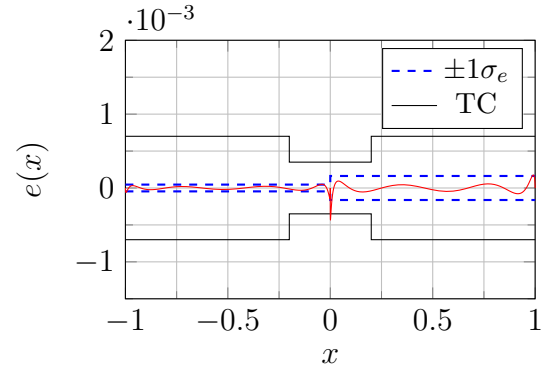
(a) $BPO = 1$



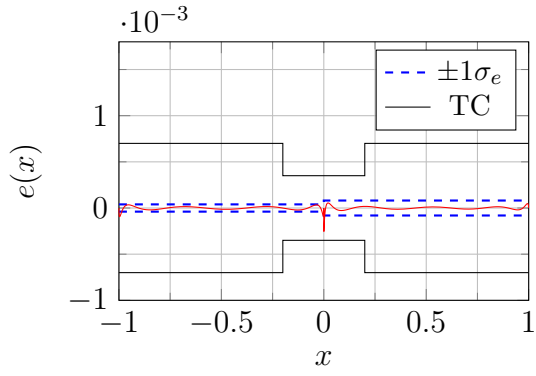
(b) $BPO = 2$



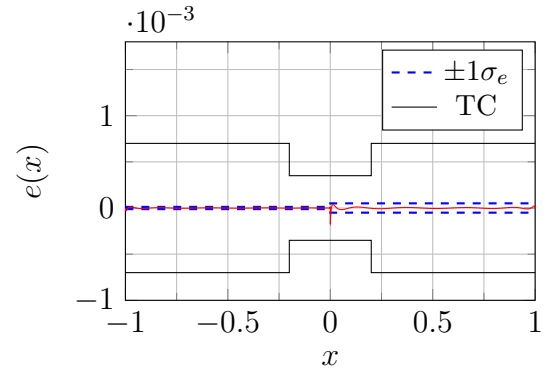
(c) $BPO = 3$



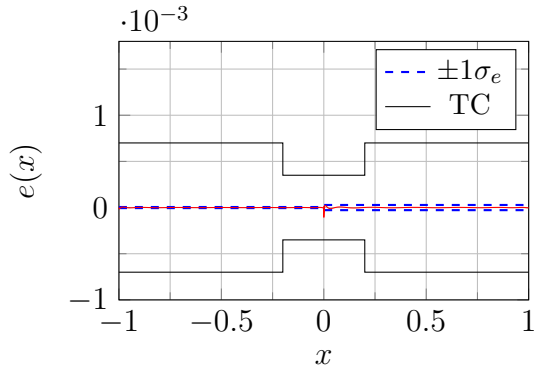
(d) $BPO = 4$



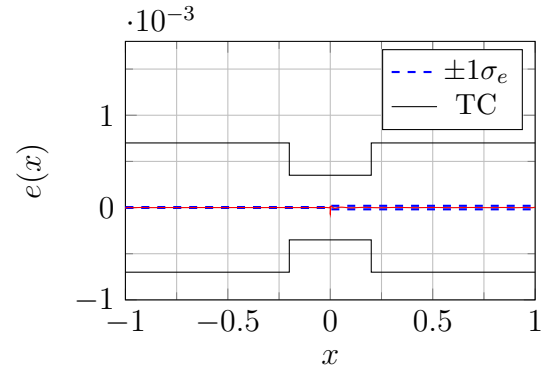
(e) $BPO = 5$



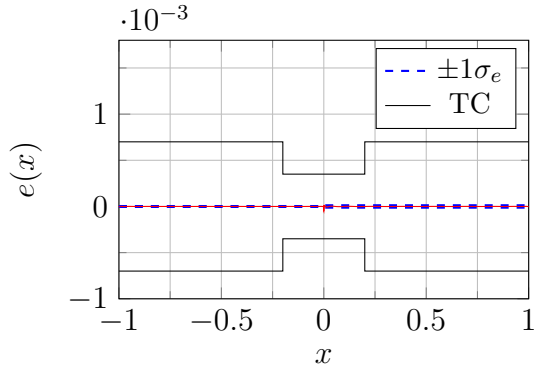
(f) $BPO = 8$



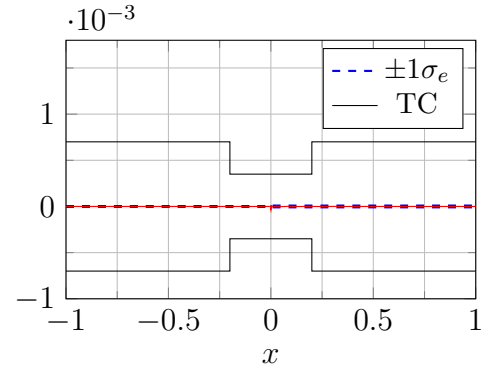
(g) $BPO = 11$



(h) $BPO = 14$



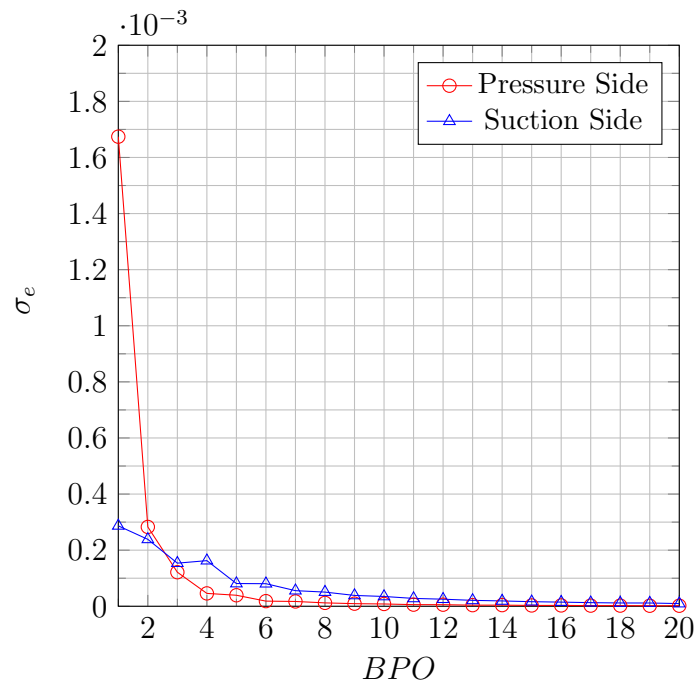
(i) $BPO = 17$



(j) $BPO = 20$

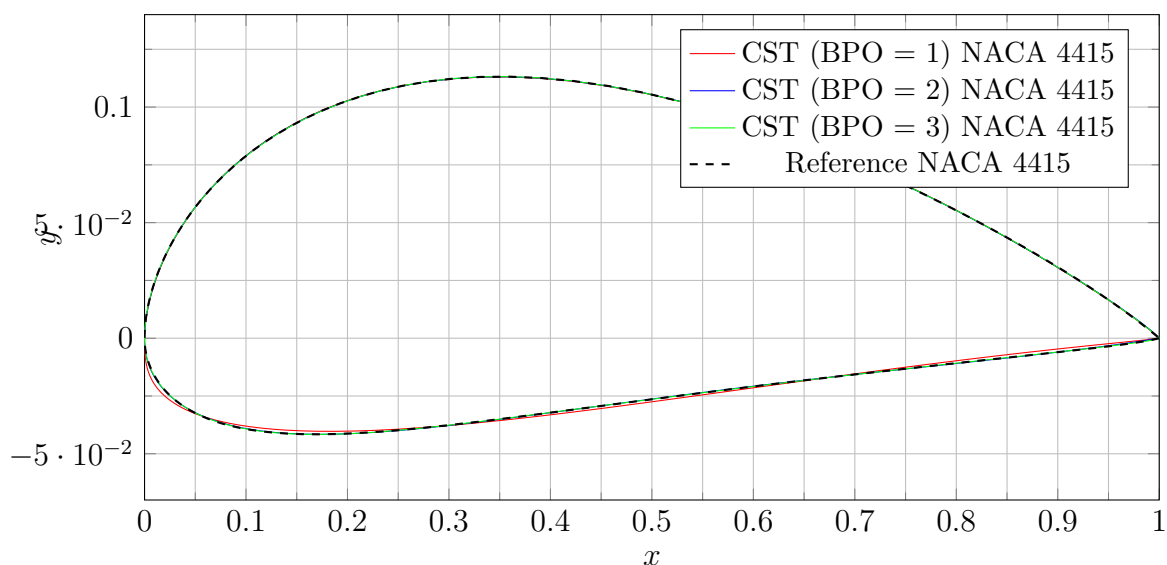
Σχήμα 3.6: Ελεγχος της προσέγγισης της αεροτομής NACA 4415 με βάση το κριτήριο ανοχής της σχέσης (3.17), για διάφορες τιμές της τάξης των πολυωνύμων Bernstein (BPO).

Πράγματι, στο σχήμα 3.6 φαίνεται ότι το εύρος της συνάρτησης σφάλματος μειώνεται έντονα σε κάθε αύξηση της τάξης των πολυωνύμων Bernstein, για τιμές από 1^{ης} μέχρι και 4^{ης} τάξης. Στη συνέχεια, η κάθε αύξηση στην τάξη των πολυωνύμων επιφέρει μικρότερη μείωση του εύρους. Επιπλέον, μία ενδιαφέρουσα παρατήρηση είναι ότι για πολυώνυμα Bernstein τάξης μικρότερης από 3, η τιμή της τυπικής απόκλισης σ_e είναι μεγαλύτερη για την πλευρά υπερπίεσης από την πλευρά υποπίεσης, ενώ για πολυώνυμα Bernstein τάξης μεγαλύτερης από 3 συμβαίνει το αντίστροφο. Η συγκεκριμένη παρατήρηση φαίνεται πιο έντονα στο σχήμα 3.7, που απεικονίζει την τυπική απόκλιση της συνάρτησης σφάλματος των πλευρών υποπίεσης και υπερπίεσης για κάθε τάξη πολυωνύμων.



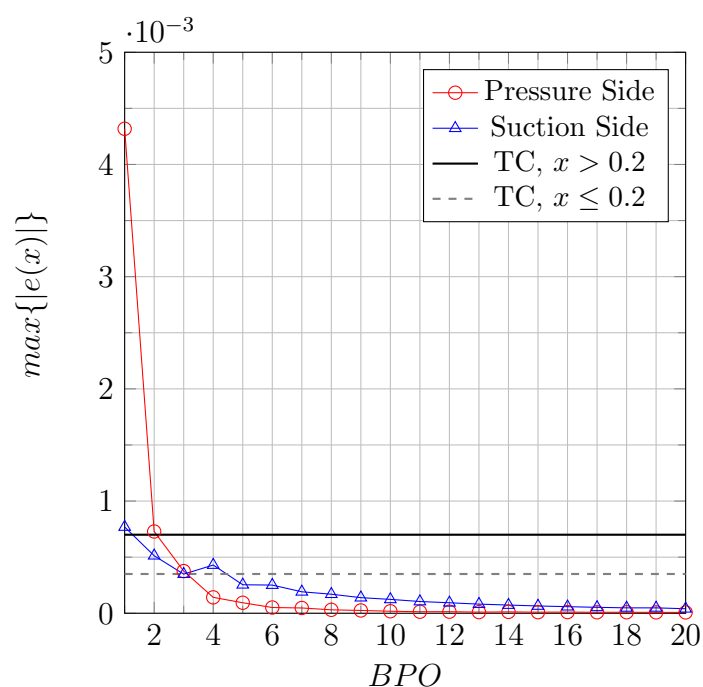
Σχήμα 3.7: Τυπική απόκλιση της συνάρτησης σφάλματος των πλευρών υπερπίεσης και υποπίεσης της αεροτομής NACA 4415, για κάθε τάξη πολυωνύμων Bernstein (BPO).

Όπως φαίνεται από το σχήμα 3.7, όντως η τυπική απόκλιση της πλευράς υπερπίεσης είναι μεγαλύτερη από την αντίστοιχη της πλευράς υποπίεσης, μόνο για πολυώνυμα Bernstein 1^{ης} και 2^{ης} τάξης. Αυτό υποδεικνύει ότι, χρησιμοποιώντας πολυώνυμα Bernstein 3^{ης} τάξης και άνω, είναι δυσκολότερη η προσέγγιση της πλευράς υποπίεσης σε σχέση με την πλευρά υπερπίεσης. Φυσικά, όσο αυξάνεται η τάξη των πολυωνύμων, η προσέγγιση της κάθε πλευράς μεμονωμένα βελτιώνεται, αλλά πάντα η προσέγγιση της πλευράς υποπίεσης είναι χειρότερη σε σχέση με την αντίστοιχη της πλευράς υπερπίεσης. Η βελτίωση που επιφέρει η αύξηση της τάξης των πολυωνύμων Bernstein φαίνεται ακόμα πιο έντονα στο σχήμα 3.8.



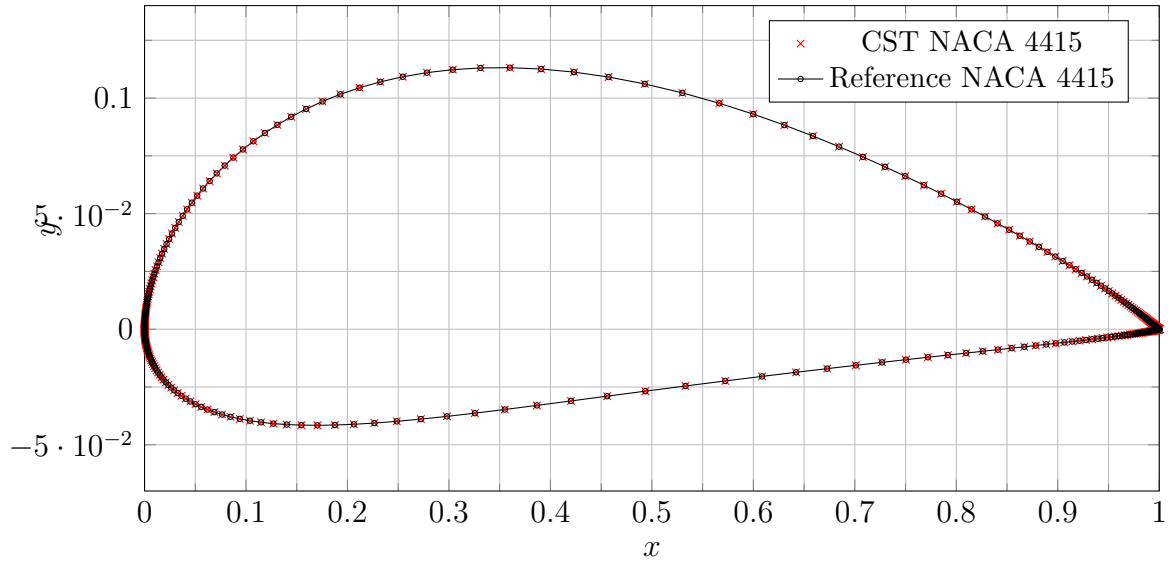
Σχήμα 3.8: Προσέγγιση της αεροτομής NACA 4415 με πολυώνυμα Bernstein $1^{\text{ης}}$, $2^{\text{ης}}$ και $3^{\text{ης}}$ τάξης, χωρίς κλίμακα.

Όπως φαίνεται από το σχήμα 3.8, όσο αυξάνεται η τάξη των πολυωνύμων Bernstein, τόσο καλύτερη γίνεται η ποιότητα της προσέγγισης. Ωστόσο, είναι απαραίτητη η χρήση των σχημάτων 3.5 και 3.6, γιατί εάν υπήρχε αποκλειστικά το σχήμα 3.8, θα προέκυπταν λανθασμένα συμπεράσματα σχετικά με την ικανοποιητική ακρίβεια προσέγγισης. Τέλος, προκειμένου να προσδιοριστεί η τάξη των πολυωνύμων που ικανοποιούν την επιθυμητή ακρίβεια, παρουσιάζεται το σχήμα 3.9 με τη μέγιστη απόλυτη τιμή της συνάρτησης σφάλματος για κάθε τάξη πολυωνύμων Bernstein.



Σχήμα 3.9: Μέγιστη απόλυτη τιμή της συνάρτησης σφάλματος των πλευρών υπερπίεσης και υποπίεσης της αεροτομής NACA 4415, για κάθε τάξη πολυωνύμων Bernstein (BPO).

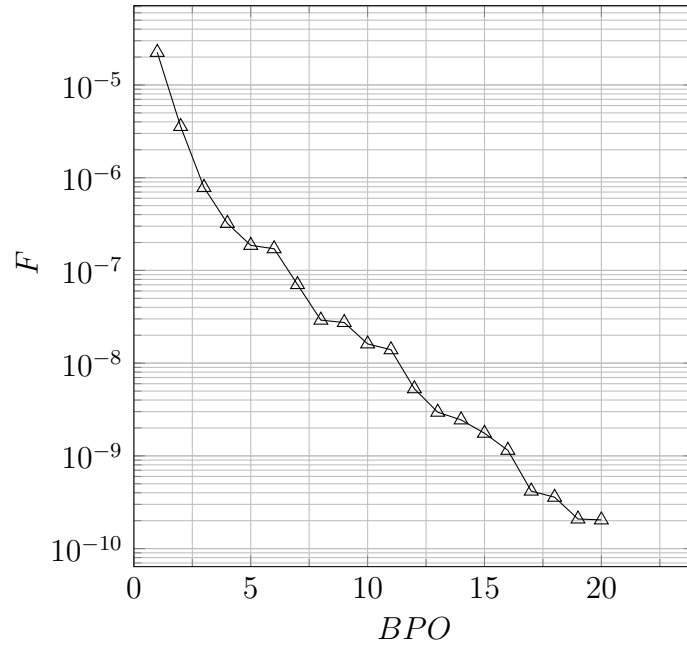
Παρατηρώντας τα σχήματα 3.5, 3.6 και 3.9 φαίνεται ότι, η επιθυμητή ακρίβεια για την προσέγγιση της αεροτομής επιτυγχάνεται χρησιμοποιώντας πολυώνυμα Bernstein 5^{ης} τάξης σε κάθε πλευρά. Στο σχήμα 3.10, παρουσιάζεται η προσέγγιση της αεροτομής NACA 4415 με τη CST παραμετροποίηση και πολυώνυμα Bernstein 5^{ης} τάξης, συγκριτικά με την αεροτομή αναφοράς.



Σχήμα 3.10: Προσέγγιση της αεροτομής NACA 4415 με πολυώνυμο Bernstein 5^{ης} τάξης ($BPO = 5$), χωρίς κλίμακα.

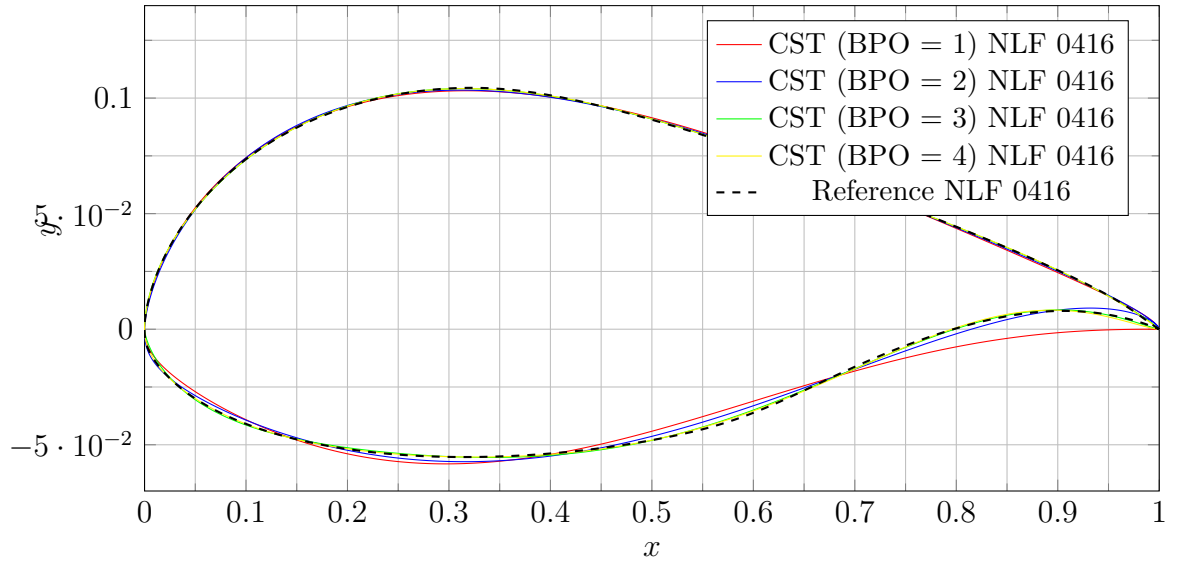
3.3.3 Αεροτομή NLF 0416

Η τελευταία περίπτωση προσέγγισης είναι η αεροτομή NLF 0416. Η αεροτομή αναφοράς, αποτελείται από 769 σημεία αναφοράς και πάχος εκφυγής $\Delta y_{TE} = 0$. Στο σχήμα 3.11, παρουσιάζεται η παραμετρική ανάλυση της συνάρτησης κόστους F ως προς την τάξη των πολυωνύμων Bernstein (BPO) που χρησιμοποιήθηκαν για την κατασκευή κάθε πλευράς της αεροτομής.



Σχήμα 3.11: Παραμετρική ανάλυση της συνάρτησης κόστους F ως προς την τάξη των πολυωνύμων Bernstein (BPO) για την αεροτομή NLF 0416, σε λογαριθμική κλίμακα.

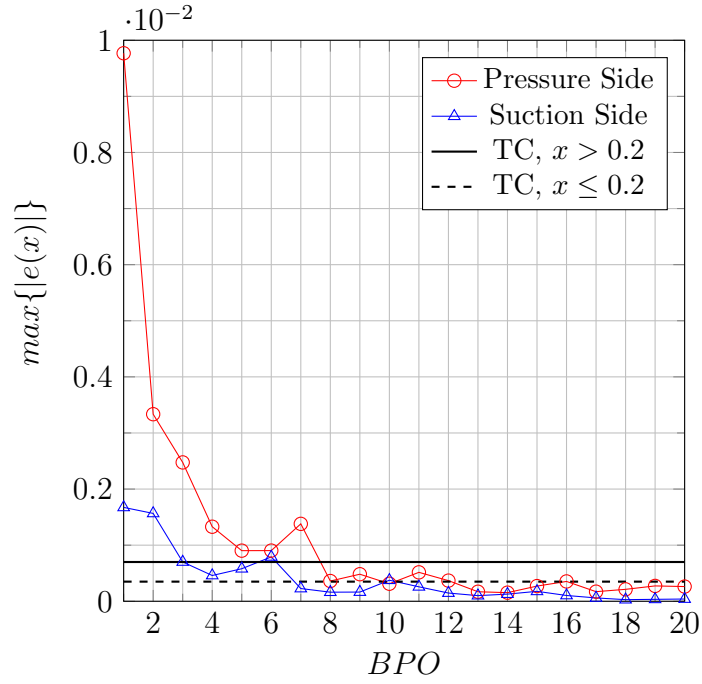
Είναι φανερό από το σχήμα 3.11, ότι η προσέγγιση της NLF 0416 ήταν αρκετά δυσκολότερη από τις προηγούμενες περιπτώσεις των αεροτομών NACA 0012 και NACA 4415. Πιο συγκεκριμένα, η τιμή της συνάρτησης κόστους μειώνεται όσο αυξάνεται η τάξη των πολυωνύμων Bernstein, αλλά το εύρος της κυμαίνεται από 10^{-5} έως 10^{-10} , αισθητά μεγαλύτερο από 10^{-7} έως 10^{-13} της NACA 0012 και 10^{-6} έως 10^{-12} της NACA 4415, αντίστοιχα. Ο λόγος της δυσκολότερης προσέγγισης είναι, σαφώς, η πολυπλοκότητα της γεωμετρίας της συγκεκριμένης αεροτομής σε σχέση με τις προηγούμενες. Άλλος ένας πιθανός λόγος, είναι ο μεγάλος αριθμός σημείων από τα οποία αποτελείται η αεροτομή αναφοράς, αφού τα μήκη $|\Delta x_i|$ στη συνάρτηση κόστους γίνονται πολύ μικρές ποσότητες με αποτέλεσμα να μην επιβάλλουν την επιθυμητή βαρύτητα. Προκειμένου να γίνει περισσότερη αντιληπτή η δυσκολία προσέγγισης, το σχήμα 3.12 απεικονίζει την παραγόμενη αεροτομή χρησιμοποιώντας πολυώνυμα Bernstein χαμηλής τάξης, καθώς και την αεροτομή αναφοράς.



Σχήμα 3.12: Προσέγγιση της αεροτομής *NLF 0416* με πολώνυμα *Bernstein* $1^{\eta\varsigma}$, $2^{\eta\varsigma}$, $3^{\eta\varsigma}$ και $4^{\eta\varsigma}$ τάξης, χωρίς κλίμακα.

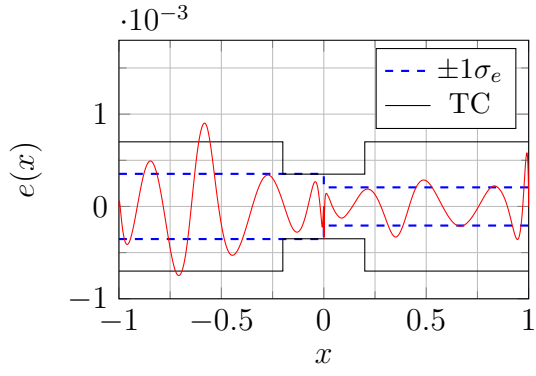
Είναι φανερό, λοιπόν, ότι απαιτούνται πολώνυμα μεγαλύτερης τάξης για την προσέγγιση της δεδομένης αεροτομής. Ακολουθεί, λοιπόν, η διαδικασία προσδιορισμού της απαραίτητης τάξης πολωνύμων *Bernstein*, όπως πραγματοποιήθηκε στα προηγούμενα παραδείγματα.

Έχοντας εξοικειωθεί με τη συνάρτηση του σφάλματος προσέγγισης, στο σχήμα 3.13 παρουσιάζεται το μέγιστο απόλυτο σφάλμα για κάθε τάξη των πολωνύμων *Bernstein*.

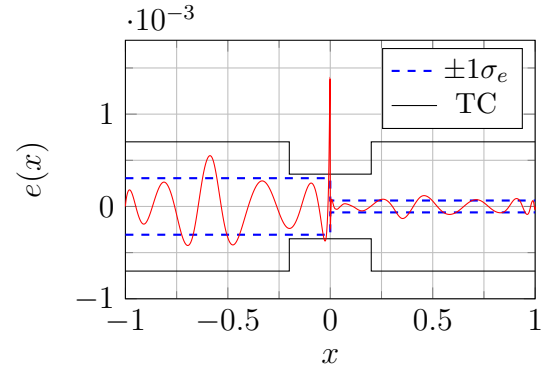


Σχήμα 3.13: Μέγιστη απόλυτη τιμή της συνάρτησης σφάλματος των πλευρών υπερπίεσης και υποπίεσης της αεροτομής *NLF 0416*, για κάθε τάξη πολυωνύμων *Bernstein* (*BPO*).

