

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών
Τομέας Ρευστών
Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών
Μονάδα Παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής
& Βελτιστοποίησης

Πολυδιάστατο Ανάπτυγμα Πολυωνυμικού Χάους με
χρήση Πλήρων και Αραιών Πλεγμάτων Smolyak.
Εφαρμογές σε Αεροδυναμικά Σχήματα με Γεωμετρικές
Ατέλειες.

Διπλωματική Εργασία

Φαράκου Μαρία

Επιβλέπων: Κυριάκος Χ. Γιαννάκογλου , Καθηγητής ΕΜΠ

Αθήνα, Σεπτέμβριος 2017

Ευχαριστίες

Οφείλω, ειλικρινά, ένα μεγάλο ευχαριστώ στον καθηγητή μου κ. Κυριάκο Γιαννάκο-γλου και στην Βέρα Ασούτη, για την πολύτιμη βοήθειά τους, την οποία δεν αρνήθηκαν ποτέ. Και ένα ακόμα πιο μεγάλο ευχαριστώ για την πραγματικά ανεξάντλητη υπομονή τους.

Ευχαριστώ, επίσης, την οικογένεια μου για την στήριξή της καθ'όλη την διάρκεια των σπουδών μου, όπου χωρίς αυτήν δεν θα ήταν ποτέ και τίποτα δυνατόν.

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΡΕΥΣΤΩΝ
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΘΕΡΜΙΚΩΝ ΣΤΡΟΒΙΛΟΜΗΧΑΝΩΝ
ΜΟΝΑΔΑ ΠΑΡΑΛΛΗΛΗΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ ΡΕΥΣΤΟΔΥΝΑΜΙΚΗΣ
& ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ

**Πολυδιάστατο Ανάπτυγμα Πολυωνυμικού Χάους με χρήση Πλήρων
και Αραιών Πλεγμάτων Smolyak. Εφαρμογές σε Αεροδυναμικά
Σχήματα με Γεωμετρικές Ατέλειες**

Διπλωματική Εργασία
της

Φαράχου Μαρίας

Επιβλέπων: Κυριάκος Χ. Γιαννάκογλου, Καθηγητής ΕΜΠ

Αθήνα, Σεπτέμβριος 2017

Περίληψη

Στη διπλωματική εργασία αυτή διατυπώνεται, προγραμματίζεται και χρησιμοποιείται το πολυδιάστατο ανάπτυγμα πολυωνυμικού χάους (Polynomial Chaos Expansion, PCE) με χρήση πλήρων και, ειδικότερα, αραιών πλεγμάτων Smolyak. Το ανάπτυγμα πολυωνυμικού χάους είναι ένα εξαιρετικά χρήσιμο εργαλείο για τον υπολογισμό μέσης τιμής και τυπικής απόκλισης μιας συνάρτησης απόκρισης, όταν οι εισοδοί αυτής δεν διατηρούν σταθερή τιμή αλλά υπόκεινται σε στοχαστικές μεταβολές. Λόγω της αβεβαιότητας που υπεισέρχεται στο πρόβλημα, οι μεταβλητές εισόδου αυτές ονομάζονται αβέβαιες ή στοχαστικές μεταβλητές.

Όταν ο αριθμός των αβέβαιων μεταβλητών εισόδου του προβλήματος είναι σχετικά μικρός, πρακτικά έως και τρεις, τότε γίνεται χρήση των πλήρων πλεγμάτων για την υλοποίηση του πολυδιάστατου PCE. Στην περίπτωση όμως προβλήματος με διάνυσμα εισόδου άνω των τριών αβέβαιων συνιστωσών, η μέθοδος των πλήρων πλεγμάτων απαιτεί ένα μεγάλο αριθμό αξιολογήσεων της συνάρτησης του προβλήματος, κάτι το οποίο όταν πρόκειται για σύνθετους υπολογισμούς, καθιστά την μέθοδο απαγορευτική. Ακριβώς για αυτήν την κατηγορία προβλημάτων, αναπτύσσεται η μέθοδος αραιών πλεγμάτων γνωστή και ως μέθοδος Smolyak. Η μέθοδος αυτή είναι ιδανική για προβλήματα πολλών διαστάσεων, αφού μειώνει κατά μεγάλο βαθμό το υπολογιστικό κόστος. Η μέθοδος αναπτύσσεται και αρχικά εφαρμόζεται είτε ξεχωριστά είτε σε συνδυασμό με το πολυδιάστατο PCE σε απλά μαθηματικά προβλήματα.

Η θεωρία του πολυδιάστατου PCE, τόσο χρησιμοποιώντας πλήρη όσο και αραιά πλέγματα Smolyak, εφαρμόζεται σε προβλήματα ροής γύρω από αεροτομές. Η αβεβαιότητα στα προβλήματα αυτά, αφορά τη γεωμετρία του περιγράμματος της αεροτομής. Η παραμετροποίηση των περιγραμμάτων των αεροτομών γίνεται με χρήση πολυωνύμων Bezier-Bernstein, δίνοντας ιδιαίτερη προσοχή στην παραμετροποίηση των ακμών προσβολής και εκφυγής, συνεπώς η στοχαστικότητα υπεισέρχεται στο πρόβλημα μέσω των σημείων ελέγχου Bezier. Σκοπός είναι η προσομοίωση της στοχαστικότητας της ροής λόγω της στοχαστικής αλλαγής της γεωμετρίας του σχήματος.

NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY OF ATHENS
SCHOOL OF MECHANICAL ENGINEERING
FLUIDS DEPARTMENT
LABORATORY OF THERMAL TURBOMACHINES
PARALLEL CFD & OPTIMIZATION UNIT

Multi-Dimensional Polynomial Chaos Expansion using Full and Smolyak Sparse Grids. Applications in Aerodynamic Shapes with Geometrical Imperfections

Diploma Thesis
by

Maria Farakos

Supervisor: Kyriakos C. Giannakoglou, Professor NTUA

Athens, September 2017

Abstract

In this diploma thesis, the multidimensional Polynomial Chaos Expansion (PCE) theory is developed, programmed and validated, using full and Smolyak sparse grids. Polynomial Chaos Expansion is an extremely useful tool for calculating the mean value and standard deviation of a function, when its inputs do not have constant values but vary stochastically. Because of the uncertainty that comes into the problem, these input variables are called uncertain or stochastic variables.

When the number of uncertain input variables of the problem is relatively small, practically up to three, then the full grids are used to implement the multidimensional PCE. However, problems with more than three uncertain inputs, the full grid method requires a large number of function evaluations, which in the case of computationally expensive computations makes the method prohibitive. Just for this type of problems, the sparse grid method, also known as the Smolyak method, has been developed. This method is an ideal tool for multi-dimensional problems, since it greatly reduces the computational cost. The method is developed and initially applied either individually or in combination with the multidimensional PCE to simple mathematical problems.

Then the multidimensional PCE theory, using both full and Smolyak sparse grids, is applied to flow problems over airfoils. The uncertainty in these problems concerns the airfoil contour which is described using Bezier-Bernstein polynomials, paying particular attention to the parameterization of the leading and the trailing edges;

therefore, the uncertainty enters the problem through the Bezier control points. The aim is to simulate the flow stochasticity due to the stochastically changing shape.

Περιεχόμενα

Περιεχόμενα

1	Εισαγωγή	1
1.1	Κατασκευαστικές / Γεωμετρικές Ατέλειες Σχημάτων	1
1.2	Γενική Ιδέα Μελέτης	2
1.2.1	Ανάπτυγμα Πολυωνυμικού Χάους	2
1.2.2	Μέθοδος Αραιών Πλεγμάτων Smolyak	3
1.3	Δομή της Διπλωματικής Εργασίας	4
2	Παραμετροποίηση Περιγράμματος Αεροτομών και Αξιολόγηση της Παραμετροποίησης	7
2.1	Παραμετροποίηση Περιγράμματος Αεροτομών	7
2.1.1	Παραμετροποίηση Περιγράμματος Πτερύγωσης Στροβίλου VKI LS89	12
2.1.2	Παραμετροποίηση Περιγράμματος Πτερύγωσης Συμπιεστή SC10	15
2.2	Αξιολόγηση των Παραμετροποιήσεων	18
2.2.1	Αξιολόγηση της Παραμετροποίησης του Περιγράμματος της Πτερύγωσης Στροβίλου, VKI LS89	18
2.2.2	Αξιολόγηση της Παραμετροποίησης του Περιγράμματος της Πτερύγωσης Συμπιεστή, SC10	21
2.2.3	Συμπεράσματα	23
3	Ανάπτυγμα Πολυδιάστατου Πολυωνυμικού Χάους (PCE) και Εφαρμογή στην Αεροδυναμική	25

3.1	Πολυδιάστατο Ανάπτυγμα Πολυωνυμικού Χάος	25
3.1.1	PCE και Στατιστικές Ροπές	25
3.1.2	Ορθογώνια Πολυώνυμα	27
3.1.3	Συντελεστές PCE και Πολυδιάστατη Ολοκλήρωση	33
3.2	Εφαρμογές του PCE στην Αεροδυναμική Βελτιστοποίηση	36
3.2.1	Εφαρμογή του PCE στο Πρόβλημα Πτερύγωσης Στροβίλου VKI LS89	37
3.2.2	Εφαρμογή του PCE σε Αεροδυναμικό Πρόβλημα Πτερύγωσης Συμπιεστή SC10	39
4	Μέθοδος Αραιών Πλεγμάτων Smolyak και Εφαρμογές σε Πο- λυδιάστατα Προβλήματα Αεροδυναμικής Βελτιστοποίησης	43
4.1	Αραιά Πλέγματα Smolyak	44
4.1.1	Παραγωγή Αραιών Πλεγμάτων Smolyak	44
4.2	Αριθμητικές Εφαρμογές Θεωρίας Αραιών Πλεγμάτων Smolyak σε Συ- ναρτήσεις Πολλών Μεταβλητών	52
4.2.1	Υπολογισμός Ολοκληρώματος Συνάρτησης - Σύγκριση Αναλυ- τικής με Αριθμητική Λύση	52
4.2.2	Υπολογισμός Μέσης Τιμής και Τυπικής Απόκλισης Συνάρτησης με Στοχαστικές Εισόδους	58
4.3	Υπολογισμός Μέσης Τιμής και Τυπικής Απόκλισης Εμβαδού Στοχα- στικού Περιγράμματος Αεροτομής	63
4.4	Εφαρμογή PCE και Αραιών Πλεγμάτων Smolyak σε Πολυδιάστατα Προβλήματα Αεροδυναμικής Βελτιστοποίησης	70
4.4.1	Εφαρμογή στην Πτερύγωση Στροβίλου VKI LS89	70
4.4.2	Εφαρμογή στην Πτερύγωση Συμπιεστή SC10	71
4.4.3	Σχολιασμός των Αποτελεσμάτων και της Μεθόδου Αραιών Πλεγ- μάτων Smolyak	74

5 Ανακεφαλαίωση-Συμπεράσματα και Προτάσεις για Μελλοντικές Μελέτες	79
5.1 Ανακεφαλαίωση-Συμπεράσματα	79
5.2 Προτάσεις για Μελλοντικές Μελέτες	81
A' Λογισμικό Παραμετροποίησης Αεροτομών	83
A'.1 Αρχεία Εισόδου	83
A'.2 Αρχεία Εξόδου	86
B' Ορθογώνια Πολυώνυμα	91
B'.1 Ορθογώνια Πολυώνυμα Hermite	91
B'.2 Ορθογώνια Πολυώνυμα Legendre	98
Βιβλιογραφία	103

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

1.1 Κατασκευαστικές / Γεωμετρικές Ατέλειες Σχημάτων

Κατά τη βιομηχανική κατασκευή οποιουδήποτε εξαρτήματος, είναι σχεδόν βέβαιο ότι, ατέλειες είναι αναπόφευκτες. Η γεωμετρία του κάθε τελικού προϊόντος, διαφέρει από την αρχική σχεδίαση αυτού, είτε σε μεγαλύτερο είτε σε μικρότερο βαθμό. Συνέπεια αυτού, είναι η λειτουργία η οποία επιτελεί το κάθε εξάρτημα να επιφέρει επιδόσεις που να διαφέρουν από τα αναμενόμενα, από αυτά δηλαδή που η αρχική σχεδίαση του προϊόντος είχε προβλεφθεί να επιφέρει.

Στη διπλωματική αυτή εργασία, μελετάται ακριβώς αυτή η αβεβαιότητα των αποτελεσμάτων όταν υπεισέρχεται αβεβαιότητα στη γεωμετρία του εξαρτήματος. Οι θεωρίες που αναπτύχθηκαν εφαρμόστηκαν σε αεροδυναμικά προβλήματα. Συγκεκριμένα, μελετήθηκε η στοχαστικότητα των αποτελεσμάτων ροής γύρω από αεροτομή, όταν το περίγραμμα της αεροτομής δεν έχει σταθερό σχήμα αλλά μεταβαλλόμενο. Παρόλα αυτά, πρέπει να γίνει σαφές ότι το σύνολο της θεωρίας που παρουσιάζεται στη διπλωματική εργασία, μπορεί να εφαρμοστεί σε άλλα μη αεροδυναμικά προβλήματα.

Στις επόμενες παραγράφους του κεφαλαίου δίνεται η βασική ιδέα πάνω στην οποία στηρίζεται η επίλυση του προβλήματος όπως και στοιχεία θεωρίας για οτιδήποτε άλλο χρησιμοποιείται στην εργασία αυτή.

1.2 Γενική Ιδέα Μελέτης

Όπως ήδη αναφέρθηκε, το πρόβλημα στο οποίο εστιάζει η διπλωματική εργασία, είναι η στοχαστικότητα των αποτελεσμάτων της ροής γύρω από αεροτομή, όταν στο περίγραμμα αυτής υπεισέρχεται αβεβαιότητα ως προς τη γεωμετρία του. Τα περιγράμματα των αεροτομών της εργασίας παραμετροποιούνται μέσω πολυωνύμων Bezier-Bernstein, συνεπώς η αβεβαιότητα εισάγεται στο πρόβλημα μέσω των σημείων ελέγχου αυτών. Υποθέτοντας ότι οι θέσεις ορισμένων σημείων ελέγχου δεν είναι σταθερές αλλά ακολουθούν κανονική κατανομή με κάποια μέση τιμή και τυπική απόκλιση, ζητείται η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση ορισμένων αεροδυναμικών μεγεθών. Οι μεταβλητές του προβλήματος οι οποίες υπόκεινται σε στοχαστικότητα ονομάζονται στοχαστικές ή αβέβαιες μεταβλητές.

Ένα εξαιρετικά χρήσιμο εργαλείο για την αντιμετώπιση τέτοιων προβλημάτων είναι η θεωρία του αναπτύγματος πολυωνυμικού χάους (Polynomial Chaos Expansion, PCE), η οποία, για προβλήματα πολλών διαστάσεων, μετονομάζεται σε πολυδιάστατο ανάπτυγμα πολυωνυμικού χάους. Συνοπτικά, η θεωρία του PCE προτείνει τον υπολογισμό συντελεστών οι οποίοι δίνουν τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση της απόκρισης η οποία ζητείται. Για τον υπολογισμό αυτών των συντελεστών είναι απαραίτητες οι υπολογισμοί της τιμής της αντικειμενικής συνάρτησης του προβλήματος σε ένα σύνολο σημείων, το οποίο αποτελεί το πλήρες πλέγμα. Όταν όμως πρόκειται για προβλήματα πολλών διαστάσεων, πρακτικά άνω των τριών διαστάσεων, το σύνολο των σημείων αυτών αυξάνεται κατά πολύ και καθιστά την μέθοδο πλήρων πλεγμάτων ιδιαίτερα κοστοβόρα. Για τέτοιου είδους προβλήματα, λοιπόν, προτάθηκε η μέθοδος αραιών πλεγμάτων, γνωστή και ως μέθοδος Smolyak.

Πληροφορίες για τις θεωρίες του PCE και των αραιών πλεγμάτων Smolyak δίνονται στην συνέχεια.

1.2.1 Ανάπτυγμα Πολυωνυμικού Χάους

Η μέθοδος αναπτύγματος πολυωνυμικού χάους (Polynomial Chaos Expansion (PCE)), αναπτύχθηκε το 1983 από τον Norbert Wiener [1] και μπορούσε αρχικά να εφαρμοστεί μόνο σε προβλήματα των οποίων οι μεταβλητές κατανέμονται κανονικά, με χρήση των ορθογώνιων πολυωνύμων Hermite. Το 2002, όμως, οι Xiu και Karniadakis [2], εκμεταλλευόμενοι την προσπάθεια των Askey και Wilson [3] πάνω στη γενίκευση των ορθογώνιων πολυωνύμων, αναπτύσσουν την θεωρία του γενικευμένου πολυωνυμικού χάους (generalized Polynomial Chaos, gPC). Πλέον, η μέθοδος του PCE μπορεί να εφαρμοστεί σε προβλήματα στοχαστικών μεταβλητών οποιασδήποτε κατανομής και όχι μόνο της κανονικής.

Εν γένει, υπάρχουν δύο τρόποι υλοποίησης του PCE, οι επεμβατικές και οι μη-επεμβατικές

μέθοδοι [5] [4].

Στις επεμβατικές μεθόδους, το πολυωνυμικό ανάπτυγμα εφαρμόζεται στις στοχαστικές εισόδους και εξόδους, όπως και στο κώδικα αριθμητικής επίλυσης. Έτσι, διαμορφώνονται διαφορετικά οι εξισώσεις περιγραφής του προβλήματος και εν τέλει της αντικειμενικής συνάρτησης. Οι επεμβατικές μέθοδοι μειώνουν κατά πολύ το υπολογιστικό κόστος. Όμως, για κάθε νέο πρόβλημα χρειάζεται εκ νέου προγραμματισμός του κώδικα.

Αντιθέτως, στις μη-επεμβατικές μεθόδους, η αντικειμενική συνάρτηση αντιμετωπίζεται ως μαύρο κουτί (black box), όπου απλά επιλέγονται οι κατάλληλοι κόμβοι υπολογισμού αυτής. Ο τρόπος επιλογής των κόμβων αυτών είναι μεγάλης σημασίας, αφού οι αξιολογήσεις είναι επιθυμητό να είναι οι λιγότερες δυνατές. Το μειονέκτημα των μεθόδων αυτή της κατηγορίας είναι το υπολογιστικό τους κόστος το οποίο είναι αυξημένο συγκριτικά με την περίπτωση των επεμβατικών μεθόδων.

Στη διπλωματική εργασία αυτή, γίνεται χρήση μόνο μη-επεμβατικών μεθόδων. Οι μέθοδοι αυτές, σε συνδυασμό με τη μέθοδο Gauss Quadrature πλήρους πλέγματος εφαρμόζονται σε προβλήματα αεροδυναμικής δύο διαστάσεων. Για περισσότερες διαστάσεις ελοχεύει πάντα η ονομαζόμενη 'κατάρα της μεγάλης διάστασης' (curse of dimensionality) και η μέθοδος μπορεί να γίνει πολύ κοστοβόρα, πολύ γρήγορα, αφού οι απαιτούμενες αξιολογήσεις αυξάνονται εκθετικά συναρτήσει της διάστασης. Έτσι, μελετήθηκε η μέθοδος των αραιών πλεγμάτων Smolyak, για την οικονομική επίλυση προβλημάτων πολλών διαστάσεων.

1.2.2 Μέθοδος Αραιών Πλεγμάτων Smolyak

Η βασική ιδέα της μεθόδου αραιών πλεγμάτων προέρχεται από τον αλγόριθμο του Smolyak (Smolyak 1963 [6]), στον οποίο μεγάλο κομμάτι έρευνας έχει αφιερωθεί (Novak and Ritter 1996 [?], 1999 [?]). Ο αλγόριθμος του Smolyak χρησιμοποιεί ένα σταθμισμένο γραμμικό συνδυασμό τανυστικών γινομένων, ώστε να μειωθεί το μέγεθος του πλέγματος ολοκλήρωσης ή παρεμβολής. Η μέθοδος αραιών πλεγμάτων έχει επιτυχώς χρησιμοποιηθεί στην αριθμητική ολοκλήρωση (Gerstner and Griebel 1998 [10]), παρεμβολή και προσέγγιση (Barthelmann 2000 [11]) και έχει αποδειχθεί ως ένα ιδιαίτερα αποτελεσματικό σχήμα διακριτοποίησης σε μεγάλων διαστάσεων προβλήματα.

Στη διπλωματική αυτή εργασία, ο αλγόριθμος Smolyak [12] χρησιμοποιείται για την αντιμετώπιση της κατάρας της μεγάλης διάστασης κατά την ολοκλήρωση με Gauss Quadrature στην υλοποίηση του PCE. Η ολοκλήρωση Gauss Quadrature εν γένει, απαιτεί τις αξιολογήσεις της αντικειμενικής συνάρτησης σε, έστω, N κόμβους, όπου το σύνολο των κόμβων αυτών αποτελεί το πλήρες πλέγμα. Ο Smolyak προτείνει έναν πολύ μικρότερο αριθμό αξιολογήσεων της αντικειμενικής συνάρτησης αποκλείοντας σημεία του πλήρους πλέγματος και προσθέτοντας νέα.

Καθώς η μέθοδος αραιών πλεγμάτων Smolyak αναπτύχθηκε για την επίλυση πολυδιάστατων προβλημάτων, δεν διευκολύνει την επίλυση προβλημάτων λίγων διαστάσεων. Αντιθέτως σε τέτοιες περιπτώσεις τα πλέγματα Smolyak απαιτούν περισσότερες αξιολογήσεις από το πλήρες πλέγμα. Ειδικότερα, για προβλήματα με διάνυση εισόδου έως και τριών διαστάσεων προτιμάται η επίλυση στο πλήρες πλέγμα αφού είναι οικονομικότερο. Από τέσσερις, όμως, διαστάσεις και αυξανόμενων αυτών, η διαφορά των απαιτούμενων αξιολογήσεων των δύο μεθόδων γίνεται ολοένα και μεγαλύτερη.

1.3 Δομή της Διπλωματικής Εργασίας

Η δομή της διπλωματικής αυτής εργασίας έχει ως εξής :

- **Κεφάλαιο 2ο**

Παρουσιάζεται η παραμετροποίηση των περιγραμμάτων αεροτομών και εφαρμόζεται σε περίγραμμα αεροτομής πτερύγωσης στροβίλου και πτερύγωσης συμπιεστή, τα οποία και μελετούνται στην υπόλοιπη εργασία. Οι παραμετροποιήσεις και των δύο αεροτομών γίνονται με χρήση πολυωνύμων Bezier-Bernstein. Στη συνέχεια του κεφαλαίου αξιολογείται το κατά πόσο οι αξιολογήσεις είναι αποδεκτές και το αν μπορούν να χρησιμοποιηθούν στο υπόλοιπο της εργασίας αντί των πρωτότυπων περιγραμμάτων.

- **Κεφάλαιο 3ο**

Αναπτύσσεται η θεωρία του πολυδιάστατου πολυωνυμικού χάους και ορίζονται το πολυδιάστατα ορθογώνια πολυώνυμα, δίνοντας ιδιαίτερη έμφαση στην οικογένεια πιθανοτικών πολυωνύμων Hermite τα οποία και χρησιμοποιούνται όταν οι μεταβλητές κατανέμονται κανονικά. Εφαρμόζεται η παραπάνω θεωρία σε πολυδιάστατα προβλήματα αεροδυναμικής στις πτερυγώσεις στροβίλου και συμπιεστή οι οποίες παραμετροποιήθηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο.

- **Κεφάλαιο 4ο**

Στο κεφάλαιο αυτό γίνεται η παρουσίαση της μεθόδου των αραιών πλεγμάτων Smolyak. Δίνεται όλο το μαθηματικό υπόβαθρο για την παραγωγή των πλεγμάτων, δηλαδή για τον τρόπο με τον οποίο βρίσκεται ο αριθμός και η ταυτότητα των απαιτούμενων κόμβων, όπως και τα αντίστοιχα βάρη αυτών. Στη συνέχεια, δίνονται απλές μαθηματικές εφαρμογές της θεωρίας σε συναρτήσεις πολλών μεταβλητών για την καλύτερη κατανόηση αυτής αλλά και για την πιστοποίησή της. Το κεφάλαιο κλείνει με την εφαρμογή της θεωρίας σε πολυδιάστατα προβλήματα αεροδυναμικής.

- **Κεφάλαιο 5ο**

Στο τελευταίο κεφάλαιο της εργασίας, παρουσιάζονται τα συμπεράσματα από τη

χρήση της μεθόδου, με τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματά της. Προτείνονται, επίσης, τρόποι ούτως ώστε να βελτιωθεί ή και να επεκταθεί η συγκεκριμένη μέθοδος.

- **Παραρτήματα**

Στο παράρτημα Α, δίνονται όλες οι απαραίτητες πληροφορίες για τη χρήση του λογισμικού παραμετροποίησης των αεροτομών που χρησιμοποιήθηκε.

Το παράρτημα Β, είναι αφιερωμένο στο ορθογώνια πολυώνυμα Hermite και Legendre.

Κεφάλαιο 2

Παραμετροποίηση Περιγράμματος Αεροτομών και Αξιολόγηση της Παραμετροποίησης

2.1 Παραμετροποίηση Περιγράμματος Αεροτομών

Η παραμετροποίηση του περιγράμματος των αεροτομών πραγματοποιείται με χρήση πολυωνύμων Bezier-Bernstein [13]. Τα πολυώνυμα αυτά παράγουν την καμπύλη που θα προσεγγίσει το περίγραμμα της αεροτομής χρησιμοποιώντας έναν περιορισμένο αριθμό σημείων ελέγχου (control points).

Τα σημεία αυτά είτε τα αντλεί κανείς έτοιμα από προηγούμενες μελέτες πάνω στις αεροτομές με τις οποίες ασχολείται είτε τα τοποθετεί όπως αυτός νομίζει για την καλύτερη προσέγγιση της αεροτομής. Στην παραπάνω διαδικασία, προσοχή δίνεται στο πώς θα παραμετροποιηθεί η αεροτομή σε δύο συγκεκριμένες θέσεις, στην ακμή προσβολής (L.E., Leading Edge) και στην ακμή εκφυγής (T.E., Trailing Edge).

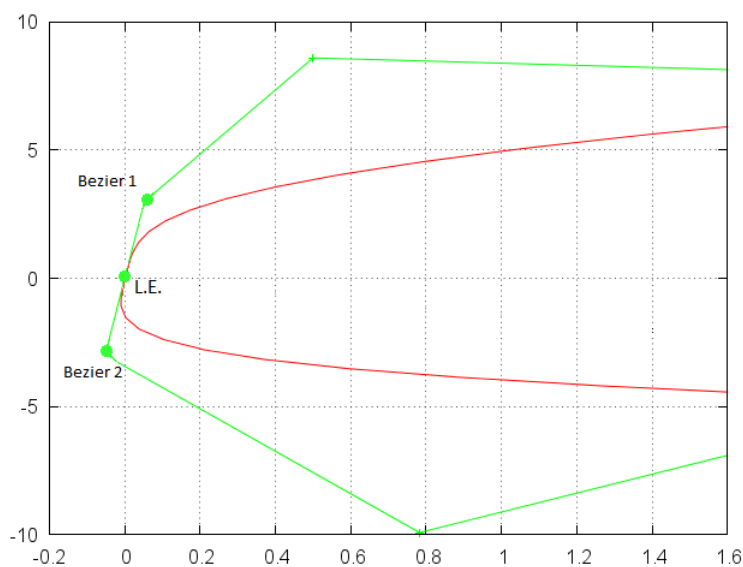
Οι μορφές της ακμής προσβολής και της ακμής εκφυγής, επηρεάζουν σημαντικά τον τρόπο με τον οποίο η ροή συναντά και αποχωρίζεται την αεροτομή αντίστοιχα. Ο τρόπος αυτός, και στις δύο περιπτώσεις, πρέπει να είναι ο 'ομαλότερος' δυνατός.

Για αυτόν ακριβώς τον λόγο, κυρίως στην ακμή προσβολής, δεν είναι επιθυμητή η δημιουργία οξείας γωνίας. Η μορφή της προκύπτουσας καμπύλης εξαρτάται από τα

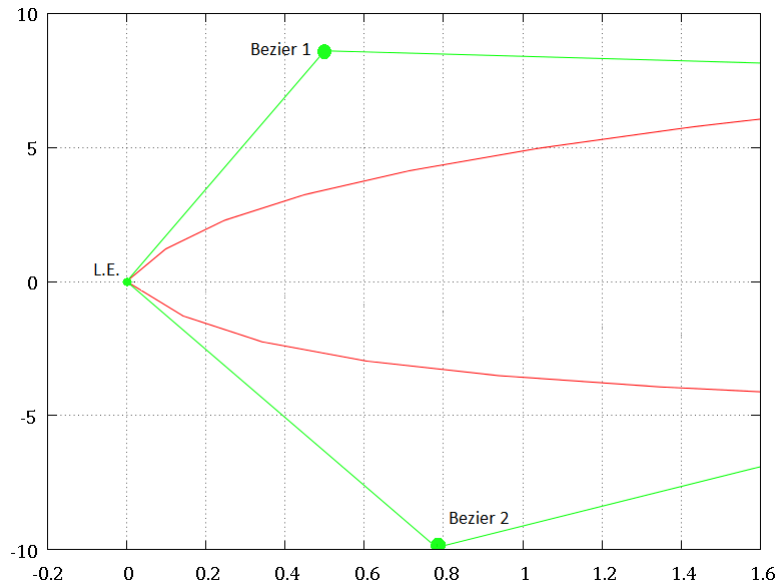
σημεία ελέγχου, συνεπώς αυτά πρέπει να τοποθετούνται με τέτοιο τρόπο ώστε το αποτέλεσμα να είναι το επιθυμητό.

Στο σχήμα 2.1 φαίνεται η ζητούμενη μορφή του περιγράμματος αεροτομής στην ακμή προσβολής. Οι καμπύλες προσέγγισης τόσο της πλευράς υποπίεσης (suction side) όσο και της πλευράς υπερπίεσης (pressure side) ξεκινούν από την ακμή προσβολής και τερματίζουν στην ακμή εκφυγής. Το πρώτο σημείο ελέγχου δηλαδή των καμπυλών και στις δύο περιπτώσεις, είναι η ακμή προσβολής και το τελευταίο η ακμή εκφυγής.

Για την πλευρά υποπίεσης το δεύτερο σημείο ελέγχου συμβολίζεται με 'Bezier 1', σχ. 2.1. Η θέση αυτού του σημείου καθορίζει την κλίση της καμπύλης προσέγγισης της πλευράς υποπίεσης στην ακμή προσβολής. Αντίστοιχα, το σημείο 'Bezier 2', καθορίζει την κλίση της πλευράς υπερπίεσης στο ίδιο σημείο. Για να επιτευχθεί η μορφή περιγράμματος που περιγράφηκε παραπάνω, οι κλίσεις αυτές πρέπει να ταυτίζονται, να υπάρχει δηλαδή συνέχεια πρώτης παραγώγου. Αυτό επιβάλλει στα σημεία 'Bezier 1' και 'Bezier 2' να είναι συνευθειακά. Αν δεν ισχύει η συνθήκη αυτή το περίγραμμα στην ακμή προσβολής θα έχει τη μορφή του σχήματος 2.2, το οποίο δεν είναι το επιθυμητό, αφού δημιουργείται οξεία γωνία στην ακμή προσβολής, γεωμετρία που ίσως επιφέρει προβλήματα στη ροή.



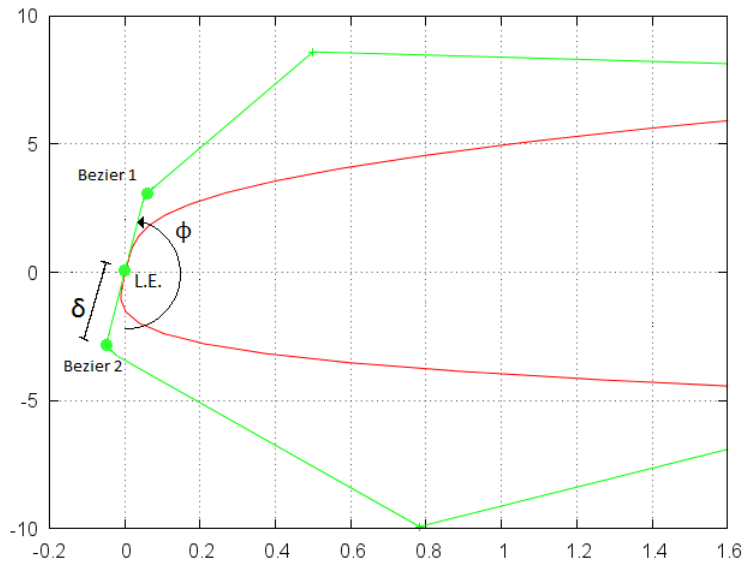
Σχήμα 2.1: Περίγραμμα αεροτομής στην ακμή προσβολής. Για να υπάρχει συνέχεια πρώτης παραγώγου στο LE πρέπει το δεύτερο σημείο ελέγχου Bezier στην πλευρά υποπίεσης (Bezier 1) να είναι συνευθειακό με το δεύτερο της πλευράς υπερπίεσης (Bezier 2). Τα σημεία αυτά συμβολίζονται με κύκλους στο σχήμα.



Σχήμα 2.2: Περίγραμμα αεροτομής στην ακμή προσβολής. Περίπτωση ασυνέχειας πρώτης παραγώγου. Τα σημεία ελέγχου Bezier 1 και Bezier 2 δεν είναι συνευθειακά. Τα σημεία αυτά συμβολίζονται με κύκλους στο σχήμα.

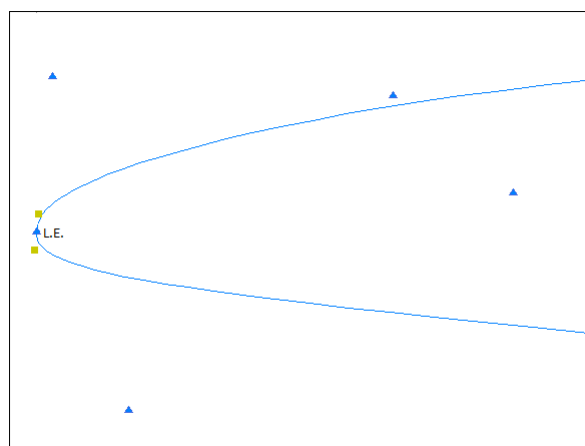
Γίνεται, λοιπόν, αντιληπτό ότι για να παραμετροποιηθεί το περίγραμμα της αεροτομής στην ακμή προσβολής (ή/και στην ακμή εκφυγής) χρειάζονται σημεία ελέγχου Bezier που ικανοποιούν μεταξύ άλλων την παραπάνω συνθήκη για τη συνέχεια της πρώτης παραγώγου. Τα σημεία αυτά παράγει λογισμικό με τη βοήθεια δύο παραμέτρων, της παραμέτρου απόστασης, δ και της παραμέτρου γωνίας, φ , η σημασία των οποίων αμέσως επεξηγείται.

Η παράμετρος δ δηλώνει την απόσταση των σημείων ελέγχου Bezier που παράγει το λογισμικό από την ακμή προσβολής (ή αντίστοιχα εκφυγής). Η παράμετρος φ είναι η γωνία μεταξύ της ευθείας στην οποία κείνται τα σημεία και του κατακόρυφου άξονα. Ο χρήστης οφείλει να εισάγει τιμές για τις παραμέτρους αυτές και το λογισμικό βάσει αυτών των τιμών τοποθετεί τα σημεία. Σχηματικά οι παράμετροι αυτές φαίνονται στο σχήμα 2.3 . Αναλυτικότερες πληροφορίες για τη χρήση του λογισμικού δίνονται στο Παράρτημα .



