



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών
Τομέας Ρευστών
Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών
Μονάδα Παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής
& Βελτιστοποίησης

Προσεγγιστική, Συμβατή με CAD, Επανασχεδίαση
Επιφανειών για χρήση στην Αεροδυναμική
Βελτιστοποίηση

Διπλωματική Εργασία

Μάριος Γ. Δαμίγος

Επιβλέπων: Κυριάκος Χ. Γιαννάκογλου , Καθηγητής ΕΜΠ

Αθήνα, Μάρτιος 2015

Ευχαριστίες

Από τη θέση αυτή θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα αυτής της εργασίας Κ. Χ. Γιαννάκογλου, Καθηγητή ΕΜΠ, για τις πολύτιμες συμβουλές του.

Στο σημείο αυτό δεν θα μπορούσα να παραλείψω τις θερμές ευχαριστίες μου προς τον Δρ. Ευάγγελο Παπουτσή-Κιαχαγιά για τον χρόνο που μου αφιέρωσε και την πολύτιμη βοήθεια που μου προσέφερε όποτε τη χρειάστηκα.

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΡΕΥΣΤΩΝ
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΘΕΡΜΙΚΩΝ ΣΤΡΟΒΙΛΟΜΗΧΑΝΩΝ
ΜΟΝΑΔΑ ΠΑΡΑΛΛΗΛΗΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ
ΡΕΥΣΤΟΔΥΝΑΜΙΚΗΣ & ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ

Προσεγγιστική, Συμβατή με CAD, Επανασχεδίαση Επιφανειών για χρήση στην Αεροδυναμική Βελτιστοποίηση

Μάριος Δαμίγος

Επιβλέπων: Κυριάκος Χ. Γιαννάκογλου, Καθηγητής ΕΜΠ

Αθήνα, Μάρτιος 2015

Περίληψη

Τα τελευταία χρόνια, οι μέθοδοι αεροδυναμικής βελτιστοποίησης έχουν αποκτήσει σχετική ωριμότητα και χρησιμοποιούνται όλο και συχνότερα σε ερευνητικό επίπεδο αλλά και στη βιομηχανία. Σε προβλήματα βελτιστοποίησης μορφής στην αεροδυναμική, οι μεταβλητές βελτιστοποίησης συνήθως είναι διαφορετικές από αυτές του εκάστοτε λογισμικού CAD που χρησιμοποιείται από τη βιομηχανία. Συνεπώς, οι τελικές αεροδυναμικές μορφές με βέλτιστη απόδοση που προκύπτουν από την εκτέλεση του βρόχου βελτιστοποίησης δεν είναι άμεσα διαχειρίσιμες σε βιομηχανικό περιβάλλον και, πρακτικά, εκκρεμεί η φάση της προσαρμογής τους σε σχήματα παραμετροποίησης συμβατά με το λογισμικό CAD. Στο πλαίσιο αυτό, οι επιλογές είναι δύο: (α) είτε να ενταχθεί το λογισμικό CAD στο βρόχο βελτιστοποίησης, το οποίο προϋποθέτει ότι (για μεθόδους βασισμένες στη συζυγή τεχνική) το λογισμικό αυτό (το οποίο ίσως είναι ένα «κλειστό» εμπορικό λογισμικό) οφείλει να διαφοριστεί ή (β) να δημιουργηθούν μέθοδοι που προσεγγίζουν ικανοποιητικά τις βέλτιστες μορφές με μεθόδους παραμετροποίησης συμβατές με CAD. Η παρούσα διπλωματική εργασία εστιάζει στη δεύτερη από τις δύο προαναφερθείσες λύσεις, χρησιμοποιώντας επιφάνειες NURBS για να προσεγγίσει τις υπόψη γεωμετρίες. Η επιλογή των επιφανειών NURBS βασίστηκε στην ευρεία χρήση τους από τα πακέτα CAD (format αρχείων IGES, STEP κλπ). Αρχικά, προσεγγίζονται οι τοπικές παραμετρικές συντεταγμένες των διακριτών σημείων της επιφάνειας και, στη συνέχεια, ακολουθεί ο προσδιορισμός των σημείων ελέγχου της επιφάνειας NURBS, στοχεύοντας στην ελάχιστη απόκλιση μεταξύ της παραμετροποιημένης και αρχικής γεωμετρίας. Στην εργασία αναπτύσσεται η σχετική θεωρία και παρουσιάζονται δοκιμές του λογισμικού που προγραμματίστηκε σε πτέρυγες αεροσκάφους.

NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY OF ATHENS
SCHOOL OF MECHANICAL ENGINEERING
FLUIDS DEPARTMENT
LABORATORY OF THERMAL TURBOMACHINES
PARALLEL CFD & OPTIMIZATION UNIT

**Approximate, CAD- Compatible, Surface Reconstruction for use in
Aerodynamic Optimization**

Marios Damigos

Advisor: Kyriakos C. Giannakoglou, Professor NTUA

Athens, March 2015

Abstract

In the last years, aerodynamic optimization methods have matured and are being used more frequently in research and industrial environments. In aerodynamic shape optimization problems, the design variables are usually different than the ones used by industrial design (CAD) software to describe the geometry. Therefore, the optimal aerodynamic shapes that are generated after the optimization loop cannot be manipulated in industrial environments and practically their adaptation in a way that is CAD-compatible is pending. As solutions, either the CAD software can enter the optimization loop, which means that (for adjoint-based optimization) the CAD software (which could be commercial) has to be differentiated, or methods that approximate the optimal geometry with a CAD-compatible parameterization and high fidelity can be established. This diploma thesis focuses on the latter, by fitting NURBS surfaces to the geometries under consideration. NURBS surfaces were chosen due to their widespread use in CAD formats (IGES, STEP, etc). At first, the local parametric coordinates on the discrete surface points are approximated, followed by an optimization loop which computes the optimal positions of the NURBS surface control points, targeting the minimization of the deviation between the initial and parameterized surfaces. In this diploma thesis, the programmed method is analyzed and certain applications of the software are presented regarding aircraft wings.

Περιεχόμενα

Περιεχόμενα	i
1 Εισαγωγή	1
1.1 Αεροδυναμική Βελτιστοποίηση	1
1.1.1 Η μέθοδος των συζυγών μεταβλητών	2
1.2 Η ανάγκη για επανασχεδίαση γεωμετριών	4
1.3 Η Δομή αυτής της εργασίας	5
2 Βασική Θεωρία Καμπυλών και Επιφανειών	7
2.1 Παραμετροποίηση καμπυλών και επιφανειών	8
2.2 Οι συναρτήσεις βάσης των B-splines	10
2.3 Κατασκευή καμπυλών B-splines	13
2.4 Κατασκευή επιφανειών B-splines	16
2.5 Ρητές συναρτήσεις βάσης (NURBS)	19
3 Δημιουργία λογισμικού επαναπαραμετροποίησης και προσαρμογή του στη λογική πακέτων CAD	25
3.1 Ορισμός και Εύρεση Πρωταρχικών Μεγεθών	28
3.2 Ορισμός Μέσου Επιπέδου	29
3.3 Διαχωρισμός άνω-κάτω κελύφους	32
3.4 Προβολή στο μέσο επίπεδο	34
3.5 Στροφή και μεταφορά του μέσου επιπέδου	35
3.6 Απεικόνιση στο $[0,1] \times [0,1]$	37
3.7 Προσαρμογή σημείων στα όρια	39

3.7.1	Αναγνώριση οριακών ακμών	40
3.7.2	Εύρεση προσανατολισμού εξωτερικών κόμβων	41
3.7.3	Μετακίνηση εσωτερικών κόμβων	45
3.8	Διαχωρισμός κόμβων των δύο πλευρών της πτέρυγας	47
3.9	Κατασκευή ενός διανύσματος κόμβων	50
3.10	Κατασκευή επιφάνειας NURBS	51
3.10.1	Εύρεση αρχικών σημείων ελέγχου	51
3.10.2	Βελτιστοποίηση της θέσης των σημείων ελέγχου και των βαρών	54
4	Αποτελέσματα	59
4.1	Πτέρυγα M6	59
4.2	Πτέρυγα Common Research Model (CRM) της NASA	66
5	Συμπεράσματα	69
	A' Ο αλγόριθμος διάταξης Shellsort	71
	B' Η μέθοδος SVD (Singular Value Decomposition)	75
	Γ' Αλγόριθμοι βελτιστοποίησης	83
Γ'.1	Ο αλγόριθμος της απότομης καθόδου	83
Γ'.2	Ο αλγόριθμος BFGS	84
	Βιβλιογραφία	87