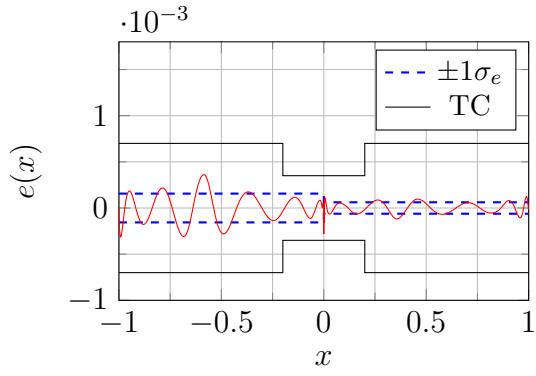
Όπως φαίνεται από τα σχήματα 3.11 και 3.13, το κριτήριο ανοχής ικανοποιείται για πολώνυμα 8^{ης} τάξης, χωρίς ωστόσο η τιμή της συνάρτησης κόστους να είναι μικρότερη από 10^{-8} . Αντίθετα, η επιθυμητή ακρίβεια για την προσέγγιση της αεροτομής, συμπεριλαμβανομένης της πρόσθετης συνθήκης που προαναφέρθηκε, επιτυγχάνεται χρησιμοποιώντας πολώνυμα *Bernstein* 13^{ης} τάξης σε κάθε πλευρά. Η προσθήκη της συνθήκης που αφορά την τιμή της συνάρτησης κόστους αύξησε τις μεταβλητές σχεδιασμού από 22 σε 32, σύμφωνα με τη σχέση (2.9). Προκειμένου να αποφευχθεί αυτό, προτείνεται η χρήση πολυωνύμων *Bernstein* διαφορετικής τάξης για τις πλευρές υπερπίεσης και υποπίεσης. Πράγματι, παρατηρώντας το σχήμα 3.13 και περαιτέρω το σχήμα 3.14 φαίνεται ότι, η πλευρά υποπίεσης ικανοποιεί το κριτήριο ανοχής της σχέσης (3.17) χρησιμοποιώντας πολώνυμα 5^{ης}, 7^{ης}, 8^{ης}, 9^{ης}, 11^{ης}, 12^{ης} και 13^{ης} τάξης, ενώ η πλευρά υπερπίεσης με πολώνυμα 8^{ης}, 9^{ης}, 10^{ης} και 13^{ης} τάξης, αντίστοιχα.



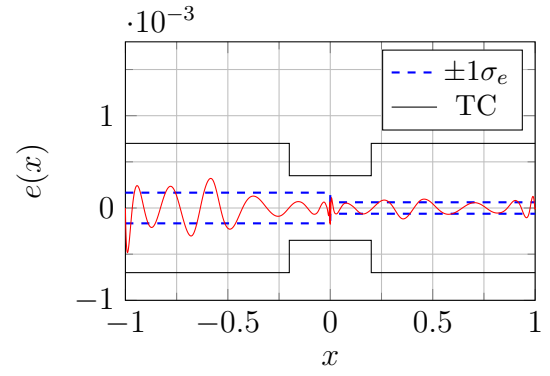
(a) $BPO = 5$



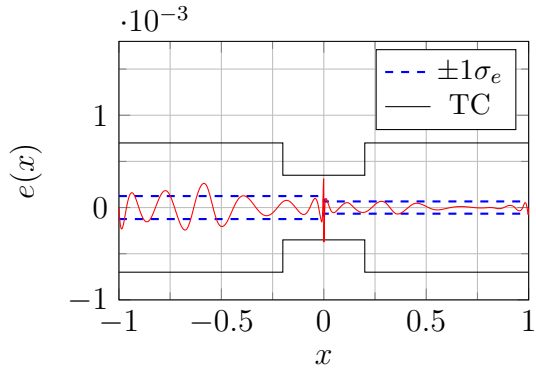
(b) $BPO = 7$



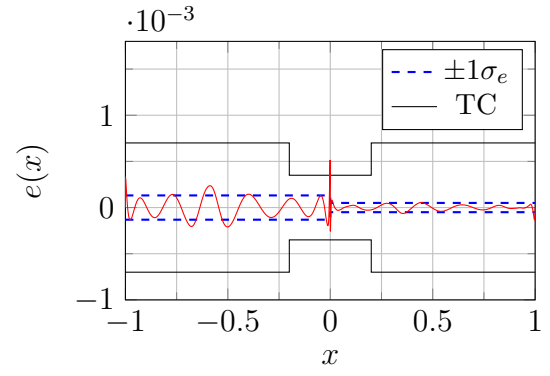
(c) $BPO = 8$



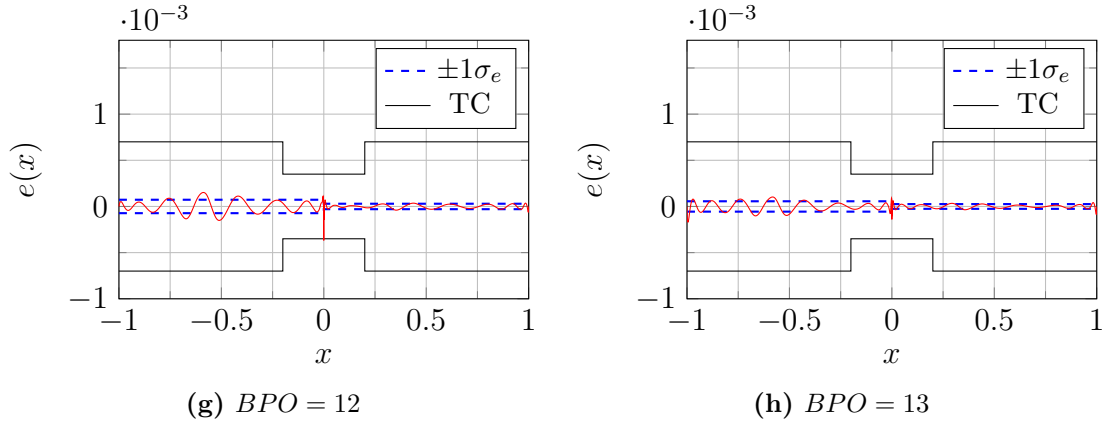
(d) $BPO = 9$



(e) $BPO = 10$

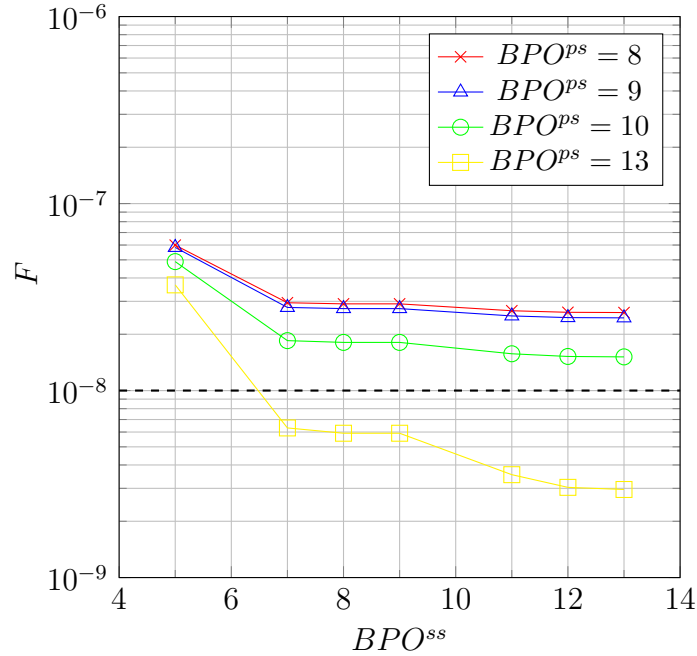


(f) $BPO = 11$



Σχήμα 3.14: Έλεγχος της προσέγγισης της αεροτομής *NLF 0416*, με βάση το κριτήριο ανοχής της σχέσης (3.17), για διάφορες τιμές της τάξης των πολωνύμων *Bernstein* (BPO).

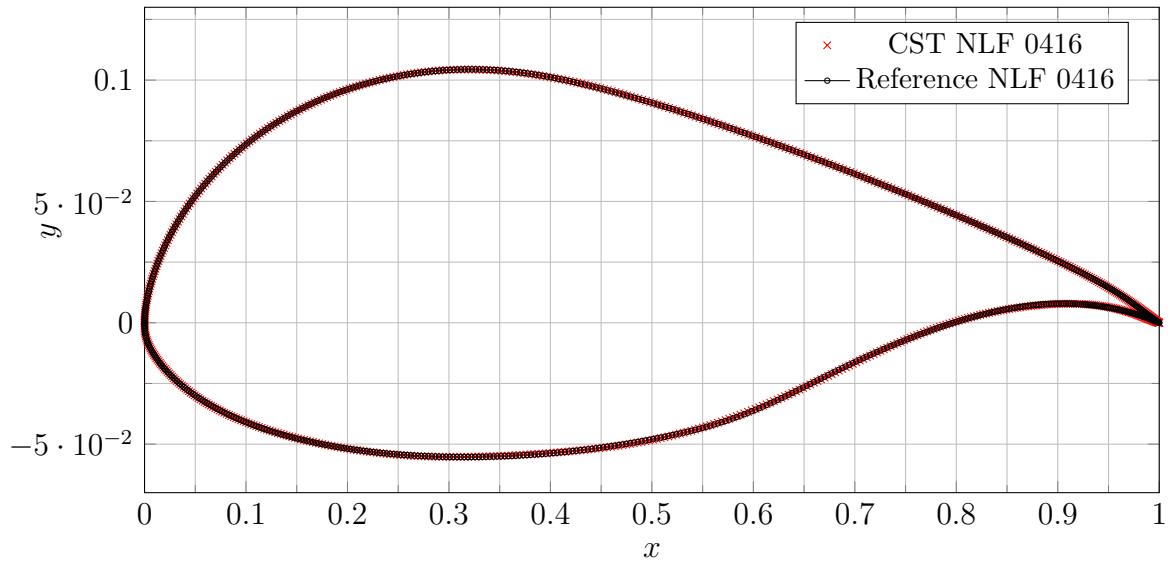
Επομένως, χρειάζεται να ξαναγίνει μία παραμετρική ανάλυση για τους 24 συνδυασμούς τιμών (6 τιμές για την πλευρά υποπίεσης x 4 τιμές για την πλευρά υπερπίεσης), ώστε να ελεγχθεί αν υπάρχει κάποιο ζεύγος που να ικανοποιεί τη συνθήκη της συνάρτησης κόστους και ταυτόχρονα να χρησιμοποιεί λιγότερες μεταβλητές σχεδιασμού. Στο σχήμα 3.15 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της ανάλυσης.



Σχήμα 3.15: Παραμετρική ανάλυση της συνάρτησης κόστους της αεροτομής *NLF 0416* για επιλεγμένους συνδυασμούς τιμών της τάξης των πολωνύμων *Bernstein* (BPO) για τις πλευρές υπερπίεσης (ps) και υποπίεσης (ss), σε λογαριθμική κλίμακα.

Όπως φαίνεται από το σχήμα 3.15, η πρόσθετη συνθήκη επιτυγχάνεται χρησιμοποιώντας τον ελάχιστο αριθμό μεταβλητών σχεδιασμού με πολυώνυμα Bernstein 7^{ης} τάξης για την πλευρά υποπίεσης και αντίστοιχα 13^{ης} τάξης για την πλευρά υπερπίεσης. Έτσι, ο αριθμός των μεταβλητών σχεδιασμού μειώθηκε από 32 σε 26.

Τέλος, στο σχήμα 3.16, παρουσιάζεται η προσέγγιση της αεροτομής NLF 0416 με τη CST παραμετροποίηση χρησιμοποιώντας το ζεύγος πολυωνύμων Bernstein που αναφέρθηκε, συγκριτικά με την αεροτομή αναφοράς.



Σχήμα 3.16: Προσέγγιση της αεροτομής NLF 0416 με πολυώνυμα Bernstein 7^{ης} τάξης για την πλευρά υποπίεσης ($BPO^{ss} = 7$) και αντίστοιχα 13^{ης} τάξης για την πλευρά υπερπίεσης ($BPO^{ps} = 13$), χωρίς κλίμακα.

Κεφάλαιο 4

Ένταξη της CST Παραμετροποίησης στον Κύκλο Βελτιστοποίησης

Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιαστεί το πλαίσιο της ένταξης της CST παραμετροποίησης στη διαδικασία της βελτιστοποίησης με τη συνεχή συζυγή μέθοδο (continuous adjoint method), μέσω του λογισμικού PUMA. Το μεγάλο πλεονέκτημα της συζυγής μεθόδου και ο λόγος που χρησιμοποιήθηκε ως μέθοδος βελτιστοποίησης, είναι ότι, το κόστος υπολογισμού των παραγώγων είναι ανεξάρτητο από τον αριθμό των μεταβλητών σχεδιασμού. Αρχικά, θα παρουσιαστούν τα βήματα που απαιτούνται πριν την έναρξη του κύκλου βελτιστοποίησης και στη συνέχεια, θα αναφερθούν οι διαδικασίες που εκτελούνται μέσα στον κύκλο, δίνοντας έμφαση στις παρεμβάσεις που χρειάστηκαν να γίνουν. Τέλος, θα παρουσιαστεί το διάγραμμα ροής της συνολικής διαδικασίας.

4.1 Βήματα πριν την Έναρξη του Κύκλου Βελτιστοποίησης

Αρχικά, για την εκάστοτε αεροτομή αναφοράς, εκτελείται ο αλγόριθμος βέλτιστης προσέγγισής της με την επιθυμητή παραμετροποίηση, που παρουσιάστηκε εκτενώς στο Κεφάλαιο 3. Η επιλογή της τάξης των πολυωνύμων Bernstein που χρησιμοποιούνται ως πολυώνυμα βάσης είναι απόφαση του μηχανικού και προτείνεται να εκτελείται μία παραμετρική ανάλυση, όπως ακριβώς έγινε στο Κεφάλαιο 3. Ωστόσο, σε γενικές γραμμές για ένα μεγάλο εύρος αεροτομών τα πολυώνυμα 9^{th} τάξης είναι μία καλή επιλογή.

Στη συνέχεια, ακολουθεί η κατασκευή του υπολογιστικού πλέγματος. Στην Υπολογιστική Ρευστοδυναμική (CFD), η κατασκευή του πλέγματος είναι μία κρίσιμη διαδικασία, ώστε να επιτυγχάνονται ακριβείς και αποδοτικές προσομοιώσεις. Το πλέγμα διαιρεί το υπολογιστικό χωρίο σε κελιά, όπου επιλύονται οι εξισώσεις, καθιστώντας την ποιότητά

του ζωτικής σημασίας, τόσο για την ακριβή περιγραφή των χαρακτηριστικών της ροής, όσο και για τη σύγκλιση των αλγορίθμων επίλυσης. Κάποια βασικά χαρακτηριστικά του πλέγματος, που καλείται ο μηχανικός να επιλέξει, είναι ο τύπος του (δομημένο, μη-δομημένο και υβριδικό) και η πυκνότητά του. Ωστόσο, δεν θα αναλυθεί περαιτέρω η διαδικασία γένεσης του πλέγματος, καθώς δεν αποτελεί αντικείμενο της διπλωματικής εργασίας.

Τέλος, έχοντας υπολογίσει τις αρχικές τιμές των μεταβλητών σχεδιασμού και έχοντας κατασκευάσει το υπολογιστικό πλέγμα, σειρά έχει η επαναληπτική διαδικασία της βελτιστοποίησης. Όπως αναφέρθηκε στο Κεφάλαιο 1, υπάρχουν διάφοροι αλγόριθμοι βελτιστοποίησης. Ωστόσο, τα προβλήματα που θα παρουσιαστούν στα επόμενα κεφάλαια υπάγονται σε μία κατηγορία προβλημάτων που δεν αναφέρθηκε στην εισαγωγή και είναι γνωστή ως βελτιστοποίηση με περιορισμούς. Ο αλγόριθμος βελτιστοποίησης που επιλέχθηκε για την επίλυση όλων των προβλημάτων που θα ακολουθήσουν, ονομάζεται SLSQP (Sequential Least Squares Quadratic Programming) και είναι κατάλληλος για προβλήματα βελτιστοποίησης με περιορισμούς [18].

4.2 Βήματα εντός του Κύκλου Βελτιστοποίησης

Έχοντας επιλέξει τον αλγόριθμο βελτιστοποίησης, σειρά έχουν οι διαδικασίες που εκτελούνται κατά τη διάρκεια του κάθε κύκλου. Το πρώτο βήμα που εκτελείται σε κάθε κύκλο, είναι η επίλυση των εξισώσεων ροής. Οι εξισώσεις ροής αντιπροσωπεύονται από τις εξισώσεις Navier-Stokes, οι οποίες αποτελούνται από τη διατήρηση της μάζας, τη διατήρηση της ορμής και τη διατήρηση της ενέργειας των ρευστών. Τα προβλήματα που θα ακολουθήσουν έχουν αριθμό Mach που κυμαίνεται στο $M_\infty = [0.1 - 0.78]$ και αριθμό Reynolds $Re_\infty = [1 \cdot 10^6 - 4.66 \cdot 10^6]$. Επομένως, η ροή θεωρήθηκε συμπιεστή και τυρβώδης και για την επίλυσή της χρησιμοποιήθηκαν οι εξισώσεις RANS και το μοντέλο τύρβης Spalart-Almaras [17]. Η διαδικασία αυτή, συχνά αναφέρεται ως πρωτεύον πρόβλημα.

Το επόμενο βήμα, είναι ο υπολογισμός των παραγώγων ευαισθησίας. Η μέθοδος που χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό των παραγώγων ευαισθησίας είναι η συνεχής συζυγής μέθοδος. Πρόκειται, για μια αποδοτική αριθμητική τεχνική που υπολογίζει τις παραγώγους της συνάρτησης κόστους ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού, με υπολογιστικό κόστος ανεξάρτητο από τον αριθμό αυτών των μεταβλητών. Σε αντίθεση με άλλες μεθόδους, η συζυγής μέθοδος, απαιτεί την επίλυση ενός συστήματος συζυγών εξισώσεων, το οποίο διατυπώνεται βάσει του επιλεγμένου μοντέλου ροής (όπως RANS) και της συνάρτησης κόστους (π.χ. αντίσταση ή άνωση). Αναλόγως την επιλογή του μοντέλου των εξισώσεων ροής, παράγονται οι αντίστοιχες συζυγείς εξισώσεις, όπου και αυτές με τη σειρά τους διακριτοποιούνται και επιλύονται. Η λύση του συστήματος των συζυγών εξισώσεων οδηγεί στον υπολογισμό των παραγώγων ευαισθησίας της συνάρ-

τησης κόστους. Η παραπάνω διαδικασία συχνά αναφέρεται ως συζυγές πρόβλημα. Οι διαδικασίες της επίλυσης του πρωτεύοντος και του συνεχούς συζυγούς προβλήματος, εκτελούνται με τη χρήση του λογισμικού PUMA. Για τον υπολογισμό των παραγώγων ευαισθησίας χρειάστηκε εξωτερική παρέμβαση και επικοινωνία με τον PUMA [19]. Πιο συγκεκριμένα, οι παράγωγοι ευαισθησίας της συνάρτησης κόστους F στους οριακούς κόμβους, υπολογίζονται με τον κανόνα της αλυσίδας από τη σχέση:

$$\frac{\delta F}{\delta b_n} = \frac{\delta F}{\delta x_i} \frac{\delta x_i}{\delta b_n} + \frac{\delta F}{\delta y_i} \frac{\delta y_i}{\delta b_n} + \frac{\delta F}{\delta z_i} \frac{\delta z_i}{\delta b_n} \quad (4.1)$$

όπου

$\frac{\delta F}{\delta x_i}, \frac{\delta F}{\delta y_i}, \frac{\delta F}{\delta z_i}$ είναι οι παράγωγοι ευαισθησίας της συνάρτησης κόστους ως προς τις συντεταγμένες x_i, y_i, z_i , του i κόμβου της αεροτομής.

$\frac{\delta x_i}{\delta b_n}, \frac{\delta y_i}{\delta b_n}, \frac{\delta z_i}{\delta b_n}$ είναι οι παράγωγοι ευαισθησίας των συντεταγμένων του i κόμβου της αεροτομής ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού και προκύπτουν από την παραγωγή της CST παραμετροποίησης.

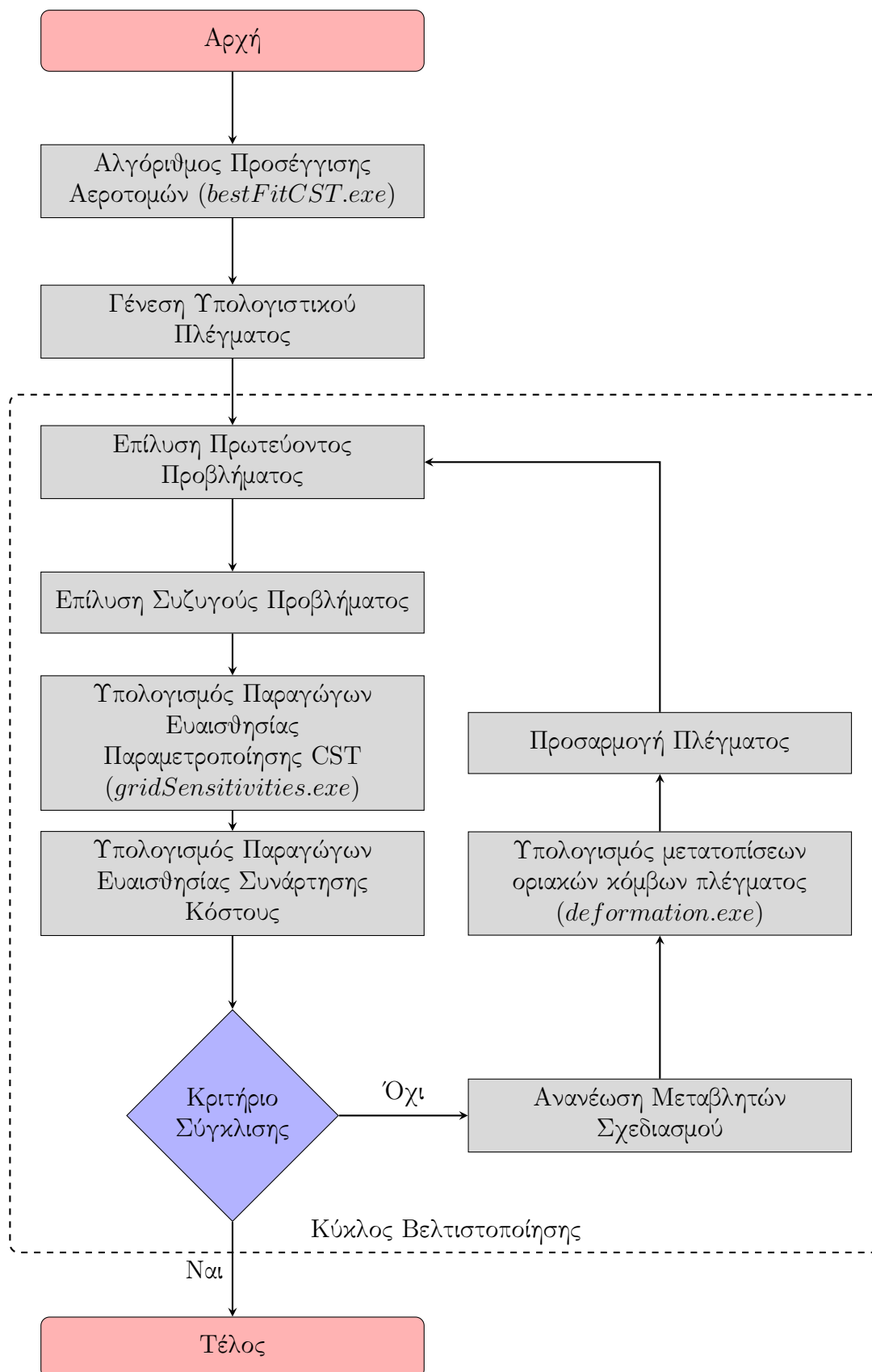
Όπως φαίνεται από τη σχέση (4.1), ο υπολογισμός των παραγώγων ευαισθησίας της συνάρτησης κόστους στους οριακούς κόμβους απαιτεί την προσθήκη των παραγώγων ευαισθησίας της CST παραμετροποίησης στο λογισμικό PUMA. Για τον σκοπό αυτό, δημιουργήθηκε λογισμικό με όνομα *gridSensitivities.exe*, το οποίο υπολογίζει τις απαραίτητες παραγώγους και τις εισάγει μέσω αρχείου κατάλληλης διαμόρφωσης στο λογισμικό PUMA, ώστε να υπολογιστούν τελικά οι παράγωγοι ευαισθησίας της συνάρτησης κόστους στους οριακούς κόμβους. Οι τιμές των παραγώγων ευαισθησίας της CST παραμετροποίησης είναι εύκολο να υπολογιστούν. Αρχικά, επειδή η ανάλυση αναφέρεται σε αεροτομές εξ ορισμού θα είναι $\frac{\delta z_i}{\delta b_n} = 0$. Επιπλέον, παρατηρώντας τις σχέσεις (2.7) και (2.8) που εκφράζουν τη CST παραμετροποίηση, φαίνεται ότι, η μεταβλητή x είναι ανεξάρτητη των μεταβλητών σχεδιασμού b_n , επομένως $\frac{\delta x_i}{\delta b_n} = 0$. Τέλος, οι παράγωγοι ευαισθησίας $\frac{\delta y_i}{\delta b_n}$ έχουν υπολογιστεί κατά τη διαδικασία της προσέγγισης της γεωμετρίας, όπως αναφέρθηκε στο Κεφάλαιο 3 και προκύπτουν από τη σχέση (3.9). Όσον αφορά τους υπόλοιπους κόμβους, το λογισμικό του PUMA, χρησιμοποιώντας τη μέθοδο IDW (Inverse Distance Weighted), μεταφέρει την πληροφορία των παραγώγων ευαισθησίας των οριακών κόμβων της αεροτομής $\frac{\delta x_i}{\delta b_n}, \frac{\delta y_i}{\delta b_n}, \frac{\delta z_i}{\delta b_n}$, σε όλους τους υπόλοιπους κόμβους και εφαρμόζοντας ξανά τον κανόνα της αλυσίδας, υπολογίζει τις παραγώγους ευαισθησίας της συνάρτησης κόστους σε όλους τους υπόλοιπους κόμβους.

Έχοντας υπολογίσει τις παραγώγους ευαισθησίας της συνάρτησης κόστους σε όλους του κόμβους του υπολογιστικού χωρίου, ακολουθούν: η ανανέωση των μεταβλητών σχεδιασμού, η δημιουργία της νέας αεροτομής και η προσαρμογή του πλέγματος στη νέα γεωμετρία. Σε αυτό το σημείο, χρειάστηκε ξανά παρέμβαση στον PUMA με χρήση εξωτερικού λογισμικού, ώστε να του υποδείξει τη μετατόπιση των οριακών κόμβων

του νέου πλέγματος. Για τον σκοπό αυτό, δημιουργήθηκε ένα δεύτερο λογισμικό με όνομα *deformation.exe*, όπου δέχεται ως είσοδο τις νέες μεταβλητές σχεδιασμού, κατασκευάζει τη γεωμετρία της προκύπτουσας αεροτομής, χρησιμοποιώντας τη CST παραμετροποίηση και υπολογίζει τις μετατοπίσεις των κόμβων, μεταξύ παλιάς και νέας αεροτομής. Ουσιαστικά, αυτές οι μετατοπίσεις αποτελούν τις μετατοπίσεις του πλέγματος στους οριακούς κόμβους, οπότε, στη συνέχεια, εισάγονται μέσω αρχείου κατάλληλης διαμόρφωσης στο λογισμικό PUMA. Τέλος, ο PUMA χρησιμοποιώντας ξανά τη μέθοδο IDW, μεταφέρει την πληροφορία της μετατόπισης των οριακών κόμβων σε όλους τους υπόλοιπους κόμβους του πλέγματος.