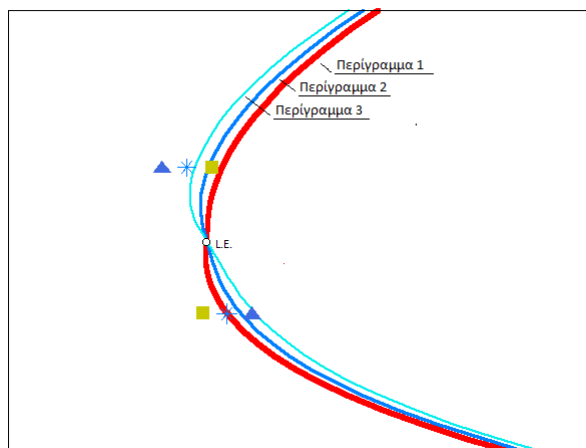
Σχήμα 2.3: Σχηματική απεικόνιση των παραμέτρων δ και ϕ . Με *Bezier 1* συμβολίζεται το σημείο ελέγχου *Bezier* που παράγεται από το λογισμικό στην πλευρά υποπίεσης ενώ με *Bezier 2* αυτό που παράγεται στην πλευρά υπερπίεσης. Τις τιμές των παραμέτρων δ και ϕ τις έχει ορίσει ο χρήστης και βάσει αυτών τοποθετούνται τα σημεία.

Παράγονται λοιπόν με αυτόν τον τρόπο τα σωστά σημεία ελέγχου *Bezier* στην ακμή προσβολής (ή/και εκφυγής) τα οποία σε συνδυασμό με όλα τα υπόλοιπα σημεία ελέγχου που ο ίδιος ο χρήστης έχει εισάγει στο λογισμικό, δίνουν την τελική μορφή του παραμετροποιημένου περιγράμματος της αεροτομής. Στο σχήμα 2.4 φαίνεται η μορφή του περιγράμματος στην ακμή προσβολής και στα σχήματα 2.5 και 2.6 πως η αλλαγή των παραμέτρων το επηρεάζει.

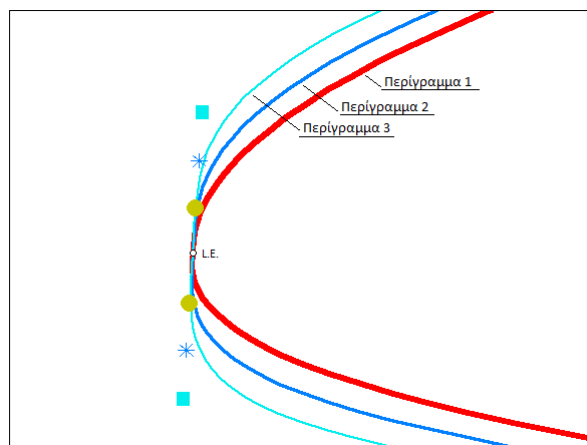


Σχήμα 2.4: Περιγράμμα αεροτομής στην ακμή προσβολής. Τα τρίγωνα συμβολίζουν τα σημεία ελέγχου *Bezier* που εισάγονται από τον χρήστη ενώ τα τετραγωνικά συμβολίζουν τα σημεία που παράγει το λογισμικό εφόσον έχουν δοθεί τιμές στις παραμέτρους δ και ϕ .

Κρατώντας σταθερή την απόσταση και αλλάζοντας τη γωνία, η μορφή του περιγράμματος αλλάζει όπως φαίνεται στο σχήμα 2.5. Ενώ για σταθερή γωνία και μεταβλητή απόσταση, η μορφή μεταβάλλεται όπως δείχνει το σχήμα 2.6 .



Σχήμα 2.5: Περίγραμμα αεροτομής στην ακμή προσβολής για διάφορες τιμές της παραμέτρου φ . Τα σημεία που συμβολίζονται με κύκλο ελέγχουν το Περίγραμμα 1, αυτά με τον αστερίσκο, το Περίγραμμα 2 και τα τριγωνικά το Περίγραμμα 3



Σχήμα 2.6: Περίγραμμα αεροτομής στην ακμή προσβολής για διάφορες τιμές της παραμέτρου δ . Με κύκλο τα σημεία που ελέγχουν το Περίγραμμα 1, με αστερίσκο αυτά που ελέγχουν το Περίγραμμα 2 και με τετράγωνο για το Περίγραμμα 3

Η διπλωματική αυτή εργασία ασχολείται με δύο πτερυγώσεις, μία στροβίλου, την VKI LS89 [14] και μία συμπιεστή, την SC10 [15]. Παρακάτω παρουσιάζεται η παραμετροποίηση των περιγραμμάτων των αεροτομών αυτών.

2.1.1 Παραμετροποίηση Περιγράμματος Πτερύγωσης Στροβίλου VKI LS89

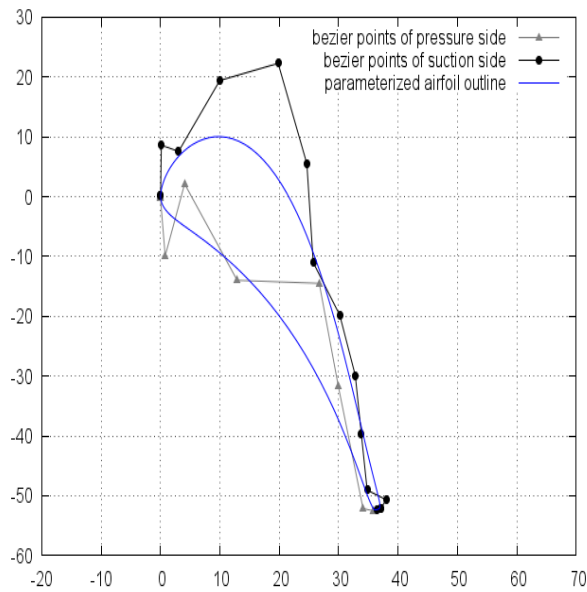
Η VKI LS89, για συντομία συχνά αναφέρεται LS89, παραμετροποιήθηκε με 15 σημεία ελέγχου Bezier στην πλευρά υποπίεσης και 10 στην πλευρά υπερπίεσης. Για την παραμετροποίηση του περιγράμματος της αεροτομής στις ακμές προσβολής και εκφυγής, όπως ήδη αναφέρθηκε, χρησιμοποιούνται οι παράμετροι δ και φ . Για την ακμή προσβολής στις παραμέτρους δίνονται οι τιμές $\delta_{LE} = 0.31$ και $\phi_{LE} = -1^\circ$. Για την ακμή εκφυγής είναι $\delta_{TE} = 0.7$ και $\phi_{TE} = 107^\circ$. Βάσει αυτών των παραμέτρων παράγονται τα κατάλληλα σημεία ελέγχου Bezier για την παραμετροποίηση των ακμών. Για κάθε μία εκ των δύο ακμών παράγονται δύο σημεία, ένα στην πλευρά υποπίεσης και ένα στην πλευρά υπερπίεσης.

Το σύνολο των σημείων ελέγχου Bezier που χρησιμοποιούνται για την παραμετροποίηση του περιγράμματος της LS89, παρουσιάζονται στον πίνακα 2.1. Τα πρώτα και τα τελευταία σημεία του πίνακα δηλώνουν τις ακμές προσβολής και εκφυγής αντίστοιχα. Τα δεύτερα και τα προτελευταία σημεία, είναι τα σημεία που παράγει το λογισμικό βάσει των παραμέτρων δ και φ στις πλευρές υποπίεσης και υπερπίεσης. Τα ενδιάμεσα σημεία του πίνακα αποτελούν τα υπόλοιπα σημεία ελέγχου Bezier που εισάγει ο χρήστης.

Πλευρά Υποπίεσης		Πλευρά Υπερπίεσης	
x	y	x	y
0	0	0	0
0.005410	0.3099	-0.005410	-0.3099
0.1336	8.6	0.7826	-9.92
3.03	7.55	4.05	2.12
9.98	19.4	12.9	-13.99
19.81	22.27	26.73	-14.5
24.64	5.5	29.94	-31.68
25.72	-11.03	34.11	-52.14
30.19	-19.84	35.782	-52.512
32.8	-29.88	36.461	-52.305
33.81	-39.65		
34.8	-49.07		
38	-50.68		
37.139	-52.097		
36.461	-52.305		

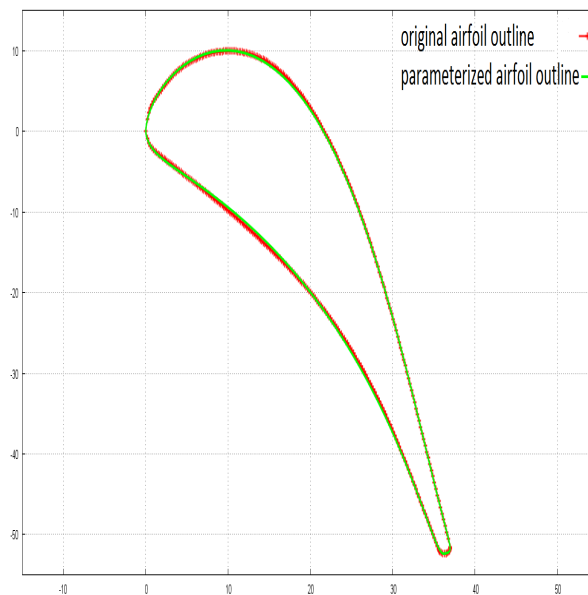
Πίνακας 2.1: Σημεία ελέγχου Bezier για την παραμετροποίησης του περιγράμματος της αεροτομής πτερύγωσης στροβίλου VKI LS89.

Συνολικά τα σημεία ελέγχου Bezier και το παραμετροποιημένο περίγραμμα της αεροτομής φαίνονται στο σχήμα 2.7.



Σχήμα 2.7: Πτερύγωση στροβίλου. Σημεία ελέγχου Bezier και μορφή παραμετροποιημένου περιγράμματος αεροτομής VKI LS89.

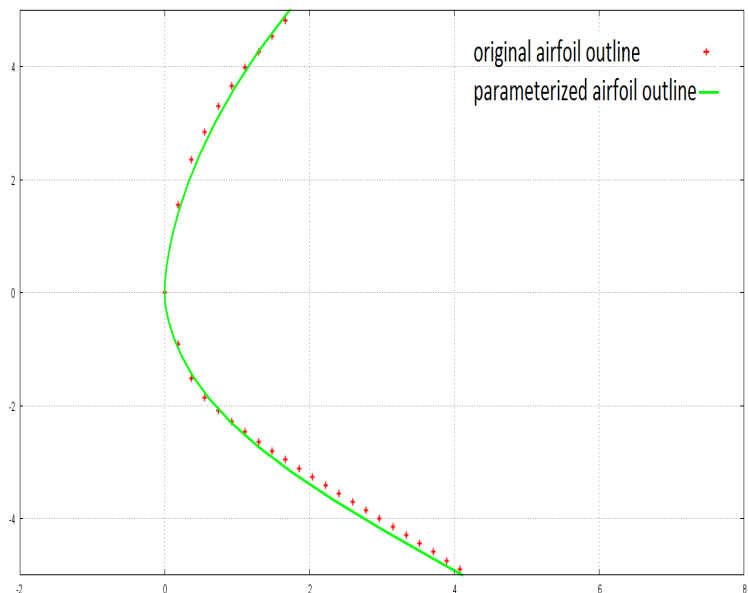
Τα σημεία του πρωτότυπου (original) περιγράμματος της αεροτομής, αντλούνται από την βιβλιογραφική πηγή [14]. Το παραμετροποιημένο περίγραμμα, σε σχέση με το αρχικό, απεικονίζονται στο σχήμα 2.8.



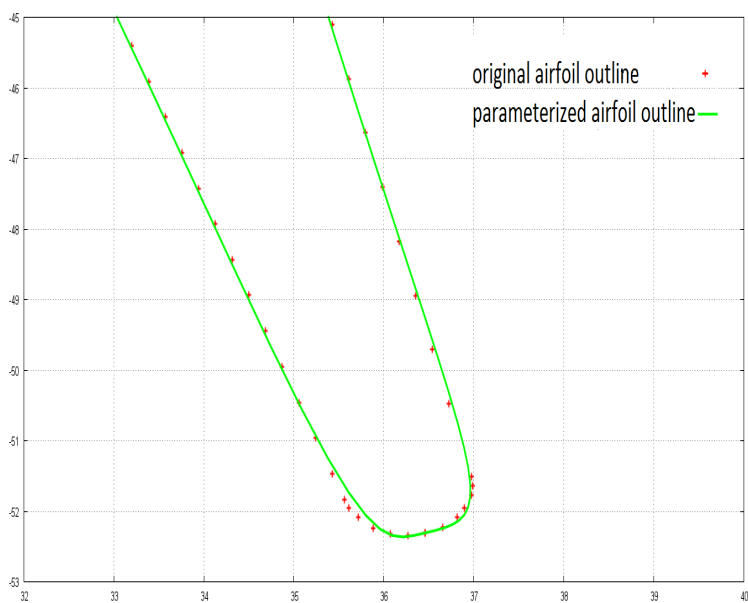
Σχήμα 2.8: Περίγραμμα αεροτομής πτερύγωσης στροβίλου VKI LS89. Σύγκριση πρωτότυπου περιγράμματος με παραμετροποιημένο.

Η μορφή της αεροτομής στην ακμή προσβολής και στην ακμή εκφυγής φαίνεται στα

σχήματα 2.9 και 2.10.



Σχήμα 2.9: Περιγράμμα ακμής προσβολής αεροτομής VKI LS89, περύγωση στροβίλου. Σύγκριση πρωτότυπου περιγράμματος με παραμετροποιημένο.



Σχήμα 2.10: Περιγράμμα ακμής εκφυγής της αεροτομής περύγωση στροβίλου VKI LS89. Σύγκριση πρωτότυπου περιγράμματος με παραμετροποιημένο.

2.1.2 Παραμετροποίηση Περιγράμματος Πτερύγωσης Συμπίεστη SC10

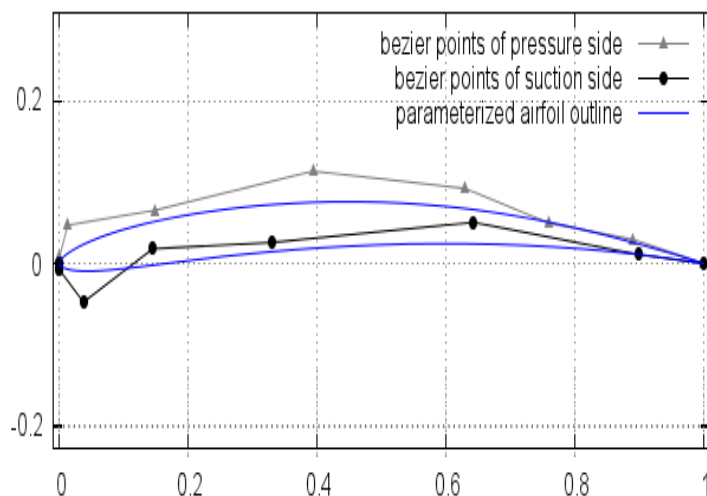
Για την παραμετροποίηση του περιγράμματος της αεροτομής πτερύγωσης συμπίεστη, SC10, χρησιμοποιήθηκαν 8 σημεία ελέγχου Bezier στην πλευρά υποπίεσης και 7 στην πλευρά υπερπίεσης. Για την παραμετροποίηση στην ακμή προσβολής χρησιμοποιήθηκαν και πάλι οι παράμετροι δ και ϕ . Αυτές πήραν τις τιμές $\delta_{LE} = 0.0028$ και $\phi_{LE} = -0.5^\circ$. Το περίγραμμα της αεροτομής στην ακμή εκφυγής, όπως θα αναφερθεί και παρακάτω που δείχνεται το πρωτότυπο περίγραμμα, καταλήγει σε μία οξεία γωνία και όχι σε ένα καμπύλο τμήμα. Άρα, για την ακμή εκφυγής δεν χρειάζονται οι παράμετροι αυτές και δεν χρησιμοποιούνται. Χρησιμοποιούνται μόνο τα σημεία Bezier που έχει εισάγει ο χρήστης.

Ο πίνακας 2.2, παρουσιάζει το σύνολο των σημείων Bezier που χρησιμοποιούνται για την παραμετροποίηση. Τα πρώτα και τα τελευταία σημεία δηλώνουν τις ακμές προσβολής και εκφυγής αντίστοιχα. Τα δεύτερα σημεία του πίνακα είναι τα σημεία ελέγχου Bezier που παράγει το λογισμικό στις δύο πλευρές για την παραμετροποίηση της ακμής προσβολής.

Πλευρά Υποπίεσης		Πλευρά Υπερπίεσης	
x	y	x	y
0	0	0	0
0.00002443	0.002799	-0.00002443	-0.002799
0.013	0.0475	0.0373	-0.048
0.148	0.066	0.145	0.0182
0.3937	0.1146	0.33	0.026
0.63	0.093	0.643	0.051
0.76	0.05	0.9	0.011
0.89	0.03	1	0
1	0		

Πίνακας 2.2: Σημεία ελέγχου Bezier για την παραμετροποίηση του περιγράμματος της αεροτομής SC10.

Συνολικά τα σημεία ελέγχου Bezier του περιγράμματος της SC10 και το περίγραμμα που δημιουργείται έχουν τη μορφή του σχήματος 2.11.



Σχήμα 2.11: Πτερύγωση συμπίεστη. Σημεία ελέγχου Bezier και μορφή παραμετροποιημένου περιγράμματος αεροτομής SC10.

Το πρωτότυπο περίγραμμα της αεροτομής SC10 δίνεται από τις σχέσεις που ακολουθούν, (2.1) έως και (2.4β'). Η κατανομή πάχους t δίνεται από την εξίσωση (2.1).

$$t(s) = 0.06(2.969s - 1.26s - 3.516s^2 + 2.843s^3 - 1.036s^4) \quad (2.1)$$

όπου η παράμετρος s δηλώνει το αδιάστατο μήκος τόξου της αεροτομής και κυμαίνεται από 0 έως και 1. Σημειώνεται ότι, βάσει αυτής της διαμόρφωσης το πάχος του περιγράμματος στην ακμή εκφυγής είναι μηδενικό.

Η γραμμή κυρτότητας (camber line) δίνεται από τη σχέση

$$c(s) = -2.475 + ((6.375625 - (s - 0.5)^2))^{1/2} \quad (2.2)$$

Τα σημεία x, y των πλευρών υποπίεσης και υπερπίεσης δίνονται από τα επόμενα ζεύγη εξισώσεων αντίστοιχα .

$$x_{ss} = s - 0.5t(s)\sin(\theta) \quad (2.3\alpha')$$

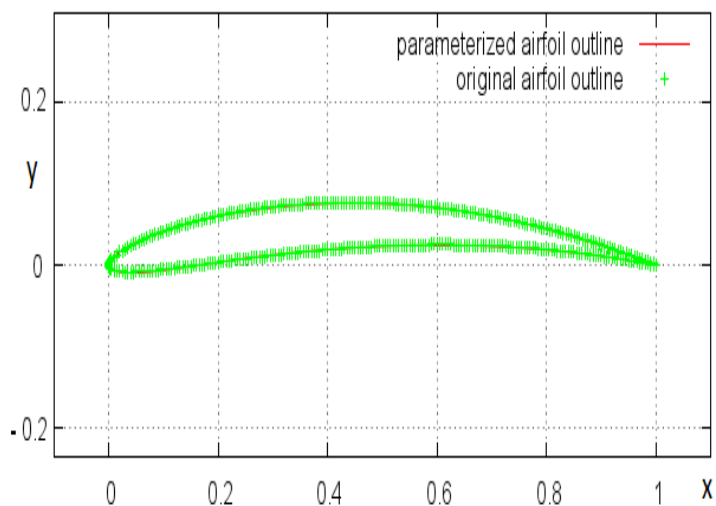
$$y_{ss} = c(s) + 0.5t(s)\cos(\theta) \quad (2.3\beta')$$

$$x_{ps} = s + 0.5t(s)\sin(\theta) \quad (2.4\alpha')$$

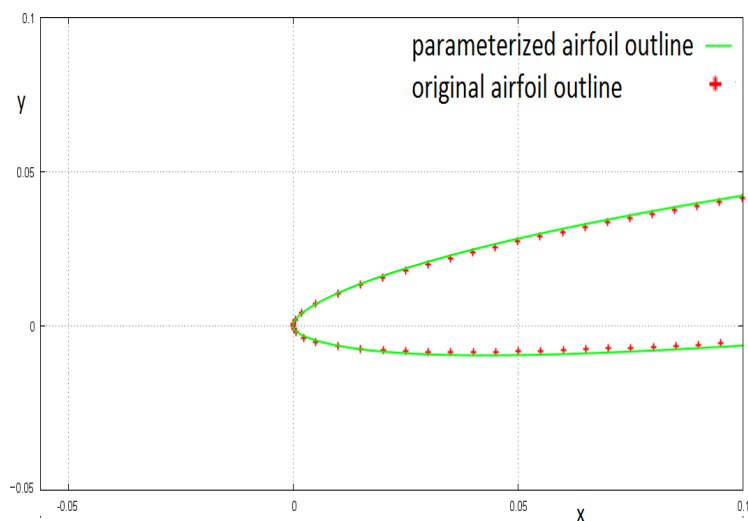
$$y_{ps} = c(s) - 0.5t(s)\cos(\theta) \quad (2.4\beta')$$

όπου $\theta = \tan^{-1}(dC/ds)$. Η παράγωγος (dC/ds) υπολογίζεται με πεπερασμένες διαφορές.

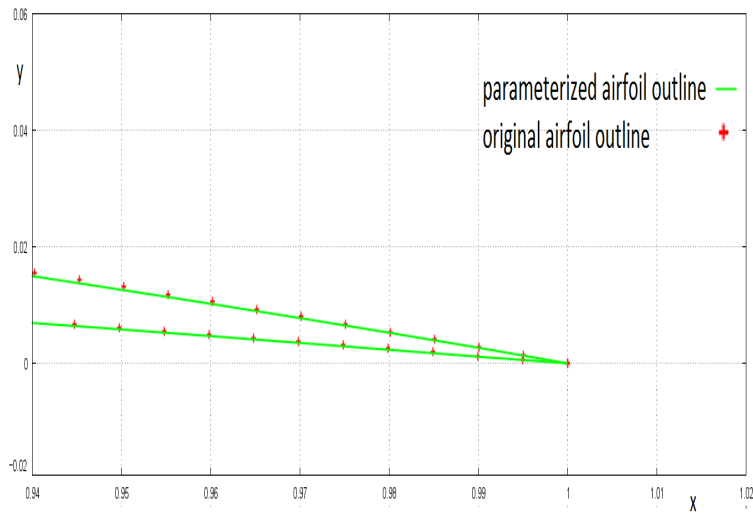
Έχοντας πλέον το πρωτότυπο περίγραμμα της αεροτομής, μπορεί να συγκριθεί με το παραμετροποιημένο. Στο σχήμα 2.12, φαίνεται στο σύνολο της η αεροτομή, ενώ στο 2.14, απεικονίζεται η ακμή προσβολής.



Σχήμα 2.12: Πτερύγωση συμπίεστη. Περίγραμμα αεροτομής SC10. Σύγκριση πρωτότυπου περιγράμματος αεροτομής με παραμετροποιημένο.



Σχήμα 2.13: Πτερύγωση συμπίεστη. Περίγραμμα ακμής προσβολής αεροτομής SC10. Σύγκριση πρωτότυπου περιγράμματος αεροτομής με παραμετροποιημένο.



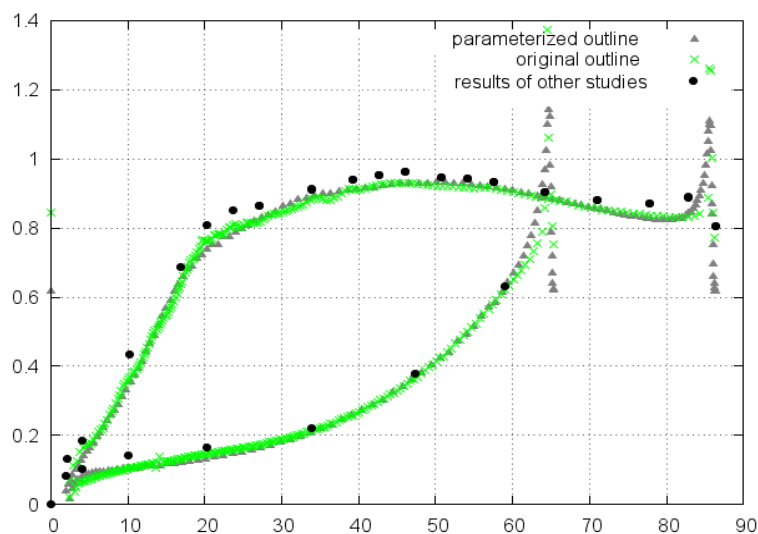
Σχήμα 2.14: Πτερύγωση συμπίεστη. Περιγράμμα ακμής εκφυγής αεροτομής SC10. Σύγκριση πρωτότυπου περιγράμματος αεροτομής με παραμετροποιημένο. Για την ακμή εκφυγής δεν χρησιμοποιούνται οι παράμετροι δ και φ , αφού το περιγράμμα καταλήγει σε οξεία γωνία.

2.2 Αξιολόγηση των Παραμετροποιήσεων

Για να εξεταστεί αν οι παραμετροποιήσεις που έγιναν είναι σωστές και μπορούν να γίνουν δεκτές, συγκρίνονται τα αποτελέσματα που δίνει η ροή σε αυτές, με τα αποτελέσματα της ροής στις πρωτότυπες αεροτομές και τα δεδομένα που υπάρχουν από άλλες μελέτες. Θα εξεταστεί επίσης το κατά πόσο τα αποτελέσματα είναι ανεξάρτητα της πυκνότητας του πλέγματος.

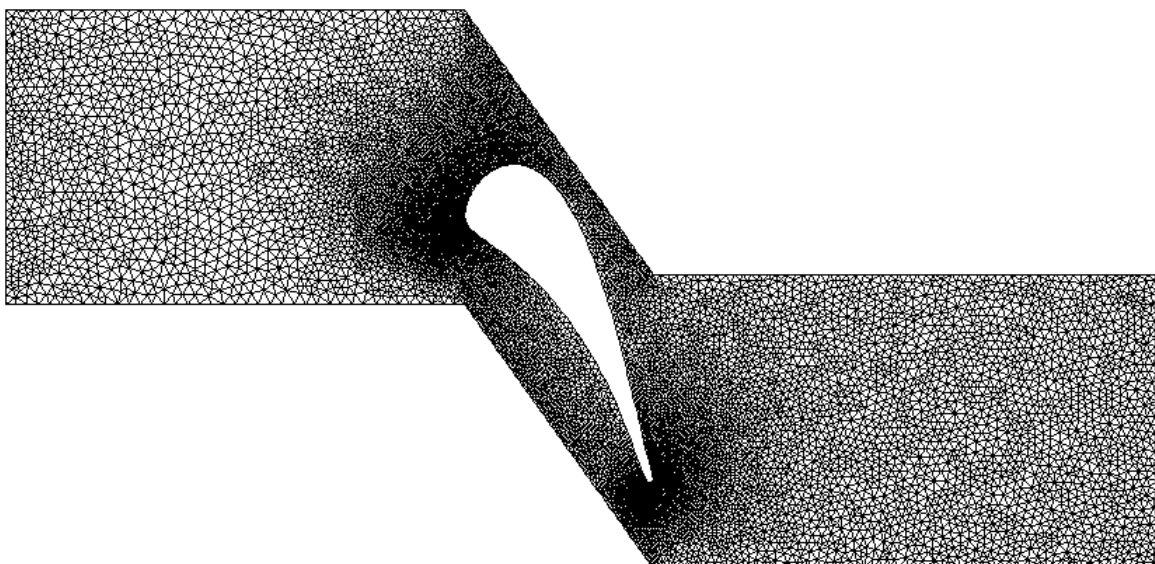
2.2.1 Αξιολόγηση της Παραμετροποίησης του Περιγράμματος της Πτερύγωσης Στροβίλου, VKI LS89

Στην πτερύγωση στροβίλου LS89, η ροή μελετάται ως ατριβής και εισέρχεται με γωνία $\alpha_1 = 0^\circ$. Ο ισεντροπικός αριθμός Mach εξόδου της ροής είναι $M_{2is} = 0.84$. Η κατανομή του ισεντροπικού αριθμού Mach πάνω στην αεροτομή φαίνονται στο σχήμα 2.15.

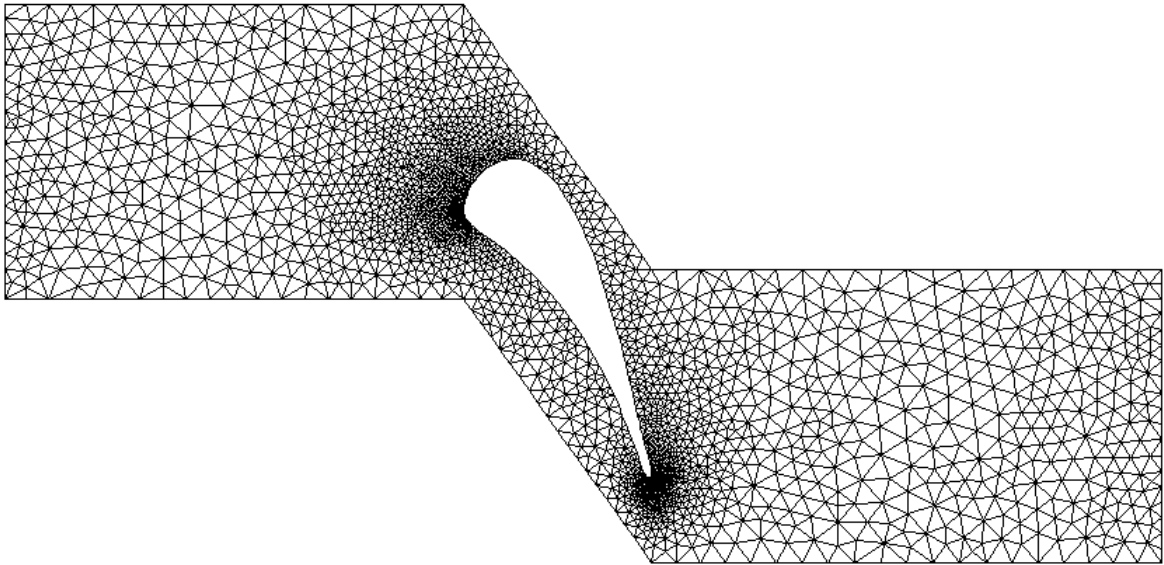


Σχήμα 2.15: Πτερύγωση στροβίλου. Κατανομή ισηντροπικού αριθμού $Mach$ στο περίγραμμα της αεροτομής VKI LS89. Ατριβής ροή. Σύγκριση αποτελεσμάτων ροής στο πρωτότυπο περίγραμμα, στο παραμετροποιημένο και με δεδομένα άλλων πειραματικών μελετών [14].

Επίσης, η ροή λύθηκε για δύο τύπους πλεγμάτων. Ένα πυκνό, σχήμα 2.16, και ένα αραιότερο, σχήμα 2.17.

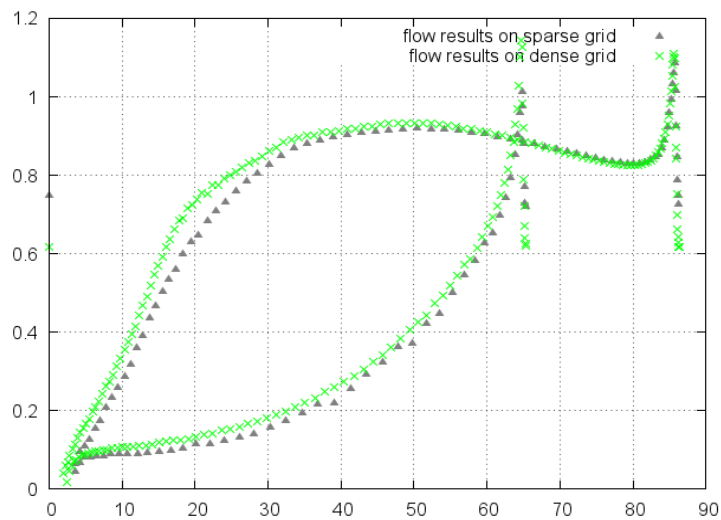


Σχήμα 2.16: Πλέγμα 12623 κόμβων και 25838 τριγωνικών στοιχείων για την επίλυση της ροής στην περίπτωση της πτερύγωσης στροβίλου, VKI LS89. Στην πλευρά υποπίεσης έχουν τοποθετηθεί 151 σημεία και στην πλευρά υπερπίεσης 101.



Σχήμα 2.17: Πλέγμα 5457 κόμβων και 10466 τριγωνικών στοιχείων για την επίλυση της ροής στην περύγωση στροβίλου, VKI LS89. Στην πλευρά υποπίεσης έχουν τοποθετηθεί 91 σημεία και στην πλευρά υπερπίεσης 61.

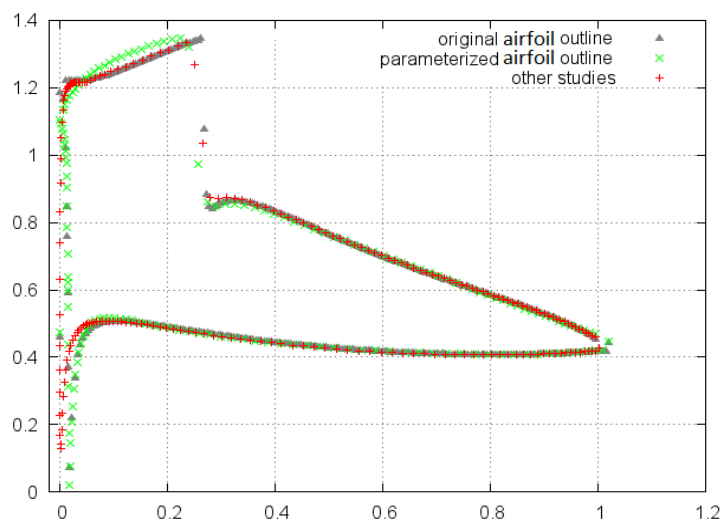
Τα αποτελέσματα της ροής για τους δύο τύπους πλεγμάτων φαίνονται στο διάγραμμα 2.18.



Σχήμα 2.18: Κατανομή ισεντροπικού αριθμού Mach στο περίγραμμα της αεροτομής της περύγωσης στροβίλου VKI LS89. Ατριβής ροή. Σύγκριση αποτελεσμάτων ροής, όταν αυτή επιλύεται στο αραιό πλέγμα του σχήματος 2.17 και στο πυκνό του σχήματος 2.16 .

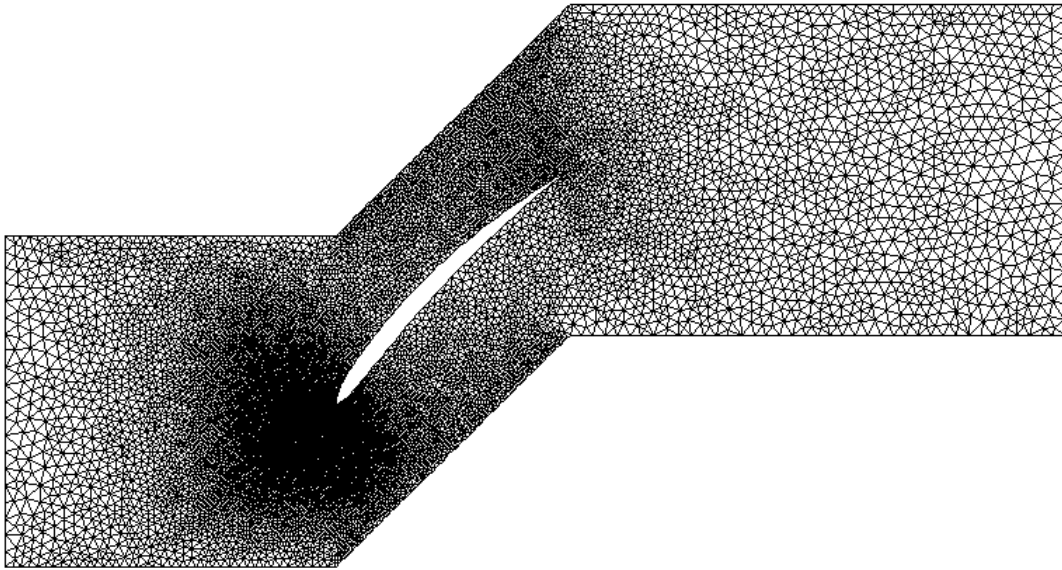
2.2.2 Αξιολογήση της Παραμετροποίησης του Περιγράμματος της Πτερύγωσης Συμπιεστή, SC10

Η ροή στην περίπτωση της SC10 θεωρείται και πάλι ατριβής και εισέρχεται με γωνία $\alpha_1 = 58^\circ$. Ο ισεντροπικός αριθμός Mach εισόδου της ροής είναι $M_1 = 0.8$. Η κατανομή του ισεντροπικού αριθμού Mach πάνω στο περίγραμμα της αεροτομής φαίνονται στο σχήμα 2.19.