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

1.1 Αεροδυναμική Βελτιστοποίηση

Τα τελευταία χρόνια με την τεχνολογική πρόοδο που έχει επέλθει και την καθημερινή βελτίωση των επιδόσεων των Ηλεκτρονικών Υπολογιστών, έχουν αποκτηθεί τα εργαλεία για τον όλο και καλύτερο σχεδιασμό αεροδυναμικών μηχανών. Σε αυτόν τον τομέα κύριο ρόλο έχουν οι μέθοδοι βελτιστοποίησης. Βελτιστοποίηση είναι η καλύτερη (ως προς κάποια κριτήρια) επιλογή κάποιων παραμέτρων-κλειδιών για την κατασκευή μιας μηχανής. Η αεροδυναμική βελτιστοποίηση πλέον χρησιμοποιείται κατά κόρον στη βιομηχανία αλλά και σε ερευνητικά προγράμματα για την κατασκευή αποδοτικότερων αεροδυναμικών σωμάτων (λ.χ. πτέρυγες αεροσκαφών, αεροτομές, εξωτερική μορφολογία αυτοκινήτων κ.ο.κ.). Η μέθοδος βελτιστοποίησης είναι η διαδικασία η οποία κάνει επιλογή των προαναφερθεισών παραμέτρων. Όπως είναι προφανές, η διαδικασία αυτή δεν επαρκεί από μόνη της καθώς απαιτείται κι ένας αξιολογητής, ο οποίος κάνοντας χρήση των εν λόγω παραμέτρων θα βαθμολογεί ως προς τα κριτήρια που τέθηκαν. Μία από τις συνηθέστερες μορφές βελτιστοποίησης στην αεροδυναμική είναι η βελτιστοποίηση μορφής (shape optimization). Το συγκεκριμένο είδος βελτιστοποίησης το κάνουν επί το πλείστον ερευνητικά κέντρα και βιομηχανίες που επιθυμούν να κατασκευάσουν ή να ελέγξουν την αεροδυναμική συμπεριφορά, πτερυγίων στροβιλομηχανών, πτερύγων αεροσκαφών κ.ο.κ. συναρτήσει της γεωμετρίας τους. Λόγου χάρη, αλλάζοντας το σχήμα μιας υπάρχουσας αεροτομής είναι εφικτό να αυξηθεί ο συντελεστής άνωσης (C_L) και να μειωθεί ο συντελεστής οπισθέλκουσας (C_D), κάνοντας έτσι την αεροτομή και την εφαρμογή που θα την χρησιμοποιήσει πιο αποδοτικές.

1.1.1 Η μέθοδος των συζυγών μεταβλητών

Η οικογένεια μεθόδων βελτιστοποίησης, έχει δύο κλάδους: [1]

- α) Τις στοχαστικές μεθόδους και
- β) Τις αιτιοκρατικές μεθόδους

Οι στοχαστικές μέθοδοι περιλαμβάνουν την τυχαυματική (τυχαία αλλά όχι ανεξέλεγκτη) ανίχνευση της βέλτιστης λύσης. Οι στοχαστικές μέθοδοι εκφράζονται κυρίως μέσω των Εξελικτικών Αλγορίθμων (Evolutionary Algorithms-EA) [2], [3]. Οι εξελικτικοί αλγόριθμοι μοντελοποιούν τη διαδικασία της εξέλιξης, η οποία επιτάσσει την επιβίωση του ισχυρότερου. Αλγόριθμοι που υλοποιούν την μέθοδο των EA (λ.χ EASY-Evolutionary Algorithms SYstem, [4]) χρησιμοποιούν αυτήν τη λογική. Αρχικά, επιλέγονται τυχαία κάποιες λύσεις και μέσω του αξιολογητή «βαθμολογούνται» ως προς το κριτήριο που τέθηκε. Οι βέλτιστες λύσεις διατηρούνται ως «ισχυρότερες» ενώ οι υπόλοιπες δεν υπολογίζονται. Από τις επικρατέστερες λύσεις παράγεται ένα νέο σύνολο λύσεων (με αντίστοιχο τρόπο με τον συνδυασμό γονιδίων κατά την γέννηση παιδιών από γονείς) οι οποίες αξιολογούνται και η διαδικασία συνεχίζεται. Οι αιτιοκρατικές μέθοδοι περιλαμβάνουν την ανίχνευση της βέλτιστης λύσης, μέσω αλγορίθμων που χρησιμοποιούν τις παραγώγους της αντικειμενικής συνάρτησης-στόχου ως προς τις ελεύθερες παραμέτρους. Σημαντικό ρόλο στην δεύτερη κατηγορία μεθόδων έχει το λογισμικό που θα υπολογίσει τις παραγώγους, καθώς και η τεχνική που αυτό θα υλοποιεί. Συνήθεις τεχνικές, είναι αυτές της ευθείας διαφόρισης (DD) [1], [5] ή των μιγαδικών μεταβλητών (CV) [1], [6]. Οι μέθοδοι αυτές παρόλα αυτά είναι υπολογιστικά ακριβές και αργές καθώς ο χρόνος υπολογισμού των παραγώγων εξαρτάται από τον αριθμό των ελεύθερων παραμέτρων N . Συνεπώς, απαιτείται μία μέθοδος που θα ξεπερνά αυτά τα προβλήματα.

Ως λύση στο ανωτέρω πρόβλημα, προτείνεται η μέθοδος των συζυγών μεταβλητών ή συζυγής τεχνική (adjoint variable method) [1], [7], [8], [9]. Η συζυγής τεχνική επιτυγχάνει τον υπολογισμό των παραγώγων ανεξάρτητα από τον αριθμό των ελεύθερων παραμέτρων. Έστω ότι η συνάρτηση-στόχος είναι η ελαχιστοποίηση του συντελεστή οπισθέλκουσας C_D μιας αεροτομής και ότι γίνεται βελτιστοποίηση μορφής (οι ελεύθερες παράμετροι είναι γεωμετρικά στοιχεία της αεροτομής). Ορίζεται το διάνυσμα \vec{b} που περιέχει τις ελεύθερες μεταβλητές και το διάνυσμα \vec{U} που περιέχει τα ροϊκά μεγέθη (λ.χ πίεση, ταχύτητα κλπ). Ορίζεται επίσης ένα διάνυσμα εξισώσεων $\vec{R} = 0$ που αντιπροσωπεύει την ισχύουσα φυσική της ροής (εδώ \vec{R} είναι οι εξισώσεις Navier-Stokes). Τα ροϊκά μεγέθη εξαρτώνται από τις ελεύθερες μεταβλητές καθώς η γεωμετρία καθορίζει τις τιμές των ροϊκών μεγεθών γύρω από το περίγραμμα της αεροτομής. Αυτό επηρεάζει όπως είναι φυσικό και την αντικειμενική συνάρτηση, καθώς η αναπτυσσόμενη πίεση γύρω από την αεροτομή καθορίζει και τον συντελεστή οπισθέλκουσας. Αν F η

αντικειμενική συνάρτηση, τότε ισχύει

$$\frac{dF}{d\vec{b}} = \frac{\partial F}{\partial \vec{b}} + \frac{\partial F}{\partial \vec{U}} \frac{d\vec{U}}{d\vec{b}} \quad (1.1)$$

Εισάγεται η επαυξημένη αντικειμενική συνάρτηση

$$F_{aug} = F + \vec{\psi}^T \vec{R} \quad (1.2)$$

όπου $\vec{\psi}$ το διάνυσμα των πολλαπλασιαστών Lagrange ή των συζυγών μεταβλητών.

Αφού ισχύει ότι $\vec{R} = 0$, θα είναι και $F = F_{aug}$. Επομένως, η ελαχιστοποίηση της F ανάγεται σε ελαχιστοποίηση της F_{aug} . Άρα

$$\frac{dF_{aug}}{d\vec{b}} = \frac{dF}{d\vec{b}} + \vec{\psi}^T \frac{d\vec{R}}{d\vec{b}} \quad (1.3)$$

Ισχύει πως

$$\frac{d\vec{R}}{d\vec{b}} = \frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{b}} + \frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{U}} \frac{d\vec{U}}{d\vec{b}} \quad (1.4)$$

Η εξίσωση (1.3), μέσω των (1.1) και (1.4), γίνεται

$$\frac{dF_{aug}}{d\vec{b}} = \frac{\partial F}{\partial \vec{b}} + \frac{\partial F}{\partial \vec{U}} \frac{d\vec{U}}{d\vec{b}} + \vec{\psi}^T \left(\frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{b}} + \frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{U}} \frac{d\vec{U}}{d\vec{b}} \right) = \left(\frac{\partial F}{\partial \vec{U}} + \vec{\psi}^T \frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{U}} \right) \frac{d\vec{U}}{d\vec{b}} + \left(\frac{\partial F}{\partial \vec{b}} + \vec{\psi}^T \frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{b}} \right) \quad (1.5)$$

Το μητρώο $\frac{d\vec{U}}{d\vec{b}}$ έχει υψηλό υπολογιστικό κόστος και ως συνέπεια δεν είναι επιθυμητός ο υπολογισμός του. Άρα, υπολογίζονται οι πολλαπλασιαστές $\vec{\psi}$ ώστε να μηδενίζεται ο συντελεστής του μητρώου αυτού στη σχέση (1.5). Αφού υπολογιστεί το $\vec{\psi}$, χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό των παραγώγων ως εξής

$$\frac{dF}{d\vec{b}} = \frac{dF_{aug}}{d\vec{b}} = \frac{\partial F}{\partial \vec{b}} + \vec{\psi}^T \frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{b}} \quad (1.6)$$

Ο υπολογισμός των παραγώγων μέσω της (1.6) προϋποθέτει την επίλυση ενός γραμμικού συστήματος για τον υπολογισμό του $\vec{\psi}$ ενώ ο υπολογισμός μέσω της (1.1) προϋποθέτει τον επίλυση N συστημάτων $\vec{R} = 0$ για τον προσδιορισμό του μητρώου $\frac{d\vec{U}}{d\vec{b}}$. Αξίζει να σημειωθεί ότι η συζυγής τεχνική έχει δύο υποκατηγορίες: τη διακριτή [1] και τη συνεχή [7], [9], [10], [11], [12] συζυγή τεχνική. Η διακριτή συζυγής τεχνική

περιλαμβάνει τη διακριτοποίηση των εξισώσεων του διανύσματος $\vec{R} = 0$ και έπειτα την εισαγωγή τους στις σχέσεις (1.5), (1.6). Όμοια οι πολλαπλασιαστές Lagrange είναι σε διακριτή μορφή. Αντίθετα, η συνεχής συζυγής τεχνική περιλαμβάνει την κατασκευή των εξισώσεων (1.5), (1.6) με τις

$$\vec{R} = [R_1(\vec{b}, \vec{U}), R_2(\vec{b}, \vec{U}), \dots]^T = 0$$

αλλά και το διάνυσμα των συζυγών μεταβλητών

$$\vec{\psi} = [\psi_1, \psi_2, \dots]^T \quad (1.7)$$

Οι προκύπτουσες εξισώσεις ως προς ψ διακριτοποιούνται ώστε να λυθούν, και στη συνέχεια, η εφαρμογή των λύσεων στην (1.6) να δώσει τις παραγώγους.