4.3 Διάγραμμα Ροής

Στο σχήμα 4.1 παρουσιάζεται το διάγραμμα ροής της διαδικασίας της βελτιστοποίησης. Το διάγραμμα ροής περιγράφει γενικά τη διαδικασία της βελτιστοποίησης, χωρίς λεπτομέρειες περί επιλογής των εξισώσεων του πρωτεύοντος προβλήματος ή του κριτηρίου σύγκλισης. Λεπτομέρειες για τα σχετικά ζητήματα θα περιγραφούν ξεχωριστά για το κάθε πρόβλημα στα αντίστοιχα κεφάλαια.



Σχήμα 4.1: Διάγραμμα ροής της διαδικασίας βελτιστοποίησης.

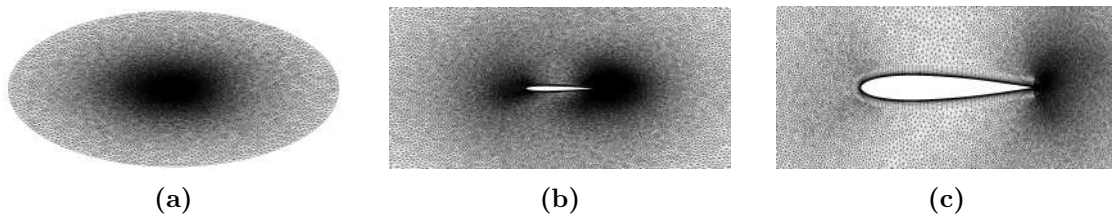
Κεφάλαιο 5

Βελτιστοποίηση Μορφής Αεροτομής NACA 0012

5.1 Περιγραφή Προβλήματος

Το πρώτο πρόβλημα αναφέρεται στη βελτιστοποίηση μορφής της συμμετρικής αεροτομής NACA0012. Στόχος, τέθηκε η ελαχιστοποίηση του συντελεστή αντίστασης C_D , υπό τους περιορισμούς, ο συντελεστής άνωσης C_L και το εμβαδόν A της προκύπτουσας αεροτομής, να ισούνται με τα ίδια μεγέθη με την αρχική. Επομένως, το πρόβλημα αντιμετωπίστηκε ως πρόβλημα βελτιστοποίησης ενός στόχου με δύο περιορισμούς ισότητας. Επιπλέον, πραγματοποιήθηκαν δύο κύκλοι βελτιστοποίησης, όπου στον πρώτο χρησιμοποιήθηκε η CST παραμετροποίηση, ενώ στον δεύτερο χρησιμοποιήθηκαν καμπύλες Bezier, ώστε να γίνει σύγκριση των αποτελεσμάτων.

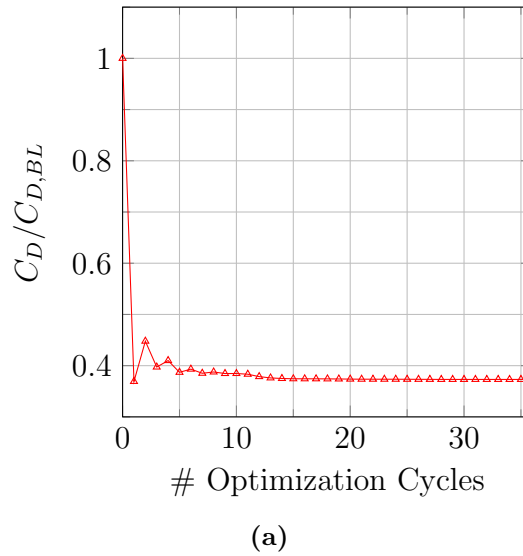
Οι συνθήκες της επ' άπειρον ροής είναι γωνία προσβολής $\alpha_\infty = 2^\circ$, αριθμός Mach $M_\infty = 0.78$ και αριθμός Reynolds $Re_\infty = 4.66 \cdot 10^6$. Το πλέγμα που χρησιμοποιήθηκε για την επίλυση της ροής είναι υβριδικό, αποτελείται από περίπου 194K κόμβους και εκτείνεται σε απόσταση ίση με 30 χορδές περιμετρικά της αεροτομής, όπως φαίνεται στο σχήμα 5.1.

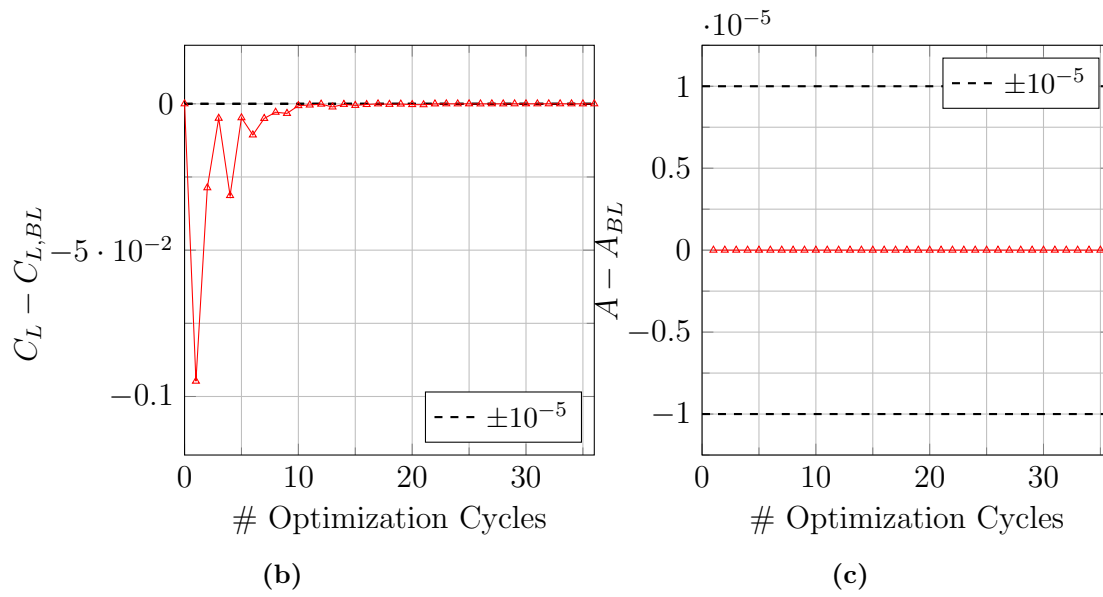


Σχήμα 5.1: Υπολογιστικό πλέγμα γύρω από την αεροτομή NACA 0012: (a) Πλήρες πλέγμα, (b) Μέτρια εστίαση του πλέγματος, (c) Κοντινή εστίαση του πλέγματος.

5.2 Βελτιστοποίηση με Καμπύλες Bezier

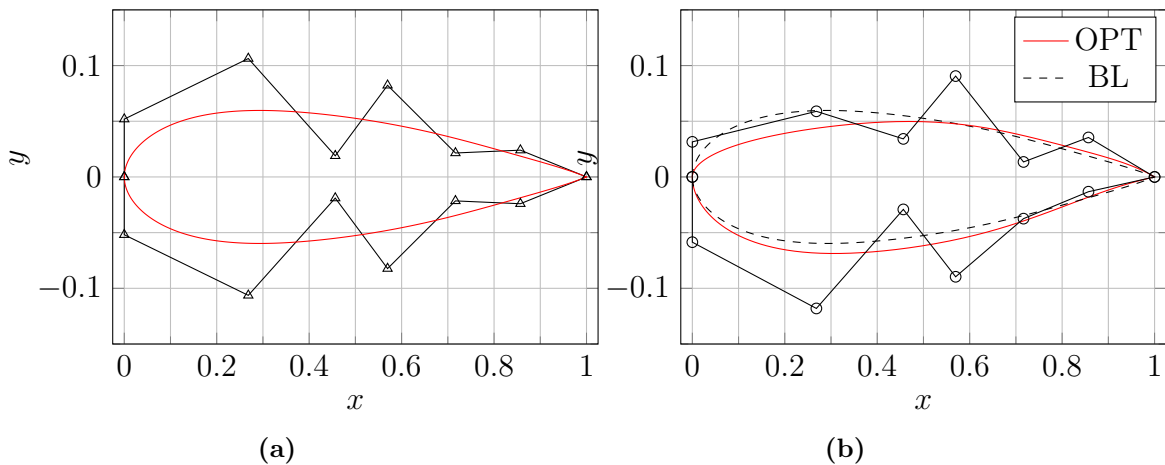
Κατά τη διαδικασία της βελτιστοποίησης που πραγματοποιήθηκε με καμπύλες Bezier για την παραμετροποίηση της αεροτομής, χρησιμοποιήθηκαν 16 σημεία ελέγχου, 8 για κάθε πλευρά. Το πρώτο και το τελευταίο σημείο των πλευρών υποπίεσης και υπερπίεσης της αεροτομής παραμένουν ακλόνητα. Επιπλέον, οι τετμημένες των σημείων ελέγχου, παραμένουν σταθερές, διαμορφώντας έτσι τον συνολικό αριθμό των μεταβλητών σχεδιασμού σε 12 (6 τιμές τεταγμένων των σημείων ελέγχου της πλευράς υπερπίεσης και άλλες 6 για την πλευρά υποπίεσης, αντίστοιχα). Επιπλέον, για κάθε μεταβλητή σχεδιασμού, η επιτρεπτή μεταβολή επιλέχθηκε να είναι $\pm 20\%$ της αρχικής τιμής της, ενώ ο αλγόριθμος τερματίζει στη περίπτωση, όπου η μεταβολή τους μεταξύ δύο συνεχόμενων κύκλων, είναι μικρότερη από 10^{-5} . Τέλος, τα όρια ανοχής των περιορισμών ισότητας είναι $\pm 10^{-5}$. Στο σχήμα 5.2, παρουσιάζονται συνοπτικά τα αποτελέσματα της βελτιστοποίησης.





Σχήμα 5.2: Διαγράμματα σύγκλισης βελτιστοποίησης της αεροτομής NACA 0012 με καμπύλες Bezier: (a) Συντελεστής αντίστασης (συνάρτηση κόστους), (b) Συντελεστής άνωσης (περιορισμός ισότητας), (c) Εμβαδόν (περιορισμός ισότητας).

Όπως φαίνεται από τα διαγράμματα του σχήματος 5.2, η βελτιστοποίηση πραγματοποιήθηκε με επιτυχία έπειτα από 36 κύκλους, ικανοποιώντας τους περιορισμούς του συντελεστή άνωσης και του εμβαδού και επιτυγχάνοντας μείωση του συντελεστή αντίστασης κατά 62.7%. Η βελτιστοποιημένη αεροτομή, καθώς και οι μεταβολές των σημείων ελέγχου των καμπυλών Bezier παρουσιάζονται στο σχήμα 5.3.



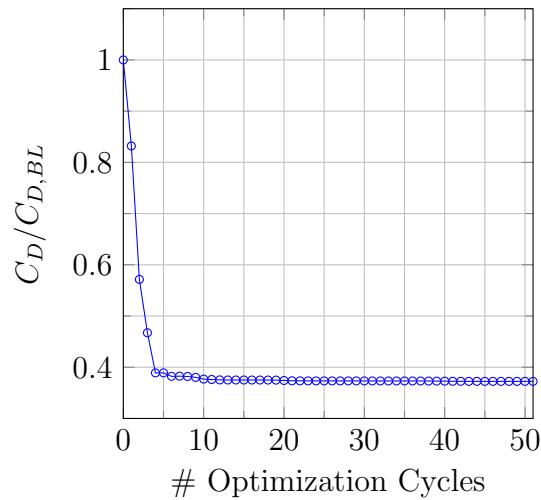
Σχήμα 5.3: Σημεία ελέγχου των καμπυλών Bezier και παραγόμενη αεροτομή (άξονες χωρίς κλίμακα): (a) Αρχική αεροτομή NACA 0012, (b) Βελτιστοποιημένη αεροτομή.

Στη συνέχεια, θα ακολουθήσει εκτενέστερη ανάλυση των αποτελεσμάτων, συγκριτικά

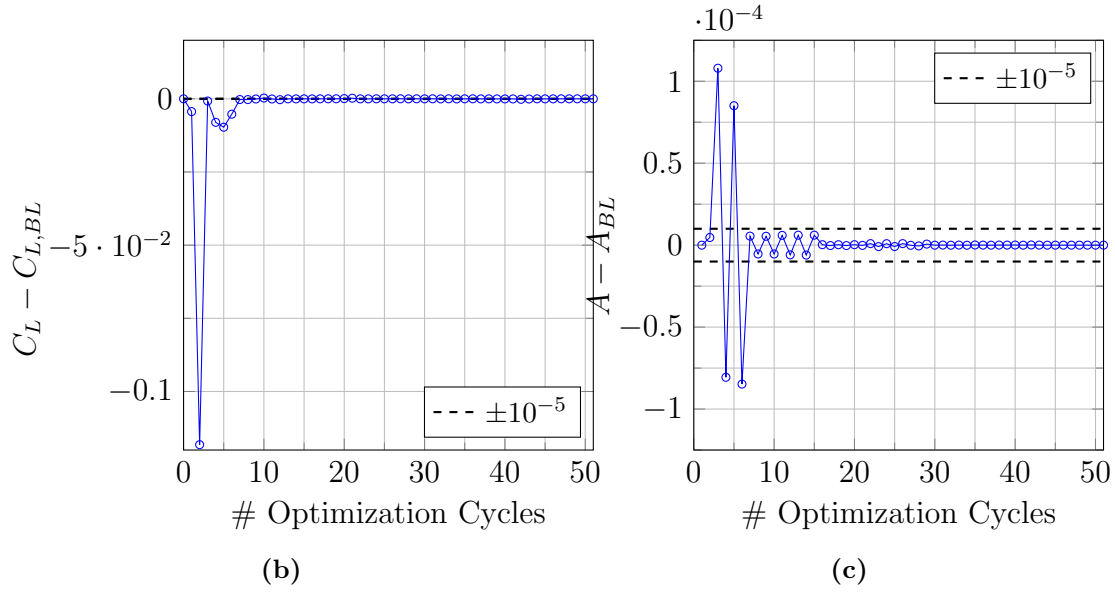
με τα αποτελέσματα της βελτιστοποίησης, που έγινε χρησιμοποιώντας τη CST παραμετροποίηση.

5.3 Βελτιστοποίηση με CST Παραμετροποίηση

Για την παραμετροποίηση της αεροτομής με τη μέθοδο CST, χρησιμοποιήθηκαν πολυώνυμα Bernstein 9^{ης} τάξης για κάθε πλευρά της αεροτομής. Έτσι, παρατηρώντας τη σχέση (2.9) προκύπτουν 24 μεταβλητές σχεδιασμού (12 για την πλευρά υποπίεσης και άλλες 12 για την πλευρά υπερπίεσης). Σύμφωνα με το διάγραμμα ροής του σχήματος 4.1, η διαδικασία αρχίζει με την εκτέλεση του αλγορίθμου βέλτιστης προσέγγισης της αεροτομής, με σκοπό να προκύψουν οι αρχικές μεταβλητές σχεδιασμού. Στη συνέχεια, επιλέγονται οι κατάλληλες ρυθμίσεις που σχετίζονται με τον αλγόριθμο βελτιστοποίησης, όπως η επιτρεπτή μεταβολή των μεταβλητών σχεδιασμού, το κριτήριο σύγκλισης και τα όρια ανοχής των περιορισμών ισότητας. Για να είναι δίκαιη η σύγκριση, οι παραπάνω ρυθμίσεις επιλέχθηκαν ίδιες με την περίπτωση των καμπυλών Bezier. Τέλος, ακολουθώντας τα επόμενα βήματα του διαγράμματος ροής, προκύπτει η σύγκλιση της βελτιστοποίησης που πραγματοποιήθηκε με τη CST παραμετροποίηση και παρουσιάζονται στο σχήμα 5.4.

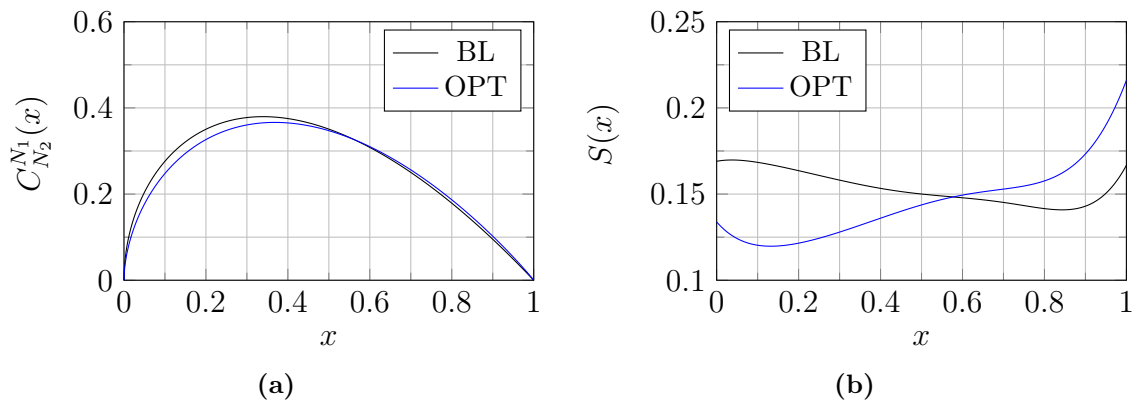


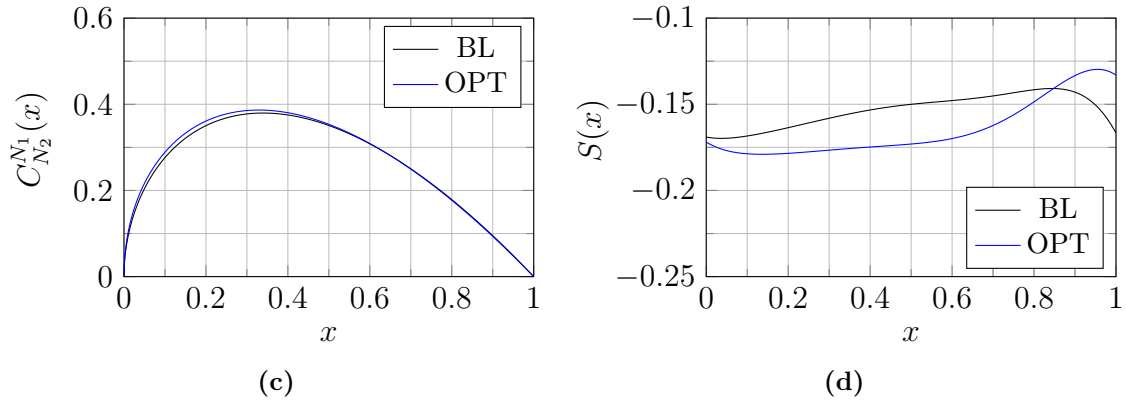
(a)



Σχήμα 5.4: Διαγράμματα σύγκλισης βελτιστοποίησης της αεροτομής NACA 0012 με CST παραμετροποίηση: (a) Συντελεστής αντίστασης (συνάρτηση κόστους), (b) Συντελεστής άνωσης (περιορισμός ισότητας), (c) Εμβαδόν (περιορισμός ισότητας).

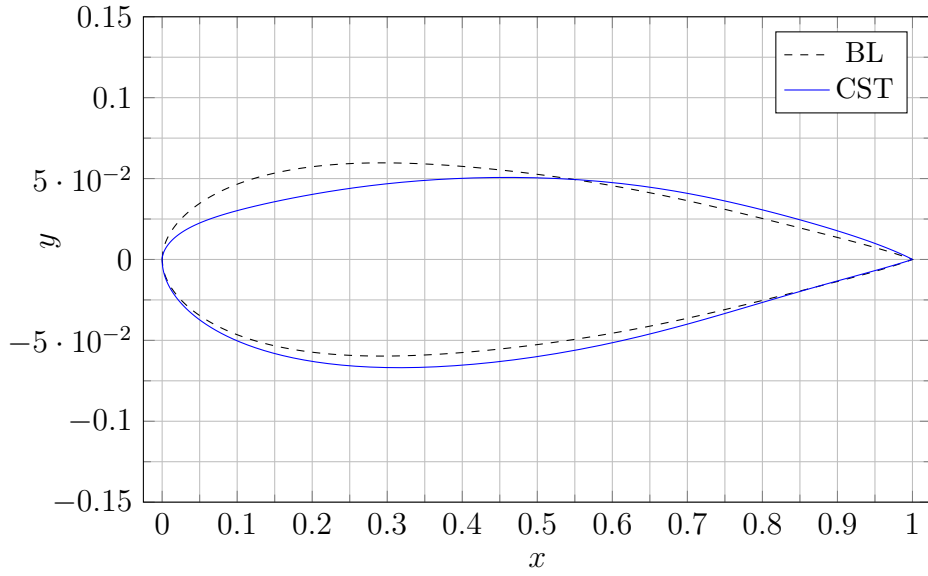
Τα αποτελέσματα εμφανίζουν αρκετή ομοιότητα με την περίπτωση των καμπυλών Bezier. Από το σχήμα 5.4, προκύπτει ίση μείωση του C_D κατά 62.7% ύστερα από 51 κύκλους, ενώ ταυτόχρονα, οι περιορισμοί ισότητας καταλήγουν στα επιθυμητά όρια ανοχής. Ωστόσο, παρατηρείται έντονη διακύμανση στη σύγκλιση του περιορισμού του εμβαδού A , συγκριτικά με την αντίστοιχη των καμπυλών Bezier. Η ταλαντωτική συμπεριφορά, που παρατηρείται στη σύγκλιση της CST παραμετροποίησης του συγκεκριμένου περιορισμού, οφείλεται στο γεγονός ότι, η σχέση των μεταβλητών σχεδιασμού της είναι μη γραμμική. Στο σχήμα 5.5, παρουσιάζονται οι συναρτήσεις κλάσης και μορφής των αρχικών μεταβλητών σχεδιασμού και των αντίστοιχων που προέκυψαν από τη διαδικασία της βελτιστοποίησης.





Σχήμα 5.5: Διαγράμματα συναρτήσεων κλάσης και μορφής της βελτιστοποιημένης αεροτομής, καθώς και της αρχικής NACA0012: (a) Συναρτήσεις κλάσης της πλευράς υποπίεσης, (b) Συναρτήσεις μορφής της πλευράς υποπίεσης, (c) Συναρτήσεις κλάσης της πλευράς υπερπίεσης, (d) Συναρτήσεις μορφής της πλευράς υπερπίεσης.

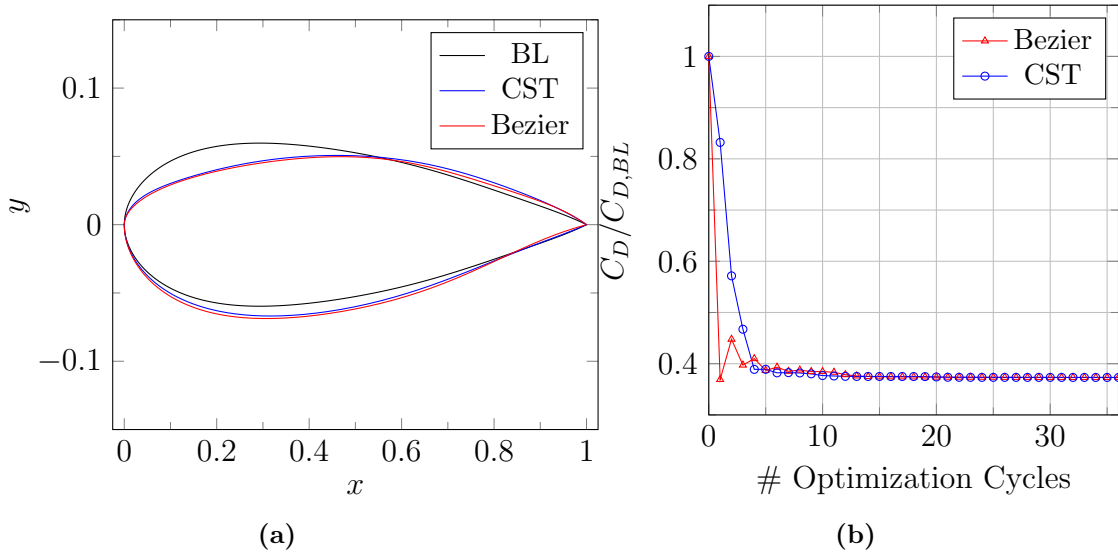
Αρχικά, όσον αφορά την αεροτομή αναφοράς, η συνάρτηση κλάσης είναι κοινή για τις πλευρές υποπίεσης και υπερπίεσης, αφού η αρχική αεροτομή είναι συμμετρική. Αντίστοιχα, εξαιτίας της συμμετρίας, οι συναρτήσεις μορφής των πλευρών υπερπίεσης και υποπίεσης είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα x . Στη συνέχεια, όσον αφορά τη βελτιστοποιημένη αεροτομή, παρουσιάζει παρόμοια συνάρτηση κλάσης για την πλευρά υπερπίεσης, ενώ σημαντικά διαφορετική για την πλευρά υποπίεσης. Αντίστοιχα, σημαντικά διαφορετική είναι, η συνάρτηση μορφής και στις δύο πλευρές. Αυτό είναι και το πλεονέκτημα της CST παραμετροποίησης, ότι, δηλαδή, μπορεί να δημιουργήσει διαφορετικές αεροτομές, είτε αλλάζοντας τη συνάρτηση κλάσης, είτε τη συνάρτηση μορφής, ή και τις δύο, προσφέροντας με αυτό τον τρόπο έναν πιο γενικευμένο χώρο πιθανών λύσεων. Στο σχήμα 5.6, παρουσιάζεται η βελτιστοποιημένη αεροτομή, όπως προέκυψε από τη CST παραμετροποίηση, συγκριτικά με την αρχική NACA0012.

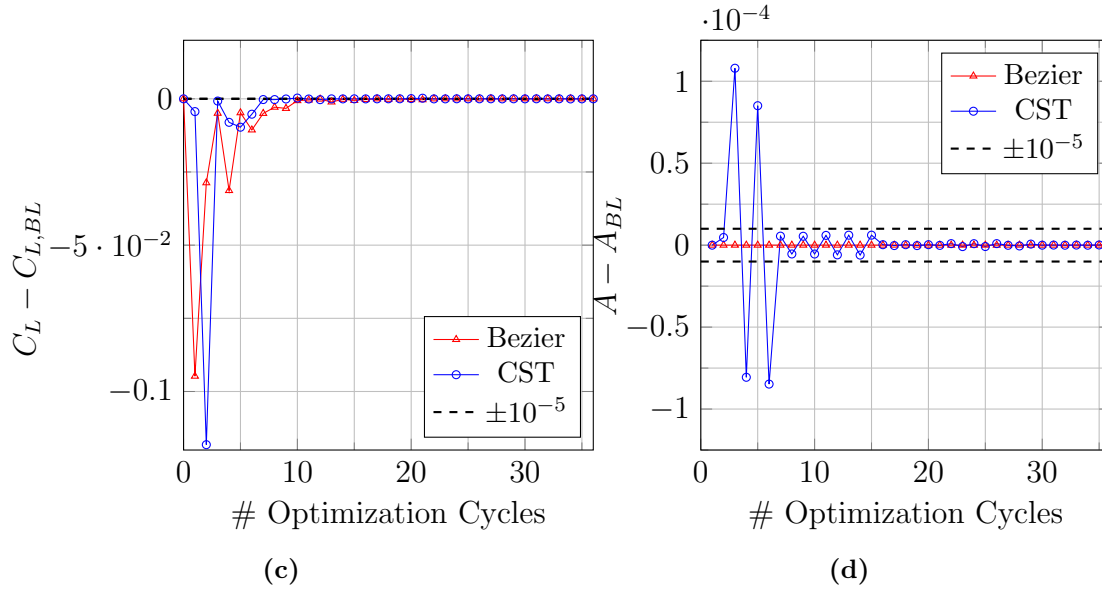


Σχήμα 5.6: Βελτιστοποιημένη αεροτομή με τη CST παραμετροποίηση και αρχική NACA 0012 (άξονες χωρίς κλίμακα).