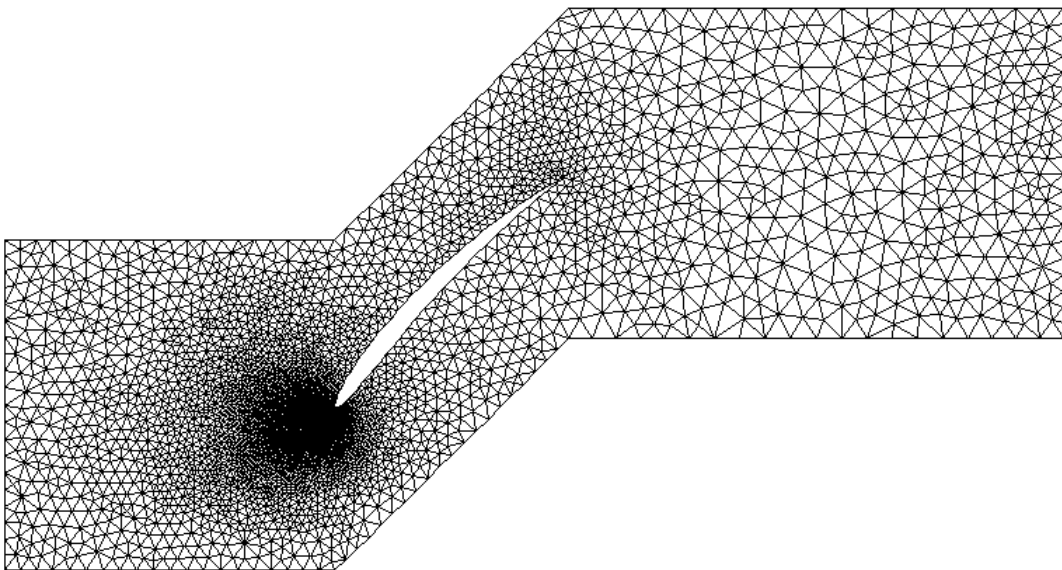


Σχήμα 2.19: πτερύγωση συμπιεστή. Κατανομή ισεντροπικού αριθμού Mach στο περίγραμμα της αεροτομής SC10. Ατριβής ροή. Σύγκριση αποτελεσμάτων ροής στο πρωτότυπο περίγραμμα, στο παραμετροποιημένο και με δεδομένα άλλων υπολογιστικών μελετών [15].

Επίσης, όπως και στην περίπτωση της VKI, λύθηκε η ροή για δύο τύπους πλεγμάτων, ένα πυκνό (σχήμα 2.20) και ένα αραιότερο (σχήμα 2.21).

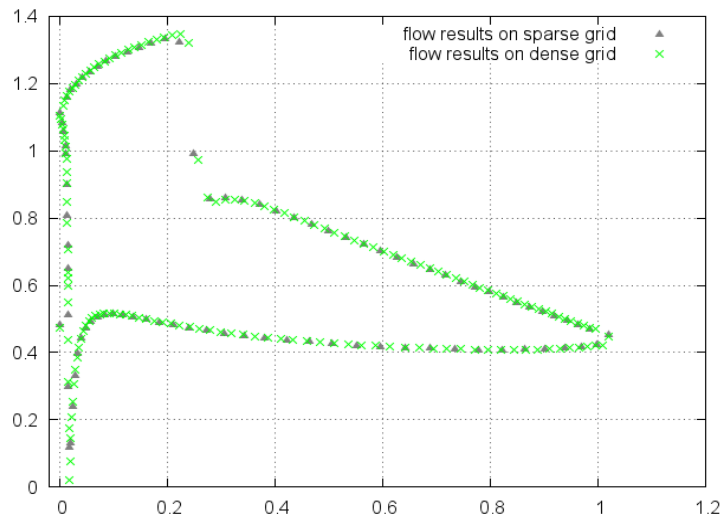


Σχήμα 2.20: Πλέγμα 17454 κόμβων και 34408 τριγωνικών στοιχείων για την επίλυση της ροής στην περίπτωση της περύγωσης συμπιεστή SC10. Στην πλευρά υποπίεσης έχουν τοποθετηθεί 91 σημεία και στην πλευρά υπερπίεσης 71.



Σχήμα 2.21: Πλέγμα 6216 κόμβων και 12182 τριγωνικών στοιχείων για την επίλυση της ροής στην περίπτωση της περύγωσης συμπιεστή SC10. Στην πλευρά υποπίεσης έχουν τοποθετηθεί 51 σημεία και στην πλευρά υπερπίεσης 41.

Η επίλυση της ροής στα δύο αυτά πλέγματα δίνει για τον ισεντροπικό αριθμό Mach πάνω στο περίγραμμα της αεροτομής, τα αποτελέσματα που φαίνονται στο διάγραμμα 2.22.



Σχήμα 2.22: Πτερύγωση συμπιεστή. Κατανομή ισεντροπικού αριθμού Mach στο περίγραμμα της αεροτομής SC10. Ατριβής ροή. Σύγκριση αποτελεσμάτων ροής, όταν αυτή επιλύεται στο αραιό πλέγμα του σχήματος 2.21 και στο πυκνό του σχήματος 2.20

2.2.3 Συμπεράσματα

Από όλα τα παραπάνω διαγράμματα φαίνεται ότι και για τις δύο αεροτομές τα αποτελέσματα της ροής στο παραμετροποιημένο περίγραμμα, συμπίπτουν με αυτά στο αρχικό, όπως και με τα αποτελέσματα άλλων μελετών. Επιπλέον, οι εξισώσεις της ροής λύθηκαν για δύο τύπους πλεγμάτων και τα αποτελέσματα αποδείχθηκαν, πρακτικά, ανεξάρτητα αυτών.

Συμπερασματικά, οι παραμετροποιήσεις των δύο περιγραμμάτων των αεροτομών δίνουν σωστά αποτελέσματα. Συνεπώς, στο υπόλοιπο μέρος της διπλωματικής εργασίας χρησιμοποιούνται αυτές οι παραμετροποιήσεις και όταν γίνεται αναφορά στη μορφή κάποιας αεροτομής θα νοείται η παραμετροποιημένη μορφή περιγράμματός της.

Κεφάλαιο 3

Ανάπτυγμα Πολυδιάστατου Πολυωνυμικού Χάους (PCE) και Εφαρμογή στην Αεροδυναμική

3.1 Πολυδιάστατο Ανάπτυγμα Πολυωνυμικού Χάους

Στο πρώτο τμήμα του κεφαλαίου αυτού παρουσιάζεται η θεωρία του πολυωνυμικού χάους, PCE, για προβλήματα πολλών διαστάσεων. Εκτενής ανάλυση αυτής της θεωρίας έχει γίνει σε προηγούμενη διπλωματική εργασία [18].

3.1.1 PCE και Στατιστικές Ροπές

Η θεωρία του πολυωνυμικού χάους προτείνει ότι μία συνάρτηση F , με είσοδο ένα διάνυσμα \vec{x} , έστω d στοχαστικών συνιστωσών, μπορεί να προσεγγιστεί από μία άλλη συνάρτηση $y = f(\vec{x})$, η οποία όμως αποτελεί γραμμικό συνδυασμό πολυωνύμων μιας οικογένειας Ψ

$$\Psi = \{\psi_0(\vec{x}), \psi_1(\vec{x}), \dots, \psi_k(\vec{x}), \dots\} \quad (3.1)$$

Είναι λοιπόν

$$F = F(\vec{x}), \quad \text{όπου } \vec{x} = (x_1, x_2 \dots x_d) \quad (3.2)$$

η οποία προσεγγίζεται ως εξής:

$$F(\vec{x}) \simeq f(\vec{x}) := \sum_{i=0}^{\infty} a_i \psi_i(\vec{x}) \quad (3.3)$$

Το ότι οι συνιστώσες του διανύσματος εισόδου χαρακτηρίζονται ως στοχαστικές, σημαίνει ότι αυτές κατανέμονται με βάση κάποια συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας, $w(x)$ (Probability Density Function, PDF). Σε αυτό το σημείο γίνονται δύο παραδοχές. Η πρώτη είναι το ότι όλες οι συνιστώσες κατανέμονται με την ίδια στοχαστική κατανομή και η δεύτερη το ότι είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους.

Αυτό που κυρίως ενδιαφέρει να υπολογιστεί είναι το τι μέση τιμή και διακύμανση, ή πρώτη και δεύτερη στατιστική ροπή αντίστοιχα, θα λάβει η αντικειμενική συνάρτηση F , όταν κάθε μεταβλητή εισόδου χαρακτηρίζεται από τη δική της μέση τιμή και διακύμανση, καθώς και κάποιον τύπο κατανομής (λ.χ. κανονική) που είτε τον γνωρίζουμε είτε τον υποθέτουμε.

Οι στατιστικές ροπές προέρχονται από το εσωτερικό γινόμενο συναρτήσεων ή αλλιώς προβολή Galerkin, το οποίο για δύο συναρτήσεις, έστω $H(\vec{x})$ και $G(\vec{x})$, με συνάρτηση βάρους $w(\vec{x})$ στο πεδίο ορισμού D , ορίζεται ως :

$$\langle H(\vec{x}), G(\vec{x}) \rangle_W = \int \cdots \int_{\bar{D}} H(\vec{x}) G(\vec{x}) w(\vec{x}) d\vec{x} \quad (3.4)$$

Αν πρόκειται για μία μόνο συνάρτηση η προβολή Galerkin υπαγορεύει ότι

$$\langle H(\vec{x}) \rangle_W = \int \cdots \int_{\bar{D}} H(\vec{x}) w(\vec{x}) d\vec{x} \quad (3.5)$$

$$\langle H(\vec{x}), H(\vec{x}) \rangle_W = \int \cdots \int_{\bar{D}} H(\vec{x}) H(\vec{x}) w(\vec{x}) d\vec{x} \quad (3.6)$$

Έτσι, η n -οστή στατιστική ροπή του συνόλου Υ , σύνολο τιμών της συνάρτησης f ,

ορίζεται ως:

$$\begin{aligned}\langle y^\nu \rangle &= \int \cdots \int_{\vec{D}} (f(\vec{x}))^\nu W(\vec{x}) d\vec{x} = \int \cdots \int_{\vec{D}} \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i \psi_i(\vec{x}) \right)^\nu W(\vec{x}) d\vec{x} \\ &= \int \cdots \int_{\vec{D}} \underbrace{\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i \psi_i(\vec{x}) \right) \cdots \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i \psi_i(\vec{x}) \right)}_{\nu \text{ φορές}} \left(\prod_{i=1}^d w_i(x_i) \right) dx_1 \cdots dx_d\end{aligned}$$

η οποία με επιμεριστικές πράξεις έρχεται στη μορφή

$$\langle y^\nu \rangle = \sum_{i_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{i_\nu=0}^{\infty} a_{i_1} \cdots a_{i_\nu} \int \cdots \int_{\vec{D}} \psi_{i_1}(\vec{x}) \cdots \psi_{i_\nu}(\vec{x}) w_1(x_1) \cdots w_d(x_d) dx_1 \cdots dx_d \quad (3.7)$$

όπου D , το πεδίο ορισμού της αντικειμενικής συνάρτησης F , και $W(\vec{x})$ η συνάρτηση βάρους, η οποία ορίζεται ως

$$W(\vec{x}) = \prod_{i=1}^d w_i(x_i) = w_1(x_1) w_2(x_2) \cdots w_d(x_d) \quad (3.8)$$

όπου $w_i(x_i)$, η συνάρτηση βάρους της μεταβλητής x_i .

Οι ολοκληρώσεις της εξίσωσης (3.7) αν και σύνθετες, μπορούν να απλοποιηθούν σημαντικά αν γίνει έξυπνη επιλογή των πολυωνύμων που θα χρησιμοποιηθούν. Για τον λόγο αυτόν λοιπόν, γίνεται χρήση ορθογώνιων πολυωνύμων (Orthogonal Polynomials).

3.1.2 Ορθογώνια Πολυώνυμα

Κάθε είδος στοχαστικής κατανομής (Ομοιόμορφη, Κανονική, Εκθετική κ.α.) συνδέεται με μία αντίστοιχη οικογένεια ορθογώνιων πολυωνύμων (Legendre, Hermite, Laguerre αντίστοιχα). Τα πολυώνυμα αυτά έχουν ορισμένες ιδιότητες οι οποίες διευκολύνουν κατά πολύ τους υπολογισμούς της εξίσωσης 3.7.

Πριν όμως αναφερθούν αυτές οι ιδιότητες και εφαρμοστούν στις εξισώσεις, δείχνεται η μορφή που παίρνουν τα ορθογώνια πολυώνυμα σε ένα πολυδιάστατο πρόβλημα, αφού πρέπει να μπορούν να δεχτούν παραπάνω από μία μεταβλητές εισόδου. Έστω

$\psi_{m_j^k}$ ένα πολυδιάστατο (ή πολυπαραμετρικό) πολυώνυμο της οικογένειας Ψ και p_{i_l} ένα μονοπαραμετρικό της οικογένειας ορθογωνίων πολυωνύμων P , βαθμού i_l .

Το πολυώνυμο $\psi_{m_j^k}(\vec{x})$ ορίζεται ως:

$$\psi_{m_j^k}(\vec{x}) = \prod_{l=1}^d p_{i_l}(x_l) \quad (3.9)$$

αρκεί να ισχύει

$$\sum_{l=1}^d i_l = k \quad (3.10)$$

Δηλαδή, το $\psi_{m_j^k}(\vec{x})$ αποτελεί το γινόμενο μονοπαραμετρικών ορθογωνίων πολυωνύμων $p_{i_l}(x_l)$, το καθένα όμως τέτοιου βαθμού ώστε το συνολικό άθροισμα των βαθμών τους, i_l , να είναι ίσο με τον βαθμό, k , του παραγόμενου πολυωνύμου $\psi_{m_j^k}$.

Έστω k_{max} η τάξη χάους του προβλήματος. Τα πολυδιάστατα πολυώνυμα $\psi_{m_j^k}$, που σχηματίζονται, θα είναι βαθμών $k = 0, k_{max}$. Αν, δηλαδή, η τάξη χάους του προβλήματος είναι $k_{max} = 3$, αναζητούνται πολυώνυμα έως και τρίτης τάξης, δηλαδή για $k = 0, 1, 2, 3$.

Ο δείκτης r χρησιμοποιείται για την κατάταξη των σχηματιζόμενων πολυωνύμων με σταθερό βαθμό k . Για τον δείκτη αυτόν ισχύει

$$1 \leq r \leq \binom{k+d-1}{k} = \frac{(k+d-1)!}{k!(d-1)!} \quad (3.11)$$

Η μέγιστη τιμή $\binom{k+d-1}{k}$ που μπορεί να πάρει ο δείκτης r , προκύπτει από το πεδίο των Διακριτών Μαθηματικών, της Συνδυαστικής και της Συνολοθεωρίας [16] [17] και δηλώνει το πλήθος των δυνατών συνδυασμών κατά του οποίους ένας ακέραιος αριθμός k αναλύεται σε άθροισμα μικρότερων ακεραίων, πλήθους d .

Το σύνολο των πολυδιάστατων πολυωνύμων που παράγονται, κατατάσσονται βάσει του πολλαπλού δείκτη m_r^k , για τον οποίον ισχύει

$$0 \leq m_r^k \leq \binom{k_{max}+d}{k_{max}} = \frac{(k_{max}+d)!}{k_{max}! d!} - 1 \quad (3.12)$$

Η μέγιστη τιμή, $\binom{k_{max}+d}{k_{max}}$, του δείκτη m_r^k , δηλώνει το πλήθος των δυνατών συνδυασμών d στοιχείων, με άθροισμα μικρότερο ή ίσο ενός k_{max} .

Η παραπάνω διαδικασία παραγωγής, των απαραίτητων για την μέθοδο PCE, πολυδιάστατων πολυωνύμων, γίνεται ευκολότερα αντιληπτή με μία εφαρμογή. Έστω πρόβλη-

Τάξη η	(r)	m_r^k	i_1	i_2	i_3	$\binom{k+d-1}{k}$	$\binom{k_{max}+d}{k_{max}}$
$k = 0$	1	0	0	0	0	1	20
$k = 1$	1	1	1	0	0	3	
	2	2	0	1	0		
	3	3	0	0	1		
$k = 2$	1	4	2	0	0	6	
	2	5	1	1	0		
	3	6	1	0	1		
	4	7	0	2	0		
	5	8	0	1	1		
	6	9	0	0	2		
$k = 3$	1	10	3	0	0	10	
	2	11	2	1	0		
	3	12	2	0	1		
	4	13	1	2	0		
	5	14	1	1	1		
	6	15	1	0	2		
	7	16	0	3	0		
	8	17	0	2	1		
	9	18	0	1	2		
	10	19	0	0	3		

Πίνακας 3.1: Δυνατοί συνδυασμοί μονοδιάστατων πολυωνύμων με άθροισμα ίσο με την εκάστοτε τάξη k . Πρόκειται για πρόβλημα τριών διαστάσεων και τάξης χάους $k_{max} = 3$.

μα τριών διαστάσεων και τάξης χάους $k_{max} = 3$. Στον πίνακα 3.1 παρουσιάζονται όλοι οι δυνατοί συνδυασμοί μονοδιάστατων πολυωνύμων για τις συνθήκες ενός τέτοιου προβλήματος. Για παράδειγμα, το πρώτο πολυδιάστατο πολυώνυμο μηδενικού βαθμού προκύπτει ως:

$$\tilde{\psi}_0(\vec{x}) = p_0(x_1) \cdot p_0(x_2) \cdot p_0(x_3)$$

Αφού, λοιπόν, ορίστηκε η μορφή των ορθογωνίων πολυωνύμων για πολλές διαστάσεις, αναφέρεται τώρα μια χρήσιμη ιδιότητα αυτών.

Το εσωτερικό γινόμενο δύο πολυωνύμων που ανήκουν στην ίδια στοχαστική κατανομή, με συνάρτηση βάρους $W(\vec{x})$, είναι μηδενικό, εκτός της περίπτωσης που τα δύο αυτά πολυώνυμα ταυτίζονται (ιδιότητα ορθογωνιότητας).

Ισχύει δηλαδή ότι

$$\langle \psi_i(\vec{x}), \psi_j(\vec{x}) \rangle_W = \int \cdots \int_{\bar{D}} \psi_i(\vec{x}) \psi_j(\vec{x}) W(\vec{x}) d\vec{x} = \langle \psi_i(\vec{x}), \psi_i(\vec{x}) \rangle_W \delta_{ij} \quad (3.13)$$

όπου δ_{ij} το σύμβολο Kronecker για το οποίο ισχύει

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases} \quad (3.14)$$

Για την περίπτωση που θα ισχύει $i = j$, τότε το εσωτερικό γινόμενο θα ισούται με το τετράγωνο της κατά w -νόρμα του πολυωνύμου ψ_n . Είναι δηλαδή

$$\langle \psi_n(\vec{x}), \psi_n(\vec{x}) \rangle_W \equiv \|\psi_n\|_W^2 = \gamma_n \quad (3.15)$$

όπου $\sqrt{\gamma_n}$ το μέτρο κανονικότητας του ψ_n . Ειδικά αν $\gamma_n = 1$, τότε πρόκειται για ορθοκανονική οικογένεια πολυωνύμων.

Όπως ήδη ειπώθηκε, κάθε στοχαστική κατανομή χαρακτηρίζεται και από μια συγκεκριμένη οικογένεια ορθογωνίων πολυωνύμων. Κοινό όμως χαρακτηριστικό όλων των οικογενειών είναι ότι το πρώτο μηδενικού βαθμού πολυώνυμο ισούται με την μονάδα. Ισχύει δηλαδή ότι

$$p_0 = 1, \quad (3.16)$$

ή, στην περίπτωση των πολυωνύμων πολλών διαστάσεων, δηλαδή

$$\psi_0(\vec{x}) = 1 \quad \text{ανεξαρτήτου στοχαστικής κατανομής } w(x) \quad (3.17)$$

Χρησιμοποιώντας τώρα τις ιδιότητες αυτές και επιστρέφοντας στην εξίσωση (3.7), υπολογίζεται η πρώτη και η δεύτερη στατιστική ροπή, δηλαδή η μέση τιμή και η διακύμανση.

Για την πρώτη στατιστική ροπή είναι:

$$\begin{aligned}
\mu_Y = \langle y^1 \rangle &= \int \cdots \int_{\vec{D}} (f(\vec{x}))^1 W(\vec{x}) d\vec{x} = \int \cdots \int_{\vec{D}} f(\vec{x}) W(\vec{x}) d\vec{x} \\
&= \int \cdots \int_{\vec{D}} \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i \psi_i(\vec{x}) \right) W(\vec{x}) d\vec{x} = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \int \cdots \int_{\vec{D}} \psi_i(\vec{x}) W(\vec{x}) d\vec{x} \\
&= a_0 \int \cdots \int_{\vec{D}} \psi_0(\vec{x}) W(\vec{x}) d\vec{x} + \sum_{i=1}^{\infty} a_i \int \cdots \int_{\vec{D}} \psi_i(\vec{x}) W(\vec{x}) d\vec{x} \\
&= a_0 \int \cdots \int_{\vec{D}} 1 \cdot W(\vec{x}) d\vec{x} + \sum_{i=1}^{\infty} a_i \int \cdots \int_{\vec{D}} 1 \cdot \psi_i(\vec{x}) W(\vec{x}) d\vec{x} \\
&= a_0 \int \cdots \int_{\vec{D}} W(\vec{x}) d\vec{x} + \sum_{i=1}^{\infty} a_i \int \cdots \int_{\vec{D}} \psi_0(\vec{x}) \psi_i(\vec{x}) W(\vec{x}) d\vec{x} \\
&= a_0 \left(\int_{D_1} w_i(x_i) dx_i \right) \cdots \left(\int_{D_d} w_d(x_d) dx_d \right) + \sum_{i=1}^{\infty} a_i \int \cdots \int_{\vec{D}} \psi_0(\vec{x}) \psi_i(\vec{x}) W(\vec{x}) d\vec{x}
\end{aligned} \tag{3.18}$$

όπου $D_1 \dots D_d$ τα πεδία ορισμού των μεταβλητών εισόδου $x_1 \dots x_d$ αντίστοιχα.

Είναι όμως

$$\int \cdots \int_{\vec{D}} W(\vec{x}) d\vec{x} = \left(\int_{D_1} w_i(x_i) dx_i \right) \cdots \left(\int_{D_d} w_d(x_d) dx_d \right) = 1 \tag{3.19}$$

αφού από τον ορισμό μιας στοχαστικής κατανομής, η συνολική αθροιστική πιθανότητα εμφάνισης κάθε στοχαστικού φαινομένου ισούται με την μονάδα.

Επίσης είναι

$$\int \cdots \int_{\vec{D}} \psi_0(\vec{x}) \psi_i(\vec{x}) W(\vec{x}) d\vec{x} \equiv 0, \quad \forall i > 0 \tag{3.20}$$

Αφού πρόκειται για το εσωτερικό γινόμενο του πολυωνύμου μηδενικού βαθμού με οποιοδήποτε άλλο εκτός αυτού (περίπτωση $i \neq j$, βλ. εξισώσεις (3.13), (3.14)).

Επιστρέφοντας στην εξίσωση (3.18) και αντικαθιστώντας τα αποτελέσματα των (3.19)

και (3.20) προκύπτει ότι

$$\mu_Y = \alpha_0 \cdot 1 + 0 \Rightarrow \mu_Y = \alpha_0 \quad (3.21)$$

Για τη δεύτερη στατιστική ροπή είναι

$$\begin{aligned} \langle y^2 \rangle &= \int \cdots \int_{\vec{D}} (f(\vec{x}))^2 W(\vec{x}) d\vec{x} = \int \cdots \int_{\vec{D}} \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i \psi_i(\vec{x}) \right)^2 W(\vec{x}) d\vec{x} \\ &= \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=0}^{\infty} a_{i_1} a_{i_2} \int \cdots \int_{\vec{D}} \psi_{i_1}(\vec{x}) \psi_{i_2}(\vec{x}) W(\vec{x}) d\vec{x} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} a_i^2 \int \cdots \int_{\vec{D}} \psi_i(\vec{x})^2 W(\vec{x}) d\vec{x} = \sum_{i=0}^{\infty} a_i^2 \|\psi_i(\vec{x})\|_W^2 \end{aligned} \quad (3.22)$$

όπου τα δύο τελευταία βήματα προκύπτουν από την ιδιότητα ορθογωνιότητας (εξ. (3.13)). Από τον ορισμό της κατά w -νόρμας, εξ. (3.15), η τελευταία εξίσωση, (3.22), παίρνει τη μορφή

$$\langle y^2 \rangle = \sum_{i=0}^{\infty} a_i^2 \gamma_i \quad (3.23)$$

Αν αντί των πολυωνύμων $\psi_n(\vec{x})$ χρησιμοποιηθούν τα ορθοκανονικά πολυώνυμα $\tilde{\psi}_n(\vec{x})$, τα οποία ορίζονται ως

$$\tilde{\psi}_n(\vec{x}) = \frac{\psi_n(\vec{x})}{\|\psi_n(\vec{x})\|} = \frac{\psi_n(\vec{x})}{\sqrt{\gamma_n}} \quad (3.24)$$

με $\gamma_n = 1$, η εξίσωση (3.23) απλοποιείται στην μορφή

$$\langle y^2 \rangle = \sum_{i=0}^{\infty} a_i^2 \quad (3.25)$$

Έχοντας βρει τη διακύμανση $\langle y^2 \rangle$, ζητείται να βρεθεί η τυπική απόκλιση σ_Y . Τα δύο αυτά μεγέθη συνδέονται με τον παρακάτω τρόπο

$$\sigma_Y^2 = \langle y^2 \rangle - \mu_Y^2 \longrightarrow \sigma_Y = \sqrt{\sigma_Y^2} = \sqrt{\langle y^2 \rangle - \mu_Y^2} \quad (3.26)$$

ή αντικαθιστώντας τα αποτελέσματα των (3.21) και (3.25), εν τέλει για την τυπική

απόκλιση ισχύει

$$\sigma_Y = \sqrt{\sum_{i=0}^{\infty} a_i^2 - a_0^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2} \quad (3.27)$$

Φαίνεται λοιπόν ότι για να υπολογιστούν η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση της αντικειμενικής συνάρτησης F επιβάλλεται πρώτα ο υπολογισμός των συντελεστών a_i .

3.1.3 Συντελεστές PCE και Πολυδιάστατη Ολοκλήρωση

Πριν παρουσιαστεί ο τρόπος υπολογισμού των συντελεστών, πρέπει να οριστεί μία τάξη αποκοπής του άθροίσματος (3.3), η οποία ονομάζεται τάξη χάους k (chaos order). Στην περίπτωση της μίας μεταβλητής εισόδου και για τάξη χάους k , το άθροισμα αυτό αποτελούν $k + 1$ όροι. Για περισσότερες όμως μεταβλητές αποδεικνύεται ότι οι όροι αυτοί είναι $N = \binom{k+d}{k}$, οι οποίοι είναι όλοι οι δυνατοί συνδυασμοί γινομένων με άθροισμα βαθμών μικρότερο ή ίσο του k , αυτό δηλαδή που έχει αναφερθεί στις εξισώσεις (3.9) και (3.10).

Συνοψίζοντας λοιπόν είναι

$$f(\vec{x}) = \sum_{i=0}^N a_i \tilde{\psi}_i(\vec{x}) \quad (3.28\alpha')$$

$$\mu_Y = a_0 \quad (3.28\beta')$$

$$\sigma_Y \simeq \sqrt{\sum_{i=1}^N a_i^2} \quad (3.28\gamma')$$

Για την εύρεση των N συντελεστών a_i , χρησιμοποιείται και πάλι το εσωτερικό γινόμενο συναρτήσεων (Galerkin (Galerkin Projection)) και οι ιδιότητες των ορθοκανονικών πολυωνύμων.

Είναι

$$\langle f(\vec{x}), \tilde{\psi}_i(\vec{x}) \rangle_W = \int_{\vec{D}} \dots \int f(\vec{x}) \tilde{\psi}_i(\vec{x}) W(\vec{x}) d\vec{x} \simeq \int_{\vec{D}} \dots \int F(\vec{x}) \tilde{\psi}_i(\vec{x}) W(\vec{x}) d\vec{x} \quad (3.29)$$

το οποίο γράφεται και ως

$$\langle f(\vec{x}), \tilde{\psi}_i(\vec{x}) \rangle_W = \left\langle \sum_{\lambda=0}^k a_\lambda \tilde{\psi}_\lambda(\vec{x}), \tilde{\psi}_i(\vec{x}) \right\rangle_W = a_i \|\tilde{\psi}_i(\vec{x})\|_W^2 = a_i \quad (3.30)$$

Εξισώνοντας τα τελευταία μέλη των εξισώσεων (3.29) και (3.30), προκύπτει για τους συντελεστές

$$a_i \simeq \int_{\vec{D}} \cdots \int F(\vec{x}) \tilde{\psi}_i(\vec{x}) W(\vec{x}) d\vec{x} \quad (3.31)$$

Όπως φαίνεται από την εξίσωση (3.31), εφόσον έχει οριστεί η τάξη χάους και η στοχαστική κατανομή η οποία ακολουθείται, αυτό που απομένει για την εύρεση των συντελεστών είναι ο υπολογισμός των πολλαπλών ολοκληρωμάτων.

Λόγω του ότι σε προβλήματα αεροδυναμικής βελτιστοποίησης η κλήση της συνάρτησης F μπορεί να σημαίνει την επίλυση των εξισώσεων ροής, συνεπώς υψηλό υπολογιστικό κόστος, οι κλήσεις αυτές πρέπει να γίνουν όσο το δυνατόν λιγότερες φορές. Επικεντρώνεται το πρόβλημα λοιπόν, στον οικονομικό υπολογισμό των ολοκληρωμάτων της εξίσωσης (3.31).

Ένας τρόπος υπολογισμού των ολοκληρωμάτων αυτών, αξιοποιώντας παράλληλα τη στοχαστικότητα των μεταβλητών εισόδου, είναι η μέθοδος Gauss Quadrature, η οποία σε προβλήματα πολλών διαστάσεων είναι γνωστή ως Cubature.

Έστω η συνάρτηση $g(\vec{x})$, η οποία αναλύεται σε γινόμενο μιας πολυωνυμικής $f(\vec{x})$ και μιας συνάρτησης βάρους $W(\vec{x})$. Είναι δηλαδή

$$g(\vec{x}) = W(\vec{x})f(\vec{x}) \quad (3.32)$$

Η μέθοδος της Gauss Quadrature υπαγορεύει ότι το ολοκλήρωμα της $g(\vec{x})$ σε ένα πεδίο ολοκλήρωσης \vec{D} , μπορεί να υπολογιστεί ως το άθροισμα N όρων της $g(\vec{x})$ σε κατάλληλα επιλεγμένα πολυδιάστατα σημεία $\vec{z}^{(j)}$ πολλαπλασιασμένα με κατάλληλα βάρη $W^{(j)}$. Δηλαδή

$$\int_{\vec{D}} \cdots \int g(\vec{x}) d\vec{x} = \int_{\vec{D}} \cdots \int W(\vec{x})f(\vec{x}) d\vec{x} = \sum_{j=1}^N W^{(j)} f(\vec{z}^{(j)}) \quad (3.33)$$

όπου

$$W^{(j)} = \prod_{l=1}^d w_l^{(j)} \quad (3.34)$$

δηλαδή το γινόμενο των βαρών $w_l^{(j)}$ που αντιστοιχούν σε κάθε συνδυασμό συντεταγμένων $\vec{z}^{(j)} = (z_1^{(j)}, \dots, z_d^{(j)})$.

Στη διπλωματική αυτή εργασία, τα μεγέθη κατανέμονται βάσει της κανονικής στοχαστικής κατανομής (Normal Distribution) και, συνεπώς, χρησιμοποιείται η οικογένεια

πολυωνύμων Hermite. Υπάρχουν δύο τύποι πολυωνύμων Hermite, τα πιθανοτικά (probabilists') και του φυσικού (physicists'). Οι διαφορές τους, που οφείλονται στον επιστημονικό τομέα, αναφέρονται στο Παράρτημα Β. Έδω χρησιμοποιούνται τα κανονικοποιημένα πιθανοτικά. Ο αναδρομικός τύπος των πιθανοτικών είναι

$$He_{k+1}(x) = xHe_k - kHe_{k-1} \quad (3.35)$$

η κατά w -νόρμα

$$\|He_k\|_w = \sqrt{k!} \quad (3.36)$$

και η συνάρτηση βάρους

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (3.37)$$

Τα κανονικοποιημένα Hermite πολυώνυμα ορίζονται ως

$$\widetilde{He}_k(x) := \frac{He_k(x)}{\|He_k\|_w} = \frac{He_k(x)}{\sqrt{k!}} \quad (3.38)$$

Οι κόμβοι $z^{(j)}$ είναι οι ρίζες του πολυωνύμου βαθμού $(k+1)$, \widetilde{He}_{k+1} , ενώ τα βάρη υπολογίζονται από τη σχέση

$$\omega_j = \frac{A_{k+1}}{A_k} \cdot \frac{\gamma_k}{\widetilde{He}'_{k+1}(z_j) \cdot \widetilde{He}_k(z_j)} \quad (3.39)$$

όπου ως A_k ορίζεται ο συντελεστής του όρου x^k στο πολυώνυμο βαθμού k (πηγή).

Σε αυτό το σημείο, σημαντικό είναι να αναφερθεί ότι η μεταβλητή z που εισήχθη στην εξίσωση (3.33), ανήκει στο τυποποιημένο σύνολο της κανονικής κατανομής Z ($z \sim \mathcal{N}(0, 1)$), δηλαδή κανονική κατανομή με μέση τιμή $\mu = 0$ και τυπική απόκλιση $\sigma = 1$. Προφανώς, όμως, δεν διέπονται όλα τα προβλήματα από κατανομές τέτοιων χαρακτηριστικών.

Για αυτόν τον λόγο, πριν τον υπολογισμό των συντελεστών a_i , εφαρμόζεται κατάλληλος μετασχηματισμός για την αλλαγή της στοχαστικής μεταβλητής από το τυποποιημένο σύνολο Z , στο πραγματικό X ($x \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$). Αυτός ο μετασχηματισμός είναι ο

$$\frac{x - \mu}{\sigma} = z \longrightarrow x = \sigma z + \mu \quad (3.40)$$

Επιστρέφοντας στην εξίσωση 3.31 και εφαρμόζοντας την παραπάνω θεωρία προκύπτει

για τους συντελεστές α_i

$$a_i \simeq \int \cdots \int_{\bar{D}} F(\vec{x}) \tilde{\psi}_i(\vec{x}) W(\vec{x}) d\vec{x} = \sum_{j=1}^N F(\vec{x}_j) \cdot \tilde{\psi}_i(\vec{z}_j) \cdot W(\vec{x}_j) \quad (3.41)$$

Έχοντας, λοιπόν, ορίσει τον τρόπο υπολογισμού των συντελεστών α_i , επιστρέφοντας στην 3.33 φαίνεται ότι το μόνο που μένει να οριστεί είναι ο αριθμός των δειγμάτων N που απαιτούνται, οι κόμβοι δηλαδή στους οποίους θα γίνει ο υπολογισμός της αντικειμενικής συνάρτησης.

Αποδεικνύεται ότι η Gauss Quadrature απαιτεί $(k + 1)$ δείγματα ανά κατεύθυνση, δηλαδή συνολικά $(k + 1)^d$ σημεία, για d διαστάσεις (κατευθύνσεις). Το σύνολο των σημείων αυτών αποτελεί το πλήρες πλέγμα και η αντικειμενική συνάρτηση F πρέπει να αξιολογηθεί σε όλα τα σημεία του πλέγματος αυτού. Φαίνεται λοιπόν ότι ο αριθμός κλήσεων της F εξαρτάται εκθετικά από τον αριθμό των διαστάσεων του προβλήματος. Αυτό μπορεί να αποβεί πολύ μεγάλη δυσκολία στα πολυδιάστατα προβλήματα.