1.2 Η ανάγκη για επανασχεδίαση γεωμετριών

Κατά τη διάρκεια της βελτιστοποίησης μορφής, το λογισμικό καλείται να αναπροσαρμόσει τη γεωμετρία του, προς βελτιστοποίηση, αντικειμένου. Λόγου χάρη, στην περίπτωση μιας αεροτομής, μπορεί να επιλεγεί ένα πολυώνυμο που να περιγράφει τη μέση γραμμή καμπυλότητας της αεροτομής. Οι συντελεστές του πολυωνύμου αυτού καθορίζουν το μήκος της χορδής της αεροτομής και την καμπυλότητά της. Παράλληλα μπορεί να γίνει επιλογή μιας συνάρτησης κατανομής του πάχους γύρω από τη μέση γραμμή καμπυλότητας. Αυτή μπορεί να είναι επίσης ένα πολυώνυμο του οποίου οι συντελεστές πρέπει να επιλεγούν. Η βελτιστοποίηση μορφής μπορεί να έχει ως στόχο την επιλογή των συντελεστών των πολυωνύμων. Η αεροτομή που βελτιστοποιείται μπορεί να ανήκει σε πτέρυγα αεροσκάφους ή σε πτερύγιο στροβιλομηχανής. Αφού επιλεγούν οι συντελεστές του πολυωνύμου της κατανομής του πάχους αλλά και αυτού της μέσης γραμμής καμπυλότητας, τότε είναι διαθέσιμη η πλήρης μορφή της αεροτομής. Στη συνέχεια, η γεωμετρία αυτή διακριτοποιείται προκειμένου κάποιος επιλύτης των εξισώσεων ροής, να υπολογίσει τα μεγέθη της ροής γύρω από την αεροτομή και σύμφωνα με αυτά να υπολογιστεί η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης που χρησιμοποιείται ως κριτήριο. Έπειτα, γίνεται χρήση της συζυγούς τεχνικής για να υπολογιστούν οι παράγωγοι ευαισθησίας της αντικειμενικής συνάρτησης ως προς τις ελεύθερες παραμέτρους ώστε να ληφθεί μία κατεύθυνση ανίχνευσης της βέλτιστης λύσης. Ύστερα από αυτό, και με βάση τον χρησιμοποιούμενο αλγόριθμο βελτιστοποίησης, υπολογίζονται νέοι συντελεστές για τα πολυώνυμα και, συνεπώς, λαμβάνεται νέα γεωμετρία της αεροτομής. Με βάση αυτά, αλλάζουν θέση και τα διακριτά σημεία πάνω στην επιφάνεια της αεροτομής. Σε περίπτωση που υπάρχει ανάγκη για οπτικό έλεγχο της γεωμετρίας της αεροτομής μέσω ενός πακέτου CAD, τότε αυτό δεν είναι εφικτό γιατί η πληροφορία που θα είναι διαθέσιμη για την αεροτομή, είναι τα διακριτά σημεία επί της επιφάνειάς της. Ένα

νέφος ασύνδετων σημείων δεν είναι αποδεκτό πρότυπο CAD, και ως εκ τούτου, η τροφοδότηση ενός πακέτου CAD με ένα αρχείο που περιέχει τις συντεταγμένες των εν λόγω σημείων δεν αρκεί για την απόδοση της γεωμετρίας. Για αυτό το λόγο, υπάρχει η ανάγκη για επανασχεδίαση της βέλτιστης γεωμετρίας με μια αποδεκτή και συμβατή με CAD μέθοδο. Ένα από τα συνηθέστερα πρότυπα σχεδίασης CAD είναι τα NURBS (Non-Uniform Rational Basis Splines) [13]. Τα NURBS χρησιμοποιούνται σε αρχεία CAD τύπου STEP, IGES, κ.ο.κ. Ως εκ τούτου, προκύπτει η ανάγκη για κατασκευή ενός αλγόριθμου που έχει ως είσοδο ένα νέφος σημείων που ανήκουν στην προς επανασχεδίαση γεωμετρία και στόχο την εξαγωγή ενός αρχείου CAD με τα δεδομένα των επιφανειακών NURBS.

1.3 Η Δομή αυτής της εργασίας

Η παρούσα διπλωματική εργασία διαρθρώνεται ως εξής:

Κεφάλαιο 2: Γίνεται αναλυτική παρουσίαση των επιφανειών και των καμπυλών NURBS και των ιδιοτήτων τους.

Κεφάλαιο 3: Παρουσιάζεται ο αλγόριθμος επανασχεδίασης. Δίνεται η θεωρία με βάση την οποία προσεγγίζεται η επιφάνεια μιας πτέρυγας αεροσκάφους, ενώ ταυτόχρονα παρουσιάζεται βήμα-βήμα η εφαρμογή της σε πτέρυγα με αραιό, μη-δομημένο πλέγμα.

Κεφάλαιο 4: Εφαρμόζεται ο αλγόριθμος του κεφαλαίου 3 σε δύο πτέρυγες με πυκνό μη-δομημένο πλέγμα ώστε να ελεγχθεί η αποδοτικότητα του αλγορίθμου σε πιο ρεαλιστικές εφαρμογές.

Κεφάλαιο 5: Εξάγονται συμπεράσματα για τη θεωρία και το λογισμικό που τη συνοδεύει. Επίσης, αναφέρονται περαιτέρω βελτιώσεις που θα μπορούσαν να εφαρμοστούν.

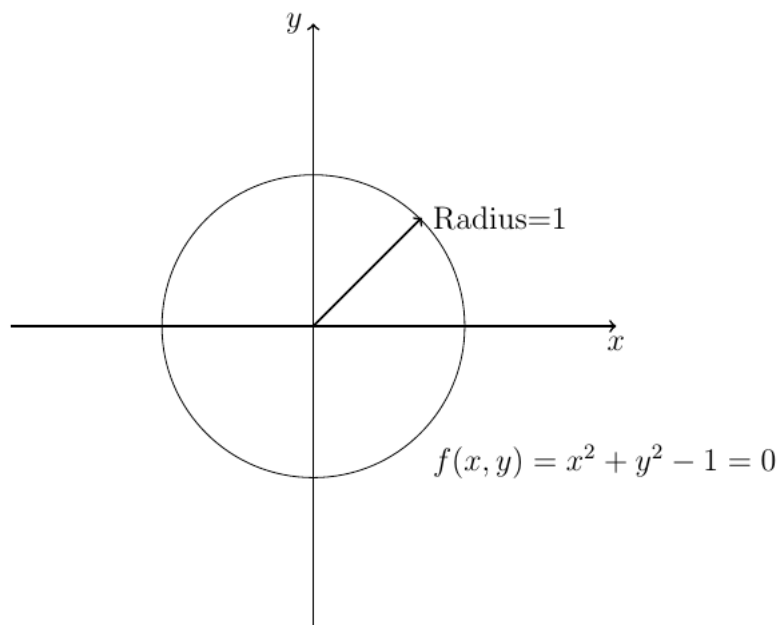
Κεφάλαιο 2

Βασική Θεωρία Καμπυλών και Επιφανειών

Με τον όρο NURBS (Non-uniform rational basis spline) [13] αναφερόμαστε σε μια οικογένεια παραμετρικών καμπυλών, επιφανειών ή στερεών. Τα NURBS ουσιαστικά είναι ένα μαθηματικό πρότυπο που χρησιμοποιείται συχνά σε υπολογιστικές μεθόδους για τη γένεση και την απεικόνιση καμπυλών, επιφανειών ή στερεών. Προσφέρουν τεράστια ευελιξία και ακρίβεια κατά τον χειρισμό αναλυτικών (βασισμένων σε κάποια μαθηματική συνάρτηση) αλλά και μοντελοποιημένων σχημάτων. Τα προτερήματά τους αυτά τα κάνουν ιδανικά για σχεδιασμό, προσομοίωση κατεργασιών και επίλυση προβλημάτων για μηχανικούς με τη βοήθεια υπολογιστή (CAD, CAM, CAE). Εξαιτίας αυτού, αποτελούν μέρος πολυπληθών προτύπων αρχείων CAD με εφαρμογές στη βιομηχανία όπως IGES, STEP, ACIS, PHIGS κ.ο.κ. Ο χειρισμός των NURBS από τον υπολογιστή είναι αποδοτικότερος και, ταυτόχρονα, επιτρέπει την αλληλεπίδραση με το χρήστη αλλά και την εύκολη κατανόηση των αποτελεσμάτων αυτής. Η απεικόνιση των NURBS γίνεται παραμετρικά και ο αριθμός των παραμέτρων εξαρτάται από το τί είδους σχήμα είναι επιθυμητό (1 για καμπύλη, 2 για επιφάνεια, 3 για στερεό). Κύριο ρόλο στη μορφή του σχήματος έχει ο αριθμός των σημείων ελέγχου. Τα σημεία ελέγχου βρίσκονται στον ίδιο χώρο με το σχήμα NURBS και έχουν τη φυσική σημασία πόλων έλξης προς αυτά. Σε αυτήν την εργασία γίνεται χρήση επιφανειακών NURBS ώστε, με την υλοποίηση της παραμετροποίησης να κατασκευάζεται επιφάνεια που θα προσεγγίζει αυτήν μιας πτέρυγας, η οποία χρησιμοποιείται ως ενδεικτικό παράδειγμα. Παρακάτω αναλύεται βήμα-βήμα η λογική γένεσης των NURBS.