5.4 Αποτελέσματα

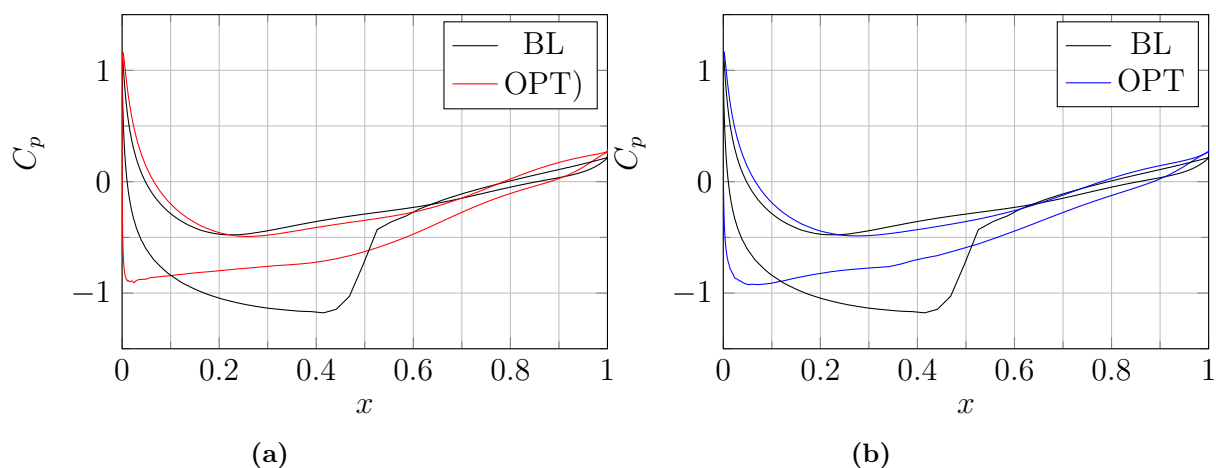
Στο σχήμα 5.7 παρουσιάζονται, η βελτιστοποιημένη αεροτομή, η πορεία σύγκλισης του C_D , καθώς και η σύγκλιση των περιορισμών ισότητας του C_L και του εμβαδού της διατομής για τις δύο μεθόδους παραμετροποίησης, που χρησιμοποιήθηκαν αντίστοιχα.





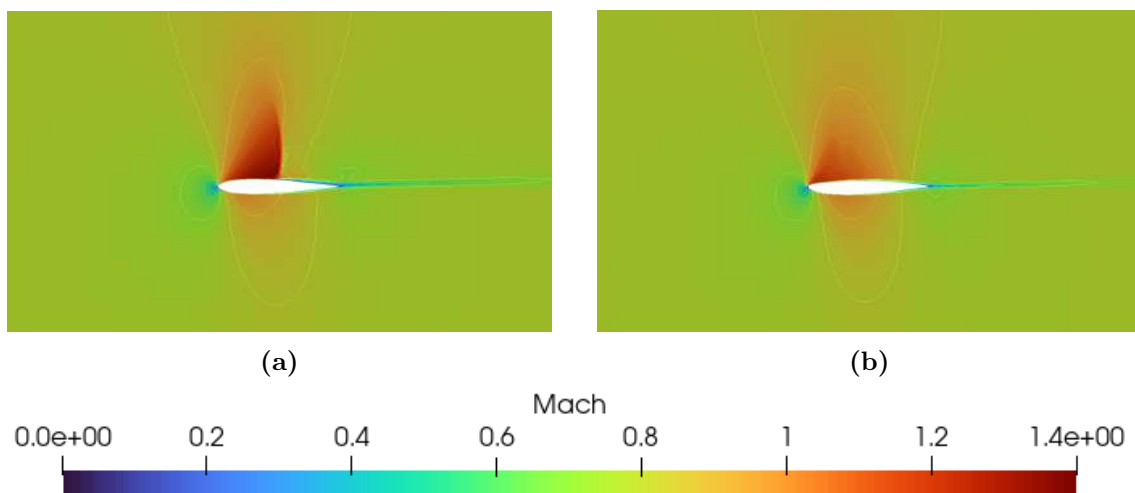
Σχήμα 5.7: Συγκριτικά αποτελέσματα βελτιστοποίησης αεροτομής NACA0012 με τη CST παραμετροποίηση και τις καμπύλες Bezier : (a) Βελτιστοποιημένη αεροτομή, (b) Συντελεστής αντίστασης (συνάρτηση κόστους), (c) Συντελεστής άνωσης (περιορισμός ισότητας), (d) Εμβαδόν (περιορισμός ισότητας).

Όπως φαίνεται από το σχήμα 5.7, η CST παραμετροποίηση παρουσιάζει πολύ παρόμοια αποτελέσματα με τις καμπύλες Bezier. Αρχικά, ο συντελεστής αντίστασης μειώθηκε κατά 62.7% με τη CST παραμετροποίηση, παρουσιάζοντας ίδια βελτίωση με τις καμπύλες Bezier. Όστόσο, ενώ οι καμπύλες Bezier παρουσίασαν αρχικά μεγάλη ταχύτητα σύγκλισης, στη συνέχεια μειώθηκε συγκριτικά με την αντίστοιχη της CST παραμετροποίησης. Επίσης, η CST παραμετροποίηση ικανοποίησε νωρίτερα τον περιορισμό του συντελεστή άνωσης. Όπως φαίνεται στο σχήμα 5.7 (c), ο περιορισμός ισότητας ικανοποιήθηκε μόλις στον 8^ο κύκλο, έναντι του 11^{ου} των καμπυλών Bezier. Επιπλέον, παρατηρήθηκε δυσκολία σύγκλισης του περιορισμού ισότητας του εμβαδού της διατομής με τη CST παραμετροποίηση. Στο σχήμα 5.7 (d) φαίνεται ότι, η ανεκτή ανοχή επιτεύχθηκε στον 7^ο κύκλο, σε αντίθεση με τις καμπύλες Bezier που ικανοποίησαν τον περιορισμό μόλις στον 1^ο κύκλο. Σε συνέχεια των αποτελεσμάτων των διαγραμμάτων σύγκλισης, το σχήμα 5.7 (a) αποδεικνύει την ομοιότητα των λύσεων της CST παραμετροποίησης με τις καμπύλες Bezier. Τέλος, όσον αφορά τη βελτιστοποιημένη αεροτομή, έτσι όπως προέκυψε και από τις δύο μεθόδους, έχει χαμηλώσει, ώστε να υποδεχθεί πιο ομαλά την υπο γωνία ροή. Στο σχήμα 5.8 παρουσιάζονται τα διαγράμματα του συντελεστή πίεσης C_p για τις δύο μεθόδους παραμετροποίησης που χρησιμοποιήθηκαν.



Σχήμα 5.8: Διάγραμμα συντελεστή πίεσης κατά μήκος της αεροτομής: (α) Βελτιστοποίηση με καμπύλες Bezier, (β) Βελτιστοποίηση με CST παραμετροποίηση.

Όπως φαίνεται από το σχήμα 5.8, στο σημείο 0.43 της αεροτομής αναφοράς, παρουσιάζεται έντονη αύξηση του συντελεστή πίεσης στη πλευρά υποπίεσης, λόγω του κύματος κρούσης. Αντίθετα, ο συντελεστής πίεσης στη πλευρά υποπίεσης της βελτιστοποιημένης αεροτομής και στις δύο μεθόδους, παρουσιάζει μια ομαλή αύξηση. Τέλος, στο σχήμα 5.9, παρουσιάζεται το πεδίο του αριθμού Mach συγκρίνοντας τη βελτιστοποιημένη αεροτομή με τη CST παραμετροποίηση και την αεροτομή αναφοράς.



Σχήμα 5.9: Πεδίο του αριθμού Mach: (α) Αρχική αεροτομή NACA 0012, (β) Βελτιστοποιημένη αεροτομή.

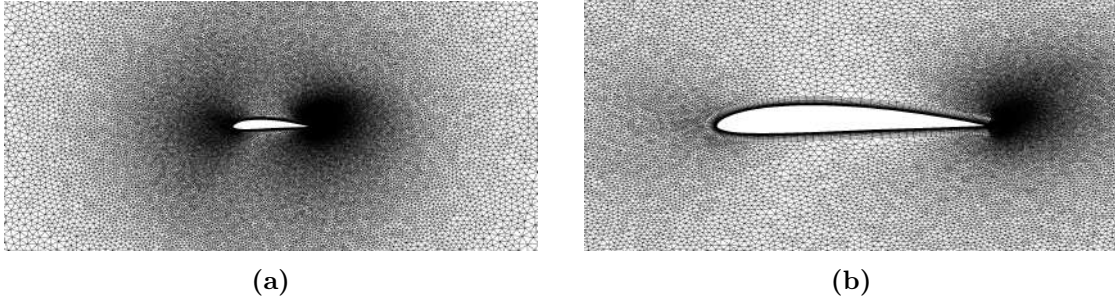
Κεφάλαιο 6

Βελτιστοποίηση Μορφής Αεροτομής NACA4415

6.1 Περιγραφή Προβλήματος

Το δεύτερο πρόβλημα αναφέρεται στη βελτιστοποίηση μορφής της αεροτομής NACA4415. Ωστόσο, σκοπός του είναι να διερευνηθεί η ικανότητα της CST παραμετροποίησης στη διαχείριση περιορισμών, που αφορούν τον συντελεστή ροπής C_M . Στο πλαίσιο αυτό, θα πραγματοποιηθούν δύο βελτιστοποιήσεις, όπου η πρώτη έχει ως στόχο την ελαχιστοποίηση του συντελεστή αντίστασης, υπό τους περιορισμούς, ο συντελεστής άνωσης, το εμβαδόν και ο συντελεστής ροπή, της προκύπτουσας αεροτομής, να ισούνται με την αρχική, ενώ η δεύτερη έχει ως στόχο ξανά την ελαχιστοποίηση του συντελεστή αντίστασης, υπό τους περιορισμούς, ο συντελεστής άνωσης και το εμβαδόν της αεροτομής, να ισούνται με την αρχική, ενώ ο συντελεστής ροπής να ισούται με 0. Επομένως, και τα δύο υποπροβλήματα αντιμετωπίστηκαν ως προβλήματα βελτιστοποίησης ενός στόχου με τρεις περιορισμούς ισότητας. Επιπλέον, σε κάθε επιμέρους περίπτωση, πραγματοποιήθηκαν δύο τρεξίματα βελτιστοποίησης, χρησιμοποιώντας στο πρώτο τη CST παραμετροποίηση, ενώ στο δεύτερο τις καμπύλες Bezier, ώστε να γίνει σύγκριση των αποτελεσμάτων.

Οι συνθήκες της επ' άπειρον ροής είναι κοινές και στις δύο περιπτώσεις και αποτελούνται από γωνία προσβολής $\alpha_\infty = 5^\circ$, αριθμός Mach $M_\infty = 0.6$ και αριθμός Reynolds $Re_\infty = 1 \cdot 10^6$. Το πλέγμα που χρησιμοποιήθηκε για την επίλυση της ροής και στις δύο περιπτώσεις είναι υβριδικό, εκτείνεται σε απόσταση 50 χορδών περιμετρικά της αεροτομής και αποτελείται από περίπου 201K κόμβους, όπως φαίνεται στο σχήμα 6.1.



Σχήμα 6.1: Υπολογιστικό πλέγμα γύρω από την αεροτομή NACA 4415: (a) Μέτρια εστίαση του πλέγματος, (b) Κοντινή εστίαση του πλέγματος.

6.2 Βελτιστοποίηση με Περιορισμό $C_M = C_{M,BL}$

Η μαθηματική διατύπωση που αναφέρεται στη πρώτη περίπτωση βελτιστοποίησης της αεροτομής NACA4415 είναι:

$$\min : C_D \quad (6.1)$$

w.r.t.

$$C_L = C_{L,BL}$$

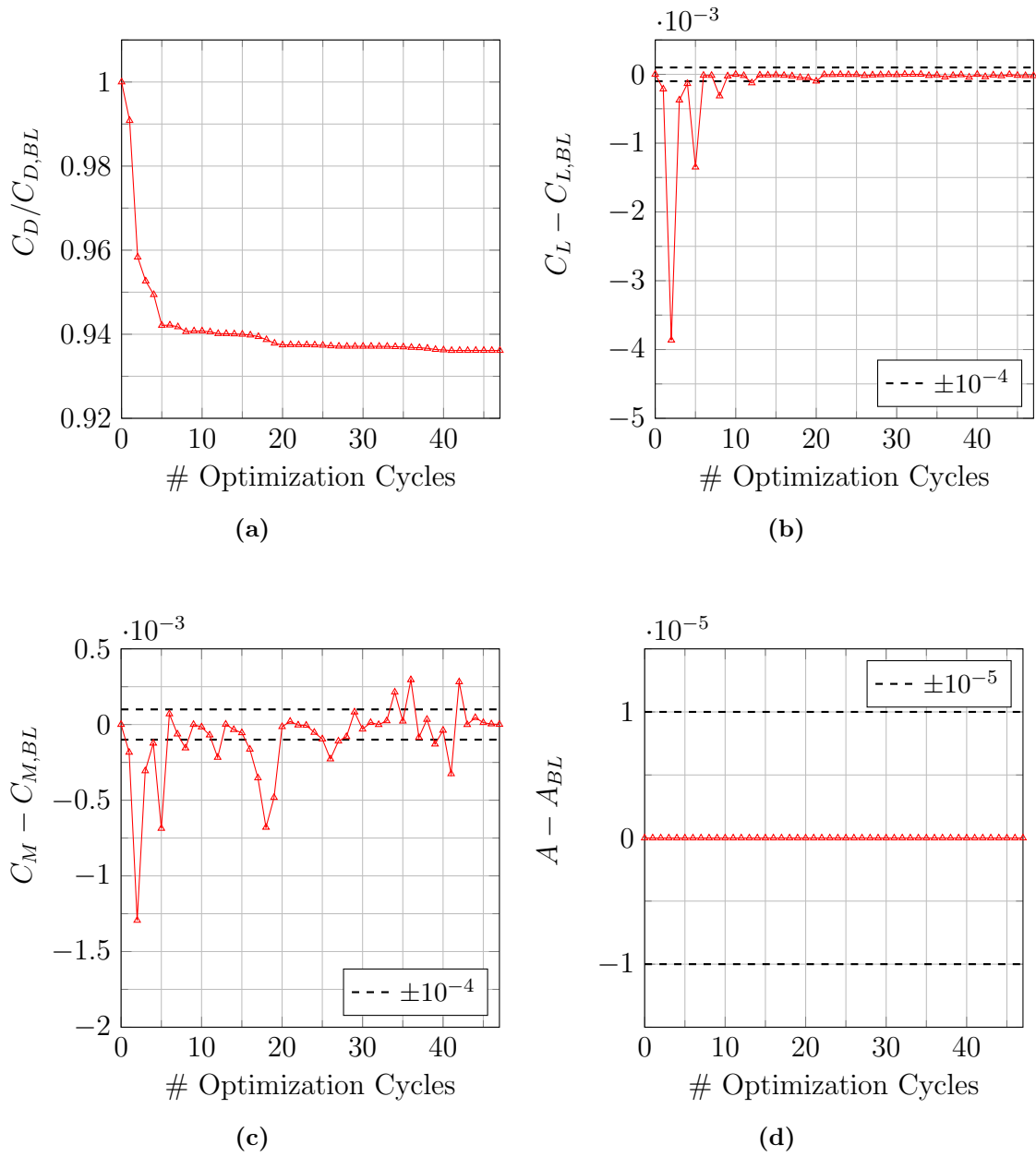
$$C_M = C_{M,BL}$$

$$A = A_{BL}$$

Όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως, θα χρησιμοποιηθούν δύο διαφορετικές μέθοδοι παραμετροποίησης, μία για κάθε κύκλο βελτιστοποίησης. Στη συνέχεια, θα παρουσιαστούν, οι απαραίτητες ρυθμίσεις, καθώς και τα αποτελέσματα για κάθε μέθοδο ξεχωριστά.

6.2.1 Παραμετροποίηση με Καμπύλες Bezier

Για τη βελτιστοποίηση που πραγματοποιήθηκε με καμπύλες Bezier, επιλέχθηκαν 16 μεταβλητές σχεδιασμού, 8 για κάθε πλευρά. Αντίστοιχα με το πρώτο πρόβλημα της NACA0012, οι μεταβλητές σχεδιασμού αποτελούνται από τις τεταγμένες των σημείων ελέγχου της καμπύλης Bezier. Επιπλέον, τα όρια που μπορούν να πάρουν οι μεταβλητές σχεδιασμού είναι $\pm 20\%$ της αρχικής τιμής τους. Τέλος, ως κριτήριο σύγκλισης της βελτιστοποίησης, τέθηκε η μεταβολή των μεταβλητών σχεδιασμού να είναι μικρότερη από 10^{-5} , ενώ οι ανοχές των περιορισμών να είναι $\pm 10^{-4}$ για τους περιορισμούς των συντελεστών άνωσης και ροπής και $\pm 10^{-5}$ για τον περιορισμό του εμβαδού. Στο σχήμα 6.2 παρουσιάζονται διαγράμματα με την πορεία σύγκλισης του C_D , αδιαστατοποιημένου με την τιμή αναφοράς, καθώς και τη πορεία σύγκλισης των περιορισμών του C_L , του C_M και του εμβαδού, αντίστοιχα.



Σχήμα 6.2: Διαγράμματα σύγκλισης βελτιστοποίησης (6.1) της αεροτομής NACA 4415 με καμπύλες Bezier: (a) Συντελεστής αντίστασης (συνάρτηση κόστους), (b) Συντελεστής άνωσης (περιορισμός ισότητας), (c) Συντελεστής ροπής (περιορισμός ισότητας), (d) Εμβαδόν (περιορισμός ισότητας).

Όπως φαίνεται από το σχήμα 6.2, η σύγκλιση πραγματοποιήθηκε σε 47 κύκλους βελτιστοποίησης με την τιμή του C_D να μειώνεται κατά 6.39%. Επιπλέον, παρατηρείται ότι ο περιορισμός του C_M είναι αρκετά πιο ευαίσθητος συγκριτικά με τον περιορισμό του C_L . Ενδεικτικά, μετά τον 9^ο κύκλο που έχει επιτευχθεί το μεγαλύτερο μέρος της μείωσης του C_D , ο περιορισμός του συντελεστή άνωσης σχεδόν παραμένει σταθερός σε αντίθεση, με τον περιορισμό του συντελεστή ροπής που συνεχίζει έντονες διακυμάν-

σεις. Αυτό φαίνεται καλύτερα στα σχήματα 6.3 και 6.4 που ακολουθούν. Ωστόσο, για να γίνουν αντιληπτά πρέπει πρώτα να διευκρινιστεί ένας ορισμός, που χρησιμοποιείται στα παρακάτω σχήματα. Έστω Ψ , μία ποσότητα η οποία μπορεί να είναι η συνάρτηση κόστους ή κάποιος περιορισμός $[(C_D), (C_L - C_{L,BL}), (C_M - C_{M,BL}), \dots]$. Η αδιάστατη απόλυτη μεταβολή της ποσότητας Ψ , ορίζεται από τον τελεστή Δ_A^D και δίνεται από τη σχέση:

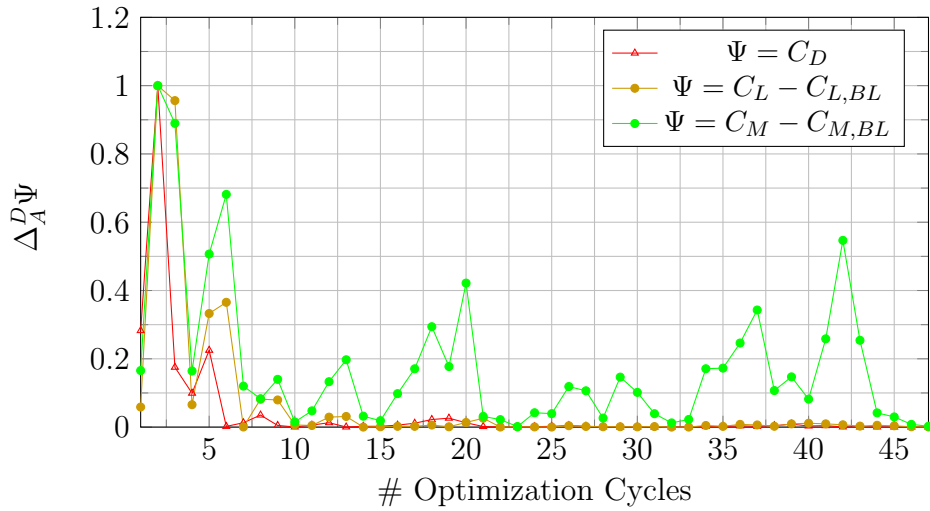
$$\Delta_A^D \Psi = \frac{|\Delta \Psi|}{\max\{|\Delta \Psi|\}} \quad (6.2)$$

όπου

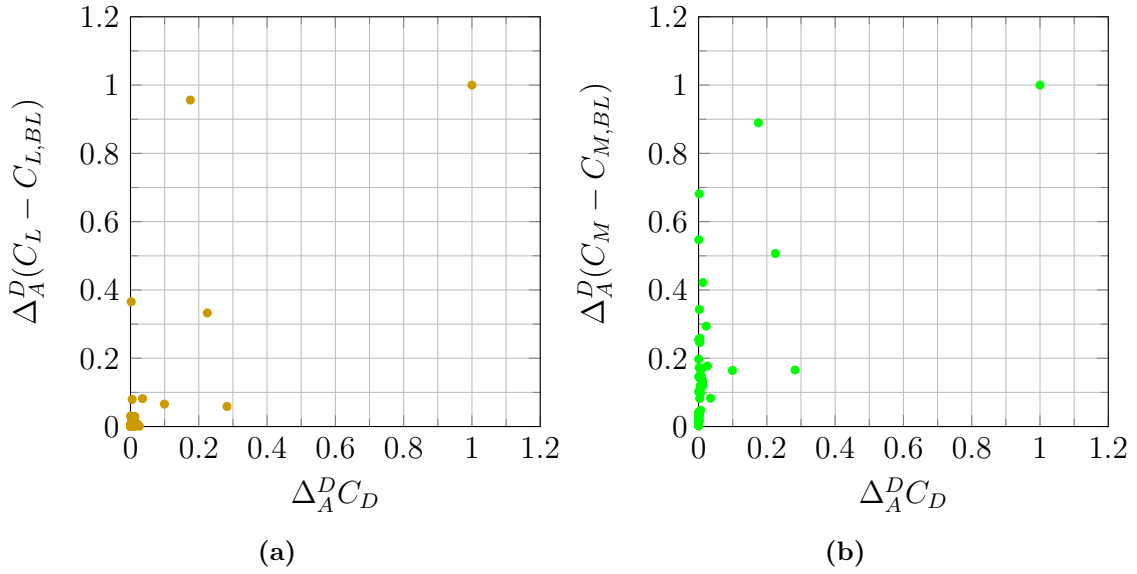
$|\Delta \Psi|$ είναι η απόλυτη τιμή της μεταβολής της ποσότητας Ψ σε κάθε κύκλο βελτιστοποίησης.

$\max\{|\Delta \Psi|\}$ είναι η μέγιστη τιμή $|\Delta \Psi|$ που παρουσιάστηκε στη βελτιστοποίηση.

Ουσιαστικά, ο δείκτης A , αναφέρεται στην απόλυτη τιμή της ποσότητας Ψ , ενώ ο εκθέτης D αναφέρεται στην αδιαστατοποίησή της. Στο σχήμα 6.3 παρουσιάζεται η αδιάστατη απόλυτη μεταβολή του C_D μαζί με τους περιορισμούς του C_L και C_M , ενώ στο σχήμα 6.4 παρουσιάζονται τα διαγράμματα διασποράς τους.

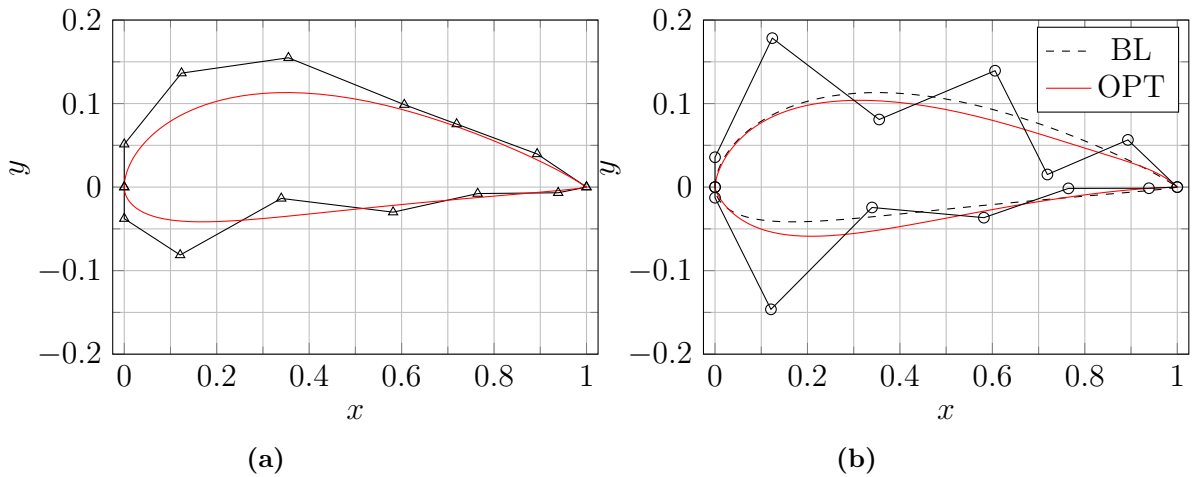


Σχήμα 6.3: Αδιαστατοποιημένες απόλυτες μεταβολές του συντελεστή αντίστασης και των περιορισμών των συντελεστών άνωσης και ροπής ανά κύκλο βελτιστοποίησης (6.1), χρησιμοποιώντας καμπύλες Bezier.



Σχήμα 6.4: Διαγράμματα διασποράς των αδιάστατων απόλυτων μεταβολών της βελτιστοποίησης (6.1), της αεροτομής NACA 4415 με καμπύλες Bezier: (a) Περιορισμός συντελεστή άνωσης - Συντελεστή αντίστασης, (b) Περιορισμός συντελεστή ροπής - Συντελεστή αντίστασης.