Στη συνέχεια του κεφαλαίου αυτού εφαρμόζεται όλη η παραπάνω θεωρία του PCE και της Gauss Quadrature σε προβλήματα αεροδυναμικής βελτιστοποίησης δύο διαστάσεων.

3.2 Εφαρμογές του PCE στην Αεροδυναμική Βελτιστοποίηση

Η διαδικασία που ακολουθείται για την εφαρμογή του PCE και της Gauss Quadrature σε αεροδυναμικά προβλήματα και, πιο συγκεκριμένα, στα προβλήματα που εξετάζονται στην ενότητα αυτή, έχει ως εξής:

- **Ορισμός Στοχαστικών Μεταβλητών, Στοχαστικής Κατανομής και Τάξης Χάους k**

Ορίζονται ο αριθμός και το είδος των στοχαστικών μεταβλητών εισόδου που θα χρησιμοποιηθούν. Στις εφαρμογές που ακολουθούν οι μεταβλητές είναι δύο, οι παράμετροι δ και ϕ , οι οποίες ορίστηκαν στην ενότητα 1.1. Οι μεταβλητές θεωρούνται κανονικά κατανεμημένες και χαρακτηρίζονται η καθενιά από την δική της μέση τιμή μ (average value) και τυπική απόκλιση σ (standard deviation, std). Έπειτα, ορίζεται η τάξη χάους k , η οποία στις επόμενες εφαρμογές παίρνει τις τιμές 2, 3, 4 και 5.

- **Πλήρες Πλέγμα**

Όπως έχει ήδη ειπωθεί, ο αριθμός των διαστάσεων d και η τάξη χάους k , καθορίζουν τον αριθμό των κόμβων N του πλήρους πλέγματος που θα υποστηρίξει την ολοκλήρωση κατά Gauss Quadrature. Στις εφαρμογές που ακολουθούν οι κόμβοι του πλέγματος είναι κόμβοι (δ, ϕ) , χαρακτηρίζονται δηλαδή από μία τιμή της παραμέτρου δ και μία τιμή της παραμέτρου ϕ .

- **Αξιολόγηση Αντικειμενικής Συνάρτησης**

Στα προβλήματα αεροδυναμικής, η αξιολόγηση της αντικειμενικής συνάρτησης συνήθως προϋποθέτει την αριθμητική επίλυση των εξισώσεων ροής. Συγκεκριμένα, στις παρακάτω εφαρμογές, για κάθε συνδυασμό (δ, ϕ) του πλήρους πλέγματος δημιουργείται αρχικά το περίγραμμα της αεροτομής. Γύρω από το περίγραμμα αυτό, δημιουργείται πλέγμα, στους κόμβους του οποίου λύνονται οι εξισώσεις ροής. Από τα αποτελέσματα της ροής, αντλείται η τιμή του μεγέθους που μελετάται, δηλαδή το μέγεθος που έχει οριστεί ως αντικειμενική συνάρτηση του προβλήματος και υπολογίζεται η μέση τιμή και τυπική απόκλιση αυτού.

3.2.1 Εφαρμογή του PCE στο Πρόβλημα Πτερύγωσης Στροβίλου VKI LS89

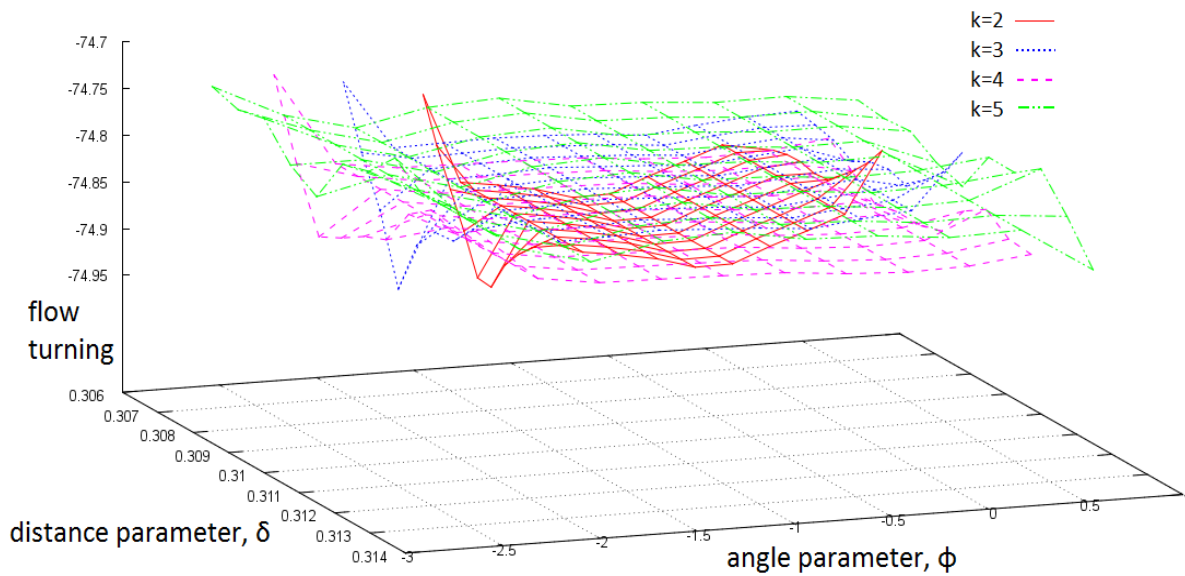
Όπως ήδη ειπώθηκε, τις στοχαστικές μεταβλητές τις αποτελούν οι παράμετροι δ και ϕ , οι οποίες κατανομούνται κανονικά με μέσες τιμές $\mu_\delta = 0.31m$ και $\mu_\phi = -1^\circ$. Οι τυπικές αποκλίσεις των παραμέτρων ορίζονται ως $\sigma_{\delta 1} = 0.001m$ και $\sigma_{\phi 1} = 0.5^\circ$.

Το μέγεθος που επιλέχθηκε ως αντικειμενική συνάρτηση είναι η στροφή της ροής (flow-turning), δηλαδή η διαφορά της γωνίας εξόδου α_2 από την γωνία εισόδου α_1 . Η μέθοδος εφαρμόστηκε για διάφορες τάξεις χάους. Κάθε τάξη χάους k προβλέπει και συγκεκριμένο αριθμό δειγμάτων. Ο πίνακας 3.2 δίνει την αντιστοιχία τάξης χάους k και αριθμού δειγμάτων N , όταν οι διαστάσεις του προβλήματος είναι δύο.

Τάξη Χάους (k)	2	3	4	5
Απαιτούμενοι Κόμβοι (N)	9	16	25	36

Πίνακας 3.2: Απαιτούμενος αριθμός δειγμάτων N πλήρους πλέγματος για διάφορες τάξεις χάους k , σε διδιάστατο πρόβλημα.

Στο σχήμα 3.1 απεικονίζονται οι τιμές της αντικειμενικής συνάρτησης στους κόμβους των διαφόρων πλήρων πλεγμάτων, για τάξεις χάους 2 έως 5. Η παράμετρος δ , κατανέμεται με μέση τιμή $\mu_\delta = 0.31m$ και τυπική απόκλιση $\sigma_{\delta 1} = 0.001m$, ενώ η παράμετρος ϕ , με $\mu_\phi = -1^\circ$ και $\sigma_{\phi 1} = 0.5^\circ$.



Σχήμα 3.1: Ατριβής ροή σε περύγωση στροβίλου. Απεικονίζονται οι αξιολογήσεις της αντικειμενικής συνάρτησης (στροφή της ροής, *flow-turn*) στους κόμβους των διαφόρων πλεγμάτων, για τάξεις χάους 2, 3, 4 και 5. Η μέση τιμή και τυπική απόκλιση των στοχαστικών μεταβλητών (παράμετροι δ και ϕ) είναι $\mu_\delta = 0.31m$, $\sigma_\delta = 0.001m$ και $\mu_\phi = -1^\circ$, $\sigma_\phi = 0.5^\circ$ αντίστοιχα.

Έχοντας, λοιπόν, τις αξιολογήσεις της αντικειμενικής συνάρτησης, βάσει της μεθόδου του PCE, υπολογίζονται η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση αυτής. Στον πίνακα 3.3 περιέχονται οι τιμές που λαμβάνει η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση της αντικειμενικής συνάρτησης, για τις διάφορες τάξεις χάους. Από τα αποτελέσματα του πίνακα φαίνεται ότι η μέση τιμή αλλάζει στο πρώτο δεκαδικό ψηφίο ενώ η τυπική απόκλιση είναι κοντά στο μηδέν για όλες τις τάξεις χάους, συνεπώς υπάρχει σταθερότητα της αντικειμενική συνάρτησης.

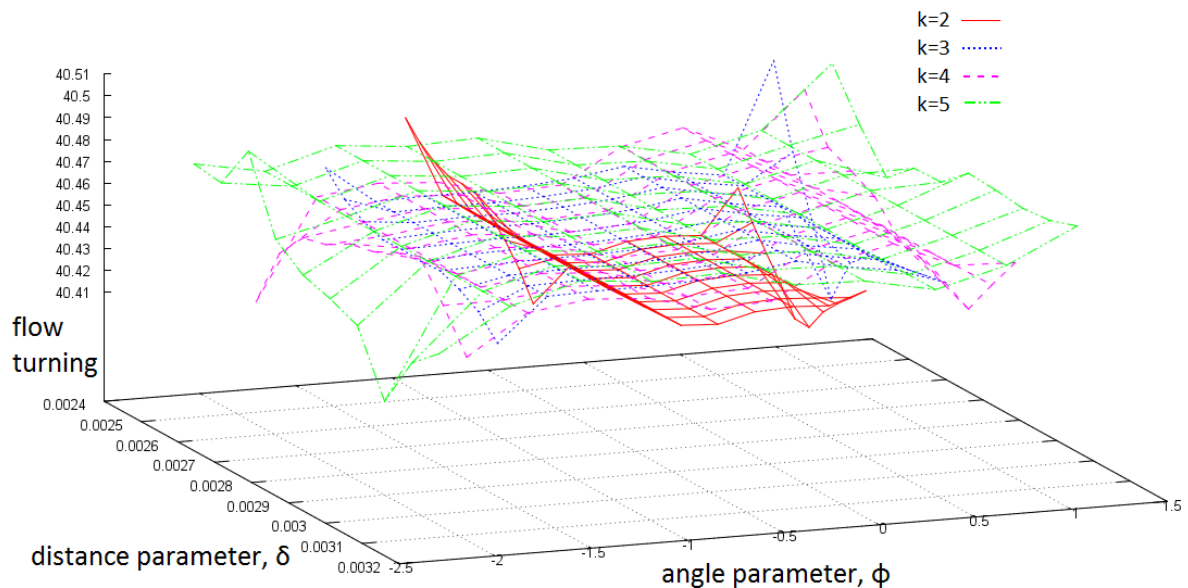
Στροφή της Ροής ($\alpha_1 - \alpha_2$)		
k	$\mu_{(\alpha_1 - \alpha_2)}$	$\sigma_{(\alpha_1 - \alpha_2)}$
2	74.862471	$4.612936 \cdot 10^{-2}$
3	74.782895	$2.630747 \cdot 10^{-2}$
4	74.861725	$5.034947 \cdot 10^{-2}$
5	74.781192	$2.786608 \cdot 10^{-2}$

Πίνακας 3.3: Ατριβής ροή σε περύγωση στροβίλου. Μέση τιμή και τυπική απόκλιση αντικειμενικής συνάρτησης, δηλαδή της στροφής της ροής, για διάφορες τάξεις χάους. Οι μέσες τιμές και τυπικές αποκλίσεις των στοχαστικών μεταβλητών, παράμετροι δ και ϕ , είναι $\mu_\delta = 0.31m$, $\sigma_{\delta 1} = 0.001$ και $\mu_\phi = -1^\circ$, $\sigma_{\phi 1} = 0.5^\circ$ αντίστοιχα.

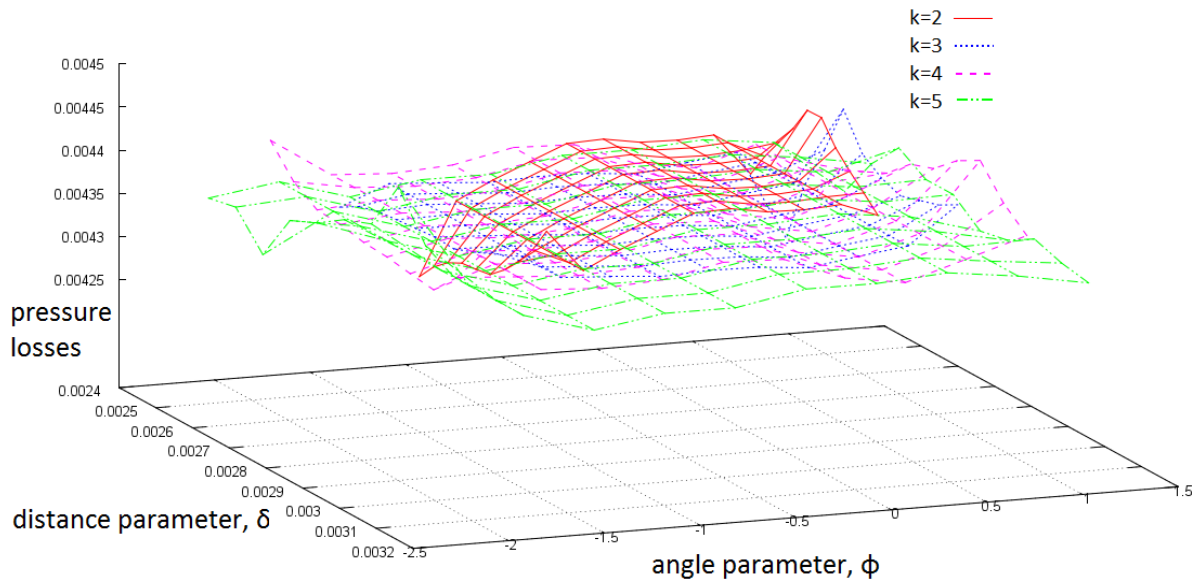
3.2.2 Εφαρμογή του PCE σε Αεροδυναμικό Πρόβλημα Πτερύγωσης Συμπιεστή SC10

Οι στοχαστικές μεταβλητές, παράμετροι δ και ϕ , κατανομούνται κανονικά με μέσες τιμές $\mu_\delta = 0.0028m$ και $\mu_\phi = -0.5^\circ$. Οι τυπικές αποκλίσεις των μεγεθών είναι $\sigma_{\delta_1} = 0.0001m$ και $\sigma_{\phi_1} = 0.5^\circ$. Ως αντικειμενικές συναρτήσεις επιλέγονται δύο μεγέθη. Αυτά είναι η στροφή της ροής, $(\alpha_1 - \alpha_2)$ και η πτώση της ολικής πίεσης (total pressure losses) από την είσοδο έως την έξοδο, δηλαδή η διαφορά $(p_{t1} - p_{t2})$. Η μέθοδος εφαρμόζεται για τάξεις χάους 2 έως και 5.

Στα σχήματα 3.3 απεικονίζονται οι τιμές των αντικειμενικών συναρτήσεων στους κόμβους των διαφόρων πλήρων πλεγμάτων, για τάξεις χάους 2 έως 5. Οι πίνακες 3.4 και 3.5 έχουν συμπληρωθεί με τις μέσες τιμές και τις τυπικές αποκλίσεις των αντικειμενικών συναρτήσεων.



Σχήμα 3.2: Ατριβής ροή σε πτερύγωση συμπιεστή. Απεικονίζονται οι αξιολογήσεις της αντικειμενικής συνάρτησης (στροφής της ροής, *flow-turning*) στους κόμβους των διαφόρων πλεγμάτων, για τάξεις χάους 2, 3, 4 και 5. Η μέση τιμή και τυπική απόκλιση των στοχαστικών μεταβλητών (παράμετροι δ και ϕ) είναι $\mu_\delta = 0.0028m$, $\sigma_\delta = 0.0001m$ και $\mu_\phi = -0.5^\circ$, $\sigma_\phi = 0.5^\circ$ αντίστοιχα.



Σχήμα 3.3: Ατριβής ροή σε περύγωση συμπίεστη. Απεικονίζονται οι αξιολογήσεις της αντικειμενικής συνάρτησης (απώλειες ολικής πίεσης, *pressure losses*) στους κόμβους των διαφόρων πλεγμάτων, για τάξεις χάους 2, 3, 4 και 5. Η μέση τιμή και τυπική απόκλιση των στοχαστικών μεταβλητών (παράμετροι δ και ϕ) είναι $\mu_\delta = 0.0028m$, $\sigma_\delta = 0.0001m$ και $\mu_\phi = -0.5^\circ$, $\sigma_\phi = 0.5^\circ$ αντίστοιχα.

Στροφή της Ροής ($\alpha_1 - \alpha_2$)		
k	$\mu_{(\alpha_1 - \alpha_2)}$	$\sigma_{(\alpha_1 - \alpha_2)}$
2	40.426626	$3.113267 \cdot 10^{-2}$
3	40.455721	$1.612920 \cdot 10^{-2}$
4	40.443738	$3.243848 \cdot 10^{-2}$
5	40.472994	$2.397525 \cdot 10^{-2}$

Πίνακας 3.4: Ατριβής ροή σε περύγωση συμπίεστη. Μέση τιμή και τυπική απόκλιση αντικειμενικής συνάρτησης, στροφής της ροής, για διάφορες τάξεις χάους. Οι μέσες τιμές και τυπικές αποκλίσεις των στοχαστικών μεταβλητών, παράμετροι δ και ϕ , είναι $\mu_\delta = 0.0028m$, $\sigma_{\delta 1} = 0.0001$ και $\mu_\phi = -0.5^\circ$, $\sigma_{\phi 1} = 0.5^\circ$ αντίστοιχα.

Τα αποτελέσματα και για τις δύο περιπτώσεις των αντικειμενικών συναρτήσεων φαίνονται σταθερά, αφού η μέση τιμή αλλάζει στα δεκαδικά ψηφία και οι τυπικές αποκλίσεις είναι πολύ κοντά στο μηδέν για όλες τις τάξεις χάους.

Πτώση Ολικής Πίεσης ($p_{t_1} - p_{t_2}$)		
k	$\mu_{(p_{t_1}-p_{t_2})}$	$\sigma_{(p_{t_1}-p_{t_2})}$
2	$4.443239 \cdot 10^{-3}$	$5.894723 \cdot 10^{-5}$
3	$4.382655 \cdot 10^{-3}$	$3.8384851 \cdot 10^{-5}$
4	$4.412409 \cdot 10^{-3}$	$5.356463 \cdot 10^{-5}$
5	$4.351746 \cdot 10^{-3}$	$4.440211 \cdot 10^{-5}$

Πίνακας 3.5: Ατριβής ροή σε περύγωση συμπίεστη. Μέση τιμή και τυπική απόκλιση αντικειμενικής συνάρτησης, πτώσης ολικής πίεσης, για διάφορες τάξεις χάους. Οι μέσες τιμές και τυπικές αποκλίσεις των στοχαστικών μεταβλητών, παράμετροι δ και φ , είναι $\mu_\delta = 0.0028m$, $\sigma_{\delta 1} = 0.0001$ και $\mu_\varphi = -0.5^\circ$, $\sigma_{\varphi 1} = 0.5^\circ$ αντίστοιχα.

Κεφάλαιο 4

Μέθοδος Αραιών Πλεγμάτων Smolyak και Εφαρμογές σε Πολυδιάστατα Προβλήματα Αεροδυναμικής Βελτιστοποίησης

Στο κεφάλαιο 3 παρουσιάστηκε η θεωρία του PCE και ορίστηκαν οι συντελεστές του. Οι συντελεστές αυτοί υπολογίστηκαν ολοκληρώνοντας με τη μέθοδο της Gauss Quadrature η οποία, όπως έχει ήδη ειπωθεί, για πρόβλημα d διαστάσεων απαιτεί $(k + 1)^d$ κόμβους για την αξιολόγηση της αντικειμενικής συνάρτησης F . Το σύνολο των κόμβων αυτών αποτελεί το πλήρες πλέγμα.

Φαίνεται λοιπόν, ότι οι αξιολογήσεις της αντικειμενικής συνάρτησης, αυξάνονται εκθετικά με τον αριθμό των διαστάσεων του προβλήματος. Αυτό σε προβλήματα που η αντικειμενική συνάρτηση απαιτεί την επίλυση των εξισώσεων ροής, επιφέρει μεγάλο υπολογιστικό κόστος. Η δυσκολία αυτή για προβλήματα πολλών διαστάσεων, είναι γνωστή ως η 'κατάρρα της μεγάλης διάστασης' (curse dimensionality). Για τον λόγο αυτόν, γεννήθηκε η ανάγκη για την ανάπτυξη μεθόδων που θα αντιμετωπίζουν οικονομικότερα τέτοιου είδους προβλήματα.

Μια τέτοια μέθοδος είναι η μέθοδος των αραιών πλεγμάτων γνωστή και ως μέθοδος Smolyak [6] [12]. Η μέθοδος αυτή απαιτεί επίσης τον υπολογισμό των συντελεστών του πολυωνυμικού χάους, χρειάζεται όμως σημαντικά λιγότερα δείγματα για την ολοκλήρωση κατά Gauss Quadrature.

4.1 Αραιά Πλέγματα Smolyak

Η βασική ιδέα της μεθόδου αραιών πλεγμάτων αναπτύχθηκε πρώτη φορά από τον Smolyak το 1963 [6]. Η μέθοδος του προτείνει ότι η αξιολόγηση της αντικειμενικής συνάρτησης δεν χρειάζεται να γίνει στο σύνολο των σημείων του πλήρους πλέγματος αλλά μπορούν ορισμένα σημεία τα οποία δεν συνεισφέρουν στη βελτίωση της ακρίβειας του υπολογιζόμενου ολοκληρώματος και να προστεθούν αντί αυτών νέα.

Καθώς η μέθοδος αραιών πλεγμάτων Smolyak αναπτύχθηκε για την επίλυση πολυδιάστατων προβλημάτων, δεν διευκολύνει καθόλου την επίλυση προβλημάτων λίγων διαστάσεων. Αντιθέτως σε τέτοιες περιπτώσεις τα πλέγματα Smolyak απαιτούν περισσότερες αξιολογήσεις από το πλήρες πλέγμα. Ειδικότερα για προβλήματα με διάνυμα εισόδου έως και τριών διαστάσεων προτιμάται η επίλυση στο πλήρες πλέγμα αφού είναι οικονομικότερο (πίνακας ;;). Στις επόμενες παραγράφους παρουσιάζεται ο τρόπος με τον οποίο παράγεται το αραιό πλέγμα Smolyak, δηλαδή το πως βρίσκονται ο αριθμός και η ταυτότητα των κατάλληλων σημείων που θα χρησιμοποιηθούν και τα αντίστοιχα βάρη αυτών.

4.1.1 Παραγωγή Αραιών Πλεγμάτων Smolyak

Σύμφωνα με την Gauss Quadrature, το ολοκλήρωμα μίας συνάρτησης $f(\vec{x})$, όπου $\vec{x} = (x_1, x_2 \dots x_d)$, σε ένα πεδίο ορισμού D μπορεί να γραφτεί ως

$$I = \int_{\vec{D}} \dots \int f(\vec{x}) w(\vec{x}) d\vec{x} = \sum_{n=0}^N f(\vec{x}^{(n)}) W^{(n)} \quad (4.1)$$

Τα κατάλληλα σημεία και βάρη για την εφαρμογή της 4.1 σε αραιό πλέγμα Smolyak, υπολογίζονται με τη διαδικασία που περιγράφεται στην συνέχεια.

- **Κόμβοι Πλέγματος**

Έστω πρόβλημα d διαστάσεων και ορισμένης τάξης χάους, k . Για την παραγωγή των κόμβων του πλέγματος Smolyak εισάγεται και χρησιμοποιείται το διάνυσμα $\vec{U}_{i_i}^i$, το οποίο και αμέσως επεξηγείται. Ο άνω δείκτης i του διανύσματος αυτού, δηλώνει την κατεύθυνση (διάσταση) και κυμαίνεται από 1 έως d . Ο κάτω δείκτης i_i δηλώνει τον αριθμό των κόμβων (collocation points) που τοποθετούνται ανά κατεύθυνση. Όπως είναι ήδη γνωστό από τη θεωρία της Gauss Quadrature τοποθετούνται $(k + 1)$ κόμβοι ανά κατεύθυνση, συνεπώς ο δείκτης i_i κυμαίνεται από 1 έως $k + 1$. Ο δείκτης l δηλώνει επίσης την κατεύθυνση και, άρα, παίρνει τιμές από 1 έως d .

Οι συνιστώσες του διανύσματος $\vec{U}_{i_l}^i$ είναι οι γνωστές απο την Gauss Quadrature ρίζες του πολυωνύμου βαθμού i_l , της οικογένειας ορθογωνίων πολυωνύμων που χρησιμοποιείται. Για παράδειγμα, το διάνυσμα \vec{U}_2^3 δηλώνει ότι στην κατεύθυνση 3 θα τοποθετηθούν 2 κόμβοι. Αν η οικογένεια ορθογωνίων πολυωνύμων που χρησιμοποιείται είναι η οικογένεια των πολυωνύμων Hermite του φυσικού, οι συνιστώσες του θα είναι $\vec{U}_2^3 = (0.7071067812, -0.7071067812)$. Οι ρίζες των πολυωνύμων Hermite δίνονται στον πίνακα ;; του παραρτήματος Β. Αφού λοιπόν ορίστηκε το διάνυσμα $\vec{U}_{i_l}^i$, παρουσιάζεται στη συνέχεια το πώς, βάσει αυτού, προκύπτουν τα σημεία του αραιού πλέγματος Smolyak.

Έστω N_{SM} το σύνολο των σημείων που χρησιμοποιούνται στο πλέγμα Smolyak και τα οποία συμβολίζονται με το διάνυσμα \vec{X} . Αυτά δίνονται από την εξίσωση 4.2 υπό τη συνθήκη της 4.3 . Είναι

$$\bigcup_{j=1}^{N_{SM}} \vec{X}^{(j)} = \bigcup \vec{U}_{i_1}^1 \otimes \vec{U}_{i_2}^2 \otimes \dots \otimes \vec{U}_{i_d}^d \quad (4.2)$$

όπου, για κάθε σύνολο διανυσμάτων $\vec{U}_{i_1}^1, \vec{U}_{i_2}^2, \dots, \vec{U}_{i_d}^d$ πρέπει να ισχύει

$$m \leq |i| \leq q \quad (4.3)$$

όπου

$$|i| = \sum_{l=1}^d i_l \quad , \quad (4.4)$$

$$q = k + d \quad , \quad (4.5)$$

$$m = \begin{cases} k + 1, & k + 1 \geq d \\ d, & k + 1 < d \end{cases} \quad (4.6)$$

Δηλαδή το σύνολο N_{SM} των σημείων που χρησιμοποιούνται στο πλέγμα ισούται με το σύνολο των σημείων που παράγει το ταυστικό γινόμενο των διανυσμάτων $\vec{U}_{i_l}^i$, κατάλληλα επιλεγμένων όμως, ώστε το άθροισμα των δεικτών τους i_l να είναι εντός συγκεκριμένων ορίων. Ουσιαστικά το ταυστικό γινόμενο παράγει σημεία με συντεταγμένες όλους τους δυνατούς συνδυασμούς συνιστωσών των διανυσμάτων $\vec{U}_{i_l}^i$. Περισσότερες πληροφορίες για το ταυστικό γινόμενο δίνονται στο παράρτημα Γ. Ο πίνακας ;; απεικονίζει τις αξιολογήσεις της αντικειμενικής συνάρτησης που απαιτεί το πλήρες και το αραιό πλέγμα Smolyak για διάφορες τιμές τάξης χάους και διαστάσεων. Η παραπάνω θεωρία γίνεται καλύτερα κατανοητή στα δύο παραδείγματα που ακολουθούν.

Πλήρες Πλέγμα / Αραιό Πλέγμα							
$k \setminus d$	1	2	3	4	5	6	7
0	1/1	1/1	1/1	1/1	1/1	1/1	1/1
1	2/2	4/5	8/7	16/9	32/11	64/13	128/15
2	3/3	9/13	27/25	81/41	243/61	729/85	2187/113
3	4/4	16/29	64/69	256/137	1024/241	4096/389	16384/589
4	5/5	25/65	125/177	625/401	3125/801	15625/1457	78125/2465
5	6/6	36/145	216/441	1296/1105	7776/2433	46656/4865	279936/9017

Πίνακας 4.1: Τιμές αξιολογήσεων αντικειμενικής συνάρτησης με ολοκλήρωση κατά Gauss Quadrature σε πλήρες πλέγμα και σε αραιό πλέγμα Smolyak για διάφορες τιμές διαστάσεων d και τάξεων χάους k .

- Παραγωγή κόμβων αραιού πλέγματος Smolyak σε πρόβλημα δύο διαστάσεων $d = 2$, και τάξη χάους $k = 2$. Περίπτωση $k + 1 \geq d$.

Έχοντας ορίσει τάξη χάους $k = 2$, οι κόμβοι που τοποθετούνται ανά κατεύθυνση είναι έως και $k+1 = 3$. Συνεπώς, τα διανύσματα \vec{U}_i^i που προκύπτουν είναι τα $\vec{U}_1^1, \vec{U}_2^1, \vec{U}_3^1, \vec{U}_1^2, \vec{U}_2^2$ και \vec{U}_3^2 . Η μικρότερη τιμή που μπορεί να πάρει ο δείκτης i_l είναι 1 και η μέγιστη 3. Επομένως, το άθροισμα $|i| = i_1 + i_2$ μπορεί να πάρει ελάχιστη τιμή 2 και μέγιστη 6. Όπως όμως ορίζει η ανισότητα 4.3 σε συνδυασμό με τις 4.4, 4.5, 4.6, η ελάχιστη αποδεκτή τιμή του αθροίσματος είναι $m = k + 1 = 3$ και η μέγιστη αποδεκτή $q = k + d = 4$.

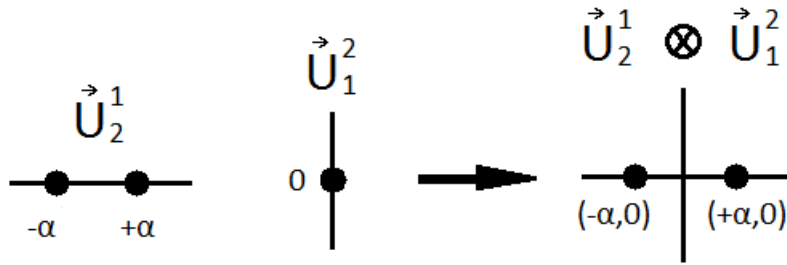
Οι δυνατές συντεταγμένες ανά διάσταση ($l = 1, 2$) είναι οι

$$\begin{aligned}
 x_1 &= 0, & \text{για: } i_l &= 1 \\
 x_1 &= -\alpha, \quad x_2 = \alpha, & \text{για: } i_l &= 2 \\
 x_1 &= -\beta, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = \beta, & \text{για: } i_l &= 3
 \end{aligned}$$

με διάταξη

$$-\beta < -\alpha < 0 < \alpha < \beta$$

Αν συνδυαστεί για παράδειγμα το διάνυσμα \vec{U}_2^1 με το \vec{U}_1^2 , το ταυστικό τους γινόμενο $\vec{U}_2^1 \otimes \vec{U}_1^2$ παράγει τη μήτρα του σχήματος 4.1



Σχήμα 4.1: Τα διανύσματα \vec{U}_2^1, \vec{U}_1^2 στις κατευθύνσεις 1 και 2 αντιστοίχα και η μήτρα που παράγει το τανυστικό τους γινόμενο.

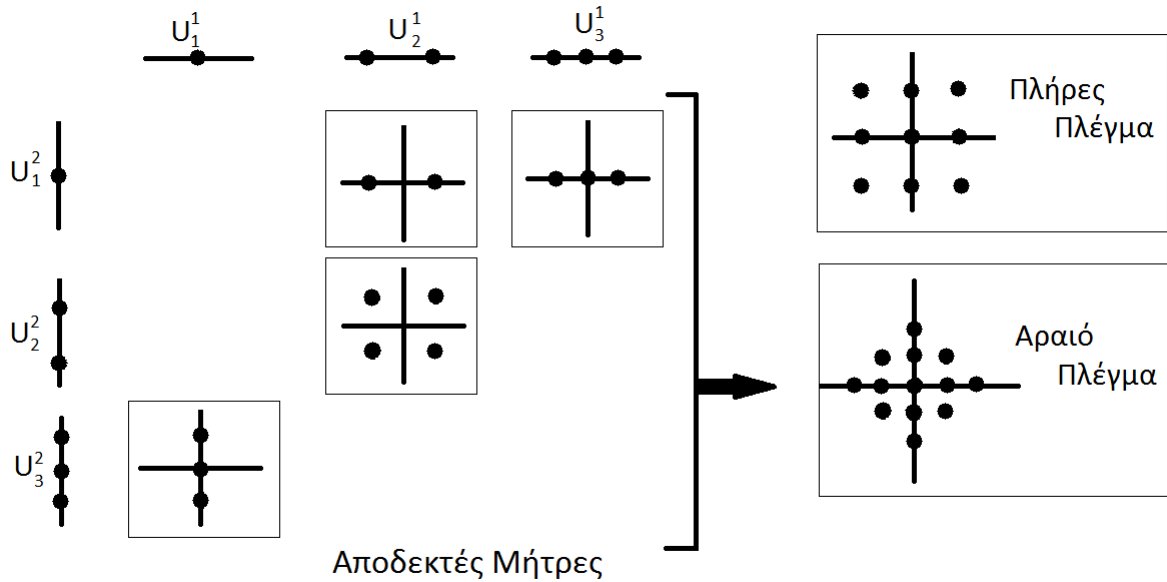
Στον πίνακα 4.2 φαίνονται οι δυνατοί συνδυασμοί των δεικτών i_l , το άθροισμα αυτών και οι συντεταγμένες των κόμβων που προκύπτουν. Με R συμβολίζονται οι επαναλαμβανόμενοι (redundant) κόμβοι, στους οποίους η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης υπολογίζεται μία και μόνο φορά. Οι κόμβοι που γίνονται αποδεκτοί είναι εκείνοι που αντιστοιχούν σε άθροισμα $|i| = 3, 4$, δηλαδή 13 κόμβοι συν ένας επαναλαμβανόμενος.

Στο σχήμα 4.2 απεικονίζονται οι μήτρες των αποδεκτών διανυσμάτων $\vec{U}_{i_l}^i$, δηλαδή εκείνων που αντιστοιχούν σε άθροισμα $|i| = 3$ και $|i| = 4$. Απεικονίζεται επίσης το αραιό πλέγμα που προκύπτει καθώς και αυτό που προκύπτει με τη μέθοδο του πλήρους πλέγματος.

Για τις συνθήκες αυτού του παραδείγματος ($d = 2, k = 2$) ένα πλήρες πλέγμα χρειάζεται $(k + 1)^d = 9$ σημεία, δηλαδή λιγότερα από το αραιό πλέγμα. Αυτό συμβαίνει διότι, όπως ήδη αναφέρθηκε, τα αραιά πλέγματα Smolyak είναι αποτελεσματικότερα των πλήρων πλεγμάτων σε προβλήματα περισσότερων διαστάσεων. Πρακτικά, η μεγάλη εξοικονόμηση υπολογιστικού κόστους που επιφέρουν γίνεται αντιληπτή σε προβλήματα με $d \geq 5$.