2.1 Παραμετροποίηση καμπυλών και επιφανειών

Οι δύο συνηθέστερες μορφές περιγραφής καμπυλών είναι η καρτεσιανή και η παραμετρική. Για παράδειγμα, μια εξίσωση της μορφής $f(x, y) = 0$ είναι μία περιγραφή καμπύλης στο καρτεσιανό επίπεδο. Η σχέση αυτή περιγράφει την εξάρτηση του x από το y κι αντίστροφα, όταν αυτά χαρακτηρίζουν τα σημεία της εν λόγω καμπύλης. Για παράδειγμα, αναφέρεται ο κύκλος κέντρου στο $(0,0)$ και μοναδιαίας ακτίνας. Για αυτόν ισχύει: $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ (σχήμα 2.1). Στην παραμετρική μορφή, καθεμιά από



Σχήμα 2.1: Ο μοναδιαίος κύκλος σε καρτεσιανή περιγραφή.

τις συντεταγμένες ενός σημείου της εν λόγω καμπύλης (δηλαδή το x και το y) περιγράφεται ως συνάρτηση μιας ανεξάρτητης παραμέτρου u και, στη γενική περίπτωση, δεν υπάρχει ευθεία συσχέτιση μεταξύ x και y . Γενικά, είναι

$$\vec{C}(u) = (x(u), y(u)), a \leq u \leq b \quad (2.1)$$

Συνεπώς το \vec{C} είναι ένα διάνυσμα θέσης το οποίο έχει τις καρτεσιανές συντεταγμένες των σημείων της καμπύλης αλλά εξαρτάται μόνο από την παράμετρο u . Το εύρος $[a, b]$ στο οποίο μπορεί να κινείται η παράμετρος u είναι αυθαίρετο γιατί βασίζεται στην

εξάρτηση των x, y από αυτό και μόνο. Μια απλή παραμετρική μορφή του κύκλου στο σχήμα 2.1 είναι

$$x(u) = \cos u \quad (2.2)$$

$$y(u) = \sin u \quad (2.3)$$

με $u \in [0, 2\pi]$. Αν τεθεί ότι $u \in [0, \frac{\pi}{2}]$ τότε, προφανώς, γίνεται αναφορά στο πρώτο τεταρτοκύκλιο. Για αυτό το τμήμα του κύκλου μπορεί να υιοθετηθεί κι άλλη μια παραμετροποίηση, η $t = \tan \frac{u}{2}$. Από αυτήν, θα προκύψει η εξής εναλλακτική μορφή παραμετρικών συντεταγμένων

$$x(t) = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \quad (2.4)$$

$$y(t) = \frac{2t}{1 + t^2} \quad (2.5)$$

με $t \in [0, 1]$. Συνεπώς, είναι προφανές ότι η παραμετροποίηση μιας δοθείσας καμπύλης στο καρτεσιανό επίπεδο δεν είναι μοναδική. Για κατανόηση, η συνάρτηση $\vec{C}(u)$ θεωρείται ως διαδρομή ενός σωματιδίου συναρτήσει του χρόνου όπου, η παράμετρος u αναφέρεται στο χρόνο. Με αυτήν τη θεώρηση, $[a, b]$ είναι η χρονική διάρκεια της κίνησης (σχήμα 2.2).

Αντιστοίχως, μία επιφάνεια περιγράφεται καρτεσιανά με τη σχέση $f(x, y, z) = 0$. Αντίστοιχα με πριν, μπορεί να παρουσιαστεί ως παράδειγμα η σφαίρα μοναδιαίας ακτίνας (σχήμα 2.3) για την οποία: $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$. Μια παραμετρική έκφραση της σφαίρας θα μπορούσε να είναι η

$$\vec{S}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \quad (2.6)$$

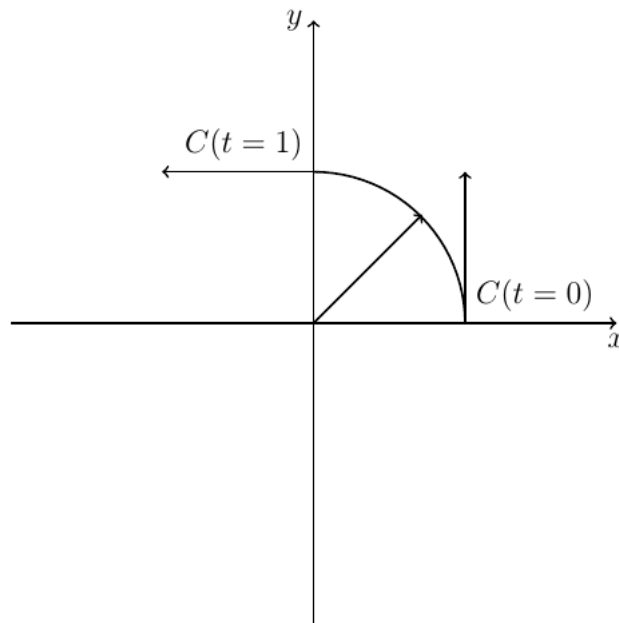
με

$$x(u, v) = \sin u \cos v \quad (2.7)$$

$$y(u, v) = \sin u \sin v \quad (2.8)$$

$$z(u, v) = \cos u \quad (2.9)$$

με $u \in [0, \pi], v \in [0, 2\pi]$. Προφανώς, απαιτούνται δύο παράμετροι για να περιγραφεί μία επιφάνεια και αξίζει η παρατήρηση του τι συμβαίνει αν αλλάξει η μία εκ των δύο μόνο, ενώ η άλλη παραμένει σταθερή. Αν «παγώσει» η παράμετρος u τότε ο γεωμετρικός τόπος που περιγράφεται από τη μεταβολή τιμών της v έχει σταθερή κατά z συντεταγμένη συνεπώς δημιουργούνται παράλληλοι κύκλοι. Αντίθετα, αν «παγώσει» η παράμετρος v , τότε η μεταβολή τιμών της u περιγράφει μεσημβρινούς κύκλους.



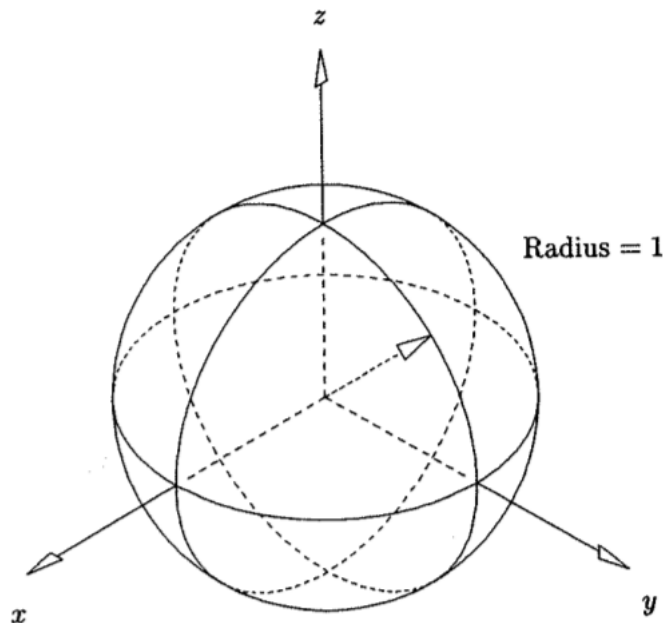
Σχήμα 2.2: Το πρώτο τεταρτοκύκλιο του κύκλου μοναδιαίας ακτίνας σε παραμετρική μορφή. Για $t = 0$ είναι η αρχή του και για $t = 1$ το πέρας του. Τα διανύσματα στα σημεία, για $t = 0$ και $t = 1$, δείχνουν τις κατευθύνσεις κίνησης πάνω στην καμπύλη.