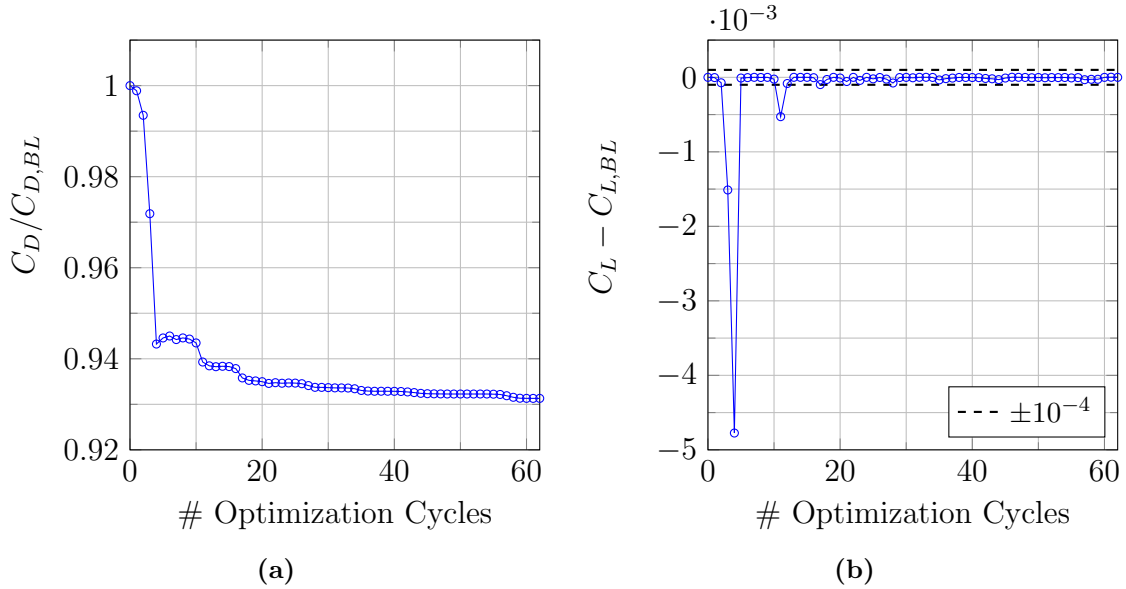
Πράγματι, στα σχήματα 6.3 και 6.4 παρατηρείται ότι, οι απόλυτες αδιάστατες μεταβολές του περιορισμού του συντελεστή ροπής είναι αισθητά μεγαλύτερες από τις αντίστοιχες του περιορισμού του συντελεστή άνωσης. Όποτε, δηλαδή, ο αλγόριθμος προσπαθεί να αναζητήσει μία καλύτερη λύση, προκαλεί μεγαλύτερη διακύμανση στο συντελεστή ροπής. Τέλος, στο σχήμα 6.5 παρουσιάζεται η βελτιστοποιημένη αεροτομή συγκριτικά με την αεροτομή αναφοράς, καθώς και το πολύγωνο των καμπυλών Bezier.

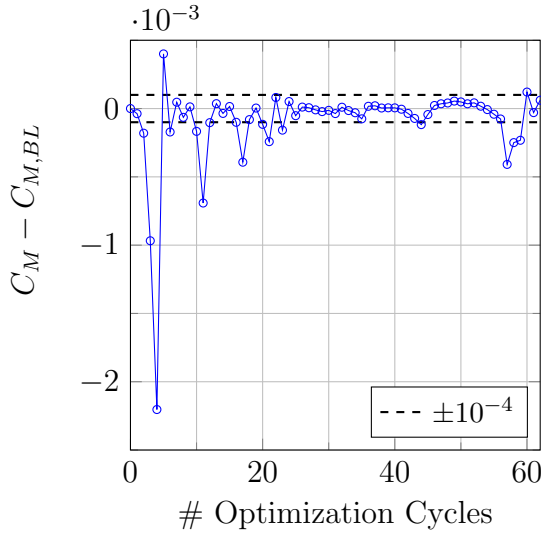


Σχήμα 6.5: Σημεία ελέγχου των καμπυλών Bezier και παραγόμενη αεροτομή, βελτιστοποίησης (6.1) (άξονες χωρίς κλίμακα): (a) Αρχική αεροτομή NACA 4415, (b) Βελτιστοποιημένη αεροτομή.

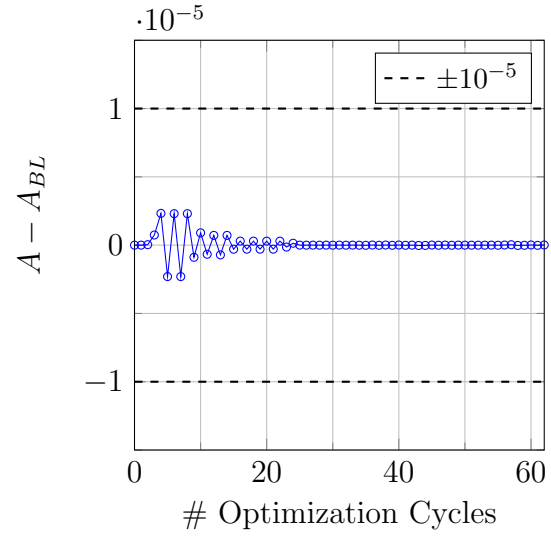
6.2.2 Παραμετροποίηση με CST

Για την παραμετροποίηση της αεροτομής με τη μέθοδο CST χρησιμοποιήθηκαν πολυώνυμα Bernstein 7^{ης} τάξης για κάθε πλευρά της αεροτομής, διαμορφώνοντας τον συνολικό αριθμό των μεταβλητών σχεδιασμού σε 20. Ο λόγος που επιλέχθηκαν πολυώνυμα Bernstein 7^{ης} τάξης είναι, γιατί κατά τη βελτιστοποίηση που έγινε προηγουμένως με καμπύλες Bezier, χρησιμοποιήθηκαν 8 σημεία ελέγχου για κάθε πλευρά, άρα πολυώνυμα Bernstein 7^{ης} τάξης και επομένως η σύγκριση είναι όσο το δυνατόν πιο δίκαιη. Αντίστοιχα, η επιτρεπτή μεταβολή των μεταβλητών σχεδιασμού ανά κύκλο, επιλέχθηκε $\pm 20\%$ της αρχικής τιμής τους, ενώ ως κριτήρια σύγκλισης της βελτιστοποίησης τέθηκαν, η μεταβολή τους μεταξύ δύο διαδοχικών κύκλων να είναι μικρότερη από 10^{-5} , καθώς και οι ανοχές των περιορισμών να είναι $\pm 10^{-4}$ για τους περιορισμούς των συντελεστών άνωσης και ροπής και $\pm 10^{-5}$ για τον περιορισμό του εμβαδού. Η πορεία σύγκλισης της συνάρτησης κόστους και των περιορισμών ισότητας παρουσιάζονται στο σχήμα 6.6.





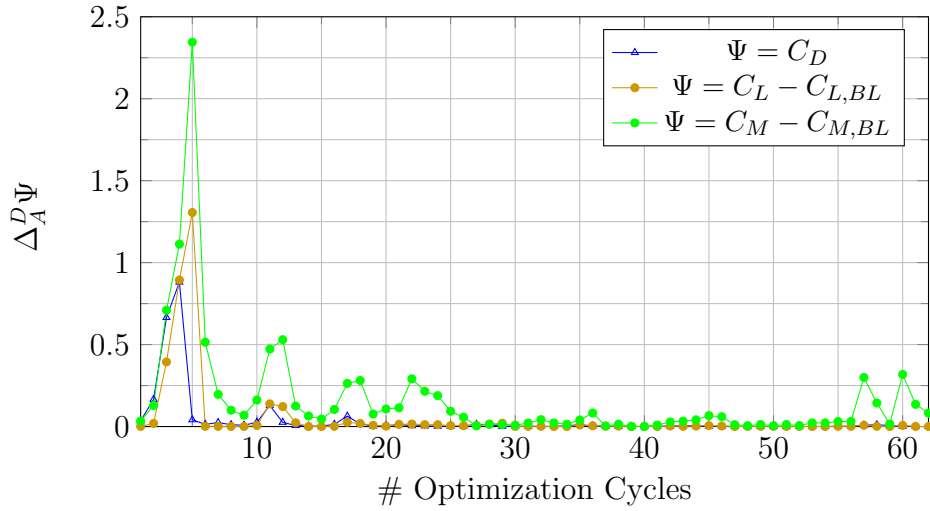
(c)



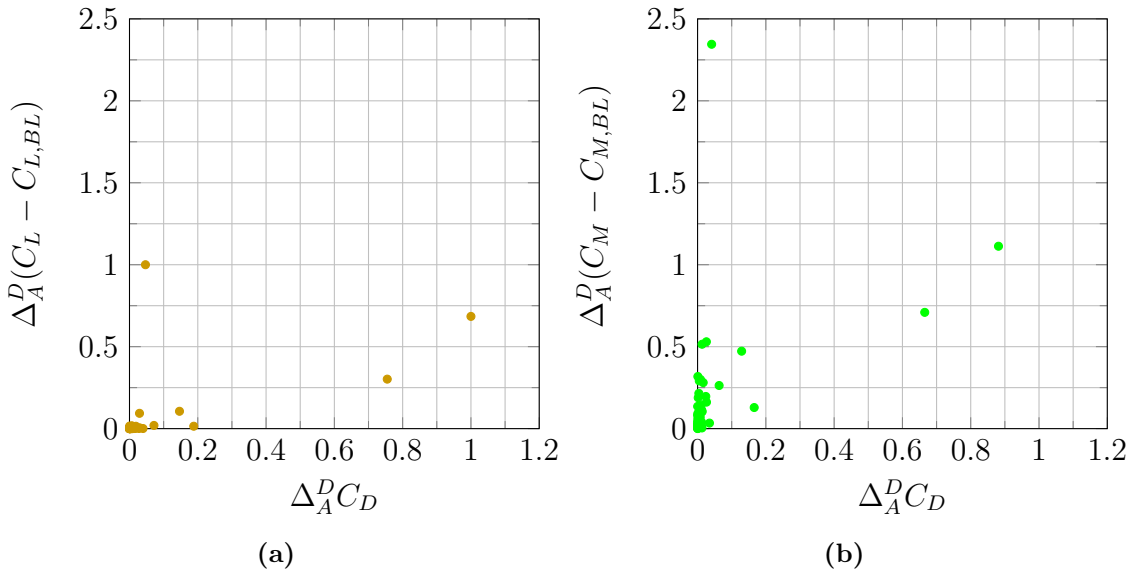
(d)

Σχήμα 6.6: Διαγράμματα σύγκλισης βελτιστοποίησης (6.1) της αεροτομής NACA 4415 με CST παραμετροποίηση: (a) Συντελεστής αντίστασης (συνάρτηση κόστους), (b) Συντελεστής άνωσης (περιορισμός ισότητας), (c) Συντελεστής ροπής (περιορισμός ισότητας), (d) Εμβαδόν (περιορισμός ισότητας).

Η βελτιστοποίηση χρησιμοποιώντας τη CST παραμετροποίηση ολοκληρώθηκε έπειτα από 62 κύκλους, μειώνοντας τον συντελεστή αντίστασης κατά 6.87% και επιτυγχάνοντας μία βελτίωση κατά 0.48 ποσοστιαίες μονάδες συγκριτικά με τη βέλτιστη λύση, που προέκυψε από τις καμπύλες Bezier. Φυσικά και με τη χρήση της CST παραμετροποίησης παρατηρείται παρόμοια ευαισθησία στον περιορισμό του συντελεστή ροπής, συγκριτικά με τον περιορισμό του συντελεστή άνωσης, όπως φαίνεται στα σχήματα 6.7 και 6.8, που ακολουθούν. Διευκρινίζεται ότι, η αδιαστατοποίηση έχει γίνει χρησιμοποιώντας τη μέγιστη απόλυτη μεταβολή των καμπυλών Bezier, όπως και προηγουμένως.



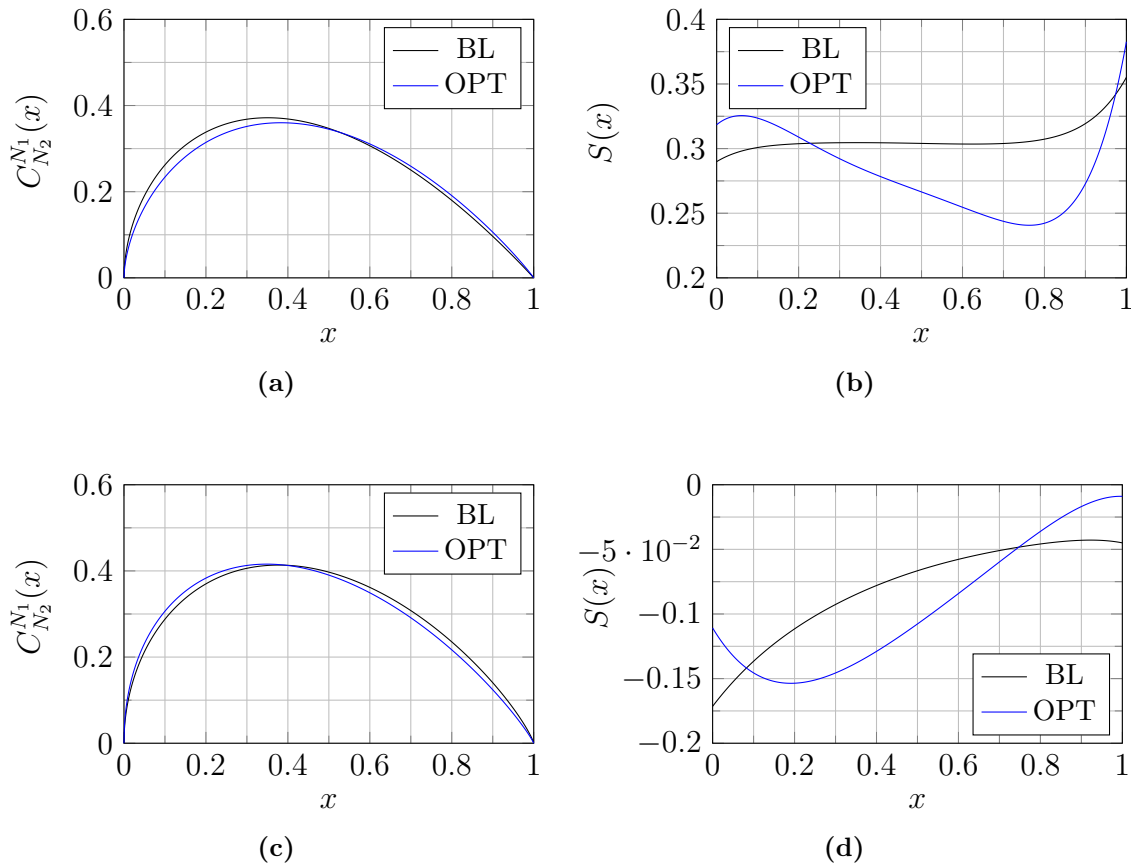
Σχήμα 6.7: Αδιάστατοποιημένες απόλυτες μεταβολές του συντελεστή αντίστασης και των περιορισμών των συντελεστών άνωσης και ροπής ανά κύκλο βελτιστοποίησης (6.1), χρησιμοποιώντας τη CST παραμετροποίηση.



Σχήμα 6.8: Διαγράμματα διασποράς των αδιάστατων απόλυτων μεταβολών της βελτιστοποίησης (6.1), της αεροτομής NACA 4415 με CST παραμετροποίηση: (a) Περιορισμός συντελεστή άνωσης - Συντελεστή αντίστασης, (b) Περιορισμός συντελεστή ροπής - Συντελεστή αντίστασης.

Ωστόσο, εκτός από την εντονότερη διέγερση του περιορισμού του C_M σε σχέση με τον περιορισμό του C_L , παρατηρούμε, επίσης, ότι με τη CST παραμετροποίηση, οι διακυμάνσεις είναι μικρότερες από την περίπτωση των καμπυλών Bezier, αφού συγκρίνοντας τα σχήματα 6.3 και 6.7, φαίνεται ότι μετά τον 9^ο κύκλο, οι κορυφές των μεταβολών

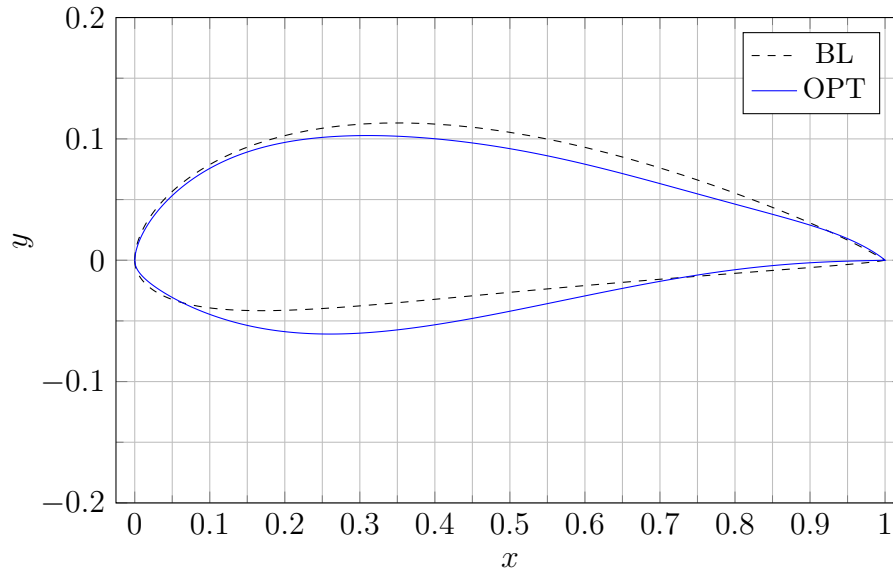
με τη CST παραμετροποίηση φτάνουν περίπου στο 30%, ενώ με τις καμπύλες Bezier κυμαίνονται μεταξύ 30% και 60%. Επιπλέον, ένα συμπέρασμα που προκύπτει από τα σχήματα 6.4 και 6.8 είναι ότι, για πολλή μικρή μεταβολή της συνάρτησης κόστους, επέρχεται έντονη μεταβολή στον περιορισμό του συντελεστή ροπής. Με σκοπό, λοιπόν, να δημιουργηθεί μία καλύτερη λύση, διαταράχθηκε ο περιορισμός του C_M κατά τον κύκλο 41, θυσιάζοντας έτσι την επιθυμητή ανοχή του 10^{-4} . Στη συνέχεια, στο σχήμα 6.9, παρουσιάζονται οι συναρτήσεις κλάσης και μορφής της αρχικής και της βελτιστοποιημένης αεροτομής.



Σχήμα 6.9: Διαγράμματα συναρτήσεων κλάσης και μορφής της βελτιστοποιημένης αεροτομής, καθώς και της αρχικής NACA 4415: (a) Συναρτήσεις κλάσης της πλευράς υποπίεσης, (b) Συναρτήσεις μορφής της πλευράς υποπίεσης, (c) Συναρτήσεις κλάσης της πλευράς υπερπίεσης, (d) Συναρτήσεις μορφής της πλευράς υπερπίεσης.

Αρχικά, όσον αφορά την αεροτομή αναφοράς παρατηρούμε ότι, η συνάρτηση κλάσης, είναι διαφορετική για τις πλευρές υποπίεσης και υπερπίεσης, σε αντίθεση με την περίπτωση της αεροτομής NACA 0012. Προφανώς, αυτό οφείλεται στο γεγονός, ότι η αεροτομή NACA 4415 είναι μη συμμετρική. Επιπλέον, για τη συνάρτηση κλάσης παρατηρούμε ότι, δεν άλλαξε ιδιαίτερα κατά τη διαδικασία της βελτιστοποίησης. Αντίθετα, η συνάρτηση μορφής των πλευρών υπερπίεσης και υποπίεσης, παρουσίασε έντονη αλλαγή λαμβάνοντας χαμηλότερες τιμές στο μεγαλύτερο κομμάτι τους. Πιο συγκεκριμένα,

η συνάρτηση μορφής της πλευράς υποπίεσης παρουσίασε χαμηλότερη τιμή στο εύρος $[0.2 - 0.9]$, ενώ η συνάρτηση μορφής της πλευράς υποπίεσης στο εύρος $[0.1 - 0.75]$. Επομένως, αναμένουμε σε αυτά τα εύρη, η βελτιστοποιημένη αεροτομή να είναι χαμηλότερη από την αρχική. Στο σχήμα 6.10 παρουσιάζεται η βελτιστοποιημένη αεροτομή συγκριτικά με την αεροτομή αναφοράς.



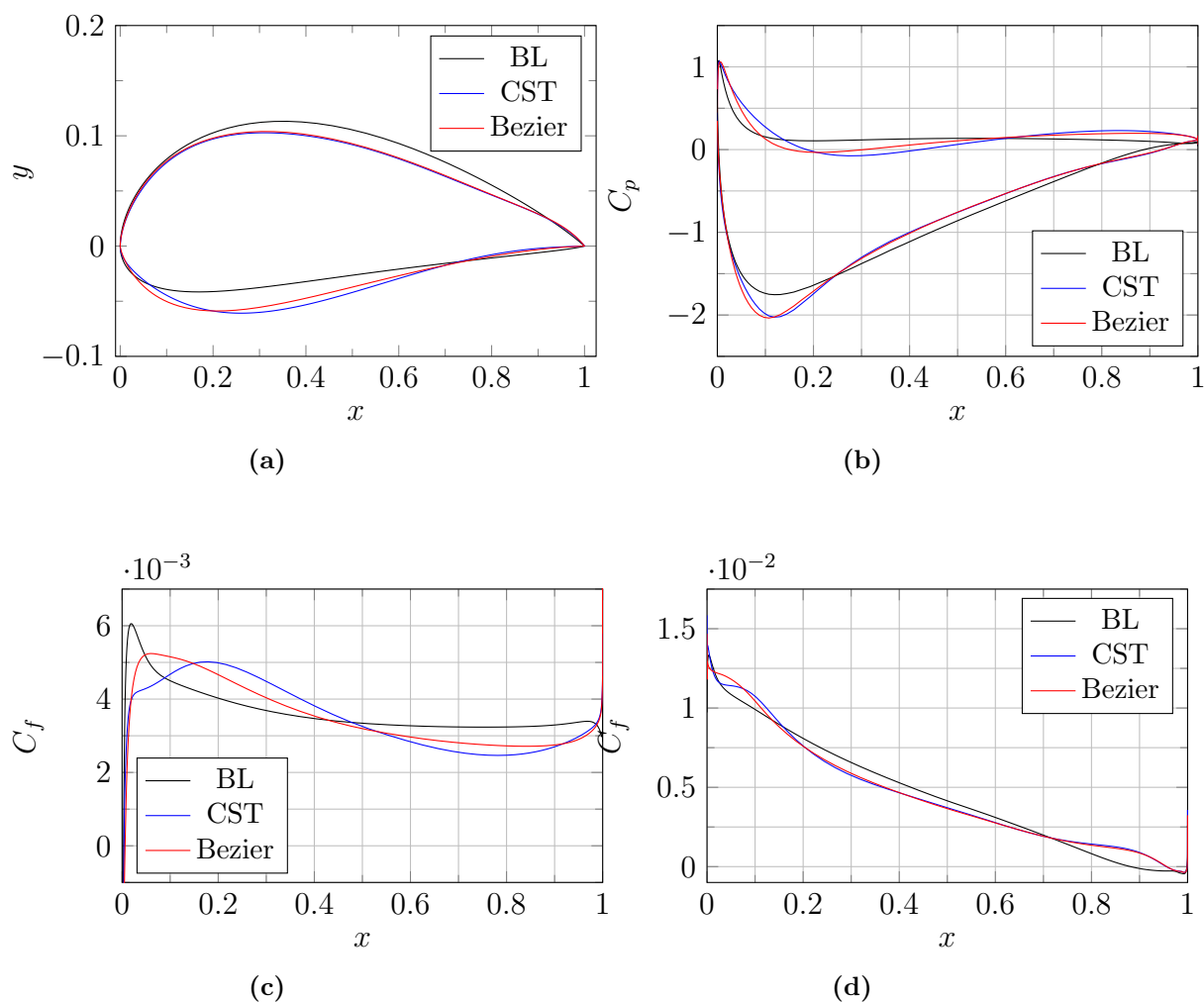
Σχήμα 6.10: Βελτιστοποιημένη αεροτομή με τη CST παραμετροποίηση και αρχική NACA 4415 (άξονες χωρίς κλίμακα).

6.2.3 Αποτελέσματα

Στον πίνακα 6.1 που ακολουθεί, παρουσιάζονται συνοπτικά τα αποτελέσματα της βελτιστοποίησης, όπως προέκυψαν από τις δύο μεθόδους. Επιπλέον, στο σχήμα 6.11, φαίνονται μερικά επιπλέον αποτελέσματα, όπως οι βελτιστοποιημένες αεροτομές, οι συντελεστές πίεσης C_p και τριβής C_f , συγκριτικά για τις καμπύλες Bezier, τη CST παραμετροποίηση, καθώς και την αρχική αεροτομή NACA 4415.

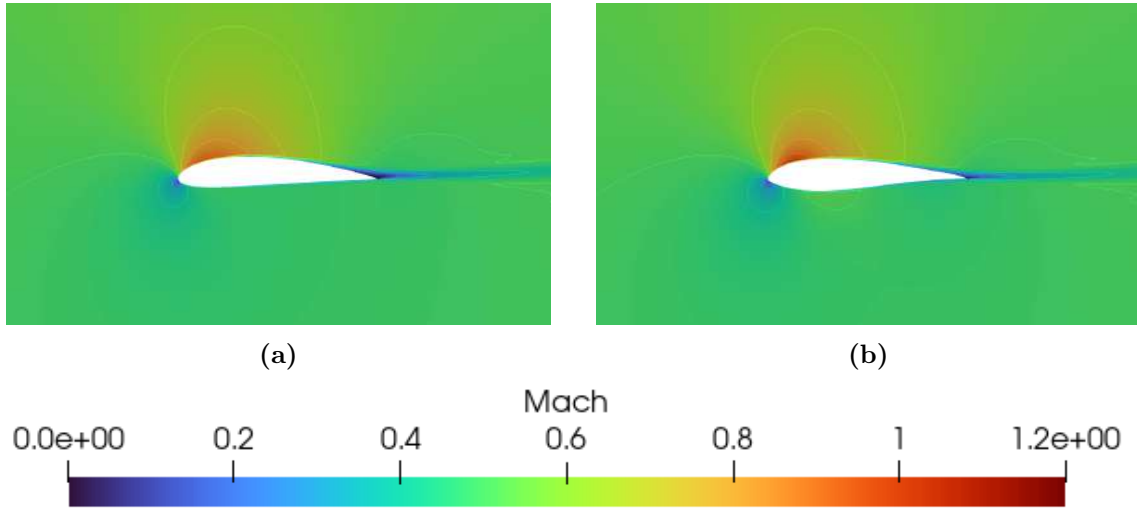
	BL	Bezier	CST
C_D	$1.80 \cdot 10^{-2}$	$1.68 \cdot 10^{-2}$	$1.67 \cdot 10^{-2}$
C_L	$9.83 \cdot 10^{-1}$	$9.83 \cdot 10^{-1}$	$9.83 \cdot 10^{-1}$
C_M	$7.18 \cdot 10^{-2}$	$7.18 \cdot 10^{-2}$	$7.18 \cdot 10^{-2}$
A	$3.42 \cdot 10^{-3}$	$3.42 \cdot 10^{-3}$	$3.42 \cdot 10^{-3}$

Πίνακας 6.1: Συγκριτικά αποτελέσματα βελτιστοποίησης (6.1), της αεροτομής NACA 4415 με τη CST παραμετροποίηση και τις καμπύλες Bezier.



Σχήμα 6.11: Συγκριτικά αποτελέσματα βελτιστοποίησης (6.1), της αεροτομής NACA 4415 με τη CST παραμετροποίηση και τις καμπύλες Bezier: (a) Βελτιστοποιημένη αεροτομή, (b) Συντελεστής πίεσης, (c) Συντελεστής τριβής πλευράς υπερπίεσης, (d) Συντελεστής τριβής πλευράς υποπίεσης.