Άθροισμα ($ i $)	i_1	i_2	Κόμβοι
2	1	1	(0, 0)
3	2	1	($\pm\alpha$, 0)
	1	2	(0, $\pm\alpha$)
4	3	1	(0, 0) [R]
			($\pm\beta$, 0)
	2	2	($\pm\alpha$, $\pm\alpha$)
5	1	3	(0, 0) [R]
			(0, $\pm\beta$)
			($\pm\alpha$, 0) [R]
6	3	2	(0, $\pm\alpha$) [R]
			($\pm\beta$, $\pm\alpha$)
	2	3	($\pm\alpha$, 0) [R]
6	3	3	(0, 0) [R]
			(0, $\pm\beta$) [R]
			($\pm\beta$, 0) [R]
			($\pm\beta$, $\pm\beta$)

Πίνακας 4.2: Δυνατοί συνδυασμοί δεικτών i_i , το άθροισμα αυτών και οι κόμβοι που προκύπτουν. Αφορά σε πρόβλημα $d = 2$ διαστάσεων και τάξης χάους $k = 2$. Αποδεκτοί κόμβοι σε ένα αραιό πλέγμα S_{molyak} είναι μόνο αυτοί που αντιστοιχούν σε άθροισμα δεικτών $|i| = 3$ και $|i| = 4$. Οι επαναλαμβανόμενοι κόμβοι συμβολίζονται με R, *redundant*.



Σχήμα 4.2: Αποδεκτές μήτρες αραιού πλέγματος S_{molyak} σε πρόβλημα $d = 2$ διαστάσεων και τάξη χάους $k = 2$. Το αραιό πλέγμα το αποτελούν 13 κόμβοι ενώ το πλήρες 9.

- Παραγωγή κόμβων αραιού πλέγματος Smolyak σε πρόβλημα πέντε διαστάσεων $d = 5$, και τάξη χάους $k = 2$. Περίπτωση $k + 1 < d$.

Για τάξη χάους $k = 2$ τοποθετούνται έως και $k + 1 = 3$ σημεία ανά κατεύθυνση. Ο δείκτης i_l παίρνει ελάχιστη τιμή 1 και μέγιστη 3. Συνεπώς το άθροισμα $|i| = i_1 + i_2 + i_3 + i_4 + i_5$ λαμβάνει ελάχιστη τιμή $d \cdot 1 = 5$ και μέγιστη $d \cdot 3 = 15$. Όπως όμως ορίζεται από τις (4.3) έως και (4.6), ενώ η ελάχιστη τιμή του αθροίσματος πράγματι είναι d , η μέγιστη είναι $k + d = 7$.

Οι δυνατές συνιστώσες ανά κατεύθυνση ($l = 1, 2, 3, 4, 5$) παραμένουν όπως προηγουμένως

$$\begin{array}{ll} x_1 = 0, & \text{για: } i_l = 1 \\ x_1 = -\alpha, \quad x_2 = \alpha, & \text{για: } i_l = 2 \\ x_1 = -\beta, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = \beta, & \text{για: } i_l = 3 \end{array}$$

με

$$-\beta < -\alpha < 0 < \alpha < \beta$$

Στον πίνακα ;; παρουσιάζονται οι αποδεκτοί συνδυασμοί δεικτών με άθροισμα $d = 5 \leq |i| \leq 7 = k + d$ και οι κόμβοι που προκύπτουν.

Άθροισμα ($ i $)	i_1	i_2	i_3	i_4	i_5	Κόμβοι
5	1	1	1	1	1	$(0, 0, 0, 0, 0)$
	2	1	1	1	1	$(\pm\alpha, 0, 0, 0, 0)$
6	1	2	1	1	1	$(0, \pm\alpha, 0, 0, 0)$
	1	1	2	1	1	$(0, 0, \pm\alpha, 0, 0)$
	1	1	1	2	1	$(0, 0, 0, \pm\alpha, 0)$
	1	1	1	1	2	$(0, 0, 0, 0, \pm\alpha)$
	3	1	1	1	1	$(0, 0, 0, 0, 0)$ [R] $(\pm\beta, 0, 0, 0, 0)$
7	2	2	1	1	1	$(\pm\alpha, \pm\alpha, 0, 0, 0)$
	2	1	2	1	1	$(\pm\alpha, 0, \pm\alpha, 0, 0)$
	2	1	1	2	1	$(\pm\alpha, 0, 0, \pm\alpha, 0)$
	2	1	1	1	2	$(\pm\alpha, 0, 0, 0, \pm\alpha)$
	1	3	1	1	1	$(0, 0, 0, 0, 0)$ [R] $(0, \pm\beta, 0, 0, 0)$
	1	2	2	1	1	$(0, \pm\alpha, \pm\alpha, 0, 0)$
	1	2	1	2	1	$(0, \pm\alpha, 0, \pm\alpha, 0)$
	1	2	1	1	2	$(0, \pm\alpha, 0, 0, \pm\alpha)$
	1	1	3	1	1	$(0, 0, 0, 0, 0)$ [R] $(0, 0, \pm\beta, 0, 0)$
	1	1	2	2	1	$(0, 0, \pm\alpha, \pm\alpha, 0)$
	1	1	2	1	2	$(0, 0, \pm\alpha, 0, \pm\alpha)$
	1	1	1	3	1	$(0, 0, 0, 0, 0)$ [R] $(0, 0, 0, \pm\beta, 0)$
	1	1	1	2	2	$(0, 0, 0, \pm\alpha, \pm\alpha)$
	1	1	1	1	3	$(0, 0, 0, 0, 0)$ [R] $(0, 0, 0, 0, \pm\beta)$

Πίνακας 4.3: Δυνατοί αποδεκτοί συνδυασμοί δεικτών i_l με άθροισμα στο εύρος $5 \leq |i| \leq 7$ και οι κόμβοι που προκύπτουν. Αφορά σε πρόβλημα $d = 5$ διαστάσεων και τάξης χάους $k = 2$. Οι επαναλαμβανόμενοι κόμβοι συμβολίζονται με R , *redundant*.

- Βάρη Κόμβων

Σύμφωνα με τη θεωρία των αραιών πλεγμάτων Smolyak, το βάρος $W^{(j)}$ που αντιστοιχεί στο j -ιστό κόμβο $X^{(j)}$, με $j = 1 \cdots N_{SM}$, δίνεται από τη σχέση

$$W^{(j)} = (-1)^{q-|i|} \binom{d-1}{q-|i|} \prod_{l=1}^d \omega_{i_l}^j \quad (4.7)$$

όπου

$$\binom{d-1}{q-|i|} = \frac{(d-1)!}{(q-|i|)! \cdot (d-1-q+|i|)!} \quad (4.8)$$

και όπου οι δείκτες i, l και i_l εξακολουθούν να έχουν το νόημα και τα όρια που τους δόθηκαν προηγουμένως.

Το γινόμενο $\prod_{l=1}^d \omega_{i_l}^{j_l}$ της εξίσωσης 4.7, είναι το γινόμενο των βαρών που αντιστοιχούν στις συντεταγμένες του σημείου (j), για το οποίο υπολογίζουμε το βάρος. Για να γίνει πιο κατανοητός ο τρόπος που υπολογίζονται τα βάρη, εφαρμόζεται η εξίσωση 4.7 σε ένα τυχαίο σημείο του πίνακα 4.2, το οποίο βέβαια σημείο ανήκει στο αραιό πλέγμα Smolyak που δημιουργείται, δηλαδή στην προκειμένη περίπτωση αντιστοιχεί σε άθροισμα δεικτών $|i| = 3$ ή $|i| = 4$.

Έστω λοιπόν το 6^ο σημείο, που αντιστοιχεί στους δείκτες $i_1 = 3, i_2 = 1$, με άθροισμα $|i| = 4$ και με συντεταγμένες $(x_1, x_2) = (+\beta, 0)$. Έστω το βάρος που αντιστοιχεί στη συντεταγμένη $(x_1 = +\beta)$ ίσο με w_1 και αυτό που αντιστοιχεί στη $x_2 = 0$ ίσο με w_2 . Η εξίσωση 4.7 με $d = 2, k = 2, q = k + d = 4$ και $|i| = 4$ γίνεται

$$W^{(6)} = (-1)^{4-4} \binom{2-1}{4-4} \prod_{l=1}^2 \omega_{i_l}^6 = w_3^6 \cdot w_1^6 = w_1 \cdot w_2 \quad (4.9)$$

Αν η οικογένεια πολυωνύμων που χρησιμοποιείται είναι η οικογένεια πολυωνύμων Hermite του φυσικού, τα βάρη θα είναι ίσα με $w_1 = 0.295408975$ και $w_2 = 1.77245385091$. Οι τιμές αυτές αντλούνται από τον πίνακα ;; του παραρτήματος Β.

Το ολοκλήρωμα πλέον της εξίσωσης 4.1 γράφεται

$$I_{SM} = \sum_{j=1}^{N_{SM}} W^{(j)} f(\vec{X}^{(j)}) \quad (4.10)$$

4.2 Αριθμητικές Εφαρμογές Θεωρίας Αραιών Πλεγμάτων Smolyak σε Συναρτήσεις Πολύων Μεταβλητών

4.2.1 Υπολογισμός Ολοκληρώματος Συνάρτησης - Σύγκριση Αναλυτικής με Αριθμητική Λύση

Εφαρμόζεται η θεωρία των αραιών πλεγμάτων Smolyak, στα παρακάτω δύο παραδείγματα, για τον ακριβή υπολογισμό του ολοκληρώματος της συνάρτησης. Ανάλογα με τη μορφή της συνάρτησης βάρους, επιλέγεται και η κατάλληλη οικογένεια ορθογωνίων πολυωνύμων. Έτσι, στο πρώτο παράδειγμα γίνεται χρήση της οικογένειας Legendre, ενώ στο δεύτερο της οικογένειας Hermite.

- **Ολοκλήρωση με Χρήση Πολυωνύμων Legendre**

Έστω συνάρτηση $f(\vec{x}) = x_3^2$, με διάνυσμα εισόδου $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$. Ζητείται το ολοκλήρωμα

$$I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\vec{x}) d\vec{x} \quad (4.11)$$

Το ολοκλήρωμα I , υπολογίζεται πρώτα αναλυτικά. Είναι

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\vec{x}) d\vec{x} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 x_3^2 dx_1 dx_2 dx_3 = \\ &= \int_{-1}^1 x_3^2 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 dx_1 dx_2 dx_3 = [x_1]_{-1}^1 [x_2]_{-1}^1 \left[\frac{x_3^3}{3} \right]_{-1}^1 = \frac{8}{3} \end{aligned} \quad (4.12)$$

Για να υπολογιστεί αριθμητικά το ολοκλήρωμα 4.11, με χρήση της θεωρίας Smolyak, χρειάζονται οι κατάλληλοι κόμβοι και τα αντίστοιχα βάρη αυτών. Αυτά, όμως, μπορούν να βρεθούν, αφού πρώτα επιλεγεί η οικογένεια ορθογωνίων πολυωνύμων που θα χρησιμοποιηθεί. Το ολοκλήρωμα της 4.11 μπορεί να γραφεί ως

$$I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\vec{x}) d\vec{x} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 1 \cdot f(\vec{x}) d\vec{x} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 w(\vec{x}) f(\vec{x}) d\vec{x} \quad (4.13)$$

Φαίνεται, λοιπόν, ότι μπορεί να υποθεθεί συνάρτηση βάρους $w(\vec{x}) = 1$. Η συγκεκριμένη συνάρτηση βάρους αντιστοιχεί στην ομοιόμορφη κατανομή και τα πολυώνυμα που εξυπηρετούν επίλυση ολοκληρωμάτων τέτοιας μορφής, είναι το πολυώνυμα Legendre. Επιλέγεται τάξη χάους, $k = 1$. Εφαρμόζοντας τις εξισώσεις 4.3, 4.4, 4.5, 4.6 για τις συνθήκες αυτού του προβλήματος, δηλαδή για $d = 3$ και $k = 1$, προκύπτει ότι το άθροισμα των δεικτών, $|i|$, μπορεί να πάρει τις τιμές 3 και 4. Από τον πίνακα ;;, φαίνεται ότι η μέθοδος Smolyak χρειάζεται 7 σημεία.

Στον πίνακα ;; φαίνονται οι δυνατοί συνδυασμοί δεικτών i_i , ώστε το άθροισμα αυτών να είναι στα επιτρεπτά όρια, όπως και οι τιμές των συνιστωσών και των βαρών που αντιστοιχούν σε αυτούς το δείκτες. Οι τιμές των συνιστωσών z_{i_i} και των βαρών w_{i_i} αντλούνται από τον πίνακα ;; του παραρτήματος Β.

Σημείο (j)	Άθροισμα ($ i $)	i_1	i_2	i_3	Συνιστώσες (z_{i_i})	Βάρη (w_{i_i})
1	3	1	1	1	(0, 0, 0)	2 2 2
2	4	2	1	1	$(\sqrt{1/3}, 0, 0)$	1 2 2
3		2	1	1	$(-\sqrt{1/3}, 0, 0)$	1 2 2
4		1	2	1	$(0, \sqrt{1/3}, 0)$	2 1 2
5		1	2	1	$(0, -\sqrt{1/3}, 0)$	2 1 2
6		1	1	2	$(0, 0, \sqrt{1/3})$	1 2 2
7		1	1	2	$(0, 0, -\sqrt{1/3})$	1 2 2

Πίνακας 4.4: Δυνατοί συνδυασμοί δεικτών i_i των 7 σημείων που χρειάζεται η μέθοδος Smolyak, για $d = 3$ διαστάσεις και τάξη χάους $k = 1$. Για κάθε συνδυασμό δεικτών φαίνονται οι συνιστώσες του κόμβου, ο οποίος προκύπτει, όπως και τα βάρη που αντιστοιχούν σε καθένα από αυτές. Οι συνιστώσες και τα βάρη αυτά αφορούν στην οικογένεια πολυωνύμων Legendre.

Σύμφωνα με την εξίσωση 4.10, το ολοκλήρωμα 4.11 μπορεί να γραφεί ως

$$\begin{aligned}
I &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\vec{x}) d\vec{x} = \sum_{j=1}^{N_{SM}} W^{(j)} f(\vec{X}^{(j)}) = \sum_{j=1}^7 W^{(j)} f(\vec{X}^{(j)}) = \\
&= W^{(1)} f(X^{(1)}) + W^{(2)} f(X^{(2)}) + \dots + W^{(7)} f(X^{(7)}) \quad (4.14)
\end{aligned}$$

Αυτό που απομένει για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος I , είναι η αξιολόγηση της συνάρτησης $f(\vec{x})$ στα σημεία $X^{(j)}$ και ο υπολογισμός των βαρών $W^{(j)}$. Τα βάρη δίνονται από την εξίσωση 4.7.

Για το πρώτο σημείο, $X^{(1)} = (0, 0, 0)$, αντλώντας από τον πίνακα ;; τις τιμές που αντιστοιχούν στο άθροισμα $|i|$ και στα βάρη ω_{i_i} προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
f(X^{(1)}) &= 0 \\
W^{(1)} &= (-1)^{q+|i|} \binom{d-1}{q-|i|} \prod_{l=1}^d \omega_{i_l}^j = (-1)^{4-3} \binom{3-1}{4-3} \cdot \omega_{i_1}^1 \cdot \omega_{i_2}^1 \cdot \omega_{i_3}^1 = \\
&= (-1) \binom{2}{1} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = -16
\end{aligned}$$

Με την ίδια διαδικασία υπολογίζονται η συνάρτηση $f(X^{(j)})$ και τα βάρη $W^{(j)}$ των υπολοίπων 6 σημείων. Έτσι συμπληρώνεται ο πίνακας 4.5.

Σημείο (j)	$X^{(j)}$	$f(X^{(j)})$	$W^{(j)}$
1	(0,0,0)	0	-16
2	$(\sqrt{1/3}, 0, 0)$	0	4
3	$(-\sqrt{1/3}, 0, 0)$	0	4
4	$(0, \sqrt{1/3}, 0)$	0	4
5	$(0, -\sqrt{1/3}, 0)$	0	4
6	$(0, 0, \sqrt{1/3})$	1/3	4
7	$(0, 0, -\sqrt{1/3})$	1/3	4

Πίνακας 4.5: Τιμές της συνάρτησης $f(\vec{x})$ στα σημεία $X^{(j)}$ που υπαγορεύει η μέθοδος Smolyak και τα αντίστοιχα βάρη $W^{(j)}$. Πρόκειται για πρόβλημα τριών διαστάσεων και τάξη χάους $k = 1$. Οι συνιστώσες και τα βάρη αυτά αφορούν στην οικογένεια πολυωνύμων Legendre.

Αντικαθιστώντας τις τιμές του πίνακα 4.5 στην εξίσωση 4.14, προκύπτει για το ολοκλήρωμα I

$$\begin{aligned} I &= W^{(1)}f(X^{(1)}) + W^{(2)}f(X^{(2)}) + \dots + W^{(7)}f(X^{(7)}) = \\ &= 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 4 \cdot \frac{1}{3} + 4 \cdot \frac{1}{3} = \frac{8}{3} \end{aligned} \quad (4.15)$$

Το αριθμητικό αποτέλεσμα της 4.15 προκύπτει ίδιο με το αναλυτικό της 4.12 αφού πρόκειται για πολυωνυμική συνάρτηση δευτέρου βαθμού και για τάξη χάους $k = 1$ η μέθοδος είναι ακριβής για ολοκλήρωση πολυωνύμων έως και δευτέρου βαθμού.

• Ολοκλήρωση με Χρήση Πολυωνύμων Hermite

Έστω συνάρτηση $f(\vec{x}) = e^{-\frac{(x_1^2+x_2^2+x_3^2)}{2}} \cdot x_3^2$, με διάνυσμα εισόδου $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$. Ζητείται το ολοκλήρωμα

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\vec{x}) d\vec{x} \quad (4.16)$$

Το ολοκλήρωμα της 4.16 υπολογίζεται πρώτα αναλυτικά. Είναι

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\vec{x}) d\vec{x} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x_1^2+x_2^2+x_3^2)}{2}} \cdot x_3^2 dx_1 dx_2 dx_3 = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x_1^2}{2}} \cdot e^{-\frac{x_2^2}{2}} \cdot e^{-\frac{x_3^2}{2}} \cdot x_3^2 dx_1 dx_2 dx_3 = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x_3^2}{2}} \cdot x_3^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x_2^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x_1^2}{2}} dx_1 dx_2 dx_3 = \\ &= \sqrt{2\pi} \cdot \sqrt{2\pi} \cdot \sqrt{2\pi} \simeq 15.737634 \end{aligned} \quad (4.17)$$

Οι αποδείξεις των επιμέρους ολοκληρωμάτων της εξίσωσης 4.17 δίνονται στο παράρτημα Γ.

Για τον αριθμητικό υπολογισμό του ολοκληρώματος της 4.16, θα γραφεί η $f(\vec{x})$ ως γινόμενο μίας συνάρτησης βάρους $w(\vec{x})$ και μίας πολυωνυμικής συνάρτησης

$g(\vec{x})$. Είναι

$$f(\vec{x}) = e^{\frac{-(x_1^2+x_2^2+x_3^2)}{2}} \cdot x_3^2 = w(\vec{x}) \cdot g(\vec{x}) \quad (4.18)$$

όπου είναι προφανές ότι

$$w(\vec{x}) = e^{\frac{-(x_1^2+x_2^2+x_3^2)}{2}} \quad (4.19)$$

$$g(\vec{x}) = x_3^2 \quad (4.20)$$

Η συνάρτηση βάρους $w(\vec{x}) = e^{-x^2/2}$, αντιστοιχεί σε κανονική κατανομή και τα πολυώνυμα που εξυπηρετούν ολοκλήρωση τέτοιας μορφής, είναι τα πιθανοτικά πολυώνυμα Hermite.

Για $d = 3$ διαστάσεις και ορίζοντας τάξη χάους $k = 1$, η θεωρία Smolyak απαιτεί αξιολόγηση της συνάρτησης σε 7 σημεία. Οι αποδεκτοί συνδυασμοί δεικτών των σημείων αυτών, καθώς και οι τιμές των συντεταγμένων και των βαρών που αντιστοιχούν σε αυτούς τους δείκτες, παρουσιάζονται στον πίνακα ;;. Οι τιμές αντλούνται από τον πίνακα B'.1 του παραρτήματος 'B.

j	$ i $	i_1	i_2	i_3	Κόμβοι (z_{i_i})	Βάρη (w_{i_i})		
1	3	1	1	1	(0, 0, 0)	2.506628275	2.506628275	2.506628275
2	4	2	1	1	(1, 0, 0)	1.25331414	2.506628275	2.506628275
3		2	1	1	(-1, 0, 0)	1.25331414	2.506628275	2.506628275
4		1	2	1	(0, 1, 0)	2.506628275	1.25331414	2.506628275
5		1	2	1	(0, -1, 0)	2.506628275	1.25331414	2.506628275
6		1	1	2	(0, 0, 1)	2.506628275	2.506628275	1.25331414
7		1	1	2	(0, 0, -1)	2.506628275	2.506628275	1.25331414

Πίνακας 4.6: Δυνατοί συνδυασμοί δεικτών, i_i , των 7 σημείων που χρειάζεται η μέθοδος Smolyak, για $d = 3$ διαστάσεις και τάξη χάους $k = 1$. Για κάθε συνδυασμό δεικτών φαίνονται οι συνιστώσες του κόμβου, ο οποίος προκύπτει, όπως και τα βάρη που αντιστοιχούν σε καθένα από αυτές. Οι συνιστώσες και τα βάρη αυτά αφορούν στα πιθανοτικά πολυώνυμα Hermite.

Η θεωρία Smolyak υπαγορεύει ότι το ολοκλήρωμα της 4.16 υπολογίζεται ως

$$\begin{aligned}
I &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\vec{x}) d\vec{x} = \sum_{j=1}^{N_{SM}} W^{(j)} g(\vec{X}^{(j)}) = \sum_{j=1}^7 W^{(j)} g(\vec{X}^{(j)}) = \\
&= W^{(1)} g(X^{(1)}) + W^{(2)} g(X^{(2)}) + \dots + W^{(7)} g(X^{(7)}) \quad (4.21)
\end{aligned}$$

Η αξιολόγηση της συνάρτησης $g(\vec{x})$ στα 7 σημεία που απαιτεί η μέθοδος και ο υπολογισμός των βαρών που αντιστοιχούν σε αυτά, από την εξίσωση 4.7, φαίνονται στον πίνακα ;:

Σημείο (j)	$X^{(j)}$	$g(X^{(j)})$	$W^{(j)}$
1	(0,0,0)	0	-31.49921991
2	(1, 0, 0)	0	7.874804992
3	(-1, 0, 0)	0	7.874804992
4	(0, 1, 0)	0	7.874804992
5	(0, -1, 0)	0	7.874804992
6	(0, 0, 1)	1	7.874804992
7	(0, 0, -1)	1	7.874804992

Πίνακας 4.7: Τιμές της συνάρτησης $g(\vec{x})$ στα σημεία $X^{(j)}$ που υπαγορεύει η μέθοδος Smolyak και τα αντίστοιχα βάρη $W^{(j)}$.

Αντικαθιστώντας, λοιπόν, τις τιμές του πίνακα ;: στην εξίσωση 4.21, προκύπτει για την τιμή του ολοκληρώματος

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\vec{x}) d\vec{x} = \sum_{j=1}^7 W^{(j)} g(\vec{X}^{(j)}) \simeq 15.749609 \quad (4.22)$$

Από τις 4.22 και 4.17, φαίνεται ότι η αναλυτική λύση συμπίπτει με την αριθμητική αφού, όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα, η εφαρμογή αφορά σε πολυωνυμική συνάρτηση δευτέρου βαθμού.

4.2.2 Υπολογισμός Μέσης Τιμής και Τυπικής Απόκλισης Συνάρτησης με Στοχαστικές Εισόδους

Στην παράγραφο αυτή εφαρμόζεται η θεωρία του πολυδιάστατου PCE συνδυασμένη με τη θεωρία των αραιών πλεγμάτων Smolyak, για τον υπολογισμό μέσης τιμής και τυπικής απόκλισης συνάρτησης, όταν οι είσοδοι της συνάρτησης κατανέμονται στοχαστικά.

Έστω η συνάρτηση $g(\vec{x}) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$, με διάνυσμα εισόδου $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ και συνάρτηση βάρους $w(\vec{x}) = e^{\frac{-(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)}{2}}$. Η μορφή της συνάρτησης βάρους δηλώνει τη στοχαστική κατανομή που ακολουθείται και υπαγορεύει την οικογένεια ορθογώνιων πολυωνύμων που θα χρησιμοποιηθεί. Στο παράδειγμα αυτό οι μεταβλητές εισόδου κατανέμονται βάσει της κανονικής κατανομής και τα πολυώνυμα που χρησιμοποιούνται είναι της οικογένειας πιθανοτικών πολυωνύμων Hermite. Για την εφαρμογή της θεωρίας του PCE χρησιμοποιούνται τα κανονικοποιημένα πιθανοτικά πολυώνυμα Hermite. Η τάξη χάους, k , του προβλήματος ορίζεται ίση με 1. Οι μεταβλητές εισόδου κατανέμονται στοχαστικά ως εξής:

$$x_1 \sim \mathcal{N}(0, 4)$$

$$x_2 \sim \mathcal{N}(3, 4)$$

$$x_3 \sim \mathcal{N}(1, 16)$$

$$x_4 \sim \mathcal{N}(2, 9)$$

όπου, οι αριθμοί στις παρενθέσεις δηλώνουν την μέση τιμή, μ και την διακύμανση, σ^2 με την οποία κατανέμεται κάθε μεταβλητή αντίστοιχα.

Καθώς η αντικειμενική συνάρτηση είναι γραμμική και ως προς τις τέσσερις μεταβλητές, από τις γραμμικές ιδιότητες της μέσης τιμής και της διακύμανσης μπορεί να εκτιμηθεί ότι οι τιμές που αναμένονται είναι

$$\mu_Y = \mu_{x_1} + \mu_{x_2} + \mu_{x_3} + \mu_{x_4} = 0 + 3 + 1 + 2 = 6 \quad (4.23)$$

και

$$\sigma_Y = \sqrt{\sigma_Y^2} = \sqrt{\sigma_{x_1}^2 + \sigma_{x_2}^2 + \sigma_{x_3}^2 + \sigma_{x_4}^2} = \sqrt{4 + 4 + 16 + 9} \simeq 5.744562 \quad (4.24)$$

Για την εφαρμογή της θεωρίας του πολυδιάστατου PCE υπολογίζονται, αρχικά, τα πολυδιάστατα ορθογώνια πολυώνυμα $\tilde{\psi}_{m_k^k}$, όπως αυτά έχουν οριστεί από τις εξισώσεις 3.9 και 3.10.

Για τις συνθήκες του προβλήματος, δηλαδή για διαστάσεις $d = 3$ και τάξη χάους $k_{max} = 1$, οι δυνατοί συνδυασμοί βαθμών μονοπαραμετρικών κανονικών πολυωνύμων φαίνονται στον πίνακα ;;. Για τάξη χάους $k = 0$ προκύπτει ένα πολυδιάστατο ορθογώνιο πολυώνυμο μηδενικού βαθμού και για τάξη χάους $k = 1$, τέσσερα πολυδιάστατα πρώτου βαθμού. Τα πολυώνυμα αυτά, δίνονται από το σύνολο των εξισώσεων 4.25α', 4.25β', 4.25γ', 4.25δ' και 4.25ε'.

Τάξη	(r)	m_r^k	i_1	i_2	i_3	i_4	$\binom{k+d-1}{k}$	$\binom{k_{max}+d}{k_{max}}$
$k = 0$	1	0	0	0	0	0	1	
$k = 1$	1	1	1	0	0	0	3	4
	2	2	0	1	0	0		
	3	3	0	0	1	0		
	4	4	0	0	0	1		

Πίνακας 4.8: Δυνατοί συνδυασμοί μονοπαραμετρικών πολυωνύμων βαθμών i_1, i_2, i_3, i_4 , με άθροισμα βαθμών ίσο με την εκάστοτε τάξη k . Πρόκειται για πρόβλημα τεσσάρων διαστάσεων και τάξης χάους $k_{max} = 1$.

Τα 5 πολυδιάστατα πολυώνυμα που προκύπτουν είναι τα:

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_0(z_1^{(j)}, z_2^{(j)}, z_3^{(j)}, z_4^{(j)}) &= \widetilde{H}e_0(z_1^{(j)}) \cdot \widetilde{H}e_0(z_2^{(j)}) \cdot \widetilde{H}e_0(z_3^{(j)}) \cdot \widetilde{H}e_0(z_4^{(j)}) = 1 & (4.25\alpha') \\ \tilde{\psi}_1(z_1^{(j)}, z_2^{(j)}, z_3^{(j)}, z_4^{(j)}) &= \widetilde{H}e_1(z_1^{(j)}) \cdot \widetilde{H}e_0(z_2^{(j)}) \cdot \widetilde{H}e_0(z_3^{(j)}) \cdot \widetilde{H}e_0(z_4^{(j)}) = z_1^{(j)} & (4.25\beta') \\ \tilde{\psi}_2(z_1^{(j)}, z_2^{(j)}, z_3^{(j)}, z_4^{(j)}) &= \widetilde{H}e_0(z_1^{(j)}) \cdot \widetilde{H}e_1(z_2^{(j)}) \cdot \widetilde{H}e_0(z_3^{(j)}) \cdot \widetilde{H}e_0(z_4^{(j)}) = z_2^{(j)} & (4.25\gamma') \\ \tilde{\psi}_3(z_1^{(j)}, z_2^{(j)}, z_3^{(j)}, z_4^{(j)}) &= \widetilde{H}e_0(z_1^{(j)}) \cdot \widetilde{H}e_0(z_2^{(j)}) \cdot \widetilde{H}e_1(z_3^{(j)}) \cdot \widetilde{H}e_0(z_4^{(j)}) = z_3^{(j)} & (4.25\delta') \\ \tilde{\psi}_4(z_1^{(j)}, z_2^{(j)}, z_3^{(j)}, z_4^{(j)}) &= \widetilde{H}e_0(z_1^{(j)}) \cdot \widetilde{H}e_0(z_2^{(j)}) \cdot \widetilde{H}e_0(z_3^{(j)}) \cdot \widetilde{H}e_1(z_4^{(j)}) = z_4^{(j)} & (4.25\epsilon') \end{aligned}$$

Για τον υπολογισμό της μέσης τιμής και της τυπικής απόκλισης της συνάρτησης απαιτείται ο υπολογισμός των συντελεστών α_i , οι οποίοι δίνονται από την εξίσωση 3.41. Η εξίσωση 3.41 ορίζει, ότι τα πολυδιάστατα πολυώνυμα πρέπει να αξιολογηθούν στους κατάλληλους κόμβους \tilde{z}_j , που προβλέπονται από την εκάστοτε θεωρία. Η θεωρία αραιών πλεγμάτων Smolyak, για τις συνθήκες του προβλήματος, δίνει τους κόμβους που αναγράφονται στον πίνακα ;;. Στον ίδιο πίνακα αναγράφονται και οι αξιολογήσεις τον πολυδιάστατων πολυωνύμων $\tilde{\psi}$ στους κόμβους αυτούς. Οι τιμές των κόμβων αντλούνται από τον πίνακα Β'.1 του παραρτήματος Β, για τα κανονικοποιημένα πιθανοτικά πολυώνυμα Hermite, $\tilde{H}e_n$.

Σημεία (j)	$ i $	i_1	i_2	i_3	i_4	$(z_1^{(j)}, z_2^{(j)}, z_3^{(j)}, z_4^{(j)})$	$\tilde{\psi}_0$	$\tilde{\psi}_1$	$\tilde{\psi}_2$	$\tilde{\psi}_3$	$\tilde{\psi}_4$
1	4	1	1	1	1	(0, 0, 0, 0)	1	0	0	0	0
2	5	2	1	1	1	(1, 0, 0, 0)	1	1	0	0	0
3	5	2	1	1	1	(-1, 0, 0, 0)	1	-1	0	0	0
4	5	1	2	1	1	(0, 1, 0, 0)	1	0	1	0	0
5	5	1	2	1	1	(0, -1, 0, 0)	1	0	-1	0	0
6	5	1	1	2	1	(0, 0, 1, 0)	1	0	0	1	0
7	5	1	1	2	1	(0, 0, -1, 0)	1	0	0	-1	0
8	5	1	1	1	2	(0, 0, 0, 1)	1	0	0	0	1
9	5	1	1	1	2	(0, 0, 0, -1)	1	0	0	0	-1

Πίνακας 4.9: Αποδεκτοί συνδυασμοί δεικτών i_i για την δημιουργία αραιού πλέγματος *Smolyak* και άθροισμα $|i|$ αυτών. Απεικονίζονται οι κόμβοι $\vec{z}^{(j)}$ και οι αξιολογήσεις των πολυδιάστατων ορθογώνιων πολωνύμων $\tilde{\psi}$ στους κόμβους αυτούς.

Από την εξίσωση 3.41, φαίνεται επίσης, ότι απαραίτητη είναι και η αξιολόγηση της συνάρτησης $g(\vec{x}) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$, στους κατάλληλους κόμβους $\vec{x}^{(j)}$. Οι κόμβοι $\vec{z}^{(j)}$ που αναφέρθηκαν παραπάνω, αφορούν στο τυποποιημένο σύνολο της κανονικής κατανομής $Z(z \sim \mathcal{N}(0, 1))$, ενώ οι κόμβοι $\vec{x}^{(j)}$, στο πραγματικό σύνολο $X(x \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2))$. Ο μετασχηματισμός που εφαρμόζεται για την μετατροπή από το ένα σύνολο στο άλλο είναι ο

$$\frac{x - \mu}{\sigma} = z \longrightarrow x = \sigma z + \mu \quad (4.26)$$

Με βάση τη σχέση 4.26 και τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση κάθε μεταβλητής, υπολογίζονται τα σημεία $\vec{x}^{(j)}$. Για παράδειγμα, για το πρώτο σημείο, του οποίου οι συντεταγμένες στο τυποποιημένο σύνολο είναι $(z_1^{(1)}, z_2^{(1)}, z_3^{(1)}, z_4^{(1)}) = (0, 0, 0, 0)$ ο μετασχηματισμός δίνει

$$\begin{aligned} x_1^{(1)} &= \sigma_{x_1} z_1^{(1)} + \mu_{x_1} = 2 \cdot 0 + 0 = 0 \\ x_2^{(1)} &= \sigma_{x_2} z_2^{(1)} + \mu_{x_2} = 2 \cdot 0 + 3 = 3 \\ x_3^{(1)} &= \sigma_{x_3} z_3^{(1)} + \mu_{x_3} = 4 \cdot 0 + 1 = 1 \\ x_4^{(1)} &= \sigma_{x_4} z_4^{(1)} + \mu_{x_4} = 3 \cdot 0 + 2 = 2 \end{aligned}$$

και προκύπτει το σημείο $(x_1^{(j)}, x_2^{(j)}, x_3^{(j)}, x_4^{(j)}) = (0, 3, 1, 2)$. Το σύνολο των σημείων $\vec{x}^{(j)}$ και η αξιολόγηση της συνάρτησης $g(\vec{x})$ σε αυτά αναγράφονται στον πίνακα ; ; .

Τα βάρη $W^{(j)}$, που αντιστοιχούν στα σημεία $x^{(j)}$, υπολογίζονται και πάλι από την σχέση 4.7. Για τον υπολογισμό των βαρών $W^{(j)}$, χρειάζονται τα βάρη w_{i_j} που αντιστοιχούν στους κόμβους z_{i_j} και τα οποία αντλούνται από τον πίνακα Β'.1 του παραρτήματος Β, για την περίπτωση των κανονικοποιημένων πιθανοτικών πολυωνύμων. Για το πρώτο σημείο, με $q = k + d = 4$ και $|i| = 4$, είναι

$$W^{(1)} = (-1)^{(q-|i|)} \binom{d-1}{q-|i|} \prod_{l=1}^d \omega_{i_l}^{(j)} = (-1)^{(5-4)} \binom{4-1}{5-4} \cdot \omega_{i_1}^{(1)} \cdot \omega_{i_2}^{(1)} \cdot \omega_{i_3}^{(1)} \cdot \omega_{i_4}^{(1)} = -3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = -3$$

Με τη διαδικασία αυτή υπολογίζονται τα βάρη όλων των σημείων και συμπληρώνεται η τελευταία στήλη του πίνακα ; ; .

Σημεία (j)	$(x_1^{(j)}, x_2^{(j)}, x_3^{(j)})$	$g(x_1^{(j)}, x_2^{(j)}, x_3^{(j)})$	$W^{(j)}$
1	(0,3,1,2)	1	-3
2	(2,3,1,2)	1	1/2
3	(-2,3,1,2)	1	1/2
4	(0,5,1,2)	1	1/2
5	(0,1,1,2)	1	1/2
6	(0,3,5,2)	25	1/2
7	(0,3,-3,2)	9	1/2
8	(0,3,1,5)	9	1/2
9	(0,3,1-12)	9	1/2

Πίνακας 4.10: Κόμβοι $\vec{x}^{(j)}$ των 9 σημείων που απαιτεί η μέθοδος Smolyak, αξιολόγηση της συνάρτησης $g(\vec{x}^{(j)})$ σε αυτά και τα αντίστοιχα βάρη των σημείων.