2.2 Οι συναρτήσεις βάσης των B-splines

Μία συχνά χρησιμοποιούμενη μορφή παραμετροποίησης καμπύλης είναι η

$$\vec{C}(u) = \sum_{i=0}^n N_{i,n}(u) \vec{P}_i \quad (2.10)$$

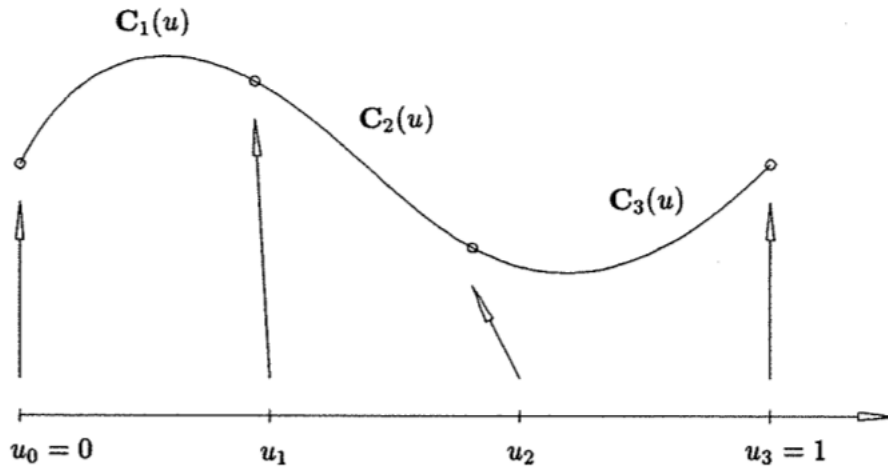
Με $N_{i,n}(u)$ περιγράφεται ένα σύνολο $n + 1$ πολυωνύμων (n είναι ο βαθμός των πολυωνύμων αυτών) τα οποία εμπλέκονται στην παραμετροποίηση. Με \vec{P}_i περιγράφονται οι $n + 1$ γεωμετρικοί συντελεστές γνωστοί ως σημεία ελέγχου (control points) τα οποία πρακτικά είναι ένα σύνολο συντεταγμένων και λειτουργούν ως πόλοι έλξης στην καμπύλη. Τα πολυώνυμα $N_{i,n}(u)$ είναι γνωστά και ως συναρτήσεις βάσης. Η μαθηματική μορφή τους είναι πολύ σημαντική γιατί από αυτές εξαρτάται η ακρίβεια, η ευελιξία και η συνέχεια με τις οποίες μπορούν να αναπαραστήσουν καμπύλες και επιφάνειες. Κατά καιρούς, στην οικογένεια συναρτήσεων βάσης κατάλληλων για NURBS έχουν προταθεί πολλές διαφορετικές μορφές όπως αυτές των Bezier-Bernstein [13, σελίδα 9]. Οι επικρατέστερες συναρτήσεις βάσης παρόλα αυτά, είναι αυτές των B-splines.



Σχήμα 2.3: Επιφάνεια της σφαίρας μοναδιαίας ακτίνας. Reference: [13].

Οι καμπύλες Bezier-Bernstein έχουν ως συναρτήσεις βάσης τα πολυώνυμα Bernstein, βαθμού κατά ένα μικρότερου από τον αριθμό των σημείων ελέγχου. Αρκετές φορές όμως, οι καμπύλες που περιγράφονται από συναρτήσεις βάσης που κάνουν χρήση ενός πολυωνύμου δεν επαρκούν. Αυτό γιατί χρειάζεται υψηλός βαθμός στο πολυώνυμο για να μπορέσουν να προσεγγιστούν σύνθετα σχήματα. Επίσης, η αλλαγή της θέσης των σημείων ελέγχου επηρεάζει ολόκληρη την προκύπτουσα καμπύλη. Αν ενδεχομένως χρειαζόταν, λ.χ., σε ένα βρόχο βελτιστοποίησης να αλλάξει τοπικά η καμπύλη, τότε θα έπρεπε να αλλάξει ολόκληρο το σχήμα της. Η λύση σε αυτό είναι να χρησιμοποιηθούν τμηματικά συνεχή πολυώνυμα ή τμηματικά συνεχή ρητά πολυώνυμα. Το σχήμα 2.4 παρουσιάζει μία καμπύλη $\vec{C}(u)$ που αποτελείται από $m(= 3)$ πολυωνυμικά τμήματα. Ισχύει ότι $u \in [0, 1]$ για ολόκληρη την καμπύλη και $u_0 = 0 < u_1 < u_2 < u_3 = 1$ είναι τα σημεία μεταξύ των διαφορετικών πολυωνυμικών εκφράσεων. Ας είναι $\vec{C}_i, 1 \leq i \leq m$ τα τμήματα της καμπύλης \vec{C} . Τα τμήματα αυτά κατασκευάζονται ώστε να συνδέονται με συνεχή τρόπο. Μπορεί να χρησιμοποιηθεί οποιαδήποτε πολυωνυμική μορφή ώστε να οριστεί το $\vec{C}(u)$. Το $U = [u_0, u_1, u_2, u_3]$ ονομάζεται διάνυσμα κόμβων (knot vector), έχει διάσταση $m + 1$ και καθορίζει πού και πώς επιδρούν τα σημεία ελέγχου στην προκύπτουσα καμπύλη.

Υπάρχουν αρκετοί τρόποι να εκφραστούν οι συναρτήσεις βάσης B-splines. Ο πιο αποδοτικός τρόπος για υπολογιστική υλοποίηση είναι η επαναληπτική μέθοδος του Cox-deBoor [13, σελίδα 50]. Σύμφωνα με αυτή, για ένα μη-φθίνον διάνυσμα κόμβων $U = [u_0, u_1, \dots, u_m]$ ορίζεται η i -οστή συνάρτηση βάσης βαθμού p (τάξης $p + 1$) με την



Σχήμα 2.4: Μία καμπύλη με τρία τμηματικά συνεχή πολυώνυμα.

αναδρομική σχέση

$$N_{i,0}(u) = \begin{cases} 1 & u_i \leq u < u_{i+1} \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases} \quad (2.11)$$

$$N_{i,p}(u) = \frac{u - u_i}{u_{i+p} - u_i} N_{i,p-1}(u) + \frac{u_{i+p+1} - u}{u_{i+p+1} - u_i} N_{i+1,p-1}(u) \quad (2.12)$$

Από τον ορισμό της συνάρτησης βάσης γίνονται φανερά τα εξής:

α) Η $N_{i,0}$ είναι η βηματική συνάρτηση και μηδενίζεται όταν το u δεν βρίσκεται στο εν λόγω εύρος κόμβων (knot-span) $[u_i, u_{i+1})$.

β) Για $p > 0$ η $N_{i,p}$ είναι γραμμική συνάρτηση δύο συναρτήσεων βάσης, $p - 1$ βαθμού.

γ) Η μέγιστη τιμή που μπορεί να λάβει το p είναι η $p = n$.

δ) Στον τύπο του $N_{i,p}$ μπορεί να προκύψει το πηλίκο $\frac{0}{0}$. Εξαιτίας αυτού ορίζεται $\frac{0}{0} = 0$.

ε) Τα εύρη κόμβων από τα οποία εξαρτάται η $N_{i,p}$ είναι το i και το $i + 1$ (σχέση (2.12)). Επίσης, η αναδρομική σχέση εφαρμόζεται έως ότου μηδενίσει το p οπότε και εφαρμόζεται η βηματική συνάρτηση. Πρακτικά δηλαδή, μετά από p αναδρομικές εφαρμογές της (2.12), η $N_{i,p}$ θα φτάσει να εξαρτάται από το $(i + p)$ -οστό εύρος κόμβων. Αυτό δίνει πληροφορία για τη σημασία του p το οποίο δηλώνει πόσα εύρη κόμβων θα επηρεαστούν αν υπάρξει αλλαγή στο i -οστό εύρος.

στ) Προκειμένου να υπάρχει ο επιθυμητός βαθμός συνέχειας, αποδεικνύεται, [13], ότι οι πρώτοι και οι τελευταίοι κόμβοι πρέπει να έχουν πολλαπλότητα $p + 1$. Συνεπώς, το χρησιμοποιούμενο διάλυμα κόμβων πρέπει να έχει τη μορφή

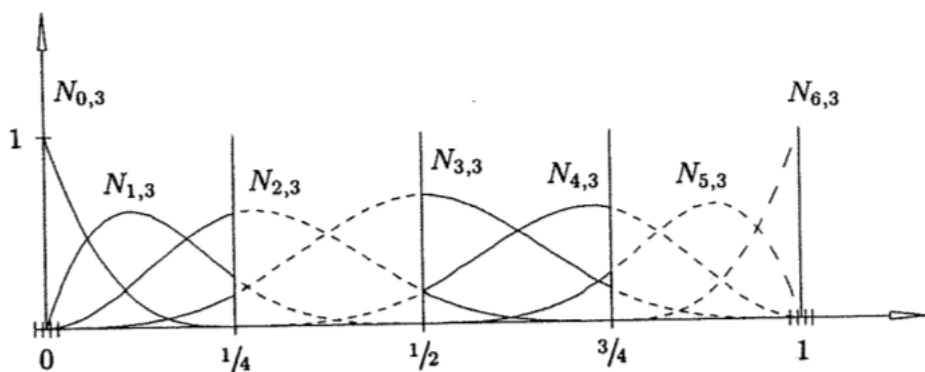
$$U = \left[\underbrace{a, a, \dots, a}_{p+1}, u_{p+1}, \dots, u_{m-p-1}, \underbrace{b, b, \dots, b}_{p+1} \right] \quad (2.13)$$

Για την ανωτέρω μορφή διανύσματος κόμβων ισχύουν μερικές ακόμα ιδιότητες. Αν $m+1$ το μήκος του διανύσματος κόμβων και $n+1$ το πλήθος των σημείων ελέγχου τότε ισχύει ότι

$$n = m - p - 1 \quad (2.14)$$

Επίσης αν ορισθεί $U = \underbrace{[0, 0, \dots, 0]}_{p+1}, \underbrace{[1, 1, \dots, 1]}_{p+1}$ τότε οι συναρτήσεις βάσης που προκύπτουν