Είναι σαφές, ότι οι δύο μέθοδοι που χρησιμοποιήθηκαν κατά τη διαδικασία της βελτιστοποίησης παρουσιάζουν παρόμοια αποτελέσματα με τη CST μέθοδο να υπερτερεί κατά 0.52% των καμπυλών Bezier στη μείωση του συντελεστή αντίστασης. Παρατηρώντας την τελική γεωμετρία της αεροτομής, αλλά και τα διαγράμματα των συντελετών πίεσης και τριβής, προκύπτει σχεδόν ταυτόσημη πλευρά υποπίεσης και ελαφρώς διαφορετική πλευρά υπερπίεσης, όπου και οι δύο πλευρές έχουν χαμηλώσει για να υποδεχτούν πιο ομαλά την υπο γωνία ροή. Ωστόσο, παρά τη διαφοροποίηση στη γεωμετρία σε σχέση με την αεροτομή αναφοράς, διατηρούν τις ίδιες τιμές των συντελεστών άνωσης, αντίστασης καθώς και του εμβαδού, όπως όριζαν οι περιορισμοί. Τέλος, στο σχήμα 6.12 παρουσιάζεται το πεδίο του αριθμού Mach της βελτιστοποιημένης αεροτομής με τη CST παραμετροποίηση.



Σχήμα 6.12: Πεδίο του αριθμού $Mach$: (a) Αρχική αεροτομή NACA 4415, (b) Βελτιστοποιημένη αεροτομή.

6.3 Βελτιστοποίηση με Περιορισμό $C_M = 0$

Η δεύτερη περίπτωση βελτιστοποίησης της αεροτομής NACA4415, αποτελεί μία παραλλαγή της πρώτης με τη διαφορά να έγκειται στον περιορισμό του C_M . Ουσιαστικά, ο συγκεκριμένος περιορισμός επιδιώκει τη "ζυγοστάθμιση" (trimming) της αεροτομής. Σε περιπτώσεις βιομηχανικών εφαρμογών, όπως στο σχεδιασμό της πτέρυγας αεροσκάφους, η ικανοποίηση του συγκεκριμένου περιορισμού μπορεί να βοηθήσει σε μετέπειτα στάδια σχεδιασμού. Η μαθηματική έκφραση του προβλήματος είναι:

$$\min : C_D \quad (6.3)$$

w.r.t.

$$C_L = C_{L,BL}$$

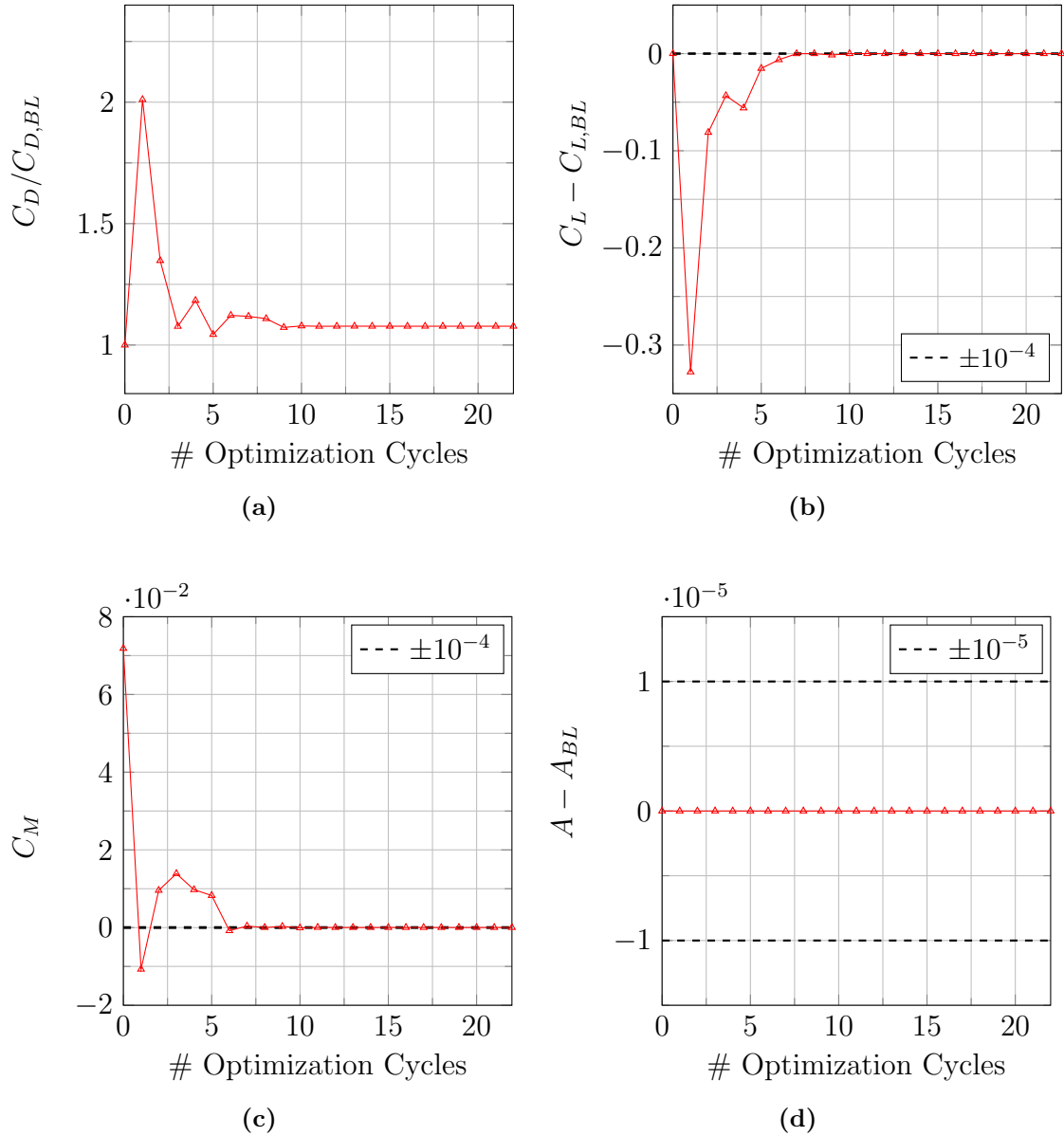
$$C_M = 0$$

$$A = A_{BL}$$

Και σε αυτή την περίπτωση θα χρησιμοποιηθούν οι καμπύλες Bezier και η CST ως μέθοδοι παραμετροποίησης της αεροτομής. Ωστόσο, οι ρυθμίσεις που αφορούν το πλήθος και τις τιμές των αρχικών μεταβλητών σχεδιασμού, τα κριτήρια σύγκλισης του αλγορίθμου, καθώς και τα όρια ανοχής των περιορισμών είναι κοινά με την περίπτωση της βελτιστοποίησης με περιορισμό $C_M = C_{M,BL}$. Επομένως, στη συνέχεια, θα παρουσιαστούν μόνο τα αποτελέσματα των βελτιστοποιήσεων, χωρίς να γίνει αναφορά στις αρχικές τους ρυθμίσεις.

6.3.1 Παραμετροποίηση με Καμπύλες Bezier

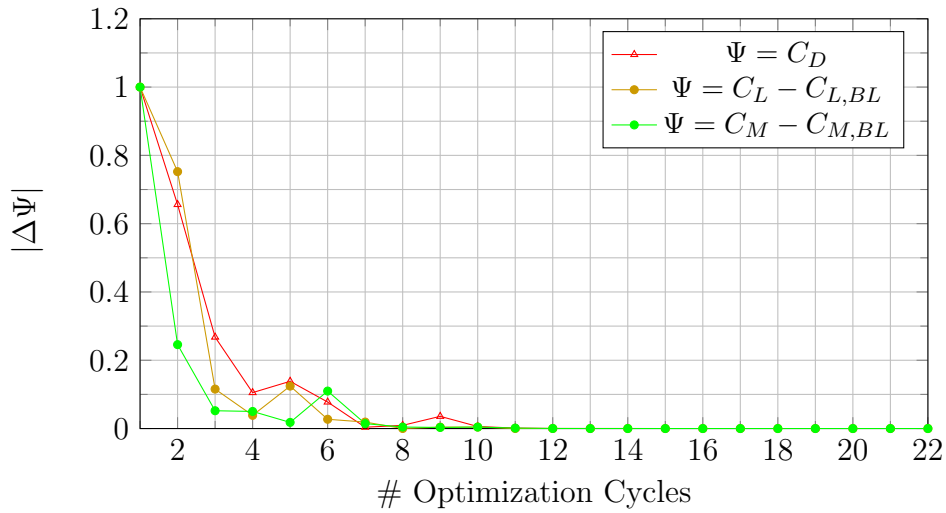
Η σύγκλιση της βελτιστοποίησης που περιγράφεται από τις εξισώσεις (6.3), χρησιμοποιώντας καμπύλες Bezier, παρουσιάζεται στο σχήμα 6.13.



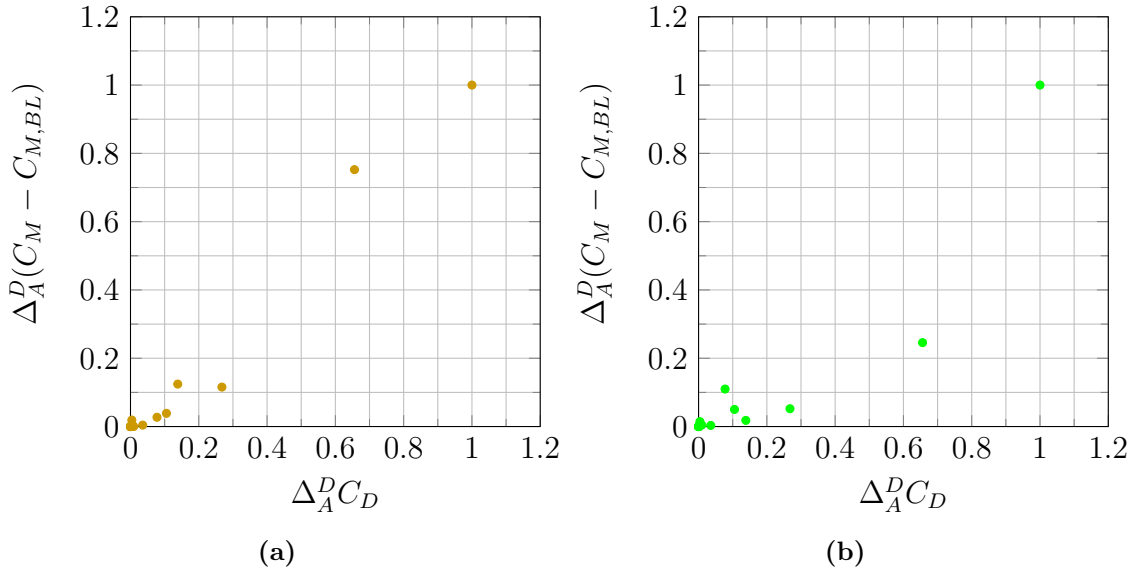
Σχήμα 6.13: Διαγράμματα σύγκλισης βελτιστοποίησης (6.3) της αεροτομής NACA 4415 με CST παραμετροποίηση: (a) Συντελεστής αντίστασης (συνάρτηση κόστους), (b) Συντελεστής άνωσης (περιορισμός ισότητας), (c) Συντελεστής ροπής (περιορισμός ισότητας), (d) Εμβαδόν (περιορισμός ισότητας).

Σε αυτήν την περίπτωση, τα αποτελέσματα παρουσιάζουν έντονες διαφορές σε σχέση με τη βελτιστοποίηση με περιορισμό $C_M = C_{M,BL}$. Ο συντελεστής αντίστασης αυξήθηκε κατά 7.75%, έπειτα από 22 κύκλους, αποτυγχάνοντας να μειώσει τη συνάρτηση

κόστους, που αποτελούσε ουσιαστικά και τον στόχο της βελτιστοποίησης. Η αποτυχία του αλγορίθμου να ελαχιστοποιήσει το C_D , οφείλεται στον περιορισμό του συντελεστή ροπής $C_M = 0$, αφού ο αλγόριθμος προσπάθησε να αναζητήσει γρήγορα μία λύση, που να ικανοποιεί τον περιορισμό, αυξάνοντας έτσι, τη συνάρτηση κόστους. Όπως φαίνεται από το σχήμα 6.13, ήδη από τον πρώτο κύκλο βελτιστοποίησης ο συντελεστής ροπής μειώθηκε από $7.18 \cdot 10^{-2}$ σε $-1.07 \cdot 10^{-2}$, διπλασιάζοντας, όμως, τον συντελεστή αντίστασης. Στη συνέχεια, προσπαθώντας περαιτέρω να οδηγήσει το C_M προς το 0, μειώθηκε ο συντελεστής αντίστασης συγκριτικά με την τιμή που έφτασε στον πρώτο κύκλο, χωρίς ωστόσο να φτάσει τιμή χαμηλότερη από το C_D της αρχικής αεροτομής. Η προσπάθεια του αλγορίθμου να μειώσει τον συντελεστή αντίστασης μετά τον πρώτο κύκλο, φαίνεται καλύτερα στα σχήματα 6.14 και 6.15 με τις αδιάστατες απόλυτες μεταβολές και τη διασπορά της συνάρτησης κόστους και των περιορισμών των C_L και C_M .

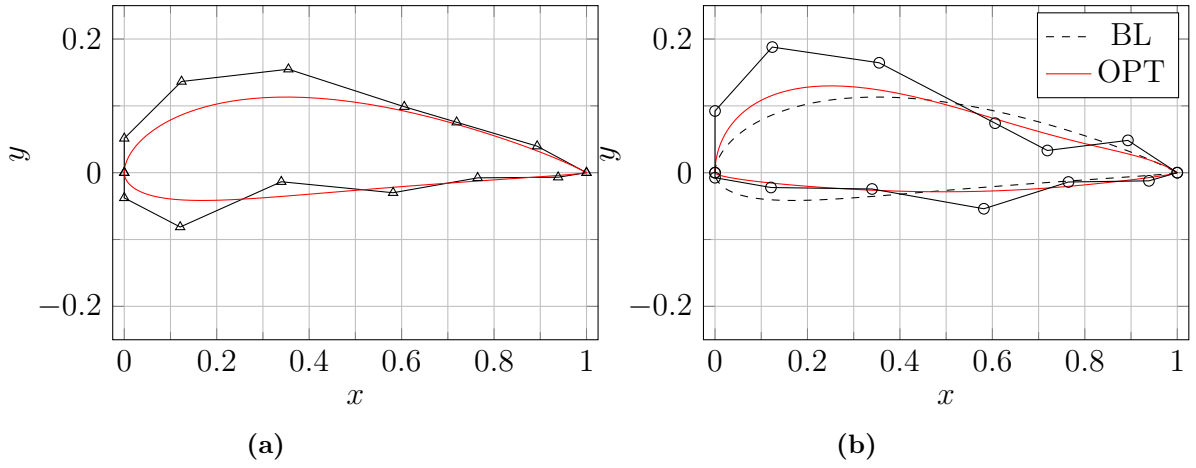


Σχήμα 6.14: Αδιαστατοποιημένες απόλυτες μεταβολές του συντελεστή αντίστασης και των περιορισμών των συντελεστών άνωσης και ροπής ανά κύκλο βελτιστοποίησης (6.3), χρησιμοποιώντας καμπύλες Bezier.



Σχήμα 6.15: Διαγράμματα διασποράς των αδιάστατων απόλυτων μεταβολών της βελτιστοποίησης (6.3), της αεροτομής NACA 4415 με καμπύλες Bezier: (a) Περιορισμός συντελεστή άνωσης - Συντελεστή αντίστασης, (b) Περιορισμός συντελεστή ροπής - Συντελεστή αντίστασης.

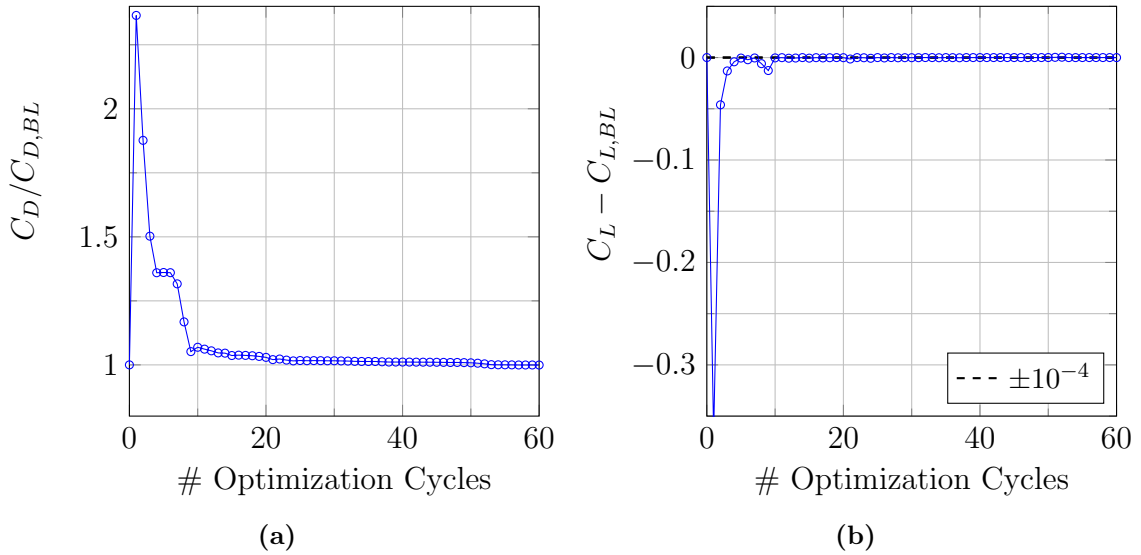
Πράγματι, φαίνεται ότι, μετά τον πρώτο κύκλο που παρουσιάζεται η μέγιστη μεταβολή των C_D και C_M , οι μεταβολές του C_D είναι μεγαλύτερες συγκριτικά με τις αντίστοιχες του C_M . Πιο συγκεκριμένα, παρατηρώντας τις μεταβολές των C_D και C_M κατά τους κύκλους 2, 3, 4 και 5 στο σχήμα 6.14, καταβάλλεται μεγάλη προσπάθεια μείωσης του συντελεστή αντίστασης. Ουσιαστικά, ο περιορισμός του συντελεστή ροπής κυριάρχησε της συνάρτησης κόστους, με αποτέλεσμα στη συνέχεια, ο αλγόριθμος να προσπαθήσει να καλύψει την απόσταση δίνοντας έμφαση στη μείωση του C_D . Στο σχήμα 6.16 παρουσιάζεται η βελτιστοποιημένη αεροτομή συγκριτικά με την αεροτομή αναφοράς, καθώς και το πολύγωνο των καμπυλών Bezier.

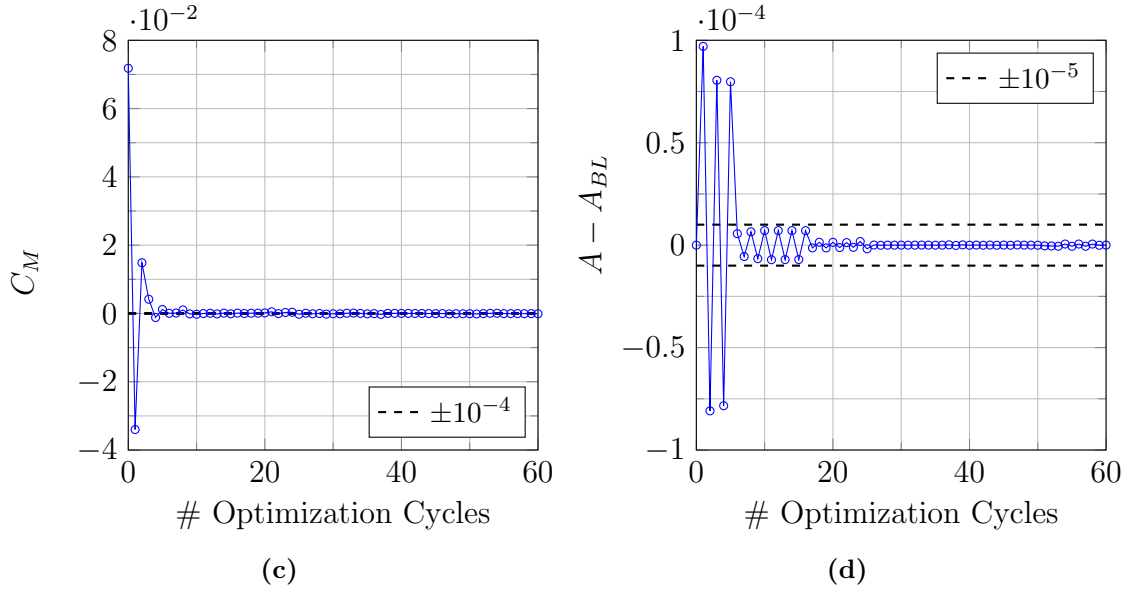


Σχήμα 6.16: Σημεία ελέγχου των καμπυλών *Bezier* και παραγόμενη αεροτομή, βελτιστοποίησης (6.3) (άξονες χωρίς κλίμακα): (a) Αρχική αεροτομή *NACA 4415*, (b) Βελτιστοποιημένη αεροτομή.

6.3.2 Παραμετροποίηση με CST

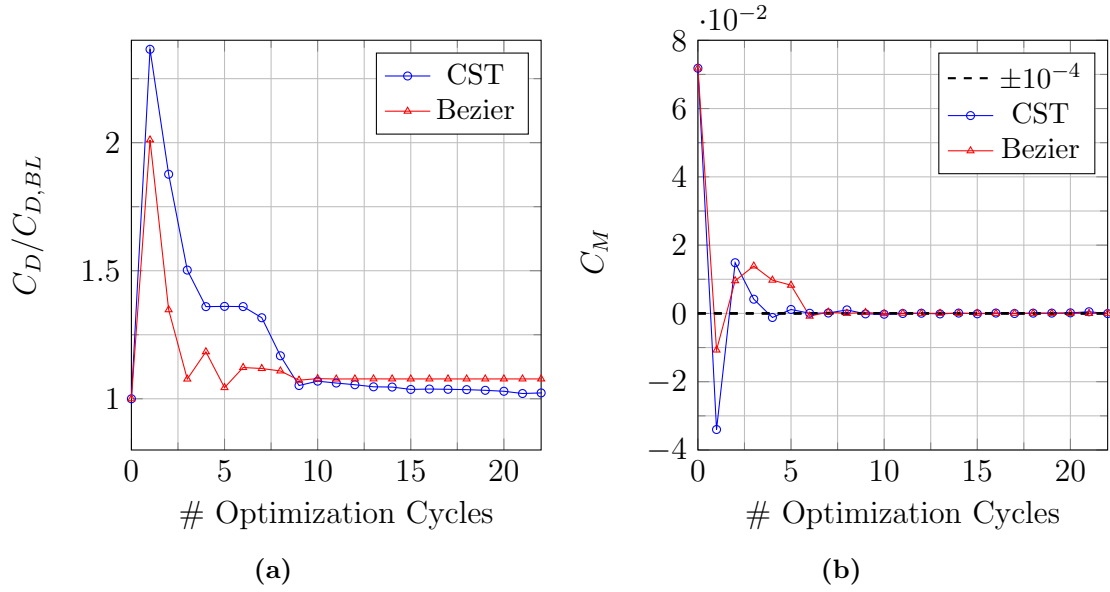
Στο σχήμα 6.17 παρουσιάζονται τα διαγράμματα της πορείας σύγκλισης του συντελεστή αντίστασης και των περιορισμών του συντελεστή άνωσης, του συντελεστή ροπής και του εμβαδού, όπως προέκυψαν από τη διαδικασία της βελτιστοποίησης.





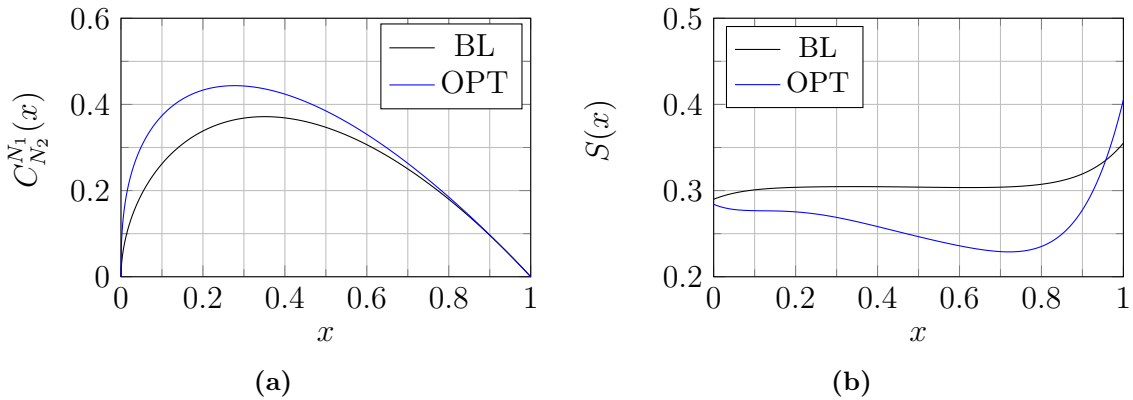
Σχήμα 6.17: Διαγράμματα σύγκλισης βελτιστοποίησης (6.3) της αεροτομής NACA 4415 με CST παραμετροποίηση: (a) Συντελεστής αντίστασης (συνάρτηση κόστους), (b) Συντελεστής άνωσης (περιορισμός ισότητας), (c) Συντελεστής ροπής (περιορισμός ισότητας), (d) Εμβαδόν (περιορισμός ισότητας).

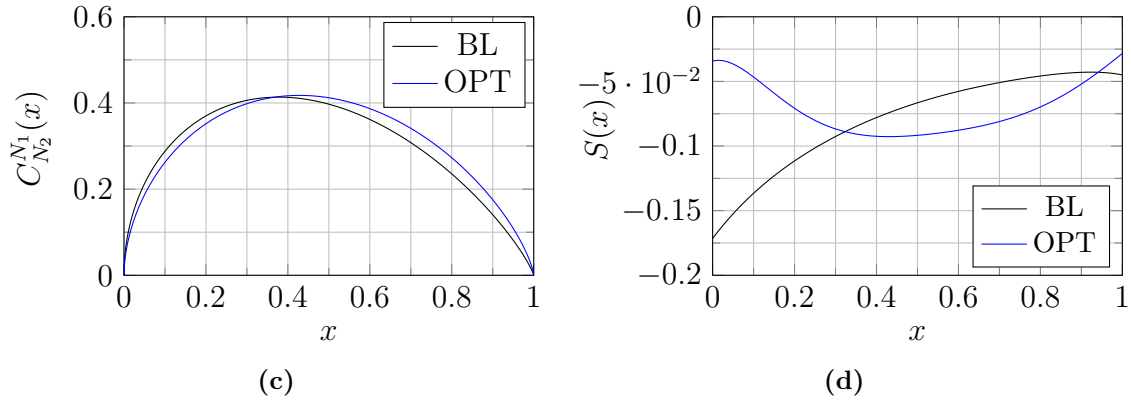
Με τη CST παραμετροποίηση, η βελτιστοποίηση πραγματοποίησε 60 κύκλους, μειώνοντας τον συντελεστή αντίστασης κατά 0.06%, πραγματοποιώντας έστω και οριακά τον στόχο της βελτιστοποίησης για μείωση του C_D και επιτυγχάνοντας βελτίωση κατά 7.81 ποσοστιαίες μονάδες, συγκριτικά με τη βέλτιστη λύση των καμπυλών Bezier. Όπως με τις καμπύλες Bezier, έτσι και στη CST παραμετροποίηση, κυριάρχησε ο περιορισμός του C_M έναντι της συνάρτησης κόστους, αφού παρατηρείται έντονη προσπάθεια κατά τους πρώτους κύκλους της βελτιστοποίησης για ικανοποίηση του περιορισμού. Μάλιστα, παρατηρώντας το σχήμα 6.18, φαίνεται ότι στην περίπτωση της CST παραμετροποίησης η κυριαρχία αυτή είναι ακόμα πιο έντονη.