Έχοντας υπολογίσει ότι χρειάζεται και επιστρέφοντας στην εξίσωση 3.41, μπορούν πλέον να υπολογιστούν οι συντελεστές α_i . Είναι

$$\begin{aligned}
a_0 &\simeq \sum_{j=1}^n F(\vec{x}^{(j)}) \cdot \tilde{\psi}_0(\vec{z}^{(j)}) \cdot W^{(j)} = \sum_{j=1}^9 F(\vec{x}^{(j)}) \cdot \tilde{\psi}_0(\vec{z}^{(j)}) \cdot W^{(j)} = \\
&= F(\vec{x}^{(1)}) \cdot \tilde{\psi}_0(\vec{z}^{(1)}) \cdot W^{(1)} + \dots + F(\vec{x}^{(9)}) \cdot \tilde{\psi}_0(\vec{z}^{(9)}) \cdot W^{(9)} = 6 \quad (4.27)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_1 &\simeq \sum_{j=1}^n F(\vec{x}^{(j)}) \cdot \tilde{\psi}_1(\vec{z}^{(j)}) \cdot W^{(j)} = \sum_{j=1}^9 F(\vec{x}^{(j)}) \cdot \tilde{\psi}_1(\vec{z}^{(j)}) \cdot W^{(j)} = \\
&= F(\vec{x}^{(1)}) \cdot \tilde{\psi}_1(\vec{z}^{(1)}) \cdot W^{(1)} + \dots + F(\vec{x}^{(9)}) \cdot \tilde{\psi}_1(\vec{z}^{(9)}) \cdot W^{(9)} = 2 \quad (4.28)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_2 &\simeq \sum_{j=1}^n F(\vec{x}^{(j)}) \cdot \tilde{\psi}_2(\vec{z}^{(j)}) \cdot W^{(j)} = \sum_{j=1}^9 F(\vec{x}^{(j)}) \cdot \tilde{\psi}_2(\vec{z}^{(j)}) \cdot W^{(j)} = \\
&= F(\vec{x}^{(1)}) \cdot \tilde{\psi}_2(\vec{z}^{(1)}) \cdot W^{(1)} + \dots + F(\vec{x}^{(9)}) \cdot \tilde{\psi}_2(\vec{z}^{(9)}) \cdot W^{(9)} = 2 \quad (4.29)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_3 &\simeq \sum_{j=1}^n F(\vec{x}^{(j)}) \cdot \tilde{\psi}_3(\vec{z}^{(j)}) \cdot W^{(j)} = \sum_{j=1}^9 F(\vec{x}^{(j)}) \cdot \tilde{\psi}_3(\vec{z}^{(j)}) \cdot W^{(j)} = \\
&= F(\vec{x}^{(1)}) \cdot \tilde{\psi}_3(\vec{z}^{(1)}) \cdot W^{(1)} + \dots + F(\vec{x}^{(9)}) \cdot \tilde{\psi}_3(\vec{z}^{(9)}) \cdot W^{(9)} = 4 \quad (4.30)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_4 &\simeq \sum_{j=1}^n F(\vec{x}^{(j)}) \cdot \tilde{\psi}_4(\vec{z}^{(j)}) \cdot W^{(j)} = \sum_{j=1}^9 F(\vec{x}^{(j)}) \cdot \tilde{\psi}_4(\vec{z}^{(j)}) \cdot W^{(j)} = \\
&= F(\vec{x}^{(1)}) \cdot \tilde{\psi}_4(\vec{z}^{(1)}) \cdot W^{(1)} + \dots + F(\vec{x}^{(9)}) \cdot \tilde{\psi}_4(\vec{z}^{(9)}) \cdot W^{(9)} = 3 \quad (4.31)
\end{aligned}$$

Συνεπώς η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση της συνάρτησης $f(\vec{x}) = e^{\frac{-(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)}{2}} \cdot x_3^2$,

είναι

$$\begin{aligned}\mu_Y &= a_0 = 6 \\ \sigma_Y &\simeq \sqrt{\sum_{i=1}^N a_i^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_2^2} \simeq 5,744562\end{aligned}$$

Οι προκύπτουσες τιμές, λοιπόν, από τη θεωρία πολυδιάστατου PCE με χρήση αραιών πλεγμάτων Smolyak προκύπτουν ακριβώς ίδιες με τις αναμενόμενες των εξισώσεων 4.23 και 4.24. Όπως ήδη αναφέρθηκε και στα προηγούμενα δυο παραδείγματα, όταν η τάξη χάους του προβλήματος είναι ίση με 1, η ολοκλήρωση Gauss Quadrature δίνει ακριβή αποτελέσματα για πολυώνυμα έως και δευτέρου βαθμού. Για αυτόν το λόγο και το αποτέλεσμα του παραδείγματος αυτού προκύπτει ακριβές.

4.3 Υπολογισμός Μέσης Τιμής και Τυπικής Απόκλισης Εμβαδού Στοχαστικού Περιγράμματος Αεροτομής

Στην ενότητα αυτή, εφαρμόζεται η θεωρία του αναπτύγματος πολυδιάστατου πολυωνυμικού χάους, για τον υπολογισμό μέσης τιμής και τυπικής απόκλισης εμβαδού περιγράμματος αεροτομής και συγκεκριμένα της πτερύγωσης στροβίλου VKI LS89, όταν ορισμένα από τα σημεία ελέγχου Bezier που το δημιουργούν, υπόκεινται σε στοχαστικότητα όσον αφορά στη θέση τους. Το πρόβλημα λύνεται με δύο μεθόδους, με τη μέθοδο των πλήρων πλεγμάτων και τη μέθοδο των αραιών πλεγμάτων Smolyak. Γίνεται σύγκριση των αποτελεσμάτων των δύο μεθόδων.

Για τον υπολογισμό του εμβαδού του περιγράμματος της αεροτομής, γίνεται εφαρμογή του θεωρήματος Green. Έστω χωρίο D , υποσύνολο του \mathcal{R}^2 και συνάρτηση $F = (P, Q)$, με πεδίο τιμών το \mathcal{R}^2 , όπου $P = P(x, y)$ και $Q = Q(x, y)$. Το θεώρημα Green, ανάγει το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα πάνω στο σύνορο του χωρίου D , σε διπλό ολοκλήρωμα στο ίδιο χωρίο. Η μαθηματική του έκφραση είναι :

$$\int_{\partial D} (P(x, y)dx + Q(x, y)dy) = \int \int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \quad (4.32)$$

Αν τεθεί $Q(x, y) = \frac{1}{2} \cdot x$ και $P(x, y) = -\frac{1}{2} \cdot y$, η εξίσωση 4.32, δίνει:

$$\begin{aligned}
& \int_{\partial D} (P(x, y)dx + Q(x, y)dy) = \int \int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \Rightarrow \\
& \Rightarrow \int_{\partial D} \left(-\frac{1}{2}ydx + \frac{1}{2}xdy \right) = \int \int_D \left(\frac{\partial(\frac{1}{2}x)}{\partial x} - \frac{\partial(-\frac{1}{2}y)}{\partial y} \right) dx dy \Rightarrow \\
& \Rightarrow \frac{1}{2} \int_{\partial D} (xdy - ydx) = \int \int_D \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) dx dy = \int \int_D dx dy \quad (4.33)
\end{aligned}$$

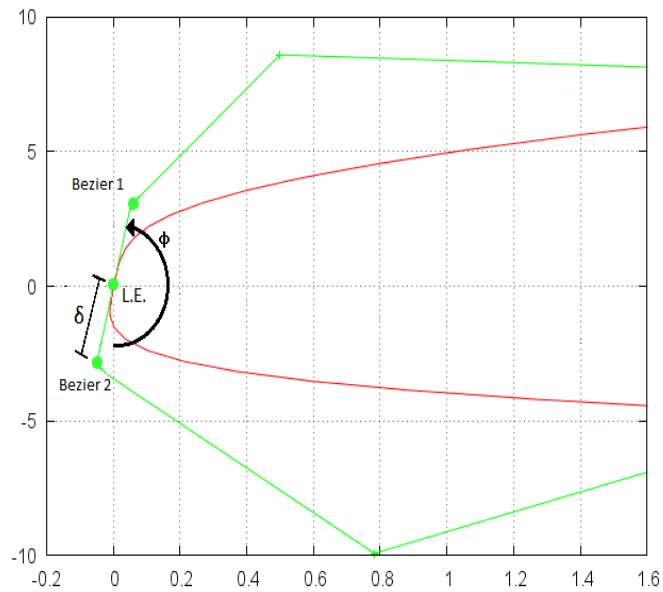
Το τελευταίο διπλό ολοκλήρωμα της 4.33, είναι ουσιαστικά το εμβαδόν E του χωρίου D . Ισχύει, δηλαδή, ότι :

$$E = \frac{1}{2} \int_{\partial D} (xdy - ydx) \quad (4.34)$$

Το εμβαδόν, λοιπόν, του περιγράμματος της αεροτομής υπολογίζεται από τη σχέση 4.34, όταν ως χωρίο D υποτεθεί το σχήμα της αεροτομής. Το ολοκλήρωμα της 4.34 δεν υπολογίζεται αναλυτικά αλλά υπολογιστικά, αφού πρώτα διακριτοποιηθεί το περίγραμμα της αεροτομής.

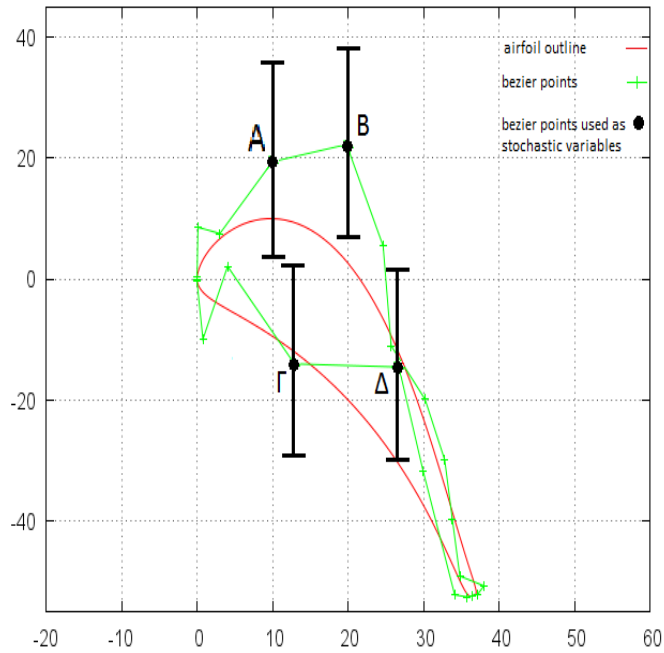
Όπως ήδη αναφέρθηκε, το περίγραμμα της αεροτομής και συνεπώς το εμβαδόν της, δεν διατηρείται σταθερό αλλά υπόκειται σε κάποια στοχαστικότητα. Το σχήμα της αεροτομής ελέγχεται εξ ολοκλήρου από σημεία ελέγχου Bezier. Συνεπώς, η στοχαστικότητα του δημιουργηθέντος περιγράμματος, υπεισέρχεται σε αυτό, μέσω της στοχαστικότητας της θέσης των σημείων ελέγχου Bezier.

Ως στοχαστικές μεταβλητές του προβλήματος, λοιπόν, επιλέγονται οι θέσεις 6 σημείων ελέγχου Bezier, δύο στην πλευρά υποπίεσης, δύο στην πλευρά υπερπίεσης και δύο στην ακμή προσβολής. Συγκεκριμένα, για τα 4 σημεία ελέγχου της πλευράς υποπίεσης και υπερπίεσης, η στοχαστικότητα έγκειται στις κατά- y συνιστώσες τους. Η επίδραση στη θέση των σημείων αυτών γίνεται άμεσα, μεταβάλλοντας την τιμή της κατά- y συνιστώσας του κάθε σημείου. Για τα δύο σημεία ελέγχου της ακμής προσβολής, ο επηρεασμός της θέσης αυτών, γίνεται έμμεσα, επιδρώντας στις τιμές δυο παραμέτρων που αφορούν στην ακμή προσβολής. Οι παράμετροι αυτές, είναι η παράμετρος απόστασης δ και η παράμετρος γωνίας φ , των οποίων η εισαγωγή έγινε στο 2ο κεφάλαιο. Αλλάζοντας τις τιμές των παραμέτρων αυτών, αλλάζει και η θέση των σημείων ελέγχου Bezier της ακμής προσβολής. Στο σχήμα 4.3, απεικονίζονται οι παράμετροι δ και φ για την υπενθύμιση της σημασίας τους.



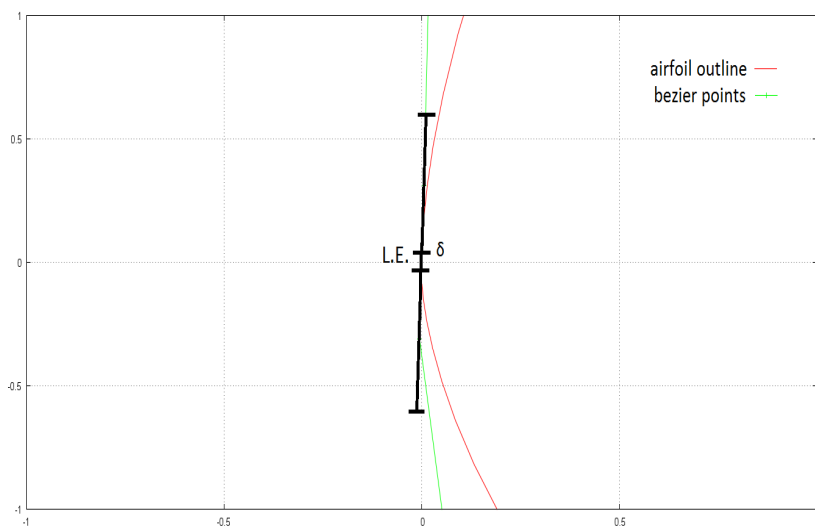
Σχήμα 4.3: Πτερύγωση στροβίλου VKI LS89. Σχηματική απεικόνιση των παραμέτρων δ και ϕ . Με Bezier 1 συμβολίζεται το σημείο που δημιουργείται στην πλευρά υποπίεσης ενώ με Bezier 2 αυτό της πλευράς υπερπίεσης.

Στο σχήμα 4.4 απεικονίζονται τα 4 σημεία ελέγχου Bezier A, B, Γ, Δ των οποίων οι κατά- y συνιστώσες επιλέγονται ως στοχαστικές μεταβλητές του προβλήματος. Στο ίδιο σχήμα φαίνεται και το εύρος $\pm 3\sigma$ της κάθε μεταβλητής, μέσα στο οποίο μπορεί να πάρει τιμές. Η μέση τιμή, μ , η τυπική απόκλιση, σ , και τα όρια τιμών κάθε μεταβλητής αναγράφονται στον πίνακα 4.11 .

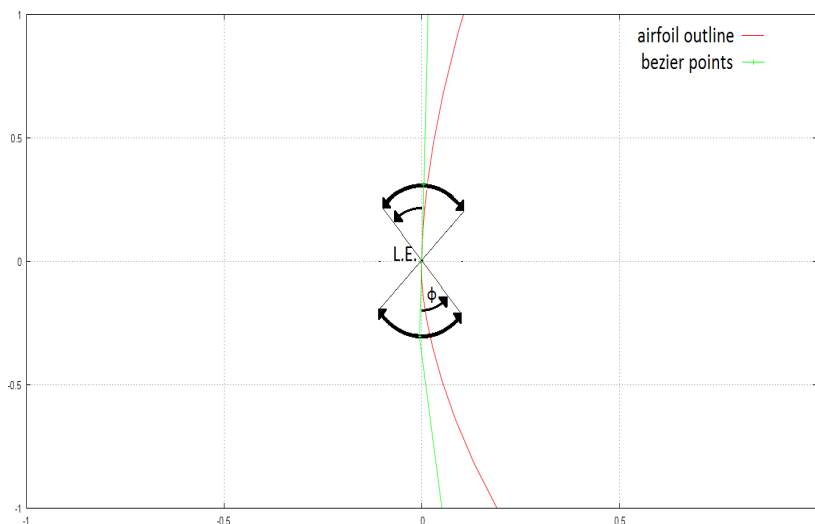


Σχήμα 4.4: Πτερύγωση στροβίλου VKI LS89. Σημεία ελέγχου Bezier A, B, Γ, Δ των οποίων οι κατα-y συνιστώσες αποτελούν στοχαστικές μεταβλητές του προβλήματος. Απεικονίζεται, επίσης, το εύρος $\pm 3\sigma$ της κάθε μεταβλητής, μέσα στο οποίο μπορεί να πάρει τιμές. Η τυπική απόκλιση, σ και για τις 4 μεταβλητές είναι ίση με 5.

Στα σχήματα 4.5 και 4.6 φαίνονται οι παράμετροι δ και φ , που επίσης αποτελούν στοχαστικές μεταβλητές του προβλήματος, όπως και τα εύρη $\pm 3\sigma$ της καθεμιάς. Ο πίνακας 4.11 δίνει τις μέσες τιμές, τις τυπικές αποκλίσεις και τα διαστήματα μέσα στα οποία μπορούν να πάρουν τιμές οι παράμετροι αυτές.



Σχήμα 4.5: Πτερύγωση στροβίλου VKI LS89. Παράμετρος απόστασης δ , η οποία αποτελεί στοχαστική μεταβλητή του προβλήματος. Για σταθερή τιμή της παραμέτρου ϕ , φαίνεται το εύρος $\pm 3\sigma$, μέσα στο οποίο η παράμετρος δ μπορεί να λάβει τιμές.



Σχήμα 4.6: Πτερύγωση στροβίλου VKI LS89. Παράμετρος γωνίας ϕ , η οποία αποτελεί στοχαστική μεταβλητή του προβλήματος. Για σταθερή τιμή της παραμέτρου δ , φαίνεται το εύρος $\pm 3\sigma$, μέσα στο οποίο η παράμετρος ϕ μπορεί να λάβει τιμές.

Στοχαστικές Μεταβλητές	μ	σ	$(\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma)$
y_A	19.4	5	(4.4, 34.4)
y_B	22.27	5	(7.27, 37.27)
y_Γ	-13.99	5	(-28.99, 1.01)
y_Δ	-14.5	5	(-29.5, 0.5)
δ	0.31	0.1	(0.1, 0.61)
φ	-1	15	(-46, 44)

Πίνακας 4.11: Οι 6 στοχαστικές μεταβλητές του προβλήματος. Οι μέσες τιμές, οι τυπικές αποκλίσεις και το εύρος $\pm 3\sigma$ μέσα στο οποίο μπορούν να λάβουν τιμές.

Έχοντας, πλέον, πλήρως ορισμένες τις στοχαστικές μεταβλητές του προβλήματος, είναι δυνατόν να γίνει ο υπολογισμός της μέσης τιμής και της τυπικής απόκλισης του εμβαδού του περιγράμματος της αεροτομής. Ο υπολογισμός αυτός γίνεται με τη μέθοδο των πλήρων και των αραιών πλεγμάτων Smolyak για διάφορες τάξεις χάους. Έγιναν, επίσης, και 10000 υπολογισμοί του εμβαδού όπου η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση υπολογίστηκαν με την μέθοδο Monte Carlo. Τα αποτελέσματα αναγράφονται στους πίνακες 4.13, 4.14 και 4.12 .

Monte Carlo		
Δείγμα	μ_E	σ_E
10000	606.491051	45.999957

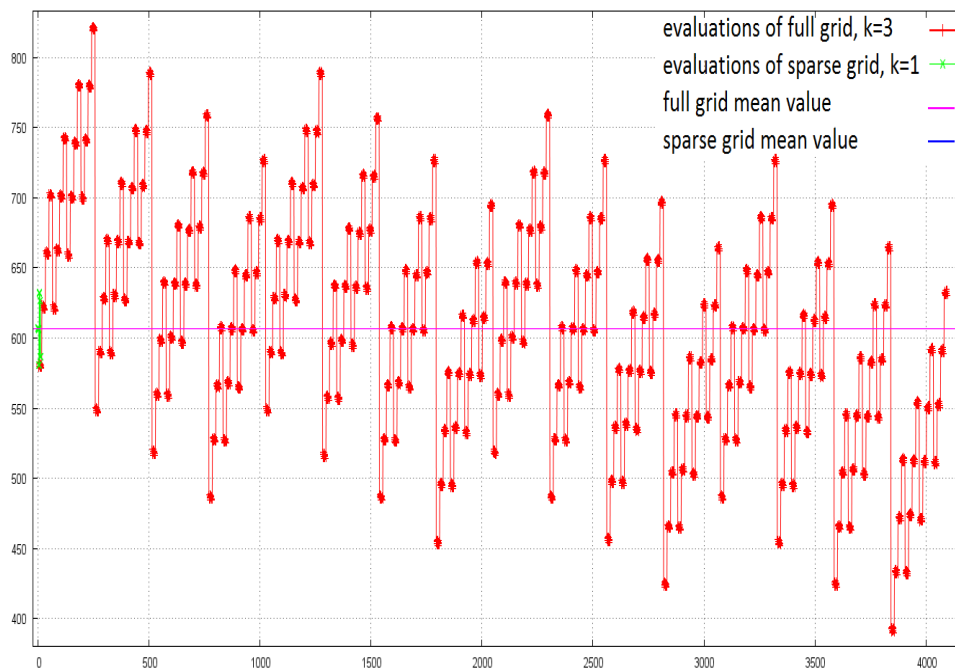
Πίνακας 4.12: Μέση τιμή και τυπική απόκλιση εμβαδού περιγράμματος αεροτομής με χρήση της μεθόδου Monte Carlo με δείγμα 10000 σημείων.

Τάξη Χάους k	Αριθμός Αξιολογήσεων Πλήρους Πλέγματος	μ_E	σ_E
1	64	606.506051	46.241830
2	729	606.506840	46.241925
3	4096	606.506822	46.241923

Πίνακας 4.13: Μέση τιμή και τυπική απόκλιση εμβαδού περιγράμματος αεροτομής με χρήση πλήρων πλεγμάτων και για διάφορες τάξεις χάους. Πρόκειται για πρόβλημα 6 στοχαστικών μεταβλητών.

Τάξη Χάους k	Αριθμός Αξιολογήσεων Αραιού Πλέγματος	μ_E	σ_E
1	13	606.506470	46.242432
2	85	606.506148	46.241794
3	389	606.507850	46.242355

Πίνακας 4.14: Μέση τιμή και τυπική απόκλιση εμβαδού περιγράμματος αεροτομής με χρήση αραιών πλεγμάτων Smolyak και για διάφορες τάξεις χάους. Πρόκειται για πρόβλημα 6 στοχαστικών μεταβλητών.



Σχήμα 4.7: Αξιολογήσεις αντικειμενικής συνάρτησης (εμβαδόν περιγράμματος αεροτομής) στους κόμβους αραιού πλέγματος για τάξη χάους $k = 1$ και πλήρους πλέγματος για $k = 3$. Είναι εντυπωσιακό το γεγονός ότι η μέση τιμή προερχόμενη από τους 13 κόμβους του αραιού πλέγματος, ταυτίζεται σχεδόν με την μέση τιμή του πλήρους πλέγματος η οποία προκύπτει από τις αξιολογήσεις 4096 κόμβων.

Τα αποτελέσματα των πινάκων 4.13 και 4.14, όπως και του σχήματος 4.7, υποδεικνύουν ότι σε ένα πολυδιάστατο πρόβλημα, όπως το συγκεκριμένο, οι δύο μέθοδοι δίνουν ουσιαστικά ίδια αποτελέσματα, με τη μέθοδο των αραιών πλεγμάτων Smolyak να χρειάζεται αισθητά λιγότερες αξιολογήσεις της αντικειμενικής συνάρτησης, αυξανόμενης της τάξης χάους. Με την εφαρμογή αυτή, λοιπόν, επιδεικνύεται η μέθοδος αραιών πλεγμάτων Smolyak ως αξιόπιστη και οικονομική.

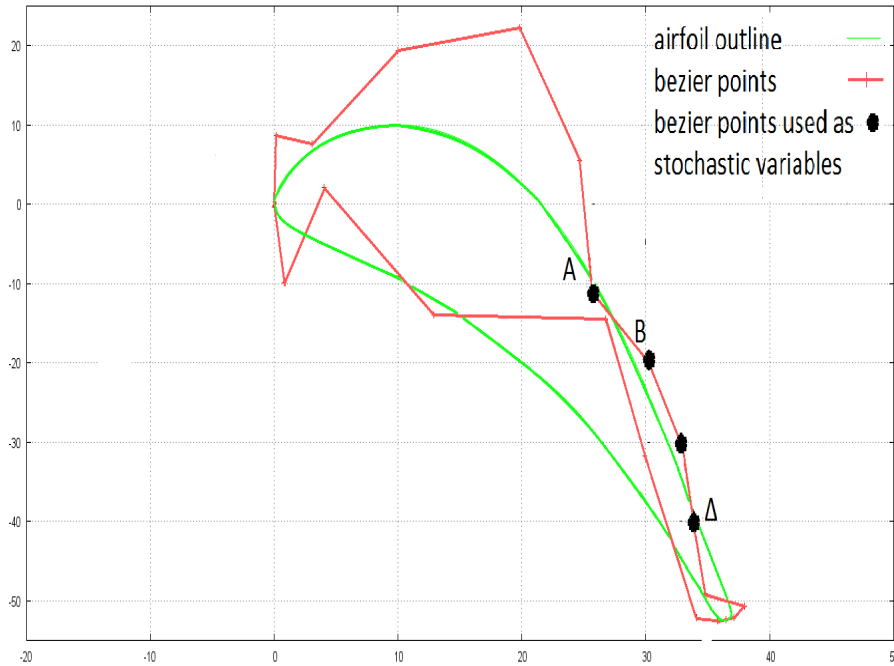
4.4 Εφαρμογή PCE και Αραιών Πλεγμάτων Smolyak σε Πολυδιάστατα Προβλήματα Αεροδυναμικής Βελτιστοποίησης

Αφού, λοιπόν, πιστοποιήθηκε η μέθοδος αραιών πλεγμάτων Smolyak ως αξιόπιστη σε ένα απλό πολυδιάστατο πρόβλημα μαθηματικών, εφαρμόζεται στην ενότητα αυτήν σε πολυδιάστατα προβλήματα αεροδυναμικής. Τα αποτελέσματα της μεθόδου συγκρίνονται με αυτά της μεθόδου πλήρων πλεγμάτων. Η μέθοδος εφαρμόζεται στις πτερυγώσεις στροβίλου VKI LS89 [14] και συμπιεστή SC10 [15].

4.4.1 Εφαρμογή στην Πτερύγωση Στροβίλου VKI LS89

Πρόκειται για πρόβλημα 4 διαστάσεων, δηλαδή 4 στοχαστικών μεταβλητών οι οποίες αφορούν στη γεωμετρία του περιγράμματος της αεροτομής. Τις στοχαστικές μεταβλητές αυτές, αποτελούν 4 κατα- y συνιστώσες σημείων ελέγχου Bezier. Τα σημεία ελέγχου Bezier των οποίων οι κατα- y συνιστώσες αποτελούν στοχαστικές μεταβλητές του προβλήματος, απεικονίζονται στο σχήμα 4.8. Στο ίδιο σχήμα φαίνονται και τα εύρη $\pm 3\sigma$, μέσα στα οποία μπορεί κάθε μεταβλητή να λάβει τιμές με πιθανότητα 99.7%. Στον πίνακα 4.15 αναγράφονται οι μέσες τιμές, οι τυπικές αποκλίσεις και τα εύρη μέσα στα οποία λαμβάνουν τιμές οι μεταβλητές.

Ως αντικειμενική συνάρτηση του προβλήματος επιλέγεται η στροφή της ροής, $a_1 - a_2$. Ο πίνακας 4.17 περιέχει τα αποτελέσματα των αξιολογήσεων για διάφορες τάξεις χάους. Εφαρμόστηκε, επιπλέον, η μέθοδος Monte Carlo με δείγμα 400 σημείων. Τα αποτελέσματα περιέχονται στον πίνακα 4.16.



Σχήμα 4.8: Πτερύγωση στροβίλου VKI LS89. Σημεία ελέγχου Bezier A, B, Γ, Δ των οποίων οι κατα-y συνιστώσες αποτελούν στοχαστικές μεταβλητές του προβλήματος.

Στοχαστικές Μεταβλητές	μ	σ	$(\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma)$
y_A	-11.03	0.001	(-26.3, 3.7)
y_B	-19.84	0.001	(-34.84, -4.84)
y_Γ	-29.88	0.001	(-44.88, -14.88)
y_Δ	-39.65	0.001	(-54.65, 0.24.65)

Πίνακας 4.15: Πτερύγωση στροβίλου VKI LS89. Οι 4 στοχαστικές μεταβλητές του προβλήματος. Οι μέσες τιμές, οι τυπικές αποκλίσεις και τα εύρη $\pm 3\sigma$.

Monte Carlo		
Δείγμα	μ_E	σ_E
400	74.8976	$1.1641 \cdot 10^{-2}$

Πίνακας 4.16: Πτερύγωση στροβίλου VKI LS89. Μέση τιμή και τυπική απόκλιση στροφής της ροής με χρήση της μεθόδου Monte Carlo με δείγμα 400 σημείων.

4.4.2 Εφαρμογή στην Πτερύγωση Συμπιεστή SC10

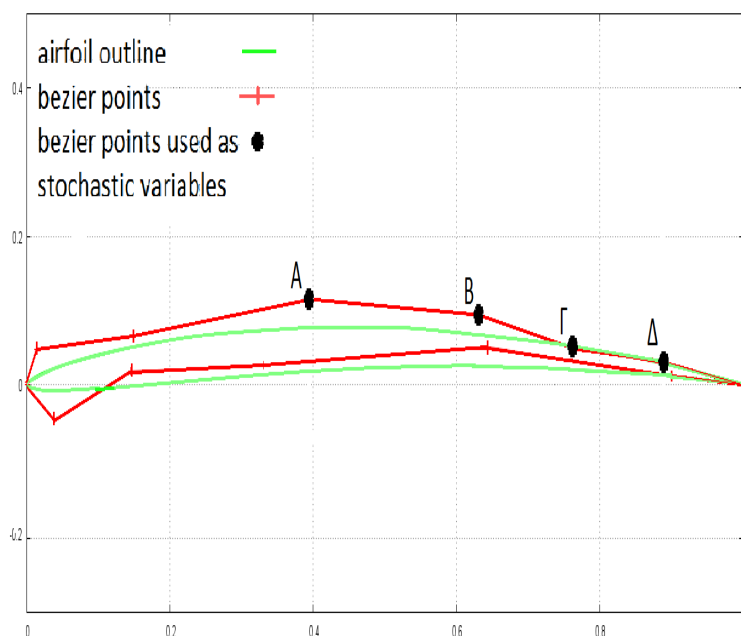
Πρόκειται για πρόβλημα 4 στοχαστικών μεταβλητών οι οποίες αφορούν στην γεωμετρία του περιγράμματος της αεροτομής. Ως στοχαστικές μεταβλητές επιλέγονται οι κατα-y

Τάξη Χάους k	Πλήρες Πλέγμα		Αραιό Πλέγμα	
	$\mu_{(a1-a2)}$	$\sigma_{(a1-a2)}$	$\mu_{(a1-a2)}$	$\sigma_{(a1-a2)}$
1	74.8993	$4.1804 \cdot 10^{-4}$	74.8989	$2.0303 \cdot 10^{-4}$
2	74.8976	$6.9651 \cdot 10^{-3}$	74.8992	$1.4045 \cdot 10^{-3}$
3	-	-	74.8940	$2.266332 \cdot 10^{-2}$

Πίνακας 4.17: Μέση τιμή και τυπική απόκλιση στροφής της ροής σε περύγωση στροβίλου VKI LS89, με χρήση πλήρων και αραιών πλεγμάτων Smolyak και για διάφορες τάξεις χάους. Πρόκειται για πρόβλημα 4 στοχαστικών μεταβλητών. Η μέθοδος των πλήρων πλεγμάτων για $k = 3$ δεν πραγματοποιήθηκε αφού είναι αρκετά κοστοβόρα.

συνιστώσες 4 σημείων ελέγχου Bezier. Τα σημεία ελέγχου Bezier των οποίων οι κατα- y συνιστώσες αποτελούν στοχαστικές μεταβλητές του προβλήματος, απεικονίζονται στο σχήμα 4.9. Στον πίνακα 4.19 αναγράφονται οι μέσες τιμές, οι τυπικές αποκλίσεις και τα εύρη μέσα στα οποία λαμβάνουν τιμές οι μεταβλητές.

Ως αντικειμενικές συναρτήσεις του προβλήματος επιλέγονται η στροφή της ροής, $a1 - a2$ και η πτώση της ολικής πίεσης, $(p_{t_1} - p_{t_2})$. Οι πίνακες 4.20 και 4.21 περιέχουν τα αποτελέσματα των αξιολογήσεων για διάφορες τάξεις χάους για του δύο τύπους πλεγμάτων. Έγινε, επιπλέον, υπολογισμός της μέσης τιμής και της τυπικής απόκλισης με την μέθοδο Monte Carlo με δείγμα 400 σημείων. Τα αποτελέσματα της μεθόδου δίνονται στον πίνακα 4.18.



Σχήμα 4.9: Περύγωση Συμπιεστή SC10. Σημεία ελέγχου Bezier A, B, Γ, Δ των οποίων οι κατα- y συνιστώσες αποτελούν στοχαστικές μεταβλητές του προβλήματος.

Monte Carlo

Δείγμα	μ	σ
400	$\mu_{(\alpha_1-\alpha_1)}$	$\sigma_{(\alpha_1-\alpha_1)}$
	40.4464	$5.6022 \cdot 10^{-2}$
	$\mu_{(p_{t_1}-p_{t_2})}$	$\sigma_{(p_{t_1}-p_{t_2})}$
	$4.3993 \cdot 10^{-3}$	10^{-4}

Πίνακας 4.18: Πτερύγωση Συμπίεστη SC10. Μέση τιμή και τυπική απόκλιση στροφής της ροής και πτώσης ολικής με χρήση της μεθόδου Monte Carlo με δείγμα 400 σημείων.

Στοχαστικές Μεταβλητές	μ	σ	$(\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma)$
y_A	0.0146	0.001	(0.1136, 0.1156)
y_B	0.093	0.001	(0.092, 0.094)
y_Γ	0.05	0.001	(0.049, 0.052)
y_Δ	0.03	0.001	(0.029, 0.031)

Πίνακας 4.19: Πτερύγωση συμπίεστη SC10. Οι 4 στοχαστικές μεταβλητές του προβλήματος. Οι μέσες τιμές, οι τυπικές αποκλίσεις και τα εύρη $\pm 3\sigma$.

Τάξη Χάους k	Πλήρες Πλέγμα		Αραιό Πλέγμα	
	$\mu_{(a_1-a_2)}$	$\sigma_{(a_1-a_2)}$	$\mu_{(a_1-a_2)}$	$\sigma_{(a_1-a_2)}$
1	40.4473	$2.4250 \cdot 10^{-2}$	40.4926	$7.4252 \cdot 10^{-2}$
2	40.4207	$1.4322 \cdot 10^{-2}$	40.3373	0.186960
3	-	-	40.7591	0.467768

Πίνακας 4.20: Πτερύγωση Συμπίεστη SC10. Μέση τιμή και τυπική απόκλιση στροφής της ροής με χρήση πλήρων και αραιών πλεγμάτων Smolyak και για διάφορες τάξεις χάους. Πρόκειται για πρόβλημα 4 στοχαστικών μεταβλητών. Η μέθοδος των πλήρων πλεγμάτων για $k = 3$ δεν πραγματοποιήθηκε αφού είναι αρκετά κοστοβόρα.