είναι τα πολυώνυμα Bernstein βαθμού p . Αυτό συμβαίνει γιατί, αφενός μεν θέτοντας $a=0, b=1$ η παράμετρος u κινείται στο εύρος $[0, 1]$, αφετέρου δε καθώς αν $m+1=2p+2$ τότε $n=p$. Τέλος, αν πλέον τα $u_{p+1}, \dots, u_{m-p-1}$ είναι αύξοντα και ισαπέχοντα, το διάνυσμα U ονομάζεται ομογενές. Για κατανόηση της πορείας για την κατασκευή και τη χρήση των συναρτήσεων βάσης B-splines αξίζει να γίνει αντιληπτό πως αποκτούνται αριθμητικές τιμές για τα p, n, m . Τα p, n επιλέγονται εμπειρικά συναρτήσει δύο πραγμάτων. Πρώτον, της επιθυμητής ακρίβειας της προσέγγισης και της συνέχειας, η οποία καθορίζει το p και δεύτερον της ευελιξίας που είναι επιθυμητό να έχει η προσέγγιση, η οποία καθορίζει το n . Στη συνέχεια, προκύπτει το μήκος $m+1$ του διανύσματος U αφού είναι $m = n + p + 1$. Τα πρώτα $p+1$ στοιχεία του U είναι μηδενικά, ενώ τα τελευταία $p+1$ είναι μοναδιαία. Τα ενδιάμεσα στοιχεία ($u_{p+1}, \dots, u_{m-p-1}$) επιλέγονται από τον χρήστη και τις περισσότερες φορές κάνουν το U ομογενές.



Σχήμα 2.5: Οι συναρτήσεις βάσης των B-splines για $p = 3, n = 6$ και $U = [0, 0, 0, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1, 1, 1, 1]$. [13]

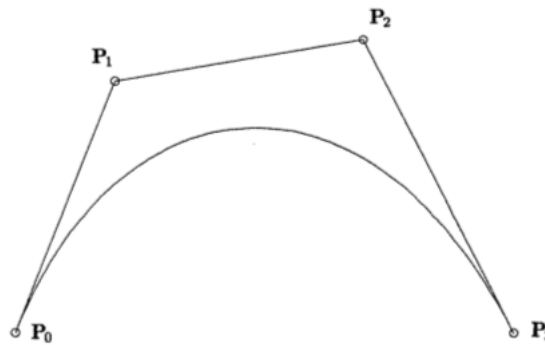
2.3 Κατασκευή καμπυλών B-splines

Με βάση όσα αναφέρθηκαν στις προηγούμενες ενότητες, οι καμπύλες B-splines ορίζονται από τη σχέση (2.10) με \vec{P}_i να είναι τα διανύσματα συντεταγμένων των σημείων ελέγχου, $N_{i,p}$ οι p -οστού βαθμού συναρτήσεις βάσης των B-splines και u η χρησιμοποιούμενη παράμετρος με $u \in [a, b]$. Ο ορισμός αυτός συνοδεύεται από το μη-φθίνον

διάνυσμα κόμβων

$$U = \left[\underbrace{a, a, \dots, a}_{p+1}, u_{p+1}, \dots, u_{m-p-1}, \underbrace{b, b, \dots, b}_{p+1} \right]$$

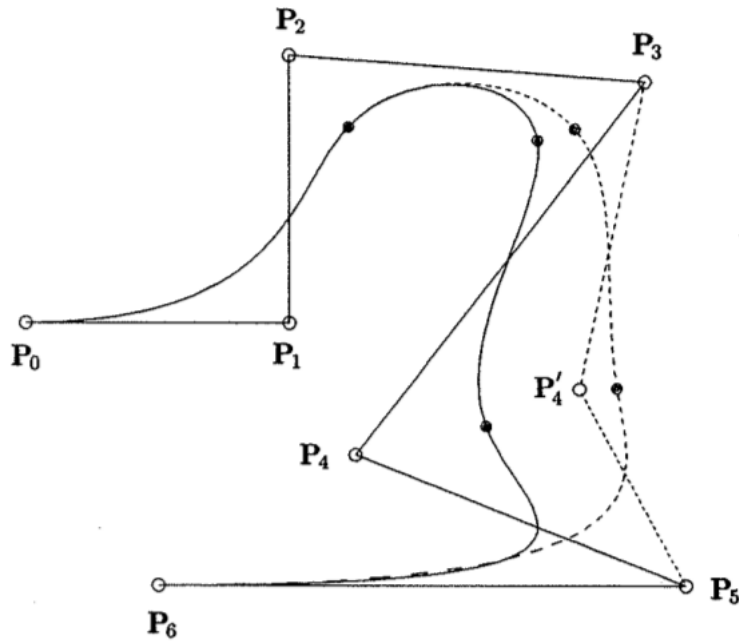
το οποίο έχει μήκος $m+1$. Στις περισσότερες εφαρμογές ισχύει $a=0, b=1$. Για τις συγκεκριμένες καμπύλες ισχύει $\vec{C}(0) = \vec{P}_0, \vec{C}(1) = \vec{P}_n$. Στο σχήμα 2.6, διακρίνεται η ταύτιση του πρώτου και του τελευταίου σημείου του πολυγώνου ελέγχου με την αρχή και το πέρας της καμπύλης.



Σχήμα 2.6: Μία καμπύλη B-splines με $p = 3$ και $U = [0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1]$. Είναι ουσιαστικά μια καμπύλη Bezier με τέσσερα σημεία ελέγχου. Εφόσον, η καμπύλη έχει τέσσερα σημεία ελέγχου, τότε είναι $n=3$ και $m=n+p+1=7$. Συνεπώς, το διάνυσμα κόμβων πρέπει να έχει $m+1=8$ στοιχεία, όπως και συμβαίνει.

Το γεγονός ότι οι καμπύλες B-splines εκφράζονται μέσω τμηματικά συνεχών πολυωνύμων, τις κάνει χρήσιμες σε εφαρμογές βελτιστοποίησης. Πολλές φορές, προκύπτει η ανάγκη για αναπροσαρμογή της καμπύλης σε ορισμένες περιοχές του u και όχι καθολικά. Αυτό μπορεί να γίνει με μετακίνηση του σημείου ελέγχου που αντιστοιχεί στο εύρος κόμβων στο οποίο ανήκει η εν λόγω περιοχή του u . Ο αριθμός των ευρών κόμβων (knot-spans), γύρω από αυτό στο οποίο γίνεται αλλαγή, που θα επηρεαστούν εξαρτάται ευθέως από το p . Για παράδειγμα, έστω μία καμπύλη B-splines που κατασκευάζεται με $p = 3$, με 7 σημεία ελέγχου ($n = 6$) και με ένα ομογενές διάνυσμα κόμβων, το $U = [0, 0, 0, 0, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, 1, 1, 1, 1]$ (σχήμα 2.7). Αν για κάποιο λόγο (που ίσως να συνδέεται με την προαναφερθείσα βελτιστοποίηση) μετακινηθεί το 5^ο σημείο ελέγχου από την θέση P_4 στην P'_4 , τότε θα επηρεαστεί η καμπύλη για τα u που ανήκουν στο 5^ο εύρος κόμβων καθώς και στα 3 επόμενα ($p = 3$). Συνεπώς, θα επηρεαστεί η καμπύλη για τα u που ανήκουν στο εύρος $[u_4, u_8) = [\frac{1}{4}, 1)$. Αυτό γίνεται κατανοητό αν εξεταστεί η σχέση (2.12). Από αυτήν προκύπτει πως οι συναρτήσεις βάσης $N_{i,p}$ είναι μηδενικές για όλα τα u που δεν ανήκουν στο εύρος $[u_i, u_{i+p+1})$.

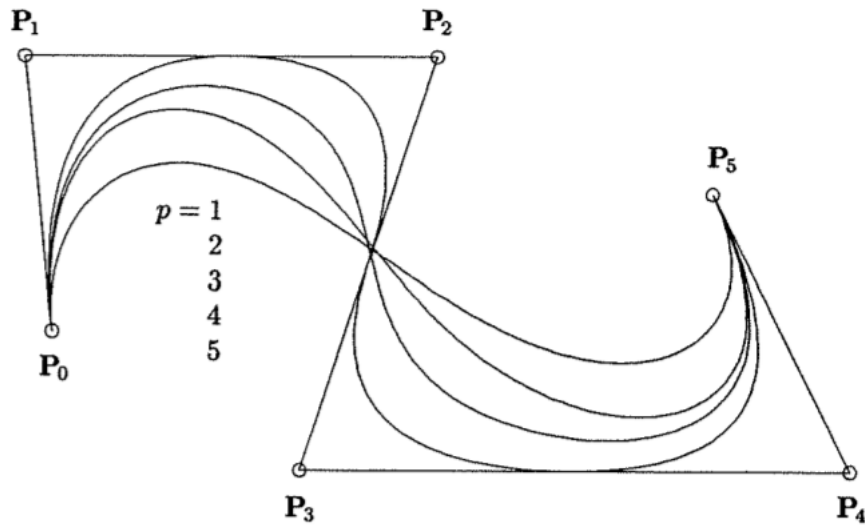
Η αύξηση ή η μείωση του αριθμού των ευρών κόμβων που επηρεάζονται από μετακίνηση κάποιου σημείου ελέγχου, όπως προαναφέρθηκε εξαρτάται από το p . Ενδεχόμενη ε-



Σχήμα 2.7: Μία καμπύλη *B-splines* μαζί με το πολύγωνο ελέγχου. Με έντονη γραμμική φαίνεται η αρχική καμπύλη και με διακεκομμένη η τελική που θα προκύψει αν το 5^ο σημείο ελέγχου μετακινηθεί από τη θέση P_4 στην P'_4 . Με έντονες τελείες πάνω στην καμπύλη είναι τα σημεία που αλλάζουν τα εύρη κόμβων. Όπως είναι προφανές, στο εύρος κόμβων $[u_3, u_4) = [0, \frac{1}{4})$ δεν υπάρχει αλλαγή θέσης της καμπύλης.