Σχήμα 6.18: Συγκριτικά διαγράμματα σύγκλισης βελτιστοποίησης (6.3) της αεροτομής *NACA 4415* με *CST* παραμετροποίηση και καμπύλες *Bezier*: (a) Συντελεστής αντίστασης (συνάρτηση κόστους), (b) Συντελεστής ροπής (περιορισμός ισότητας).

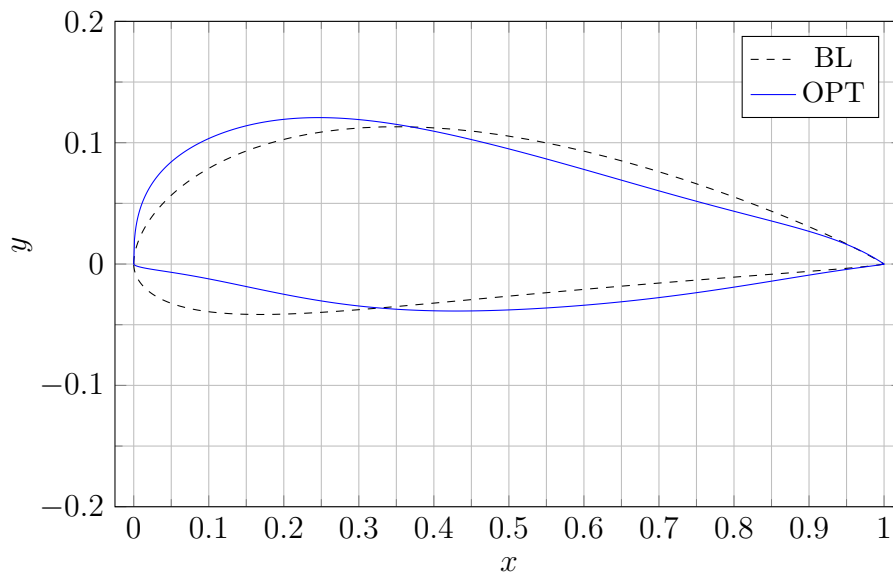
Όπως φαίνεται από το σχήμα 6.18, η *CST* παραμετροποίηση έδωσε προτεραιότητα στην ικανοποίηση του περιορισμού του C_M , αφού κατά τους κύκλους 3, 4, 5 και 6 παρατηρούμε ότι, ο συντελεστής ροπής πλησιάζει την τιμή 0, ενώ ο συντελεστής αντίστασης παραμένει σχεδόν σταθερός. Αντίθετα, οι καμπύλες *Bezier*, προσπάθησαν να μειώσουν τον συντελεστή αντίστασης στο ίδιο εύρος κύκλων και σε δεύτερο χρόνο να ικανοποιήσουν τον περιορισμό του συντελεστή ροπής. Αυτός είναι και πιθανότατα ο λόγος, που η *CST* παραμετροποίηση παρουσίασε καλύτερα αποτελέσματα. Δίνοντας προτεραιότητα στο να βρεθεί μία λύση με συντελεστή ροπής κοντά στο 0 και μετέπειτα τη βελτίωση του συντελεστή αντίστασης, κατάφερε να μην παγιδευτεί σε μία λύση με υψηλότερο C_D . Στην συνέχεια, στο σχήμα 6.19 παρουσιάζονται σε κοινό διάγραμμα οι συναρτήσεις κλάσης και μορφής της βελτιστοποιημένης και της αεροτομής αναφοράς.





Σχήμα 6.19: Διαγράμματα συναρτήσεων κλάσης και μορφής της βελτιστοποιημένης αεροτομής, καθώς και της αρχικής NACA 4415: (a) Συναρτήσεις κλάσης της πλευράς υποπίεσης, (b) Συναρτήσεις μορφής της πλευράς υποπίεσης, (c) Συναρτήσεις κλάσης της πλευράς υπερπίεσης, (d) Συναρτήσεις μορφής της πλευράς υπερπίεσης.

Σε αυτήν την περίπτωση παρατηρούμε ότι, η συνάρτηση κλάσης έχει αλλάξει πολύ πιο έντονα σε σχέση με την προηγούμενη περίπτωση της βελτιστοποίησης με περιορισμό $C_M = C_{M,BL}$, ιδιαίτερα στην πλευρά υποπίεσης. Φυσικά, αντίστοιχα με προηγούμενως, έντονη αλλαγή έχει και η συνάρτηση μορφής. Προκύπτει, λοιπόν, το συμπέρασμα ότι, αναλόγως το πρόβλημα, η μη γραμμική φύση της CST παραμετροποίησης προσφέρει τη δυνατότητα για παραπάνω έλεγχο που μπορεί να οδηγήσει σε καλύτερα αποτελέσματα.



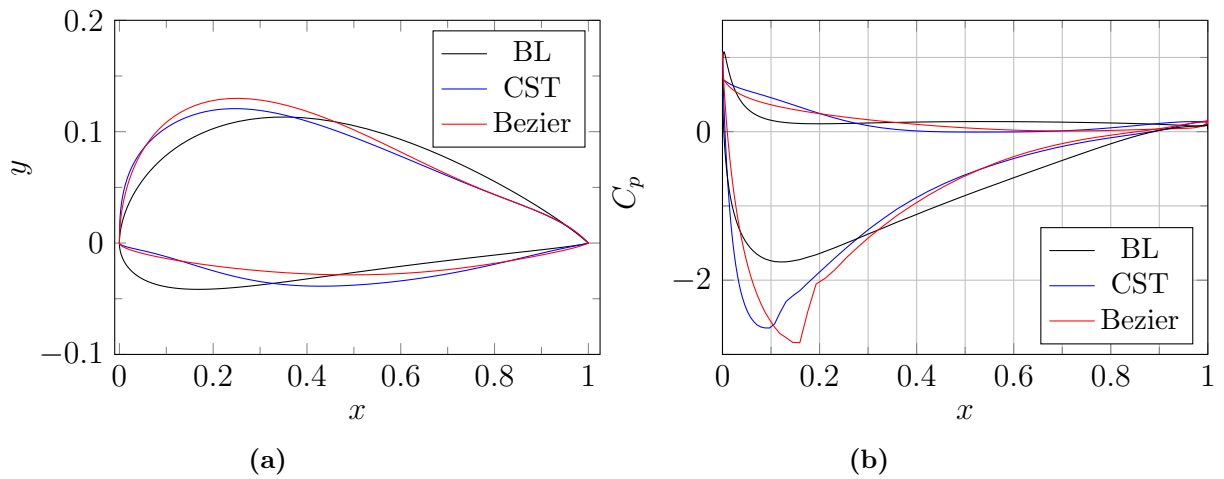
Σχήμα 6.20: Βελτιστοποιημένη αεροτομή με τη CST παραμετροποίηση και αρχική NACA 4415 (άξονες χωρίς κλίμακα).

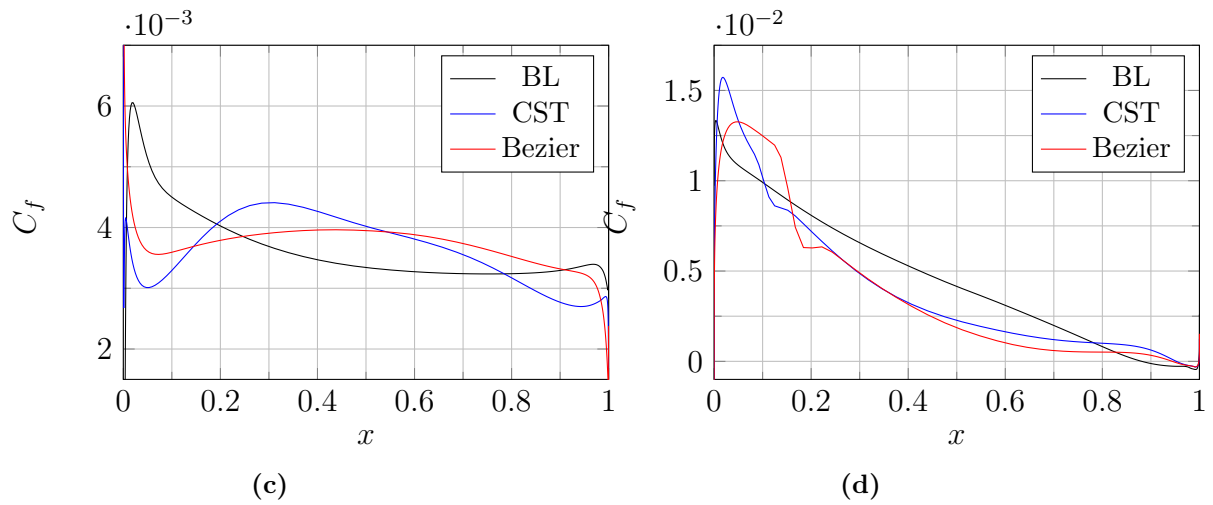
6.3.3 Αποτελέσματα

Στον πίνακα 6.2 και στο σχήμα 6.21 που ακολουθούν, παρουσιάζονται συνοπτικά τα αποτελέσματα της βελτιστοποίησης, όπως προέκυψαν από τις δύο μεθόδους παραμετροποίησης.

	BL	Bezier	CST
C_D	$1.80 \cdot 10^{-2}$	$1.93 \cdot 10^{-2}$	$1.79 \cdot 10^{-2}$
C_L	$9.83 \cdot 10^{-1}$	$9.83 \cdot 10^{-1}$	$9.83 \cdot 10^{-1}$
C_M	$7.18 \cdot 10^{-2}$	$1.81 \cdot 10^{-5}$	$-6.87 \cdot 10^{-5}$
A	$3.42 \cdot 10^{-3}$	$3.42 \cdot 10^{-3}$	$3.42 \cdot 10^{-3}$

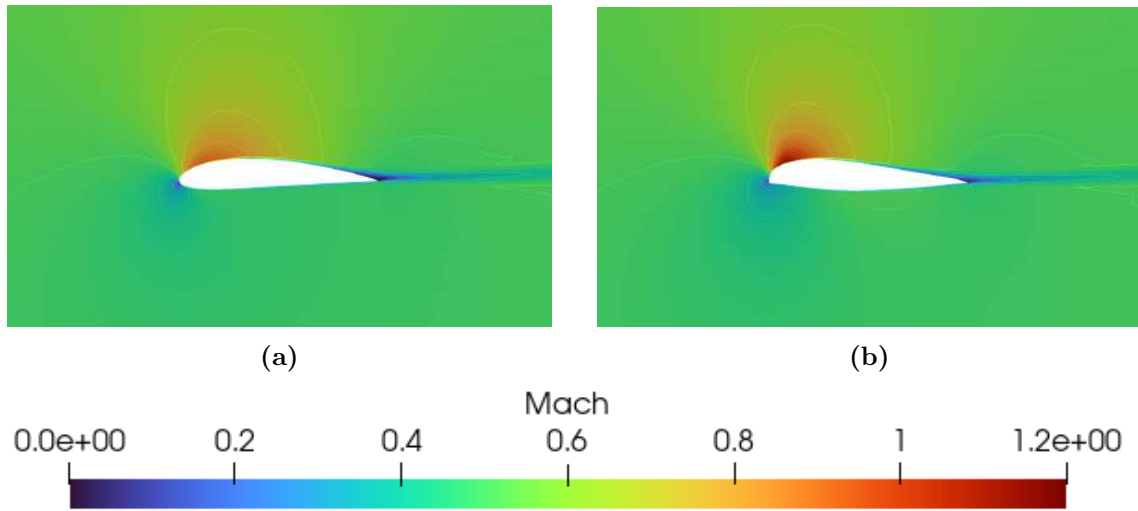
Πίνακας 6.2: Συγκριτικά αποτελέσματα βελτιστοποίησης (6.3), της αεροτομής *NACA 4415* με τη *CST* παραμετροποίηση και τις καμπύλες *Bezier*.





Σχήμα 6.21: Συγκριτικά αποτελέσματα βελτιστοποίησης (6.3), της αεροτομής NACA 4415 με τη CST παραμετροποίηση και τις καμπύλες Bezier: (a) Βελτιστοποιημένη αεροτομή, (b) Συντελεστής πίεσης, (c) Συντελεστής τριβής πλευράς υπερπίεσης, (d) Συντελεστής τριβής πλευράς υποπίεσης.

Σε αυτήν την περίπτωση, τα αποτελέσματα παρουσιάζουν έντονες διαφορές μεταξύ των δύο μεθόδων, αφού αντίθετα με τις καμπύλες Bezier που δεν κατάφεραν να μειώσουν τον συντελεστή αντίστασης, η CST παραμετροποίηση πραγματοποίησε τον στόχο έστω και οριακά. Ωστόσο, και οι δύο μέθοδοι κατάφεραν να ικανοποιήσουν τους περιορισμούς, με αποτέλεσμα να τονίζεται η κυριαρχία τους στη βελτιστοποίηση. Σε αυτήν την περίπτωση, η βελτιστοποιημένη αεροτομή υψώθηκε σε σχέση με την αρχική, γεγονός που οφείλεται στον περιορισμό του συντελεστή ροπής. Προκειμένου να μηδενιστεί το C_M , αυξήθηκε η επιφάνεια στην πλευρά υποπίεσης, ώστε να επιτευχθεί η ισορροπία των ροπών. Τέλος, στο σχήμα 6.22 παρουσιάζεται το πεδίο του αριθμού Mach της βελτιστοποιημένης με τη CST παραμετροποίηση αεροτομής.



Σχήμα 6.22: Πεδίο του αριθμού *Mach*: (a) Αρχική αεροτομή *NACA 4415*, (b) Βελτιστοποιημένη αεροτομή.

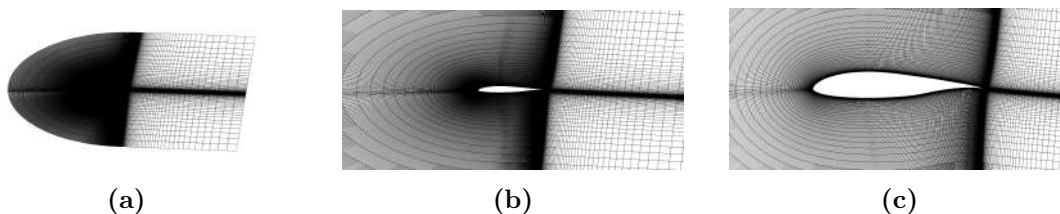
Κεφάλαιο 7

Βελτιστοποίηση Μορφής Αεροτομής NLF0416

7.1 Περιγραφή Προβλήματος

Το τρίτο πρόβλημα αναφέρεται στη βελτιστοποίηση μορφής της αεροτομής NLF0416. Σκοπός αυτού του προβλήματος, είναι η σύγκριση της CST με άλλες μεθόδους, εκτός από τις καμπύλες Bezier και η συμπεριφορά της σε μοντέλα ροής υψηλότερης πιστότητας. Ως στόχος τέθηκε η ελαχιστοποίηση του C_D , υπό τους περιορισμούς το C_L και το εμβαδόν της προκύπτουσας αεροτομής να ισούνται με την αρχική. Επομένως, το πρόβλημα αντιμετωπίστηκε ως πρόβλημα βελτιστοποίησης ενός στόχου με δύο περιορισμούς ισότητας. Ως εναλλακτική μέθοδος παραμετροποίησης χρησιμοποιήθηκαν οι ογκομετρικές καμπύλες NURBS για τη σύγκριση των αποτελεσμάτων.

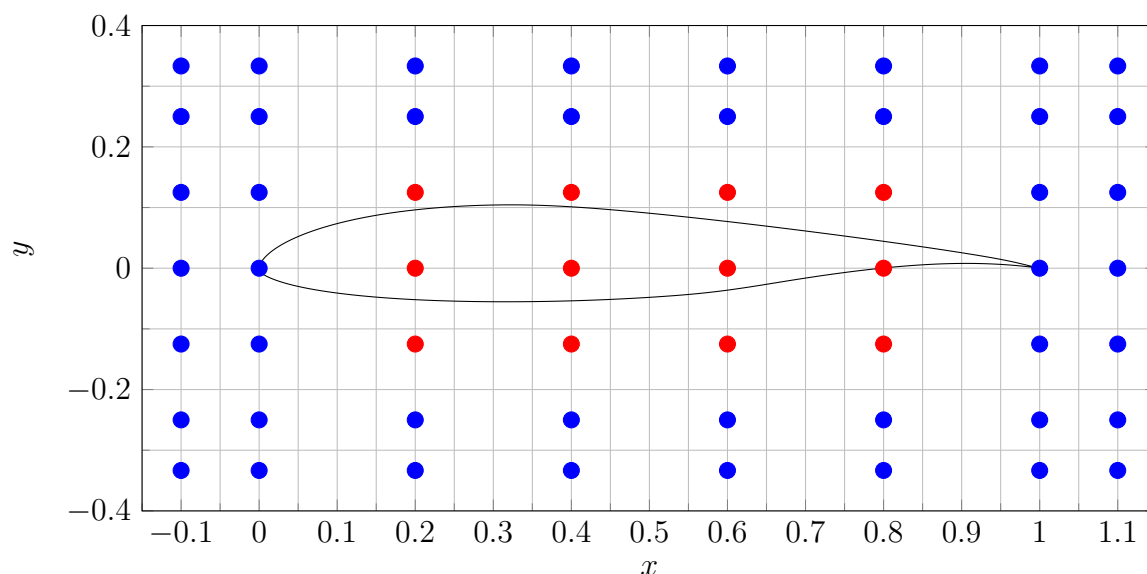
Οι συνθήκες της επ' άπειρον ροής είναι γωνία προσβολής $\alpha_\infty = 3^\circ$, αριθμός Mach $M_\infty = 0.1$ και αριθμός Reynolds $Re_\infty = 4 \cdot 10^6$. Για την επίλυσή της, εκτός από τις εξισώσεις RANS, χρησιμοποιήθηκε το μοντέλο μετάβασης $\gamma - Re_{\theta t}$, όπως προτάθηκε από τους Piotrowski και Zingg [20], ενσωματωμένο με το μοντέλο τύρβης Spalart-Almaras. Το υπολογιστικό πλέγμα που χρησιμοποιήθηκε για την επίλυση της ροής είναι δομημένο, τύπου C, αποτελείται από περίπου 306K κόμβους και εκτείνεται σε απόσταση 1000 χορδές, στο σχήμα 7.1.



Σχήμα 7.1: Υπολογιστικό πλέγμα γύρω από την αεροτομή NLF 0416: (a) Πλήρες πλέγμα, (b) Μέτρια εστίαση του πλέγματος, (c) Κοντινή εστίαση του πλέγματος.

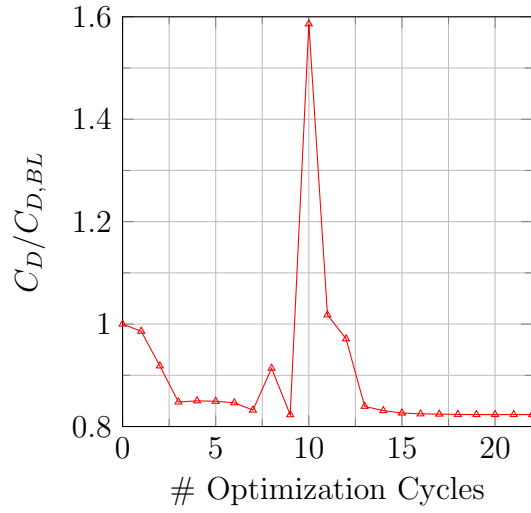
7.2 Βελτιστοποίηση με Ογκομετρικές Καμπύλες NURBS

Κατά τη διαδικασία της βελτιστοποίησης που πραγματοποιήθηκε με καμπύλες NURBS για την παραμετροποίηση της αεροτομής, χρησιμοποιήθηκαν 12 σημεία ελέγχου, όπως παρουσιάζονται στο σχήμα 7.2. Οι μεταβλητές σχεδιασμού ανέρχονται σε 12 και αποτελούν τις κατακόρυφες μετατοπίσεις των σημείων ελέγχου. Επειδή, ως μεταβλητές σχεδιασμού ορίστηκαν οι μετατοπίσεις, οι αρχικές τιμές τους είναι 0 και τα επιτρεπτά όριά τους είναι ± 0.0375 .

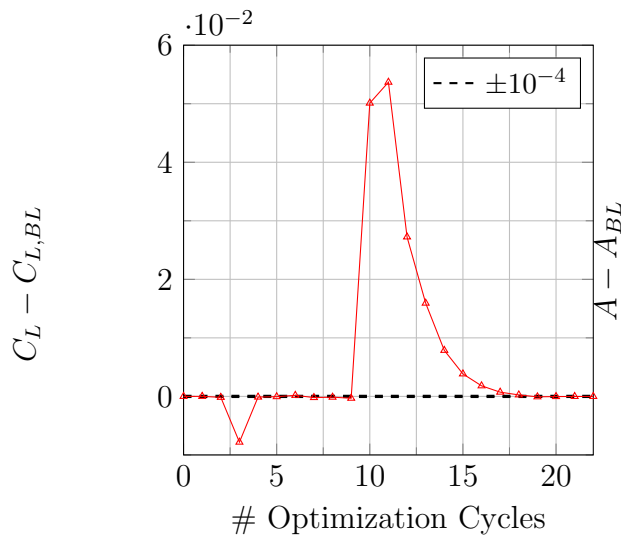


Σχήμα 7.2: Σημεία ελέγχου των ογκομετρικών καμπυλών NURBS για την αεροτομή NLF 0416 (άξονες χωρίς κλίμακα).

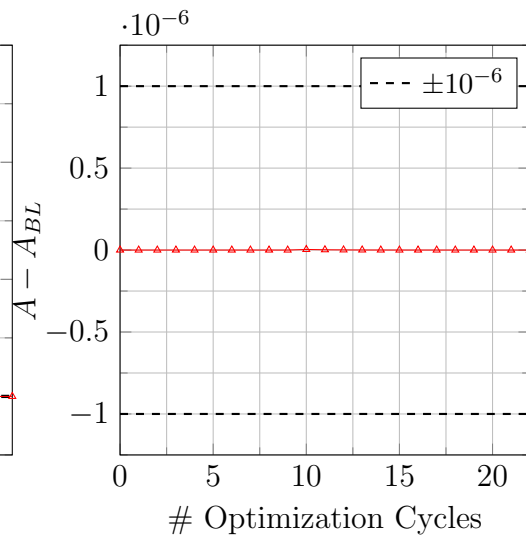
Ως κριτήριο σύγκλισης ορίστηκε ξανά η μεταβολή των μεταβλητών σχεδιασμού να μην υπερβαίνει την τιμή 10^{-5} , ενώ οι ανοχές των περιορισμών ισότητας είναι $\pm 10^{-4}$, $\pm 10^{-6}$ για τον συντελεστή άνωσης και το εμβαδόν, αντίστοιχα. Στο σχήμα 7.3 παρουσιάζονται οι πορείες σύγκλισης των μεγεθών ενδιαφέροντος.



(a)



(b)



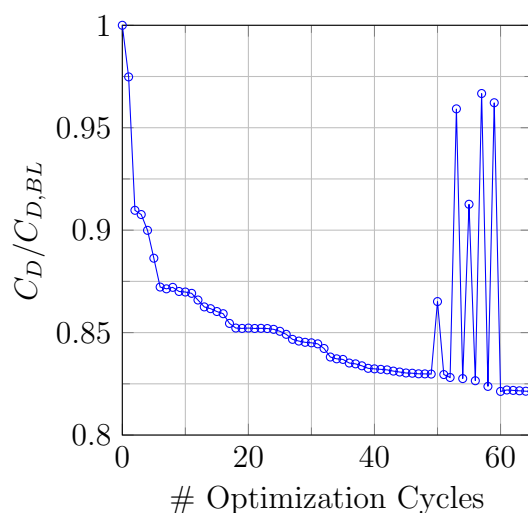
(c)

Σχήμα 7.3: Διαγράμματα σύγκλισης βελτιστοποίησης της αεροτομής *NLF 0416* με ογκομετρικές καμπύλες *NURBS*: (a) Συντελεστής αντίστασης (συνάρτηση κόστους), (b) Συντελεστής άνωσης (περιορισμός ισότητας), (c) Εμβαδόν (περιορισμός ισότητας).

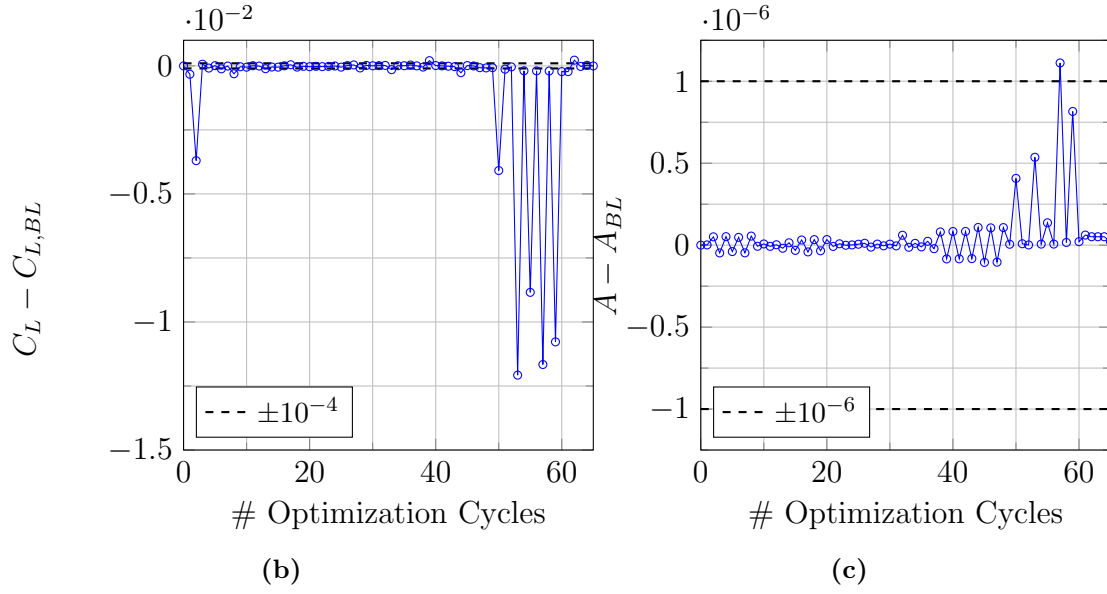
Όπως φαίνεται από το σχήμα 7.3, ο συντελεστής αντίστασης μειώθηκε κατά 17.67% σε 22 κύκλους βελτιστοποίησης, ικανοποιώντας τους περιορισμούς του συντελεστή άνωσης και του εμβαδού. Η βελτιστοποιημένη αεροτομή, καθώς και άλλα αποτελέσματα της βελτιστοποίησης θα παρουσιαστούν στη συνέχεια, συγκριτικά με τα αντίστοιχα της CST παραμετροποίησης.