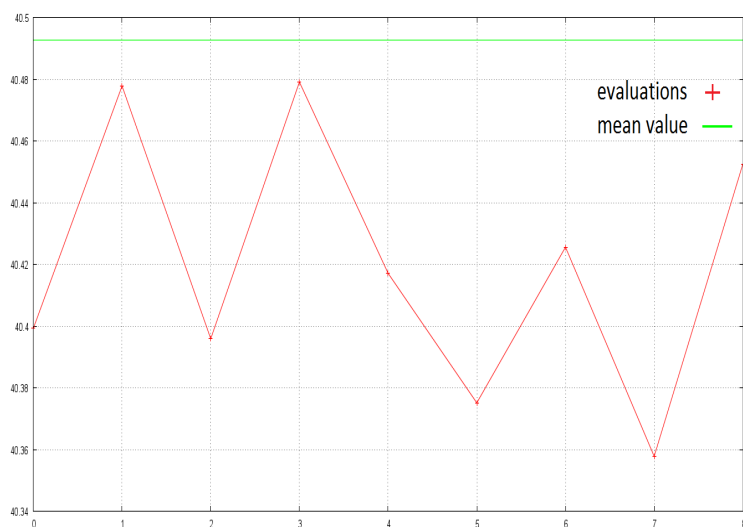
Τάξη Χάους k	Πλήρες Πλέγμα		Αραιό Πλέγμα	
	$\mu_{(p_{t1}-p_{t2})}$	$\sigma_{(p_{t1}-p_{t2})}$	$\mu_{(p_{t1}-p_{t2})}$	$\sigma_{(p_{t1}-p_{t2})}$
1	$4.4008 \cdot 10^{-3}$	$7.1276 \cdot 10^{-5}$	4.315910^{-3}	$1.7151 \cdot 10^{-3}$
2	$4.4437 \cdot 10^{-3}$	$1.0270 \cdot 10^{-4}$	$4.605501 \cdot 10^{-3}$	$3.402581 \cdot 10^{-4}$
3	-	-	$3.812313 \cdot 10^{-3}$	$8.974648 \cdot 10^{-4}$

Πίνακας 4.21: Πτερύγωση Συμπιεστή SC10. Μέση τιμή και τυπική απόκλιση απωλειών ολικής πίεσης με χρήση πλήρων και αραιών πλεγμάτων Smolyak και για διάφορες τάξεις χάους. Πρόκειται για πρόβλημα 4 στοχαστικών μεταβλητών. Η μέθοδος των πλήρων πλεγμάτων για $k = 3$ δεν πραγματοποιήθηκε αφού είναι αρκετά κοστοβόρα.

4.4.3 Σχολιασμός των Αποτελεσμάτων και της Μεθόδου Αραιών Πλεγμάτων Smolyak

Τα αποτελέσματα των πινάκων 4.17, 4.20 και 4.21 της μεθόδου αραιών πλεγμάτων προκάλεσαν προσεκτικότερη ανάγνωση, αφού η μέση τιμή των αντικειμενικών συναρτήσεων δεν φαίνεται να συγκλίνει σε κάποια τιμή. Ορμώμενοι, λοιπόν, από το γεγονός αυτό, αποφασίσαμε να ερευνήσουμε καλύτερα τα αποτελέσματα και τον τρόπο με τον οποίο λειτουργεί η μέθοδος Smolyak.

Μελετάται η περίπτωση πτερύγωσης συμπιεστή SC10, για 4 στοχαστικές μεταβλητές, τάξη χάους $k = 1$ και αντικειμενική συνάρτηση τη στροφή της ροής. Για τις συνθήκες ενός τέτοιου προβλήματος η θεωρία Smolyak υπαγορεύει την αξιολόγηση της αντικειμενικής συνάρτησης σε 9 κόμβους. Οι αξιολογήσεις αυτές και η μέση τιμή που προκύπτει από τη θεωρία δείχνονται στο σχήμα 4.10.



Σχήμα 4.10: Πτερύγωση στροβίλου SC10. Αξιολογήσεις της αντικειμενικής συνάρτησης, στροφή στις ροές, στους διάφορους κόμβους του αραιού πλέγματος Smolyak και η προκύπτουσα μέση τιμή. Πρόκειται για πρόβλημα 4 διαστάσεων, τάξη χάους $k = 1$ και αφορά σε πτερύγωση συμπιεστή SC10.

Παρατηρώντας το σχήμα 4.10, σίγουρα εντύπωση προκαλεί το γεγονός ότι η μέση τιμή προκύπτει άνω όλων των αξιολογήσεων και όχι ενδιάμεσα αυτών, όπως θα αναμενόταν. Πρέπει να τονιστεί όμως, σε αυτό το σημείο, ότι η τιμή αυτή δεν αποτελεί την μέση τιμή των 9 αυτών αξιολογήσεων, αλλά την μέση τιμή μίας χωρικής κατανομής την οποία εκπροσωπούν οι αξιολογήσεις αυτές. Το γεγονός ότι προκύπτει ένα τέτοιο αποτέλεσμα βάσει αυτών των αξιολογήσεων, δικαιολογείται από τις τιμές των βαρών που χρησιμοποιεί η μέθοδος, οι οποίες μπορεί να είναι και αρνητικές. Οι τιμές των 9 κόμβων, οι αξιολογήσεις της συνάρτησης στους κόμβους αυτούς και τα αντίστοιχα βάρη απεικονίζονται στον πίνακα 4.22 .

Αφού, λοιπόν, στα βάρη περιέχονται και αρνητικές τιμές είναι σαφές το ότι η προκύπτουσα μέση τιμή δεν θα βρισκεται ενδιάμεσα των αξιολογήσεων και μάλιστα δεν μπορεί να προβλεφθεί αν αυτή θα βρισκεται άνω ή κάτω αυτών.

Σημεία (j)	$(x_1^{(j)}, x_2^{(j)}, x_3^{(j)}, x_4^{(j)})$	$(\alpha_1 - \alpha_2)$	$W^{(j)}$
1	(0.1146, 0.093, 0.05, 0.03)	40.399289	-3
2	(0.1156, 0.093, 0.05, 0.03)	40.477816	1/2
3	(0.1136, 0.093, 0.05, 0.03)	40.395922	1/2
4	(0.1146, 0.094, 0.05, 0.03)	40.479077	1/2
5	(0.1146, 0.092, 0.05, 0.03)	40.417123	1/2
6	(0.1146, 0.093, 0.051, 0.03)	40.375148	1/2
7	(0.1146, 0.093, 0.049, 0.03)	40.425590	1/2
8	(0.1146, 0.093, 0.049, 0.031)	40.357823	1/2
9	(0.1146, 0.093, 0.049, 0.029)	40.452505	1/2

Πίνακας 4.22: Κόμβοι $\vec{x}^{(j)}$ των 9 σημείων που απαιτεί η μέθοδος Smolyak, αξιολόγηση της αντικειμενικής συνάρτησης (στροφή της ροής) σε αυτά και τα αντίστοιχα βάρη των σημείων.

Το πρόβλημα της μέσης τιμής και του κατά πόσο αυτή είναι σωστή προσπαθήσαμε να αντιμετωπίσουμε εξετάζοντας το αν η μέθοδος είναι ακριβής. Για την τάξη χάους του προβλήματος, $k = 1$, η μέθοδος θα πρέπει να είναι ακριβής για πολυώνυμο έως και 2ου βαθμού. Συνεπώς, προσεγγίζουμε τα 9 σημεία του σχήματος 4.10 με πολυώνυμο της μορφής:

$$H(\vec{x}) = b_0 + b_{11}x_1 + b_{21}x_2 + b_{31}x_3 + b_{41}x_4 + b_{12}x_1^2 + b_{22}x_2^2 + b_{32}x_3^2 + b_{42}x_4^2 \quad (4.35)$$

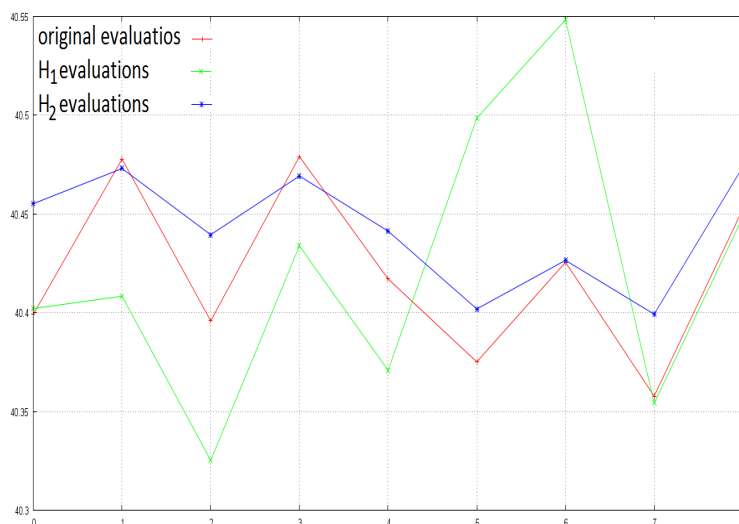
Με την μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων και με λογισμικό παρεχόμενο από το ΕΘΣ του ΕΜΠ [24] προκύπτει το πολυώνυμο:

$$H_1(\vec{x}) = -124.995 + 8144.75x_1 - 2.7105110^{-7}x_2 - 12152.5x_3 + 1.0834910^{-5}x_4 - 35354.2x_1^2 + 169.252x_2^2 + 121276x_3^2 - 786.31x_4^2 \quad (4.36)$$

Για ακόμα καλύτερα αποτελέσματα, με πολυώνυμο του ίδιου βαθμού προσεγγίστηκαν και οι αξιολογήσεις των 41 σημείων που παράγει η μέθοδος για τάξη χάους $k = 2$. Το πολυώνυμο της προσέγγισης αυτής είναι:

$$H_2(\vec{x}) = -65.6204 - 226.502x_1 + 3.4429510^{-7}x_2 + 4083.95x_3 + 1080.92x_4 \\ + 1061.31x_1^2 + 75.0493x_2^2 - 40962.6x_3^2 - 18637x_4^2 \quad (4.37)$$

Με βάση τα δύο αυτά πολυώνυμα γίνεται και πάλι αξιολόγηση των 9 σημείων του πλέγματος Smolyak. Στο σχήμα 4.11 φαίνεται η σύγκριση των αρχικών αξιολογήσεων των σημείων και των αξιολογήσεων που προκύπτουν από τα πολυώνυμα.



Σχήμα 4.11: Πτερύγωση συμπίεστη SC10. Οι αρχικές αξιολογήσεις της ροής στα 9 σημεία και οι αξιολογήσεις των πολυωνύμων προσέγγισης H_1 και H_2 . Φαίνεται ότι οι αξιολογήσεις του προσεγγιστικού πολυωνύμου H_2 είναι αρκετά κοντά στις αρχικές.

Αν λοιπόν τώρα, στα 16 σημεία που απαιτεί το πλήρες πλέγμα για τάξη χάους $k = 1$ και στα 9 που απαιτεί το αραιό πλέγμα, υπολογισθούν τα πολυώνυμα H_1 και H_2 , με στοχαστικές μεταβλητές τις x_1, x_2, x_3 και x_4 , τα αποτελέσματα που προκύπτουν για τις μέσες τιμές και τις τυπικές αποκλίσεις αυτών, συμπίπτουν απολύτως. Τα αποτελέσματα αυτά αναγράφονται στον πίνακα 4.23.

Πολυώνυμο H_1			
Πλήρη Πλέγματα		Αραιά Πλέγματα	
μ_{H_1}	σ_{H_1}	μ_{H_1}	σ_{H_1}
40.487478	$4.459715 \cdot 10^{-2}$	40.487478	$4.459715 \cdot 10^{-2}$
Πολυώνυμο H_2			
Πλήρη Πλέγματα		Αραιά Πλέγματα	
μ_{H_2}	σ_{H_2}	μ_{H_2}	σ_{H_2}
40.396759	$4.492502 \cdot 10^{-2}$	40.396759	$4.492502 \cdot 10^{-2}$

Πίνακας 4.23: Μέσες τιμές κι τυπικές αποκλίσεις πολυωνύμων H_1 και H_2 όταν αυτά αξιολογούνται στους διάφορους κόμβους του πλήρους και του αραιού πλέγματος.

Κεφάλαιο 5

Ανακεφαλαίωση-Συμπεράσματα και Προτάσεις για Μελλοντικές Μελέτες

Κλείνοντας την εργασία ανακεφαλαιώνονται τα βασικά σημεία που παρουσιάστηκαν στα προηγούμενα κεφάλαια, αναφέρονται τα συμπεράσματα της μελέτης αλλά και μερικές ιδέες για τη μελλοντική αναβάθμιση της αναπτυχθείσας μεθόδου.

5.1 Ανακεφαλαίωση-Συμπεράσματα

Στη διπλωματική εργασία έγινε ανάπτυξη της θεωρίας αναπτύγματος πολυδιάστατου πολυωνυμικού χάους. Οι συντελεστές αυτού υπολογίστηκαν μέσω ολοκληρώσεων με τη μέθοδο της Gauss Quadrature με χρήση πλήρων και αραιών πλεγμάτων Smolyak. Όταν, όμως, η ολοκλήρωση γίνεται χρησιμοποιώντας πλήρη πλέγματα, ελοχεύει πάντα η κατάρα της μεγάλης διάστασης, με το υπολογιστικό κόστος να αυξάνεται εκθετικά συναρτήσει των διαστάσεων και όταν πρόκειται για προβλήματα που απαιτούν την επίλυση των εξισώσεων ροής, το κόστος αυτό καθιστά την μέθοδο απαγορευτική. Για τον λόγο αυτόν, λοιπόν, η μέθοδος αυτή χρησιμοποιήθηκε για επίλυση προβλημάτων έως δύο διαστάσεων ενώ για περισσότερες διαστάσεις αναπτύχθηκε η μέθοδος αραιών πλεγμάτων Smolyak.

Η μέθοδος αραιών πλεγμάτων είναι ιδιαίτερα αποδοτική σε πολυδιάστατα προβλήματα καθώς προτείνει ένα πολύ μικρότερο δείγμα κόμβων για την αξιολόγηση της αντικει-

μενικής συνάρτησης. Αφού έγινε η παρουσίαση της μεθόδου, αυτή εφαρμόστηκε σε μαθηματικά προβλήματα έως και έξι διαστάσεων και σε αεροδυναμικά προβλήματα τεσσάρων διαστάσεων.

Αναφέρονται στην συνέχεια μερικά συμπεράσματα που προέκυψαν κατά τη μελέτη του θέματος :

- Η μέθοδος του πολυδιάστατου αναπτύγματος πολυωνυμικού χάους σε συνδυασμό με τη μέθοδο την ολοκλήρωσης κατά Gauss Quadrature πλήρους πλέγματος, είναι ιδιαίτερα αποδοτική σε αεροδυναμικά προβλήματα έως και δευτέρου βαθμού.
- Σε πολυδιάστατα προβλήματα αεροδυναμικής ο αριθμός αξιολογήσεων που υπαγορεύει η μέθοδος πλήρων πλεγμάτων την καθιστούν απαγορευτική. Αντιθέτως, η μέθοδος αραιών πλεγμάτων Smolyak είναι ιδανική.
- Σε προβλήματα έως και τριών διαστάσεων η μέθοδος αραιών πλεγμάτων δεν συμφέρει. Δεν υπάρχει, όμως, και κανένας λόγος να χρησιμοποιηθεί σε αυτά τα προβλήματα αφού υπάρχει αντί αυτής η μέθοδος πλήρων πλεγμάτων.
- Σε μαθηματικά προβλήματα πολλών διαστάσεων είναι παραπάνω από ικανοποιητικά τα αποτελέσματα του αναπτύγματος πολυδιάστατου πολυωνυμικού χάους σε συνδυασμό με την μέθοδο αραιών πλεγμάτων Smolyak, για ελάχιστο αριθμό απαιτούμενων αξιολογήσεων. Η μέθοδος αραιών πλεγμάτων, εκτός του ότι, συμπίπτει σχεδόν με την αναλυτική, συμπίπτει και με την τιμή της μεθόδου πλήρων πλεγμάτων για χιλιάδες αξιολογήσεις παραπάνω.
- Από τις διάφορες εφαρμογές της εργασίας πάνω στην μέθοδο των αραιών πλεγμάτων, φάνηκε ότι η μέθοδος δίνει ικανοποιητικότερα αποτελέσματα, όταν για παράδειγμα στις τέσσερις διαστάσεις οι αξιολογήσεις μειώνονται στις μισές του πλήρους πλέγματος και στις έξι διαστάσεις στο ένα όγδοο αυτών. Είναι προφανές, λοιπόν, ότι αυξανόμενων των διαστάσεων οι αξιολογήσεις μειώνονται με δραματικό ρυθμό. Σε ένα πρόβλημα, δηλαδή, δέκα ή και δεκαπέντε διαστάσεων γίνεται αντιληπτό ότι το υπολογιστικό κέρδος θα είναι τεράστιο.
- Δεν πρέπει να αμελείται ποτέ το γεγονός ότι η μέθοδος αραιών πλεγμάτων Smolyak είναι κατά βάση ένα προσεγγιστικό μοντέλο. Για αυτόν τον λόγο σε μη πολυωνυμικές συναρτήσεις τα αποτελέσματα είναι αναπόφευκτο να παρουσιάσουν κάποια απόκλιση από αυτά, για παράδειγμα, των πλήρων πλεγμάτων. Παρόλα αυτά αν τα αποτελέσματα αυτά προσεγγιστούν με κάποια πολυωνυμική συνάρτηση, η εφαρμογή της μεθόδου στη συνάρτηση αυτή, θα επιφέρει ακριβώς τα ίδια αποτελέσματα με την εφαρμογή σε αυτή των πλήρων πλεγμάτων.
- Η μέθοδος Smolyak που αναπτύχθηκε μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την επίλυση οποιουδήποτε προβλήματος, πλην αυτών της αεροδυναμικής βελτιστοποίησης, αφού μπορεί πολύ εύκολα να συνδυαστεί με οποιοδήποτε μοντέλο αξιολόγησης ανάλογα το πρόβλημα.
- Οι στοχαστικές μεταβλητές του προβλήματος δεν χρειάζεται υποχρεωτικά να

αφορούν τη γεωμετρία του σχήματος, μπορούν να αφορούν οποιοδήποτε άλλο χαρακτηριστικό του προβλήματος. Η στοχαστικότητα μπορεί, για παράδειγμα, να υπεισέρχεται στις συνθήκες του περιβάλλοντος αν πρόκειται για αεροδυναμικό πρόβλημα ή στα φορτία καταπόνησης κάποιας κατασκευής αν αφορά πρόβλημα μηχανικής.

5.2 Προτάσεις για Μελλοντικές Μελέτες

- Στη διπλωματική εργασία αυτή, μελετήθηκε η περίπτωση στοχαστικών μεταβλητών που κατανέμονται βάσει της κανονικής κατανομής. Μια πρόταση για περαιτέρω μελέτη, είναι αυτή του γενικευμένου πολυωνυμικού χάους (generalized Polynomial Chaos, gPC) [19] [20], για προβλήματα στα οποία οι μεταβλητές κατανέμονται με διαφορετικούς τρόπους. Στις πηγές [] προτείνονται τέτοιες μέθοδοι.
- Ένα ακόμα μειονέκτημα της μεθόδου, είναι το ότι απαιτεί όλες οι στοχαστικές μεταβλητές να κατανέμονται βάσει της ίδιας κατανομής. Μια βελτίωση θα ήταν να μπορεί να εφαρμοστεί σε προβλήματα στα οποία η κάθε μεταβλητή ακολουθεί διαφορετική κατανομή.
- Υπάρχουν, επίσης, περιπτώσεις στις οποίες δεν είναι γνωστή ολόκληρη η στοχαστική κατανομή κάποιας μεταβλητής εισόδου, παρά μόνο μερικές τιμές της, οι οποίες και εκμεταλλεύονται για την επίλυση του προβλήματος. Πρόκειται για την μέθοδο του αυθαίρετου πολυωνυμικού χάους (arbitrary polynomial chaos) [21].
- Όσον αφορά στα αραιά πλέγματα Smolyak, υπάρχει η δυνατότητα χρήσης ανισότροπων πλεγμάτων (anisotropic sparse grids) [23] στην περίπτωση που ορισμένες στοχαστικές μεταβλητές εισόδου δεν επηρεάζουν σε μεγάλο βαθμό την αντικειμενική συνάρτηση, κι άρα υπάρχει δυνατότητα περαιτέρω αραιώσης του πλέγματος αποκλειστικά κατά τις αντίστοιχες διαστάσεις.

Παράρτημα Α΄

Λογισμικό Παραμετροποίησης Αεροτομών

Η παραμετροποίηση των περιγραμμάτων των αεροτομών στην εργασία αυτή βασίζεται εξ ολοκλήρου από σημεία ελέγχου Bezier. Αυτό επιτυγχάνεται μέσω τεσσάρων λογισμικών, όλα προγραμματισμένα σε Fortran και διαθέσιμα από το ΕΘΣ ΕΜΠ. Το κύριο λογισμικό, το οποίο συντονίζει τα υπόλοιπα είναι το `gpost`. Το λογισμικό αυτό απαιτεί συγκεκριμένα αρχεία εισόδου, και παράγει νέα αρχεία τα οποία αποτελούν είσοδο των υπολοίπων λογισμικών. Τα λογισμικά αυτά, λοιπόν, εκμεταλλευόμενα τα δεδομένα που εισάγονται, παράγουν το περίγραμμα της αεροτομής.

Α΄.1 Αρχεία Εισόδου

Τα αρχεία που περιέχουν τα απαραίτητα δεδομένα για την δημιουργία του περιγράμματος είναι τα `gpost.dat` και `task.dat`, η δομή των οποίων παρουσιάζεται στη συνέχεια.

- **`gpost.dat`**

Το λογισμικό `gpost`, είναι ένα λογισμικό manager που εκτός από την παραμετροποίηση μπορεί να αναλάβει και την επίλυση της ροής (καλώντας το κατάλληλο λογισμικό) γύρω από το αεροδυναμικό σώμα. Παρότι σε αυτή την εργασία, το `gpost` χρησιμοποιήθηκε μόνο για την παραμετροποίηση, για λόγους πληρότητας παρουσιάζεται και επεξηγείται επιγραμματικά το κεντρικό αρχείο εισόδου του λογισμικού. Η δομή του παρουσιάζεται στον πίνακα ;;

- **`task.dat`**

Το αρχείο `task.dat` περιέχει όλες τις πληροφορίες, που είναι απαραίτητες για την τοποθέτηση των σημείων ελέγχου Bezier και η δομή του απεικονίζεται στον

Αρχείο gpost.dat

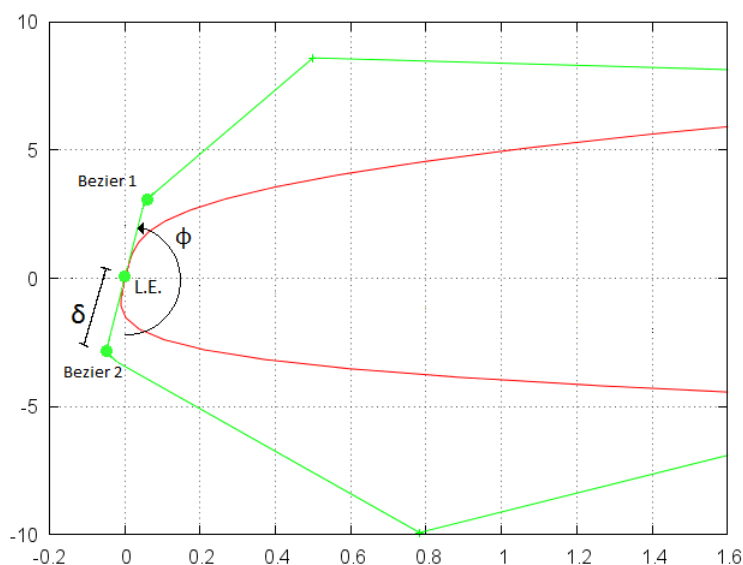
Γραμμή	Περιεχόμενο
1-2	Γραμμές σχολίων
3	Ενεργοποίηση (1) ή όχι (0) προελέγχου για την ικανοποίηση των περιορισμών
4	Επιλογή επίλυτη ροής 0: Δεν γίνεται επίλυση 1: Επίλυση με ολοκληρωματική μέθοδο (Drela) 2: Επίλυση με λογισμικό Navier-Stokes
5	Χρήση του λογισμικού για 0: Σύγκριση της γεωμετρίας με γεωμετρία 1: πτερύγωση 2: μεμονωμένη αεροτομή
6	Είδος περιορισμού για την περίπτωση Πτερύγωσης 0: Χωρίς περιορισμούς 1: Περιορισμός στην γωνία εξόδου 2: Περιορισμός στην στροφή της ροής
7	Στόχος για την περίπτωση Μεμονωμένης Αεροτομής 1: συντελεστής άνωσης 2: συντελεστής οπισθέλκουσας 3: συντελεστής άνωσης και οπισθέλκουσας
8	Περίπτωση Μεμονωμένης Αεροτομής 0: Χωρίς περιορισμούς 1: Περιορισμοί στο C_l 2: Περιορισμοί στο C_d 3: Περιορισμοί στα C_l και C_d
9	Όνομα εκτελέσιμου
10	Γραμμή σχολίου
11	Γωνία κλίσης (stagger angle)
12 !	Αριθμός σημείων που αγνοούνται
13 !	0: Δεν αναγράφεται ο αριθμός των σημείων
14-15	Γραμμές σχολίων
16	0.000000 0.000000 1.05 1.05000000 0.6
17	Πάχος στην ακμή εκφυγής
18	Αριθμός περιορισμών
19	Γραμμή σχολίου
20	Ακολουθούν τόσες γραμμές όσοι οι περιορισμοί με 2 στοιχεία ανά γραμμή, τη θέση της χορδής και το ελάχιστο αποδεκτό πάχος της αεροτομής σε εκείνη τη θέση
21-22	Γραμμές σχολίων

Πίνακας Α'.1: Δομή αρχείου εισόδου gpost.dat.

πίνακα Α'.2.

Προτού γίνει, όμως, παρουσίαση της δομής του, επεξηγούνται οι παράμετροι δ και φ , που εμφανίζονται στον πίνακα Α'.2 και στις οποίες ο χρήστης οφείλει να δώσει τιμές. Η παράμετρος δ δηλώνει την απόσταση του δεύτερου σημείου ελέγχου Bezier 1 της πλευράς υποπίεσης και του δεύτερου σημείου ελέγχου Bezier 2 της πλευράς υπερπίεσης από την ακμή προσβολής ή αντίστοιχα των προτελευταίων σημείων των δύο πλευρών από την ακμή εκφυγής. Η παράμετρος φ δηλώνει την γωνία μεταξύ της ευθείας πάνω στην οποία κείνται τα σημεία και

του κατακόρυφου άξονα. Σχηματικά οι παράμετροι φαίνονται στο σχήμα Α'.1.



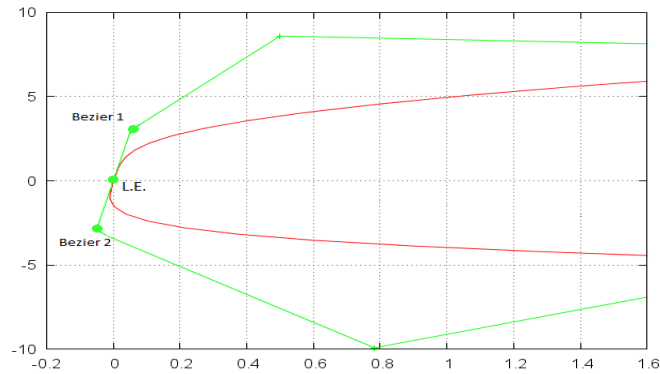
Σχήμα Α'.1: Σχηματική απεικόνιση των παραμέτρων δ και φ . Με Bezier 1 συμβολίζεται το σημείο που δημιουργείται στην πλευρά υποπίεσης ενώ με Bezier 2 αυτό της πλευράς υπερπίεσης.

Δίνοντας τιμές στις παραμέτρους δ και φ , το λογισμικό παράγει και τοποθετεί τα σημεία ελέγχου Bezier 1 και Bezier 2 σύμφωνα με τις τιμές αυτές απόστασης και γωνίας. Το μεγάλο πλεονέκτημα του τρόπου αυτού παραμετροποίησης, χρησιμοποιώντας τις συγκεκριμένες παραμέτρους και τα συγκεκριμένα λογισμικά, είναι το ότι τα σημεία ελέγχου που δημιουργούνται είναι συνευθειακά, πράγμα το οποίο έχει σαν αποτέλεσμα το περίγραμμα της αεροτομής να προκύψει καμπύλο στην ακμή προσβολής (ή ακμή εκφυγής αντίστοιχα). Στα σχήματα Α'.2 και Α'.3 φαίνονται δύο μορφές περιγράμματος ακμής προσβολής αεροτομής. Στο σχήμα Α'.2 έχουν χρησιμοποιηθεί οι παράμετροι δ και φ για την παραγωγή των σημείων ελέγχου Bezier 1 και Bezier 2, ενώ στο Α'.3 δεν έχει γίνει χρήση αυτών.

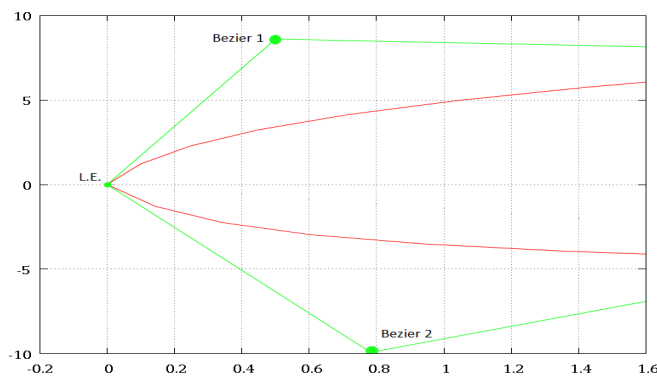
Αν ο χρήστης επιθυμεί να χρησιμοποιήσει τις παραμέτρους αυτές για την παραγωγή περιγράμματος, οφείλει να συμπληρώσει ορισμένες γραμμές του αρχείου task.dat. Αρχικά, και όπως ήδη αναφέρθηκε, οι παράμετροι αυτές μπορούν να χρησιμοποιηθούν είτε για την ακμή προσβολής, είτε για την ακμή εκφυγής, είτε και για τις δύο ακμές αν αυτό είναι επιθυμητό.

Για την χρήση των παραμέτρων στην ακμή προσβολής, ο χρήστης δίνει την τιμή της παραμέτρου δ στην γραμμή 4 του αρχείου task.dat και την τιμή της παραμέτρου φ στην γραμμή 5. Επίσης, στις γραμμές 6 και 7 πρέπει να δοθεί τιμή μονάδα. Αν δεν είναι επιθυμητή η χρήση των παραμέτρων στην ακμή προσβολής, οι γραμμές 4, 5, 6 και 7 συμπληρώνονται με μηδενικά. Για την χρήση των παραμέτρων στην ακμή εκφυγής, ισχύουν τα αντίστοιχα. Οι γραμμές 10 και 11 συμπληρώνονται με τις τιμές των παραμέτρων, αν αυτές χρησιμοποιηθούν και οι

γραμμές 12 και 13 συμπληρώνονται με μονάδες ή μηδενικά ανάλογα με το αν γίνει χρήση των παραμέτρων.



Σχήμα Α'.2: Περιγράμμα αεροτομής στην ακμή προσβολής όταν έχει γίνει χρήση των παραμέτρων δ και φ για την παραγωγή των σημείων ελέγχου Bezier 1 και Bezier 2. Το αποτέλεσμα της διαδικασίας είναι η δημιουργία καμπύλου τμήματος στην ακμή προσβολής.



Σχήμα Α'.3: Περιγράμμα αεροτομής στην ακμή προσβολής όταν δεν έχει γίνει χρήση των παραμέτρων δ και φ . Το αποτέλεσμα της διαδικασίας είναι η δημιουργία οξείας γωνίας στην ακμή προσβολής.

Αφού ορίστηκαν οι παράμετροι δ και φ , παρουσιάζεται, τώρα, η δομή του αρχείου task.dat στον πίνακα Α'.2 .

Α'.2 Αρχεία Εξόδου

Τα αρχεία που παράγουν τα λογισμικά είναι τα stag.dat, shapestag.ini, bezierpo.dat, blade.post, blade.stag, task.cns και task.res.

Αρχείο task.dat

Γραμμή	Περιεχόμενο
1	Αριθμός γραμμών που ακολουθούν
2	x_{LE} , συντεταγμένη κατά x ακμής προσβολής
3	y_{LE} , συντεταγμένη κατά y ακμής προσβολής
3	δ_{LE} , τιμή παραμέτρου δ στην ακμή προσβολής
5	ϕ_{LE} , τιμή παραμέτρου ϕ στην ακμή προσβολής
6	0: Αν δεν γίνει χρήση των παραμέτρων
7	1: Αν γίνει χρήση των παραμέτρων (αφορά στην ακμή προσβολής)
8	x_{TE} , συντεταγμένη κατά x ακμής εκφυγής
9	y_{TE} , συντεταγμένη κατά y ακμής εκφυγής
10	δ_{LE} , τιμή παραμέτρου δ στην ακμή εκφυγής
11	ϕ_{LE} , τιμή παραμέτρου ϕ στην ακμή εκφυγής
12 !	0: Αν δεν γίνει χρήση των παραμέτρων
13 !	1: Αν γίνει χρήση των παραμέτρων ϕ και δ (αφορά στην ακμή εκφυγής)
14	Αριθμός συντεταγμένων σημείων ελέγχου Bezier πλευράς υποπίεσης, $(2n)$
15	$x_{ss}^{(1)}$
16	$y_{ss}^{(1)}$
⋮	(Συντεταγμένες σημείων ελέγχου πλευράς υποπίεσης κατά ζεύγη)
⋮	$x_{ss}^{(n)}$
⋮	$y_{ss}^{(n)}$
14 + 2n	Αριθμός συντεταγμένων σημείων ελέγχου Bezier πλευράς υπερπίεσης, $(2k)$
⋮	$x_{ps}^{(1)}$
⋮	$y_{ps}^{(1)}$,
⋮	(Συντεταγμένες σημείων ελέγχου πλευράς υπερπίεσης κατά ζεύγη)
⋮	$x_{ps}^{(k)}$
⋮	$y_{ps}^{(k)}$
14 + 2n + 2k	Αριθμός κόμβων περιγράμματος πλευράς υποπίεσης
15 + 2n + 2k	Αριθμός κόμβων περιγράμματος πλευράς υπερπίεσης
16 + 2n + 2k	Συντελεστής πύκνωσης των σημείων της πλευράς υπερπίεσης με βάση το σχήμα Robertson
17 + 2n + 2k	Συντελεστής πύκνωσης των σημείων της πλευράς υποπίεσης με βάση το σχήμα Robertson

Πίνακας Α'.2: Δομή αρχείου εισόδου task.dat.

- **stag.dat**

Το αρχείο stag.dat, είναι αρχείο μίας γραμμής και το μόνο μέγεθος που περιέχει είναι η γωνία κλίσης (stagger angle).

- **shapestag.ini**

Το συγκεκριμένο αρχείο γράφεται με βάση τα αρχεία gpost.dat και task.dat για τις ανάγκες ενός εκ των άλλων εκτελέσιμων αρχείων. Ο χρήστης δεν χρειάζεται να ασχοληθεί περαιτέρω με το αρχείο αυτό.

- **bezierpo.dat**

Το αρχείο εξόδου bezierpo.dat περιέχει το σύνολο των σημείων ελέγχου Bezier που παράγουν τις πλευρές υποπίεσης και υπερπίεσης. Η δομή του δίνεται στον πίνακα ;; .

Αρχείο bezierpo.dat

Γραμμή	Περιεχόμενο
1	Αριθμός σημείων ελέγχου Bezier πλευράς υποπίεσης, N_{ss} (συμπεριλαμβανομένων των ακμών προσβολής και εκφυγής)
2	x_{LE} y_{LE}
⋮	x_{ss} y_{ss} (συντεταγμένες κατά x και κατά y σημείων ελέγχου Bezier πλευράς υποπίεσης)
$N_{ss} + 1$	x_{TE} y_{TE}
$N_{ss} + 2$	Αριθμός σημείων ελέγχου Bezier πλευράς υπερπίεσης, N_{ps} (συμπεριλαμβανομένων των ακμών προσβολής και εκφυγής)
$N_{ss} + 3$	x_{LE} y_{LE}
⋮	x_{ps} y_{ps} (συντεταγμένες κατά x και κατά y σημείων ελέγχου Bezier πλευράς υπερπίεσης)
$N_{ps} + N_{ss} + 2$	x_{TE} y_{TE}

Πίνακας Α'.3: Δομή αρχείου εισόδου bezierpo.dat.