λάττωση του p μειώνει τα εύρη κόμβων που εξαρτώνται από τη μετακίνηση του i -οστού σημείου ελέγχου αλλά, ταυτόχρονα, μειώνει το βαθμό συνέχειας της καμπύλης κάνοντας την, λιγότερο καλή προσέγγιση του πολύγωνου ελέγχου. Λ.χ., έστω μία καμπύλη *B-splines* με 6 σημεία ελέγχου, των οποίων οι θέσεις είναι προεπιλεγμένες, και με ένα ομογενές διάνυσμα κόμβων. Ελάχιστη τιμή για το p είναι η $p=1$, ενώ η μέγιστη είναι η $p=5$. Παρακάτω, δίδονται τα διανύσματα κόμβων για κάθε $p \in [1, 5]$ και στο σχήμα 2.8 παρουσιάζονται οι προκύπτουσες καμπύλες.

$$\begin{aligned}
 p=1, U &= [0, 0, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 1, 1] \\
 p=2, U &= [0, 0, 0, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, 1, 1, 1] \\
 p=3, U &= [0, 0, 0, 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, 1, 1, 1] \\
 p=4, U &= [0, 0, 0, 0, 0, \frac{1}{2}, 1, 1, 1, 1, 1] \\
 p=5, U &= [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1]
 \end{aligned}$$



Σχήμα 2.8: Στο σχήμα φαίνονται πέντε διαφορετικές καμπύλες *B-splines* οι οποίες προκύπτουν για πέντε διαφορετικά p , ομογενές διάνυσμα κόμβων και το ίδιο πολύγωνο ελέγχου. Η καμπύλη για $p = 5$ εφάπτεται σε όλες τις ακμές του πολυγώνου ελέγχου προσφέροντας την καλύτερη προσέγγιση σε αυτό. Αντιθέτως, η χειρότερη προσέγγιση δίνεται από την καμπύλη που προκύπτει για $p=1$. Η καμπύλη αυτή παρόλα αυτά δίνει τη μεγαλύτερη δυνατότητα τοπικής αναπροσαρμογής.

2.4 Κατασκευή επιφανειών *B-splines*

Μία επιφάνεια *B-splines* κατασκευάζεται αν ληφθεί ένα δίκτυο σημείων ελέγχου με δύο παραμετρικές κατευθύνσεις, δύο διανύσματα κόμβων και τα γινόμενα των συναρτήσεων βάσης. Δηλαδή, αντί της σχέσης (2.10), ισχύει η

$$\vec{S}(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(u) N_{j,q}(v) \vec{P}_{ij} \quad (2.15)$$

Τα δύο διανύσματα κόμβων είναι τα εξής

$$U = \left[\underbrace{a, a, \dots, a}_{p+1}, u_{p+1}, \dots, u_{r-p-1}, \underbrace{b, b, \dots, b}_{p+1} \right] \quad (2.16)$$

$$V = \left[\underbrace{a, a, \dots, a}_{q+1}, v_{q+1}, \dots, v_{s-q-1}, \underbrace{b, b, \dots, b}_{q+1} \right]$$

Το διάνυσμα κόμβων U έχει διάσταση $r + 1$ ενώ το V έχει διάσταση $s + 1$. p και q είναι αντίστοιχα οι βαθμοί των συναρτήσεων βάσης ενώ $n + 1$ και $m + 1$ είναι ο αριθμός

των σημείων ελέγχου στις δύο παραμετρικές κατευθύνσεις αντίστοιχα. Όμοια με τις καμπύλες, ισχύει ο τύπος που συνδέει τον αριθμό κόμβων, τον αριθμό σημείων ελέγχου και τον βαθμό των πολυωνύμων βάσης, σε κάθε παραμετρική κατεύθυνση ξεχωριστά. Συνεπώς, είναι

$$r = n + p + 1$$

και

$$s = m + q + 1$$

Μόλις, λοιπόν, καθορίσει ο χρήστης τους βαθμούς των πολυωνύμων βάσης αλλά και των σημείων ελέγχου στις δύο παραμετρικές κατευθύνσεις, υπολογίζονται τα μήκη των διανυσμάτων κόμβων U, V . Για αυτά συνήθως είναι $a=0, b=1$. Τα στοιχεία των U, V που δεν είναι μηδενικά ή μονάδες επιλέγονται από τον χρήστη. Μία συνήθης επιλογή, όπως και στις καμπύλες, είναι τα U, V να είναι ομογενή διανύσματα κόμβων. Μόλις γίνουν όλες οι επιλογές υπολογίζονται οι συναρτήσεις βάσης $N_{i,p}(u), N_{j,q}(v)$ με χρήση της σχέσης (2.12) όπως και για τις καμπύλες. Το γινόμενο δύο συναρτήσεων βάσης ονομάζεται τανυστικό (tensor product). Για παράδειγμα, δίνονται δύο συναρτήσεις βάσης, με πολώνυμα 3^{ov} και 2^{ov} βαθμού αντίστοιχα, οι οποίες προκύπτουν από ομογενή διανύσματα κόμβων, τα οποία κατασκευάζονται για 7 σημεία ελέγχου. Έστω ότι οι προς υπολογισμό συναρτήσεις βάσης είναι οι $N_{4,3}(u), N_{2,2}(v)$ κι ότι τα αντίστοιχα διανύσματα κόμβων είναι τα

$$\begin{aligned} U &= [0, 0, 0, 0, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, 1, 1, 1, 1] \\ V &= [0, 0, 0, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 1, 1, 1] \end{aligned} \quad (2.17)$$

Για την $N_{4,3}(u)$ (η οποία θα έχει μη μηδενικές τιμές στο διάστημα $[u_4, u_8]$) υπολογίζονται

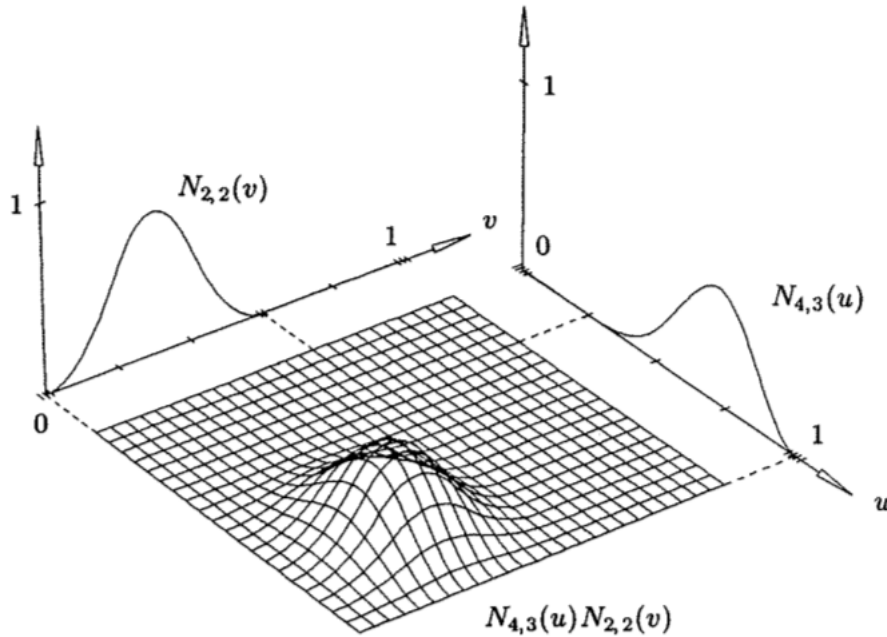
$$\begin{aligned} N_{4,3}(u) &= \frac{u - u_4}{u_7 - u_4} N_{4,2}(u) + \frac{u_8 - u}{u_8 - u_4} N_{5,2}(u) \\ N_{4,2}(u) &= \frac{u - u_4}{u_6 - u_4} N_{4,1}(u) + \frac{u_7 - u}{u_7 - u_4} N_{5,1}(u) \\ N_{4,1}(u) &= \frac{u - u_4}{u_5 - u_4} N_{4,0}(u) + \frac{u_6 - u}{u_6 - u_4} N_{5,0}(u) \\ N_{4,0}(u) &= 1, \text{ για } u_4 \leq u < u_5 \\ N_{5,0}(u) &= 1, \text{ για } u_5 \leq u < u_6 \\ N_{5,1}(u) &= \frac{u - u_5}{u_6 - u_5} N_{5,0}(u) + \frac{u_7 - u}{u_7 - u_5} N_{6,0}(u) \end{aligned} \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned}
N_{6,0}(u) &= 1, \text{ για } u_6 \leq u < u_7 \\
N_{5,2}(u) &= \frac{u - u_5}{u_7 - u_5} N_{5,1}(u) + \frac{u_8 - u}{u_8 - u_5} N_{6,1}(u) \\
N_{6,1}(u) &= \frac{u - u_6}{u_7 - u_6} N_{6,0}(u) + \frac{u_8 - u}{u_8 - u_6} N_{7,0}(u) \\
N_{7,0}(u) &= 1, \text{ για } u_7 \leq u < u_8
\end{aligned}$$