7.3 Βελτιστοποίηση με CST Παραμετροποίηση

Για τη βελτιστοποίηση που πραγματοποιήθηκε με τη CST παραμετροποίηση, χρησιμοποιήθηκαν πολυώνυμα Bernstein 7^{ης} τάξης για την πλευρά υποπίεσης και 13^{ης} τάξης για την πλευρά υπερπίεσης. Ο λόγος που επιλέχθηκαν τα παραπάνω πολυώνυμα είναι αφενός, γιατί με βάση την παραμετρική ανάλυση που έγινε στο Κεφάλαιο 3, αντιπροσωπεύουν όσο το δυνατόν καλύτερα τη γεωμετρία της αεροτομής και αφετέρου, για να διερευνηθεί η επίδραση που έχουν στη βελτιστοποίηση πολυώνυμα μεγαλύτερης τάξης. Ο συνολικός αριθμός των μεταβλητών σχεδιασμού ανέρχεται σε 26, 10 για την πλευρά υποπίεσης και 16 για την πλευρά υπερπίεσης. Τα επιτρεπτά όρια των μεταβλητών σχεδιασμού είναι $\pm 20\%$ της αρχικής τιμής τους, ενώ τα κριτήρια σύγκλισης και τα όρια ανοχής των περιορισμών ισότητας είναι κοινά με την περίπτωση των NURBS. Στο σχήμα 7.4 που ακολουθεί παρουσιάζονται τα διαγράμματα σύγκλισης της συνάρτησης κόστους και των περιορισμών ισότητας.

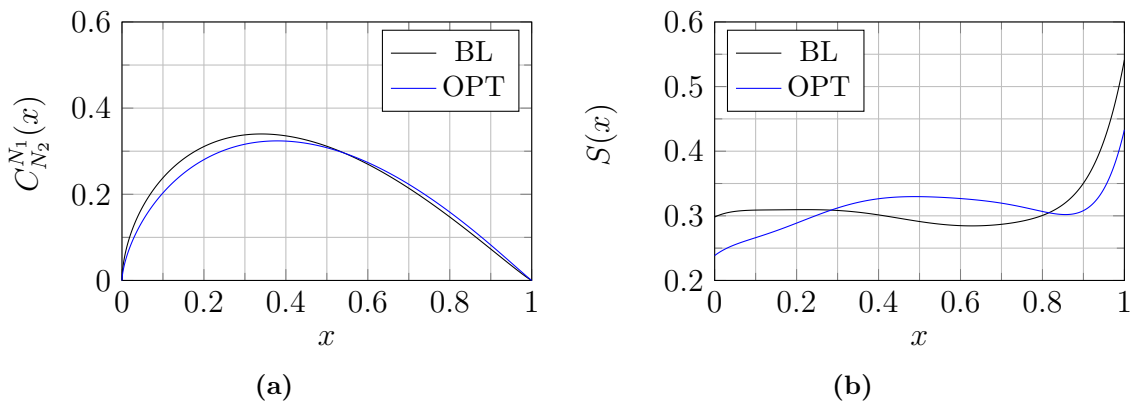


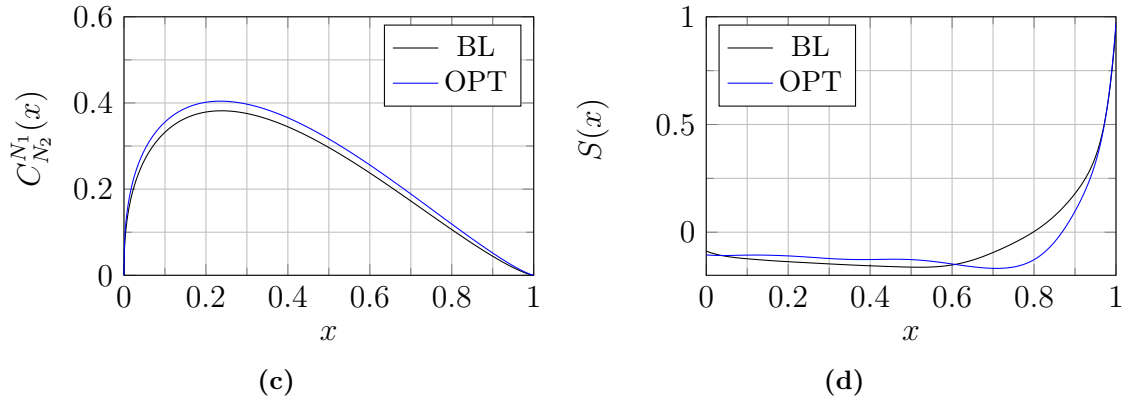
(a)



Σχήμα 7.4: Διαγράμματα σύγκλισης βελτιστοποίησης της αεροτομής NLF 0416 με CST παραμετροποίηση: (a) Συντελεστής αντίστασης (συνάρτηση κόστους), (b) Συντελεστής άνωσης (περιορισμός ισότητας), (c) Εμβαδόν (περιορισμός ισότητας).

Η βελτιστοποίηση ολοκληρώθηκε ύστερα από 65 κύκλους, αυξάνοντας σχεδόν στο τριπλάσιο το υπολογιστικό κόστος. Ωστόσο, επιτεύχθηκε μείωση του συντελεστή αντίστασης κατά 17.87%, ελαφρώς μεγαλύτερη από την αντίστοιχη των καμπυλών NURBS, κατά 0.20 ποσοστιαίες μονάδες. Επομένως, προκύπτει το συμπέρασμα ότι, η CST παραμετροποίηση αποτελεί μία ισχυρή μέθοδο, που λόγω της μη γραμμικής σχέσης μεταξύ της συνάρτησης κλάσης με τη συνάρτηση μορφής, μπορεί να βελτιώσει την αεροδυναμική συμπεριφορά αεροτομών σε μεγαλύτερο βαθμό σε σχέση με άλλες μεθόδους παραμετροποίησης. Φυσικά, η επιπλέον βελτίωση δεν επιτυγχάνεται χωρίς κόστος, αφού εκτός από τις περισσότερες επαναλήψεις που απαιτούνται, η ταχύτητα σύγκλισης της μεθόδου είναι σημαντικά μικρότερη. Στο σχήμα 7.5 παρουσιάζονται οι συναρτήσεις κλάσης και μορφής της βελτιστοποιημένης αεροτομής και της αρχικής NLF 0416.





Σχήμα 7.5: Διαγράμματα συναρτήσεων κλάσης και μορφής της βελτιστοποιημένης αεροτομής, καθώς και της αρχικής NLF 0416: (a) Συναρτήσεις κλάσης της πλευράς υποπίεσης, (b) Συναρτήσεις μορφής της πλευράς υποπίεσης, (c) Συναρτήσεις κλάσης της πλευράς υπερπίεσης, (d) Συναρτήσεις μορφής της πλευράς υπερπίεσης.

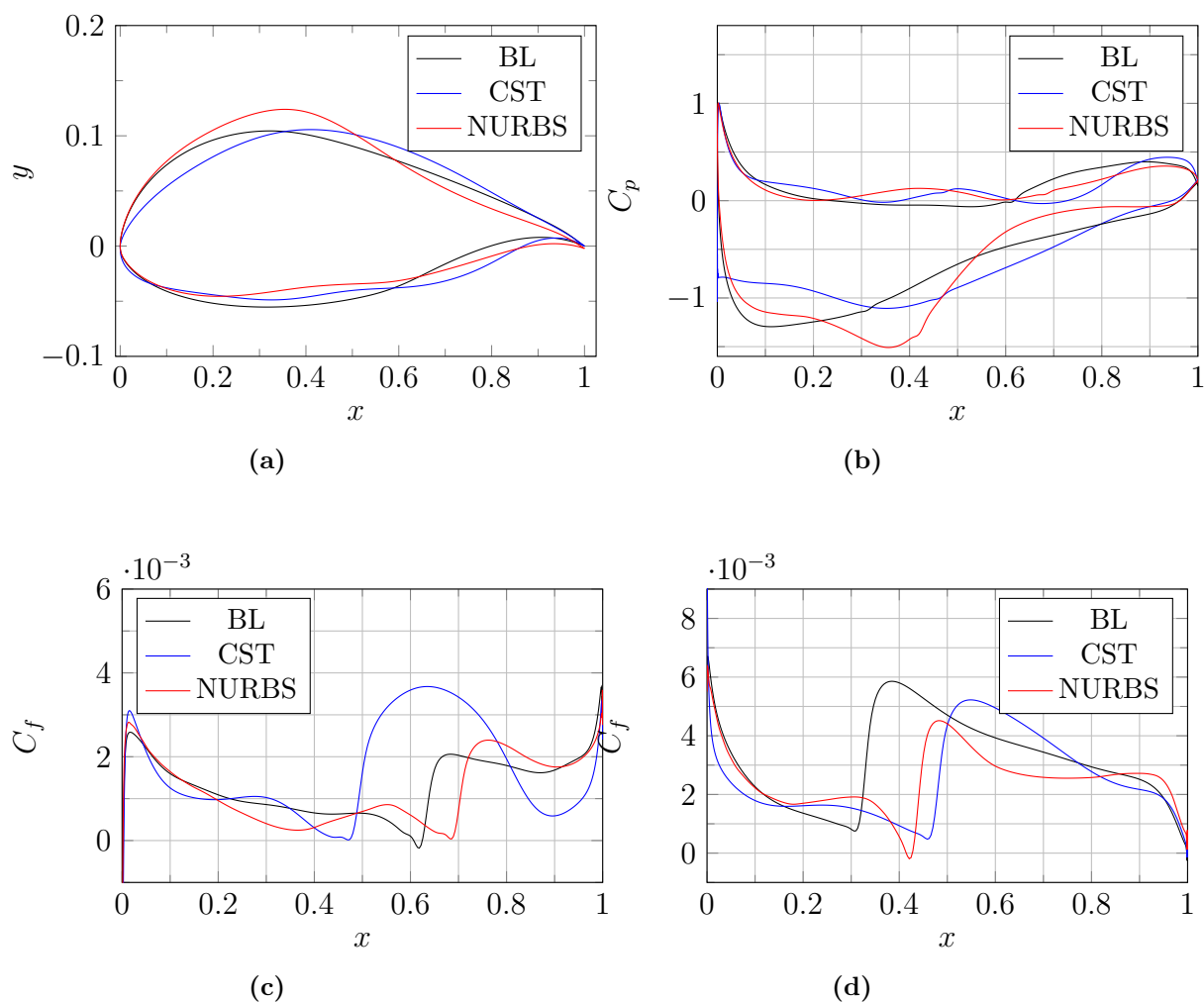
Στη συγκεκριμένη, περίπτωση παρατηρούμε μία ήπια μεταβολή στις συναρτήσεις κλάσης των δύο πλευρών, ενώ ξανά οι μεταβολές των συναρτήσεων μορφής είναι αρκετά έντονες. Επομένως, δεδομένης της μεγαλύτερης μεταβολής της συνάρτησης μορφής σε σχέση με τη συνάρτηση κλάσης, σε όλα τα προβλήματα βελτιστοποίησης μορφής που πραγματοποιήθηκαν, προκύπτει το συμπέρασμα ότι, στην κατασκευή της γεωμετρίας της αεροτομής, γενικά κυριαρχεί η επίδραση της συνάρτησης μορφής.

7.4 Αποτελέσματα

Στη συνέχεια, ακολουθούν συγκριτικά αποτελέσματα των δύο μεθόδων παραμετροποίησης. Πιο συγκεκριμένα, στον πίνακα 7.1 παρουσιάζονται οι συντελεστές άνωσης και αντίστασης, καθώς και το εμβαδόν των βελτιστοποιημένων αεροτομών, ενώ στο σχήμα 7.6, παρουσιάζονται οι γεωμετρίες τους και τα διαγράμματα των συντελεστών πίεσης και τριβής αυτών, συγκριτικά με την αεροτομή αναφοράς.

	BL	NURBS	CST
C_D	$6.19 \cdot 10^{-3}$	$5.10 \cdot 10^{-3}$	$5.08 \cdot 10^{-3}$
C_L	$8.36 \cdot 10^{-1}$	$8.36 \cdot 10^{-1}$	$8.36 \cdot 10^{-1}$
A	$6.62 \cdot 10^{-4}$	$6.62 \cdot 10^{-4}$	$6.62 \cdot 10^{-4}$

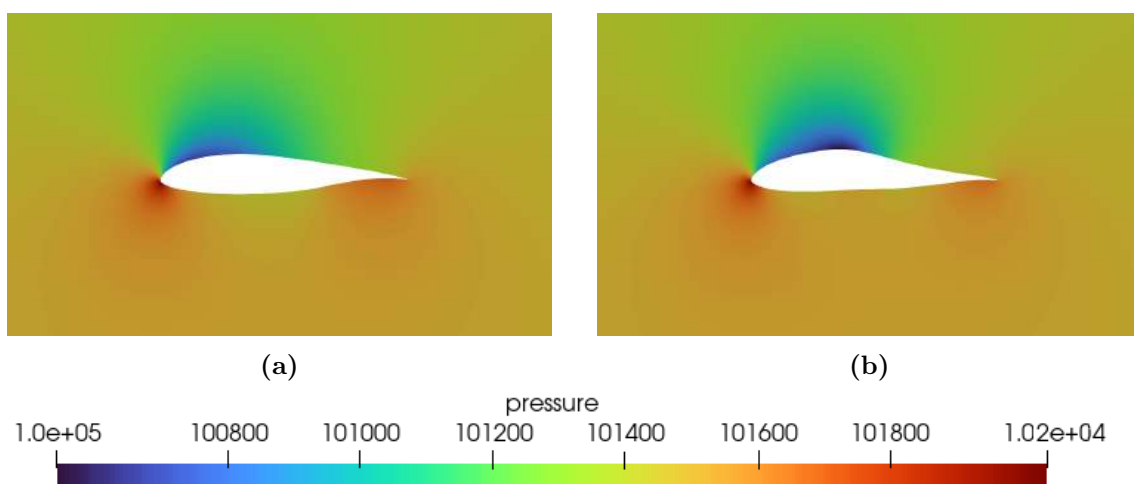
Πίνακας 7.1: Συγκριτικά αποτελέσματα βελτιστοποίησης της αεροτομής NLF 0416 με τη CST παραμετροποίηση και τις ογκομετρικές καμπύλες NURBS.



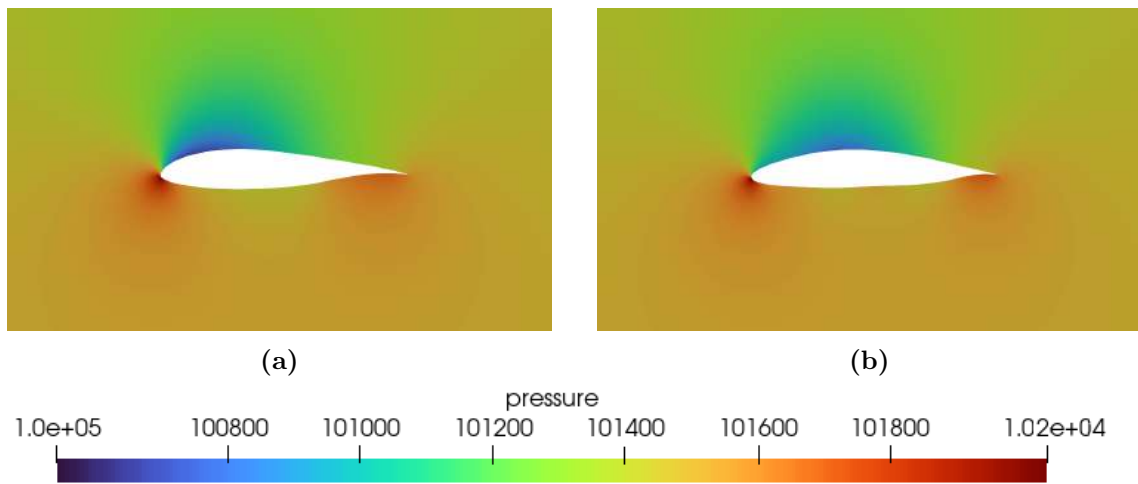
Σχήμα 7.6: Συγκριτικά αποτελέσματα βελτιστοποίησης της αεροτομής NLF 0416 με τη CST παραμετροποίηση και τις ογκομετρικές καμπύλες NURBS: (a) Βελτιστοποιημένη αεροτομή, (b) Συντελεστής πίεσης, (c) Συντελεστής τριβής πλευράς υπερπίεσης, (d) Συντελεστής τριβής πλευράς υποπίεσης.

Από το σχήμα 7.6 προκύπτουν αρκετά ενδιαφέροντα συμπεράσματα. Αρχικά, παρατηρώντας το διάγραμμα 7.6 (a), οι βελτιστοποιημένες αεροτομές παρουσιάζουν την εντονότερη διαφορά μεταξύ τους σε σχέση με όλα τα υπόλοιπα προβλήματα. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι, η CST παραμετροποίηση είναι παρεμφερής με τις καμπύλες Bezier που χρησιμοποιήθηκαν προηγουμένως, ενώ δεν έχει καμία σχέση με τις ογκομετρικές καμπύλες NURBS. Έτσι, προέκυψαν δύο διαφορετικές γεωμετρίες με παρόμοια αεροδυναμική συμπεριφορά, ελαφρώς καλύτερη για τη CST παραμετροποίηση, όπως φαίνεται από τον πίνακα 7.1. Το πιο ενδιαφέρον κομμάτι, όμως, έγκειται στον τρόπο με τον οποίο η CST παραμετροποίηση κατάφερε να πετύχει αυτή την καλύτερη συμπεριφορά. Όπως φαίνεται από το διάγραμμα 7.6 (c), η CST παραμετροποίηση μετακίνησε το σημείο μετάβασης της ροής της πλευράς υπερπίεσης πιο κοντά στην ακμή προσβολής από το 0.62 στο 0.48, σε αντίθεση με τις καμπύλες NURBS που μετακίνησαν το σημείο

μετάβασης στο 0.68. Έτσι, η CST παραμετροποίηση μείωσε την περιοχή της στρωτής ροής και πιθανώς, να αύξησε τον συντελεστή αντίστασης. Όμως, παρατηρώντας τα διαγράμματα 7.6 (b) και 7.6 (d), μετακίνησε το σημείο μετάβασης της πλευράς υποπίεσης πιο κοντά στην ακμή εκφυγής από το 0.31 στο 0.47 σε σχέση με τις καμπύλες NURBS, που μετακίνησαν το σημείο μετάβασης στο 0.42. Επομένως, μειώνοντας την τυρβώδη περιοχή και συνεπώς το C_D , ενώ παράλληλα μειώνοντας το C_p στο μέρος της στρωτής ροής, η CST παραμετροποίηση εξουδετέρωσε την πιθανή αύξηση του συντελεστή αντίστασης στην πλευρά υπερπίεσης, επιτυγχάνοντας συνολικά ελαφρώς καλύτερη αεροδυναμική συμπεριφορά. Όλα τα παραπάνω επιβεβαιώνονται από τα σχήματα 7.7 και 7.8 που παρουσιάζουν το πεδίο πίεσης των βελτιστοποιημένων αεροτομών συγκριτικά με το αρχικό πεδίο.



Σχήμα 7.7: Πεδίο της πίεσης: (a) Αρχική αεροτομή *NLF 0416*, (b) Βελτιστοποιημένη αεροτομή με ογκομετρικές καμπύλες *NURBS*.



Σχήμα 7.8: Πεδίο της πίεσης: (a) Αρχική αεροτομή *NLF 0416*, (b) Βελτιστοποιημένη αεροτομή με *CST* παραμετροποίηση.

Κεφάλαιο 8

Συμπεράσματα

8.1 Ανακεφαλαίωση

Η διπλωματική εργασία είχε ως κύριο αντικείμενο τη μελέτη της CST παραμετροποίησης ως μεθόδου παραμετροποίησης αεροτομών και την ένταξή της στη διαδικασία της αεροδυναμικής βελτιστοποίησης. Αρχικά, παρουσιάστηκε το θεωρητικό υπόβαθρο των μεθόδων παραμετροποίησης αεροτομών, με έμφαση στη μαθηματική διατύπωση της CST παραμετροποίησης. Στη συνέχεια, αναπτύχθηκε ένας αλγόριθμος βέλτιστης προσέγγισης αεροτομών, ο οποίος επιτρέπει την προσέγγισή τους μέσω της CST παραμετροποίησης.

Επιπλέον, περιγράφηκε η διαδικασία ένταξης της CST παραμετροποίησης στον κύκλο βελτιστοποίησης μέσω του λογισμικού PUMA. Στο πλαίσιο αυτό, πραγματοποιήθηκαν συγκριτικές δοκιμές μεταξύ της CST παραμετροποίησης και άλλων μεθόδων, όπως οι καμπύλες Bezier και οι ογκομετρικές καμπύλες NURBS, σε διάφορες περιπτώσεις βελτιστοποίησης αεροτομών (NACA 0012, NACA 4415, NLF 0416). Τα αποτελέσματα των δοκιμών αξιολογήθηκαν με κριτήριο την ποιότητα της τελικής λύσης και την υπολογιστική απόδοση.

8.2 Συμπεράσματα

Από την πραγματοποιηθείσα μελέτη προέκυψαν τα εξής κύρια συμπεράσματα :

- Η CST παραμετροποίηση αποδείχθηκε ένα ισχυρό εργαλείο περιγραφής της γεωμετρίας των αεροτομών, προσφέροντας υψηλή ακρίβεια με σχετικά μικρό αριθμό μεταβλητών σχεδιασμού που κυμαίνεται μεταξύ του 20 και 26.
- Σε σύγκριση με άλλες μεθόδους παραμετροποίησης, η CST διατήρησε υψηλής ποιότητας λύσεις στη βελτιστοποίηση της αεροδυναμικής συμπεριφοράς των αεροτομών, λόγω του διευρυμένου χώρου πιθανών λύσεων. Πιο συγκεκριμένα,

η CST παραμετροποίηση οδήγησε σε καλύτερες λύσεις κατά μέσο όρο 2 ποσο-
στιαίων μονάδων στις 4 εφαρμογές που μελετήθηκαν. Ωστόσο, λόγω του μικρού
αριθμού δείγματος δεν μπορεί να προκύψει το συμπέρασμα της ανωτερότητάς της
έναντι των υπόλοιπων μεθόδων.

- Η CST παραμετροποίηση οδήγησε σε πιο αργή σύγκλιση προς τις επιθυμητές αε-
ροδυναμικές επιδόσεις, παρουσιάζοντας ωστόσο σταθερότητα και αποδοτικότητα
στη διαχείριση των περιορισμών, κατά τη διαδικασία βελτιστοποίησης.
- Σε συγκεκριμένες περιπτώσεις, η τελική γεωμετρία που προέκυψε μέσω CST
διέφερε από αυτήν άλλων μεθόδων, αναδεικνύοντας τη δυνατότητα της μεθόδου
να προσφέρει εναλλακτικές σχεδιαστικές επιλογές.

8.3 Μελλοντικές Προτάσεις Έρευνας

Παρόλο που, η CST παραμετροποίηση έδειξε σημαντικά πλεονεκτήματα, υπάρχουν αρ-
κετές δυνατότητες για περαιτέρω έρευνα και βελτίωση:

- Διερεύνηση προβλημάτων αντίστροφου σχεδιασμού με τη CST παραμετροποίηση:
Η χρήση της CST παραμετροποίησης σε προβλήματα αντίστροφου σχεδιασμού
και η σύγκρισή της με άλλες μεθόδους παραμετροποίησης θα μπορούσε να την
αναδείξει σε ένα ισχυρό εργαλείο αντίστροφου σχεδιασμού.
- Εφαρμογή της CST παραμετροποίησης σε τριδιάστατα προβλήματα: Η επέκταση
της μεθόδου σε τριδιάστατες γεωμετρίες θα μπορούσε να ανοίξει νέες προοπτικές
στον αεροδυναμικό σχεδιασμό αεροπορικών και αυτοκινητιστικών εφαρμογών.
- Συνδυασμός της CST με άλλες μεθόδους παραμετροποίησης: Η χρήση διαφορε-
τικών μεθόδων παραμετροποίησης κατά τους πρώτους κύκλους βελτιστοποίησης
και στη συνέχεια η χρήση της CST παραμετροποίησης, θα μπορούσε να επιτα-
χύνει τη διαδικασία βελτιστοποίησης, διατηρώντας την ποιότητα της λύσης.

Συνολικά, η παρούσα εργασία ανέδειξε τη χρησιμότητα της CST παραμετροποίησης
στον αεροδυναμικό σχεδιασμό, παρέχοντας παράλληλα κατευθύνσεις για μελλοντική
έρευνα και ανάπτυξη.

Βιβλιογραφία

- [1] K. X. Γιαννάκογλου, "Μέθοδοι Βελτιστοποίησης στην Αεροδυναμική", *Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο*, 2006.
- [2] K. C. Giannakoglou, "Design of optimal aerodynamic shapes using stochastic optimization methods and computational intelligence", *Progress in Aerospace Sciences*, Vol. 38, No. 1, 2002.
- [3] D. Ashlock, "Evolutionary Computation for Modeling and Optimization", *Springer - Verlag*, 2006.
- [4] T. Back, D. B. Fogel and Z. Michalewicz, "Handbook of Evolutionary Computation", *Institute of Physics (IOP) Publishing*, 1997.
- [5] A. E. Eiben and J. E. Smith, "Introduction to Evolutionary Computing", *Springer*, 2015.
- [6] R. Fletcher and C. M. Reeves, "Function minimization by conjugate gradients", *The Computer Journal*, Vol. 7, No. 2, 1964.
- [7] D. I. Papadimitriou and K. C. Giannakoglou, "The continuous direct-adjoint approach for second order sensitivities in viscous aerodynamic inverse design problems", *Computers & Fluids*, Vol. 38, No. 8, 2009.
- [8] R. H. Byrd, H. F. Khalfan, and R. B. Schnabel, "Analysis of a Symmetric Rank-One Trust Region Method", *SIAM Journal on Optimization*, Vol. 6, No. 4, 1996.
- [9] T. W. Sederberg, S. R. Parry, "Free-Form Deformation of Solid Geometric Models", *ACM SIGGRAPH Computer Graphics*, Vol. 20, No. 4, 1986.
- [10] J. A. Samareh, "A Survey Of Shape Parametrization Techniques for High Fidelity Multidisciplinary Shape Optimization", *AIAA Journal*, Vol. 39, No. 5, 2001.
- [11] A. A. Montano and C. A. Coello Coello, "Evolutionary Algorithms Applied to MultiObjective Aerodynamic Shape Optimization", *Studies in Computational Intelligence*, 2011

- [12] B. M. Kulfan and J. E. Bussoletti, "Fundamental parametric geometry representations for aircraft component shapes", *11th AIAA/ISSMO Multidisciplinary Analysis and Optimization Conference*, 2006.
- [13] E. M. Papoutsis-Kiachagias and K. C. Giannakoglou, "Continuous adjoint methods for turbulent flows, applied to shape and topology optimization: Industrial applications", *Archives of Computational Methods in Engineering*, 2016.
- [14] K. C. Giannakoglou, E. M. Papoutsis-Kiachagias, I. S. Kavvadias and K. Th. Gkaragkounis, "Continuous Adjoint in Shape & Topology Optimization – Recent Developments & Applications", *NAFEMS Seminar on Adjoint CFD Methods in Industry and Research*, 2016.
- [15] X. Trompoukis, "Numerical solution of aerodynamic-aeroelastic problems on Graphics Processing Units (in Greek)", *PhD Thesis, National Technical University of Athens*, 2012
- [16] K. T. Tsiakas, "Development of Shape Parameterization Techniques, a Flow Solver and its Adjoint, for Optimization on GPUs. Turbomachinery and external aerodynamics applications", *PhD Thesis, National Technical University of Athens*, 2019
- [17] P. Spalart and S. Allmaras, "A one-equation turbulence model for aerodynamic flows", *30th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, 1992.
- [18] J. Nocedal and S. J. Wright, "Numerical optimization", *Springer*, 1999.
- [19] I. S. Kavvadias, E. M. Papoutsis-Kiachagias, and K. C. Giannakoglou, "On the proper treatment of grid sensitivities in continuous adjoint methods for shape optimization", *Journal of Computational Physics*, 2015.
- [20] M. G. H. Piotrowski and D. W. Zingg, "Smooth local correlation-based transition model for the Spalart-Allmaras turbulence model", *AIAA Journal*, 2020.