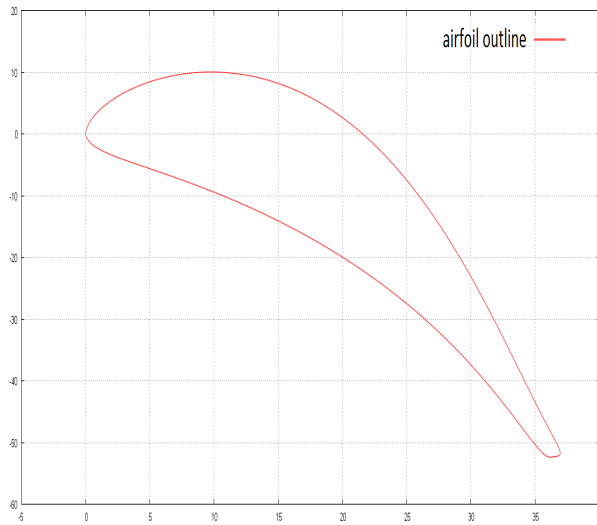
- **blade.post**

Στο αρχείο blade.post περιέχονται πληροφορίες για το προκύπτον περίγραμμα της αεροτομής. Η δομή του φαίνεται στον πίνακα ;; ενώ στο σχήμα Α'.5 φαίνεται το περίγραμμα αεροτομής που προκύπτει αν παρασταθεί σε γραφική παράσταση η στήλη 3 του αρχείου συναρτήσει της στήλης 2. Το μέγεθος S που εμφανίζεται στον πίνακα ;; δηλώνει το μήκος της χορδής της αεροτομής.

Αρχείο blade.post

Γραμμή	Περιεχόμενο		
1	Αριθμός κόμβων περιγράμματος πλευράς υπερπίεσης, N_{ps}	Αριθμός κόμβων περιγράμματος πλευράς υποπίεσης, N_{ss}	-
2	$\frac{x_{ss}^2 + y_{ss}^2}{S}$	y_{ps}	x_{ps}
⋮	⋮	⋮	⋮
$N_{ps} + 1$	$\frac{x_{ps}^2 + y_{ps}^2}{S}$	y_{TE}	x_{TE}
$N_{ps} + 2$	$\frac{x_{ps}^2 + y_{ps}^2}{S}$	y_{LE}	x_{LE}
$N_{ps} + 3$	$\frac{x_{ps}^2 + y_{ps}^2}{S}$	y_{ss}	x_{ss}
⋮	⋮	⋮	⋮

Πίνακας Α'.4: Δομή αρχείου εισόδου *blade.post*.



Σχήμα Α'.4: Το περίγραμμα αεροτομής προκύπτει από το αρχείο *blade.post* αν παρασταθεί γραφικά η στήλη 3 συναρτήσει της στήλης 2.

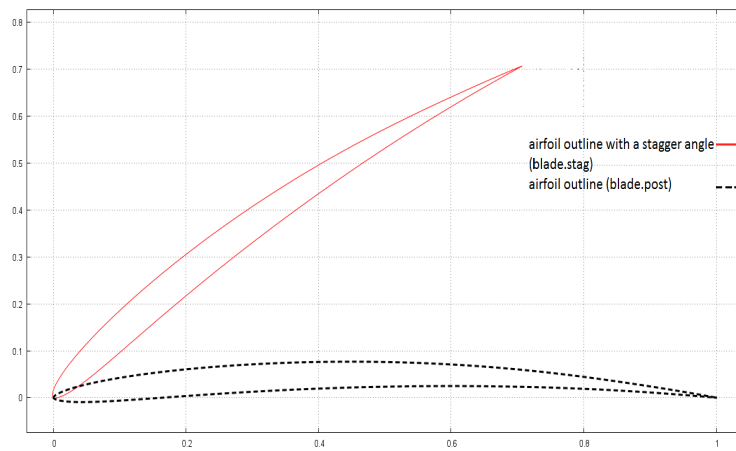
- **blade.stag**

Το αρχείο *blade.stag* περιέχει το περίγραμμα της αεροτομής στραμμένο όμως κατά την γωνία κλίσης (stagger angle). Η δομή του δίνεται στον πίνακα ;; ενώ στο σχήμα ;; έχει παρασταθεί γραφικά η στήλη 1 του αρχείου συναρτήσει της στήλης 2. Στο ίδιο σχήμα φαίνεται και το περίγραμμα που προκύπτει από το αρχείο *blade.post*, πρόκειται σαφώς για το ίδιο περίγραμμα στραμμένο κατά την γωνία κλίσης.

Αρχείο blade.stag

Γραμμή	Περιεχόμενο
1	Print a title here if you want
2	0.000000 0.000000 1.05 1.05000000 0.6
3	x_{TE} y_{TE}
4	x_{ps} y_{ps}
⋮	⋮
$N_{ps} + 2$	x_{LE} y_{LE}
$N_{ps} + 3$	x_{ss} y_{ss}
⋮	⋮
$N_{ps} + N_{ss} + 2$	x_{TE} y_{TE}

Πίνακας Α'.5: Δομή αρχείου εισόδου blade.stag.



Σχήμα Α'.5: Σύγκριση περιγραμμάτων που προκύπτουν από τα αρχεία blade.stag και blade.post. Πρόκειται για το περίγραμμα της ίδιας αεροτομής στραμμένο κατά την γωνία κλίσης της (stagger angle).

- **task.cns και task.res**

Τα αρχεία αυτά περιέχουν τις τιμές των συναρτήσεων-στόχων και των περιορισμών σε μορφή προβλεπόμενη από το λογισμικό EASY [22].

Παράρτημα Β'

Ορθογώνια Πολυώνυμα

Β'.1 Ορθογώνια Πολυώνυμα Hermite

Η οικογένεια ορθογωνίων πολυωνύμων Hermite είναι η οικογένεια πολυωνύμων που χρησιμοποιείται όταν η στοχαστική μεταβλητή κατανέμεται βάσει της κανονικής κατανομής. Υπάρχουν δύο τύποι πολυωνύμων Hermite, τα πιθανοτικά (probabilists'), He_n και του φυσικού (physicists'), H_n . Η επιλογή ανάμεσα στα δύο γίνεται με βάση τον επιστημονικό τομέα στον οποίο χρησιμοποιούνται. Στη στατιστική γίνεται χρήση των πιθανοτικών ενώ σε τομείς φυσικής προτιμώνται τα πολυώνυμα φυσικού. Η ιδιοτυπία του καθενός έγκειται στη διαφορετική συνάρτηση βάρους που το συνοδεύει. Το πεδίο ορισμού και των δύο είναι το $(-\infty, \infty)$. Τα δύο αυτά είδη ορίζονται με τον τρόπο που φαίνεται στις εξισώσεις Β'.1 και Β'.2

- Πιθανοτικά πολυώνυμα Hermite

$$He_n(x) = (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n} e^{-\frac{x^2}{2}} = \left(x - \frac{d}{dx}\right)^n \cdot 1 \quad (\text{B'.1})$$

- Πολυώνυμα Hermite του φυσικού

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} = \left(2x - \frac{d}{dx}\right)^n \cdot 1 \quad (\text{B'.2})$$

Ο μετασχηματισμός που χρησιμοποιείται για τη μετάβαση από τα πιθανοτικά στα πολυώνυμα του φυσικού είναι

$$H_n(x) = 2^{\frac{n}{2}} He_n(\sqrt{2}x) \quad (\text{B'.3})$$

Αντίστοιχα, από τα πολυώνυμα του φυσικού στα πιθανοτικά

$$He_n(x) = 2^{-\frac{n}{2}} H_n\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \quad (\text{B'.4})$$

• Αναδρομικοί Τύποι

Από τις εξισώσεις ορισμού των πολυωνύμων B'.1 και B'.2 μπορούν να παραχθούν αναδρομικές σχέσεις για το κάθε είδος. Αυτές είναι

$$He_{n+1}(x) = xHe_n(x) - nHe_{n-1}(x) \quad (\text{B'.5})$$

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x) \quad (\text{B'.6})$$

Ενώ για τις παραγώγους τους είναι

$$He'_n(x) = nHe_{n-1}(x) \quad (\text{B'.7})$$

$$H'_n(x) = 2nH_{n-1}(x) \quad (\text{B'.8})$$

Για $n = 0$ από τις σχέσεις ορισμού προκύπτει ότι

$$He_0(x) = H_0(x) = 1 \quad (\text{B'.9})$$

Γενικώς, στις οικογένειες ορθογωνίων πολυωνύμων, ανεξαρτήτου κατανομής, ο όρος μηδενική τάξης είναι πάντοτε ίσος με τη μονάδα.

Στα πιθανοτικά πολυώνυμα, ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου είναι πάντα ίσος με τη μονάδα (μονικά πολυώνυμα), ενώ στα πολυώνυμα του φυσικού με 2^n (μη-μονικά). Είναι δηλαδή

$$A_n^{(He)}(x) = 1 \quad (\text{B'.10})$$

$$A_n^{(H)}(x) = 2^n \quad (\text{B'.11})$$

Με βάση, λοιπόν, τους αναδρομικούς τύπους μπορούν να παραχθούν τα δέκα

πρώτα πολυώνυμα κάθε είδους. Σχηματικά αυτά παρίστανται στα σχήματα ;; και ;;.

– Πιθανοτικά Hermite πολυώνυμα

$$He_0(x) = 1$$

$$He_1(x) = x$$

$$He_2(x) = x^2 - 1$$

$$He_3(x) = x^3 - 3x$$

$$He_4(x) = x^4 - 6x^2 + 3$$

$$He_5(x) = x^5 - 10x^3 + 15x$$

$$He_6(x) = x^6 - 15x^4 + 45x^2 - 15$$

$$He_7(x) = x^7 - 21x^5 + 105x^3 - 105x$$

$$He_8(x) = x^8 - 28x^6 + 210x^4 - 420x^2 + 105$$

$$He_9(x) = x^9 - 36x^7 + 378x^5 - 1260x^3 + 945x$$

– Hermite πολυώνυμα του φυσικού

$$H_0(x) = 1$$

$$H_1(x) = 2x$$

$$H_2(x) = 4x^2 - 2$$

$$H_3(x) = 8x^3 - 12x$$

$$H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12$$

$$H_5(x) = 32x^5 - 160x^3 + 120x$$

$$H_6(x) = 64x^6 - 480x^4 + 720x^2 - 120$$

$$H_7(x) = 128x^7 - 1344x^5 + 3360x^3 - 1680x$$

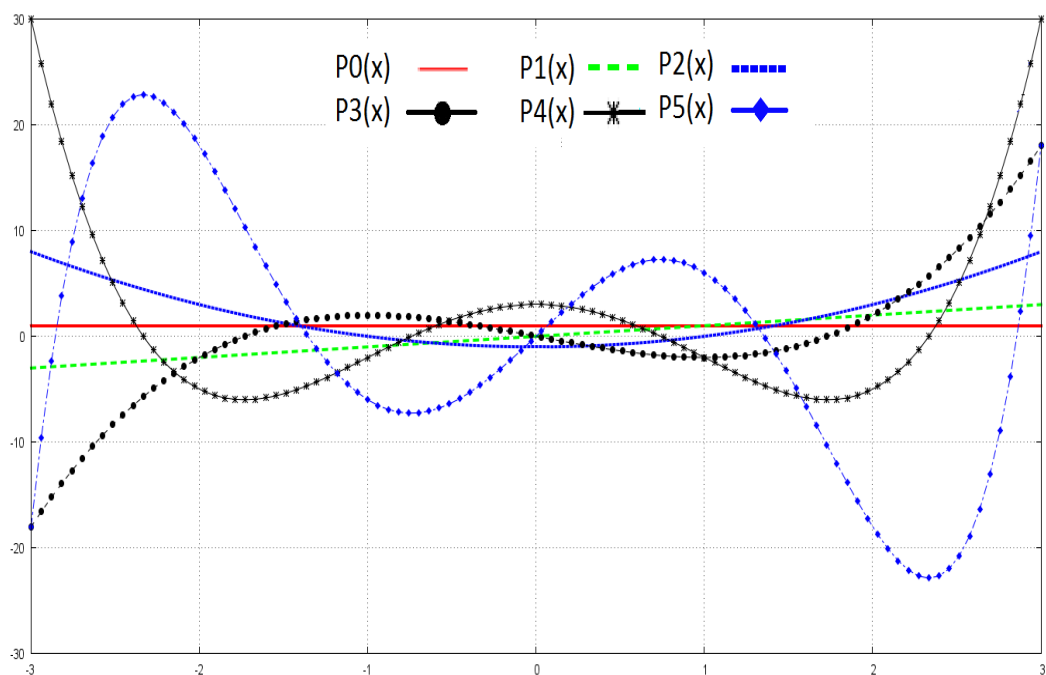
$$H_8(x) = 256x^8 - 3584x^6 + 13440x^4 - 13440x^2 + 1680$$

$$H_9(x) = 512x^9 - 9216x^7 + 48384x^5 - 80640x^3 + 30240x$$

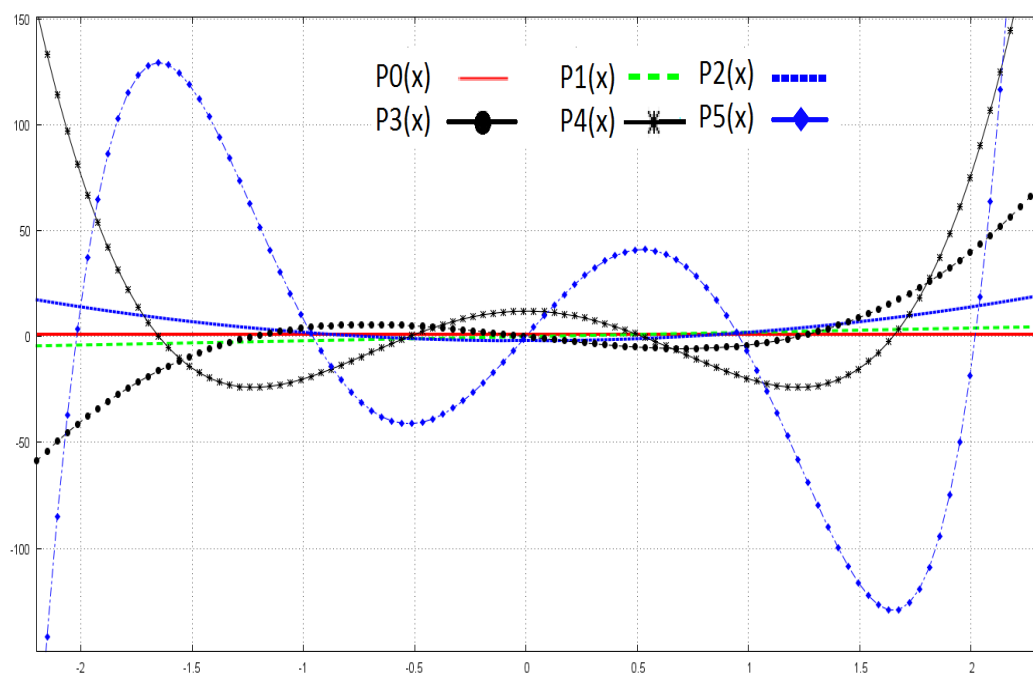
• Συνάρτηση Βάρους

Όπως ήδη ειπώθηκε, κάθε είδος πολυωνύμων Hermite χρησιμοποιεί και μία διαφορετική συνάρτηση βάρους $w(x)$. Για τα πιθανοτικά πολυώνυμα είναι

$$w^{(He)}(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (\text{B'.12})$$



Σχήμα Β'.1: Γραφική αναπαράσταση των 6 πρώτων πιθανοτικών ορθογώνιων πολυωνύμων της οικογένειας Hermite.



Σχήμα Β'.2: Γραφική αναπαράσταση των 6 πρώτων ορθογώνιων πολυωνύμων της οικογένειας Hermite του φυσικού.

ενώ για τα πολυώνυμα του φυσικού

$$w^{(H)}(x) = e^{-x^2} \quad (\text{B'.13})$$

- **Ορθογωνιότητα και Νορμα**

Η ορθογωνιότητα του κάθε είδους ως προς την εκάστοτε συνάρτηση βάρους εκφράζεται με τις σχέσεις B'.14 και B'.15.

$$\int_{-\infty}^{\infty} He_m(x) He_n(x) e^{-\frac{x^2}{2}} dx = n! \sqrt{2\pi} \delta_{mn} \quad (\text{B'.14})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_m(x) H_n(x) e^{-x^2} dx = 2^n n! \sqrt{\pi} \delta_{mn} \quad (\text{B'.15})$$

όπου δ_{mn} το σύμβολο Kronecker για το οποίο ισχύει

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ 1, & m = n \end{cases} \quad (\text{B'.16})$$

Για την περίπτωση $m = n$, από τις σχέσεις ορθογωνιότητας B'.14 και B'.15 υπολογίζεται η κατά w -νόρμα των πολυωνύμων. Είναι

$$\|He_n\|_w^2 = \int_{-\infty}^{\infty} He_n(x) He_n(x) e^{-\frac{x^2}{2}} dx = n! \sqrt{2\pi} \equiv \gamma_n^{(He)} \quad (\text{B'.17})$$

$$\|H_n\|_w^2 = \int_{-\infty}^{\infty} H_m(x) H_n(x) e^{-x^2} dx = 2^n n! \sqrt{\pi} \equiv \gamma_n^{(H)} \quad (\text{B'.18})$$

- **Βάρη και Ρίζες στην Gauss Hermite Quadrature**

Κατά τη μέθοδο Gauss Quadrature, τα βάρη υπολογίζονται από τη σχέση

$$\omega_j = -\frac{A_{n+1}}{A_n} \cdot \frac{\gamma_n}{\phi_{n+1}(x_j) \cdot \phi'_n(x_j)} \quad (\text{B'.19})$$

όπου ϕ_n η οικογένεια ορθογωνίων πολυωνύμων που χρησιμοποιείται και x_j οι ρίζες του πολυωνύμου ϕ_n .

Χρησιμοποιώντας τον αναδρομικό τύπο

$$\phi_{n+1}(x_j) = -\frac{A_{n+1}A_{n-1}}{A_n^2} \cdot \frac{\gamma_n}{\gamma_{n-1}} \phi_{n-1}(x_j) \quad (\text{B'.20})$$

η εξίσωση B'.19 έρχεται στη μορφή

$$\omega_j = \frac{A_n}{A_{n-1}} \cdot \frac{\gamma_{n-1}}{\phi'_n(x_j) \cdot \phi_{n-1}(x_j)} \quad (\text{B'.21})$$

Ειδικεύοντας τη μέθοδο για κανονική κατανομή, στην εξίσωση B'.21 χρησιμοποιούνται τα πολυώνυμα Hermite με τα κατάλληλα A_{n-1} , A_n και γ_{n-1} . Είναι δηλαδή

$$\begin{aligned} \omega_j &= \frac{(n-1)! \sqrt{2\pi}}{He'_n(x_j) \cdot He_{n-1}(x_j)} = \frac{(n-1)! \sqrt{2\pi}}{n \cdot He_{n-1}^2(x_j)} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \omega_j = \frac{n! \sqrt{2\pi}}{n^2 \cdot He_{n-1}^2(x_j)} \end{aligned} \quad (\text{B'.22})$$

$$\begin{aligned} \omega_j &= 2 \cdot \frac{2^{n-1}(n-1)! \sqrt{\pi}}{H'_n(x_j) \cdot H_{n-1}(x_j)} = \frac{2^{n-1}(n-1)! \sqrt{\pi}}{n \cdot H_{n-1}^2(x_j)} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \omega_j = \frac{2^{n-1} n! \sqrt{\pi}}{n^2 \cdot H_{n-1}^2(x_j)} \end{aligned} \quad (\text{B'.23})$$

όπου x_j οι ρίζες του πολυωνύμου Hermite βαθμού n .

Βαθμός GHQ (n)	Πολυώνυμα He_n		Πολυώνυμα \widetilde{He}_n		Πολυώνυμα H_n	
	Ρίζες (z_j)	Βάρη (ω_j)	Ρίζες (z_j)	Βάρη (ω_j)	Ρίζες (z_j)	Βάρη (ω_j)
1	0	2.506628275	0	1	0	1.77245385091
2	1	1.25331414	1	0.5	0.7071067812	0.886226925
	-1	1.25331414	-1	0.5	-0.7071067812	0.886226925
3	1.732050808	0.417771379	1.732050808	0.1666666667	1.224744871	0.295408975
	0	1.671085516	0	0.6666666667	0	1.181635901
	-1.732050808	0.417771379	-1.732050808	0.1666666667	-1.224744871	0.295408975
4	2.334414218	0.11499371	2.334414218	0.04587585477	1.650680124	0.0813128354
	0.7419637843	1.13832042	0.7419637843	0.4541241452	0.5246476233	0.80491409
	-0.7419637843	1.13832042	-0.7419637843	0.4541241452	-0.5246476233	0.80491409
	-2.334414218	0.11499371	-2.334414218	0.04587585477	-1.650680124	0.0813128354
5	2.856970014	0.028218146	2.856970014	0.01125741133	2.02018287	0.0199532421
	1.35562618	0.55666179	1.35562618	0.222075922	0.9585724646	0.393619323
	0	1.336868413	0	0.5333333333	0	0.9453087205
	-1.35562618	0.55666179	-1.35562618	0.222075922	-0.9585724646	0.393619323
	-2.856970014	0.028218146	-2.856970014	0.01125741133	-2.02018287	0.0199532421
6	3.324257434	0.0064064014	3.324257434	0.002555784402	2.350604974	0.00453000991
	1.889175878	0.22212673	1.889175878	0.08861574604	1.335849074	0.1570673203
	0.6167065902	1.02478100	0.6167065902	0.4088284696	0.4360774119	0.724629595
	-0.6167065902	1.02478100	-0.6167065902	0.4088284696	-0.4360774119	0.724629595
	-1.889175878	0.22212673	-1.889175878	0.08861574604	-1.335849074	0.1570673203
	-3.324257434	0.0064064014	-3.324257434	0.002555784402	-2.350604974	0.00453000991
7	3.750439718	0.001374306	3.750439718	0.0005482689	2.651961357	0.000971781245
	2.366759411	0.07709668	2.366759411	0.03075712	1.673551629	0.05451558282
	1.154405395	0.60189955	1.154405395	0.24012318	0.8162878829	0.4256072526
	0	1.145887211	0	0.4571428571	0	0.8102646176
	-1.154405395	0.60189955	-1.154405395	0.24012318	-0.8162878829	0.4256072526
	-3.366759411	0.07709668	-2.366759411	0.03075712	-1.673551629	0.05451558282
	-3.750439718	0.001374306	-3.750439718	0.0005482689	-2.651961357	0.000971781245
8	4.144547186	0.0002822828	4.144547186	0.0001126145	2.930637420	0.0001996041
	2.802485861	0.02415192	2.802485861	0.009635220	2.981656757	0.01707798
	1.636519042	0.29387687	1.636519042	0.11723991	1.157193712	0.20780233
	0.5390798114	0.935003072	0.5390798114	0.373012258	0.3811869902	0.661147013
	-0.5390798114	0.935003072	-0.5390798114	0.373012258	-0.3811869902	0.661147013
	-1.636519042	0.29387687	-1.636519042	0.11723991	-1.157193712	0.20780233
	-2.802485861	0.02415192	-2.802485861	0.009635220	-2.981656757	0.01707798
	-4.144547186	0.0002822828	-4.144547186	0.0001126145	-2.930637420	0.0001996041

Πίνακας Β'.1: Ρίζες και βάρη πολυωνύμων *Hermite* τριών ειδών: πιθανοτικά (He_n), κανονικά πιθανοτικά (\widetilde{He}_n) και πολυώνυμα του φυσικού (H_n), για τάξη πολυωνύμου έως και 8^{ου} βαθμού.

B'.2 Ορθογώνια Πολυώνυμα Legendre

Η οικογένεια ορθογωνίων πολυωνύμων Legendre είναι η οικογένεια ορθογωνίων πολυωνύμων που χρησιμοποιείται όταν η στοχαστική μεταβλητή κατανέμεται βάσει της ομοιόμορφης κατανομής. Το πεδίο ορισμού των πολυωνύμων αυτών είναι το $(-1, 1)$ και ορίζονται με τον τρόπο που υπαγορεύει η εξίσωση B'.24.

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n] \quad (\text{B'.24})$$

- Αναδρομικός Τύπος

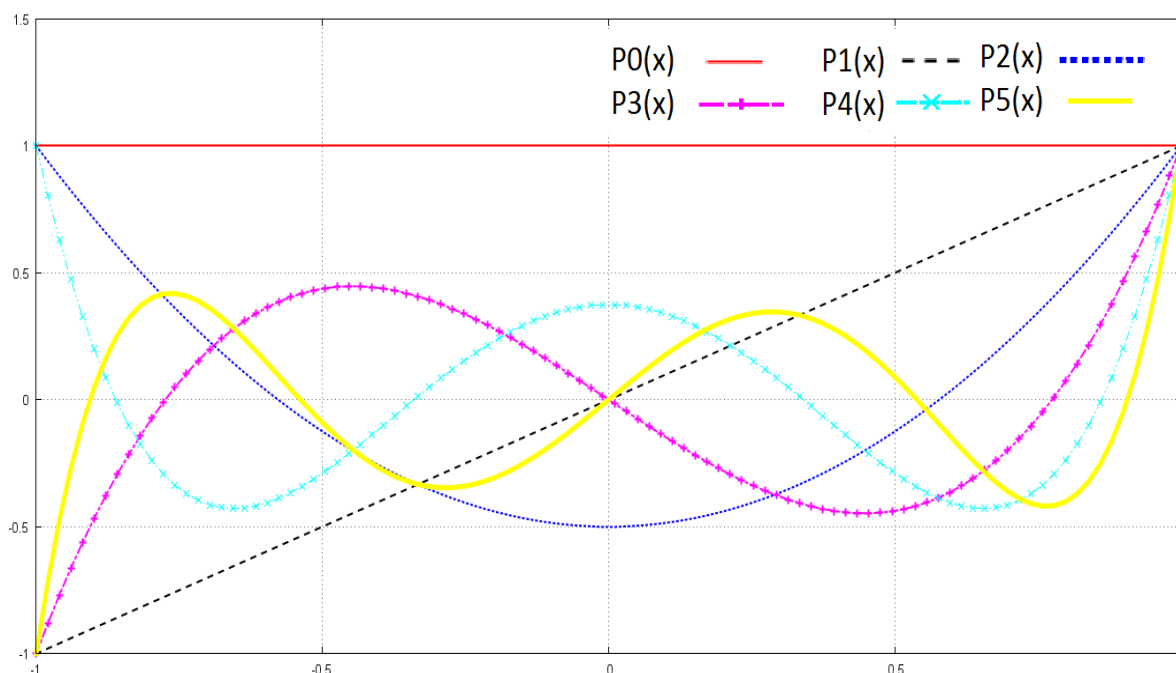
Από την εξίσωση ορισμού B'.24, μπορεί να παραχθεί ο αναδρομικός τύπος της οικογένειας πολυωνύμων Legendre, ο οποίος δίνεται από τη σχέση B'.25.

$$(n + 1)P_{n+1}(x) = (2n + 1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x) \quad (\text{B'.25})$$

Όπως για κάθε οικογένεια ορθογωνίων πολυωνύμων, έτσι και για την οικογένεια πολυωνύμων Legendre, ισχύει ότι ο όρος μηδενικής τάξης ισούται πάντοτε με την μονάδα. Είναι δηλαδή:

$$P_0(x) = 1$$

Με βάση, λοιπόν, τον αναδρομικό τύπο και την τιμή του όρου μηδενικής τάξης, μπορούν παραχθούν τα πρώτα πολυώνυμα της οικογένειας. Τα 6 πρώτα από αυτά έχουν σχεδιάζονται στο σχήμα ;;



Σχήμα Β'.3: Γραφική αναπαράσταση των 6 πρώτων ορθογώνιων πολυωνύμων Legendre στο διάστημα $[-1,1]$.

$$\begin{aligned}
 P_0(x) &= 1 \\
 P_1(x) &= x \\
 P_2(x) &= \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \\
 P_3(x) &= \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) \\
 P_4(x) &= \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3) \\
 P_5(x) &= \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x) \\
 P_6(x) &= \frac{1}{16}(231x^6 - 315x^4 + 105x^2 - 5) \\
 P_7(x) &= \frac{1}{16}(429x^7 - 693x^5 + 315x^3 - 35x) \\
 P_8(x) &= \frac{1}{128}(6435x^8 - 12012x^6 + 6930x^4 - 1260x^2 + 35) \\
 P_9(x) &= \frac{1}{128}(12155x^9 - 25740x^7 + 18018x^5 - 4620x^3 + 315x) \\
 P_{10}(x) &= \frac{1}{256}(46189x^{10} - 109395x^8 + 90090x^6 - 30030x^4 + 3465x^2 - 63)
 \end{aligned}$$

- **Συνάρτηση Βάρους, Ορθογωνιότητα και Νόρμα**

Η συνάρτηση βάρους της οικογένειας πολυωνύμων Legendre, είναι η $w(x) = 1$. Η ορθογωνιότητα ως προς την συνάρτηση βάρους δίνεται από την εξίσωση Β'.26.

$$\int_{-1}^1 P_m(x)P_n(x)1 dx = \frac{2}{2n+1}\delta_{mn} \quad (\text{B'.26})$$

όπου δ_{mn} το σύμβολο Kronecker για το οποίο ισχύει

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ 1, & m = n \end{cases} \quad (\text{B'.27})$$

Για την περίπτωση $m = n$, από την σχέση ορθογωνιότητας Β'.26, υπολογίζεται η κατα- w νόρμα των πολυωνύμων.

$$\|P_n\|_w^2 = \int_{-1}^1 P_n(x)P_n(x)1 dx = \frac{2}{2n+1} \equiv \gamma_n^{(P)} \quad (\text{B'.28})$$

- **Βάρη και Ρίζες στην Gauss Legendre Quadrature**

Κατά την μέθοδο της Gauss Quadrature με χρήση πολυωνύμων Legendre, τα βάρη υπολογίζονται από την σχέση

$$w_i = -\frac{A_{(n+1)}\gamma_n}{A_n P'_n(x_i)P_{(n+1)}(x_i)} = \frac{A_n}{A_{(n-1)}} \frac{\gamma_{(n-1)}}{P_{(n-1)}(x_i)P'_n(x_i)} \quad (\text{B'.29})$$

όπου A_n , ο συντελεστής του όρου x^n στο πολυώνυμο $P_n(x)$ και για τον οποίο ισχύει

$$A_n = \frac{(2n)!}{2^n(n!)^2} \quad (\text{B'.30})$$

Αναδρομικά, οι συντελεστές προκύπτουν από τη σχέση Β'.31.

$$\frac{A_{(n+1)}}{A_n} = \frac{(2(n+1)!)}{2^{n+1}[(n+1)!]^2} \cdot \frac{2^n(n!)^2}{(2n)!} = \frac{2n+1}{n+1}. \quad (\text{B'.31})$$

Οι απαιτούμενες n ρίζες για τη μέθοδο ολοκλήρωσης Gauss Legendre Quadrature n -οστού βαθμού, αποτελούν τις ρίζες των πολυωνύμων Legendre n -οστού βαθμού, $P_n(x)$.

Βαθμός GLQ (n)	Ρίζες x_i	Βάρη w_i
1	0	2
2	0.57735 -0.57735	1 1
3	0.774597 0 -0.774597	0.555556 0.888889 0.555556
4	0.861136 0.339981 -0.339981 -0.861136	0.347855 0.652145 0.652145 0.347855
5	0.90618 0.538469 0 -0.538469 -0.90618	0.236927 0.478629 0.568889 0.478629 0.236927

Πίνακας Β'.2: Ρίζες και βάρη των πολυωνύμων Legendre έως και 5ου βαθμού.

Βιβλιογραφία

- [1] Wiener, W.: *The homogeneous chaos. American Journal of Mathematics*, 60(4):897-926, 1938
- [2] Xiu, D. and Karniadakis, G. E.: *The Wiener-Askey polynomial chaos for stochastic differential equations. SIAM Journal on Scientific Computing*, 24(2)619-644 2002
- [3] Askey, W. and Wilson, J.: *Some basic hypergeometric polynomials that generalize Jacobi polynomials. Memoirs of the American Mathematical Society, AMS, Providence, RI, page 319, 1985*
- [4] Eldred, W. S. and Burkardt, J.: *Comparison of Non-Intrusive Polynomial Chaos and Stochastic Collocation Methods for Uncertainty Quantification. American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2009*
- [5] Shankaran, Shiram and Jameson: *Robust Optimal Control using Polynomial Chaos and Adjoint for Systems with Uncertain Inputs. 20th AIAA Computational Fluid Dynamics Conference, 2011*
- [6] Smolyak SA: *Quadrature and interpolation formulas for tensor products of certain classes of functions. Sov Math, Dokl 4:240-243, 1963*
- [7] Novak, E. and Ritter K.: *High dimensional integration of smooth functions over cubes. J Numer Math 75:79-97, 1996*
- [8] Novak, E. and Ritter K.: *Simple cubature formulas with high polynomial exactness. Constr Approx 15:499-522, 1999*
- [9] Xiu, D. and Hesthaven J.: *High order collocation method for differential equations with random inputs. SIAM J Sci Comput 27:1118-1139, 2005*
- [10] Gerstner, T. and Griebel, M.: *Numerical integration using sparse grids. Number Algorithms, 18:209-232, 1998*
- [11] Barthelmann, V, Novak E, Ritter K.: *High dimensional polynomial interpolation on sparse grids. Adv Comput Math, 12:273-288, 2000*
- [12] Xiong, F, Yang, S, Xiong Y, Greene S, Chen W: *A new sparse grid based method for uncertainty propagation. 2009*

- [13] Γιαννόκογλου Κ. Χ., Αναγνωστόπουλος Ι, Μπεργελές Γ.: *Αριθμητική Ανάλυση για Μηχανικούς*. 439-447, 2003
- [14] Mueller L. and Verstraete T.: *The LS89 Optimization Test Case*. 2016
- [15] RPM Turbo, Specialists in Linear Flow Analysis, webpage. <https://rpmturbo.com/testcases/sc10/index.html>
- [16] Anderson I. : *Combinatorics of finite sets*. Clarendon Press, 1987
- [17] Blizard W. D. : *Multiset theory*. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 30(1):36-66, 1989.
- [18] Πάμπαλης Γ : *Υλοποίηση Αναπτύγματος Πολυωνυμικού Χάους στον Αεροδυναμικά Στιβαρό Σχεδιασμό – Βελτιστοποίηση με Εξελικτικούς Αλγορίθμους υπό Στοχαστικές Εισόδους*, 2015
- [19] Wan, X. and Karniadakis, G. E. : *Error control in multi-element generalized polynomial chaos method for elliptic problems with random coefficients*. *Communication in Computational Physics*, 5:793-820, 2009
- [20] Wan, X. and Karniadakis, G. E. : *Multi-element generalized polynomial chaos for arbitrary probability measures*. *SIAM Journal of Scientific Computing*, 28(3):901-928, 2006
- [21] Oladyshkin, S. and Nowak, W. : *Data-driven uncertainty quantification using the arbitrary polynomial chaos expansion*. *Reliability Engineering and System Safety*, 106:179-190, 2012
- [22] Evolutionary Algorithm System (EASY), webpage: <http://147.102.55.162/EASY/>
- [23] Nobile, F, Tempone, R. and Webster, C. G. : *An Anisotropic Sparse Grid Stochastic Collocation Method for Partial Differential Equations with Random Input Data*, *SIAM J. Numer. Anal.*, 46(5), 2411-2442.
- [24] Καψούλης, Δ. : *Σχεδιασμός Υπολογιστικών Πειραμάτων και Εξωτερικά Μεταπρότυπα στη Βελτιστοποίηση με Εξελικτικούς Αλγορίθμους*, 2014