Μέσω των ανωτέρω σχέσεων υπολογίζεται η $N_{4,3}(u)$. Για την $N_{2,2}(v)$ (η οποία θα έχει μη-μηδενικές τιμές στο διάστημα $[u_2, u_5)$) υπολογίζονται

$$\begin{aligned}
N_{2,2}(v) &= \frac{v - v_2}{v_4 - v_2} N_{2,1}(v) + \frac{v_5 - v}{v_5 - v_2} N_{3,1}(v) & (2.19) \\
N_{2,1}(v) &= \frac{v - v_2}{v_3 - v_2} N_{2,0}(v) + \frac{v_4 - v}{v_4 - v_2} N_{3,0}(v) \\
N_{2,0}(v) &= 1, \text{ για } v_2 \leq v < v_3 \\
N_{3,0}(v) &= 1, \text{ για } v_3 \leq v < v_4 \\
N_{3,1}(v) &= \frac{v - v_3}{v_4 - v_3} N_{3,0}(v) + \frac{v_5 - v}{v_5 - v_3} N_{4,0}(v) \\
N_{4,0}(v) &= 1, \text{ για } v_4 \leq v < v_5
\end{aligned}$$

Αντίστοιχα με πριν υπολογίζεται η $N_{2,2}(v)$. Έπειτα από τον υπολογισμό των συναρτήσεων βάσης είναι εφικτό να δημιουργηθούν τα γραφήματα αυτών για $u, v \in [0, 1]$ και, στη συνέχεια, επιφάνεια της οποίας η τρίτη συντεταγμένη σε κάθε παραμετρική θέση (u, v) θα προκύπτει ως το γινόμενο $N_{4,3}(u)N_{2,2}(v)$ (σχήμα 2.9).

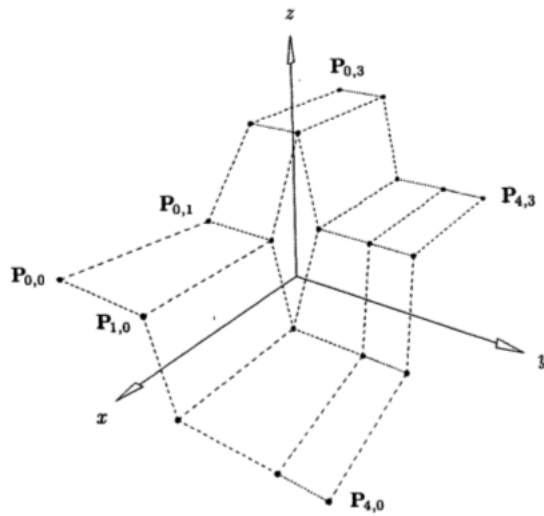


Σχήμα 2.9: Η επιφάνεια που προκύπτει μέσω του τανυστικού γινομένου δύο συναρτήσεων βάσης, της $N_{4,3}(u)$ και της $N_{2,2}(v)$.

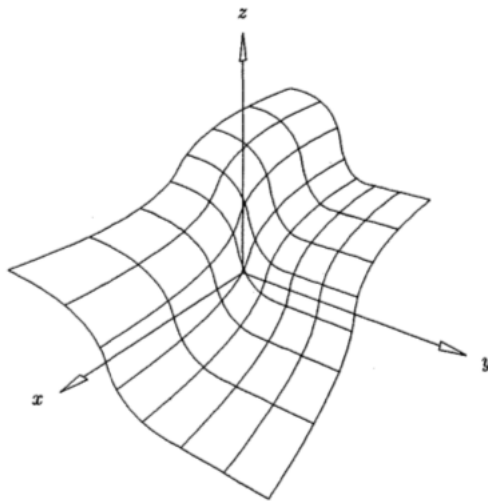
2.5 Ρητές συναρτήσεις βάσης (NURBS)

Οι συναρτήσεις βάσης B-splines καθώς και οι καμπύλες και οι επιφάνειες που προκύπτουν από αυτές, χρησιμοποιούνται ευρέως για προσέγγιση και παρεμβολή. Όπως προαναφέρθηκε, τα σημεία ελέγχου, είτε ελέγχουν καμπύλες είτε επιφάνειες, λειτουργούν ως πόλοι έλξης προς αυτές. Υπάρχουν όμως περιπτώσεις κατά τις οποίες προκύπτει η ανάγκη ένα σημείο ελέγχου να έλκει την καμπύλη, περισσότερο από τα υπόλοιπα (ή λιγότερο). Για να καλυφθεί αυτή η ανάγκη γίνεται χρήση βαρών. Τα βάρη είναι αριθμητικές τιμές με τις οποίες πολλαπλασιάζονται οι συναρτήσεις βάσης που αντιστοιχούν στα εκάστοτε σημεία ελέγχου, κατά την εφαρμογή των σχέσεων (2.10), (2.15). Η σημασία του βάρους ενός σημείου δεν έγκειται στην απόλυτη τιμή του αλλά στη σχετική τιμή του ως προς τα υπόλοιπα. Αν λ.χ., το πηλίκο του βάρους του σημείου ελέγχου i προς το αντίστοιχο βάρος του σημείου ελέγχου j , $\frac{w_i}{w_j} = 2$ τότε αυτό σημαίνει πως το σημείο i έχει διπλάσια επιρροή στην καμπύλη από το σημείο j (ή την έλκει με την διπλάσια δύναμη). Όμοια με τις προηγούμενες ενότητες, ορίζεται μία συνάρτηση βάσης $R_{i,p}(u)$. Ως προς μία παραμετρική κατεύθυνση, η καμπύλη που προκύπτει ονομάζεται ρητή (rational) και περιγράφεται από τη σχέση

$$\vec{C}(u) = \sum_{i=0}^n R_{i,p}(u) \vec{P}_i \quad (2.20)$$



(α') Σημεία ελέγχου.



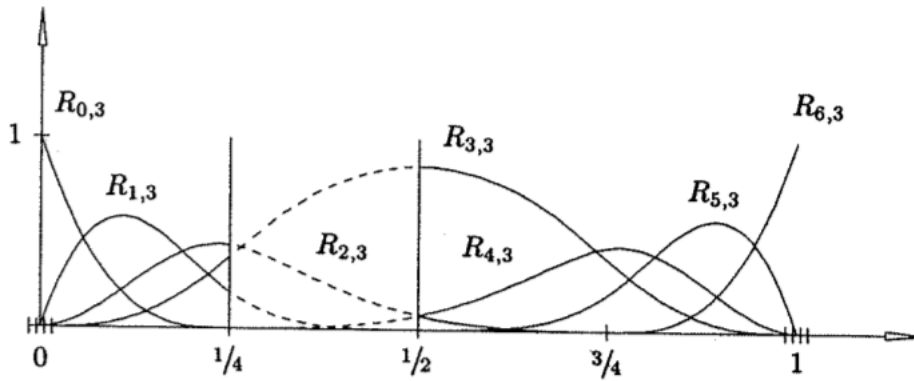
(β') Προκύπτουσα επιφάνεια.

Σχήμα 2.10: Ένα δίκτυο με σημεία ελέγχου (πάνω) και η προκύπτουσα επιφάνεια (κάτω).

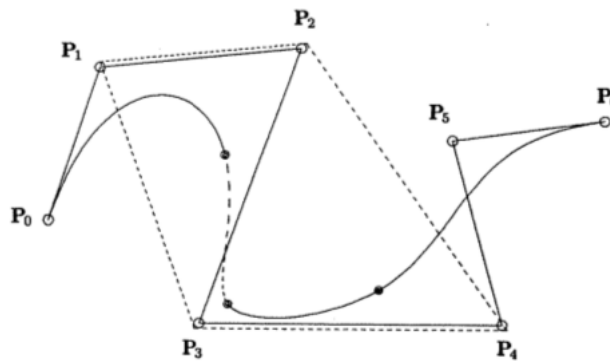
με

$$R_{i,p}(u) = \frac{N_{i,p}(u)w_i}{\sum_{j=0}^n N_{j,p}(u)w_j}$$

όπου $N_{i,p}(u)$ μία συνάρτηση βάσης B-splines. Οι ιδιότητες των συναρτήσεων βάσης B-splines ισχύουν και για τις ρητές συναρτήσεις βάσης καθώς ο βαθμός p , το διάνυσμα κόμβων U και τα σημεία ελέγχου \vec{P} έχουν ακριβώς τον ίδιο ορισμό και σημασία.



Σχήμα 2.11: Στο σχήμα διακρίνονται οι συναρτήσεις βάσης NURBS που χρησιμοποιούνται για την κατασκευή της καμπύλης του σχήματος 2.12. Οι συναρτήσεις αυτές προκύπτουν για $U = [0, 0, 0, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1, 1, 1, 1]$ και $[w_0, \dots, w_6] = [1, 1, 1, 3, 1, 1, 1]$. Εφόσον $w_3 = 3$, το σημείο ελέγχου P_3 έχει τριπλάσια επιρροή στην καμπύλη από τα υπόλοιπα. Στο παρόν σχήμα αυτό μπορεί να γίνει αντιληπτό αν γίνει σύγκριση του εμβαδού που περικλείεται από την καμπύλη της συνάρτησης $R_{3,3}$ με αυτό που περικλείεται από τις καμπύλες των υπολοίπων συναρτήσεων. Είναι προφανές ότι το αναφερθέν εμβαδόν είναι πολύ μεγαλύτερο.

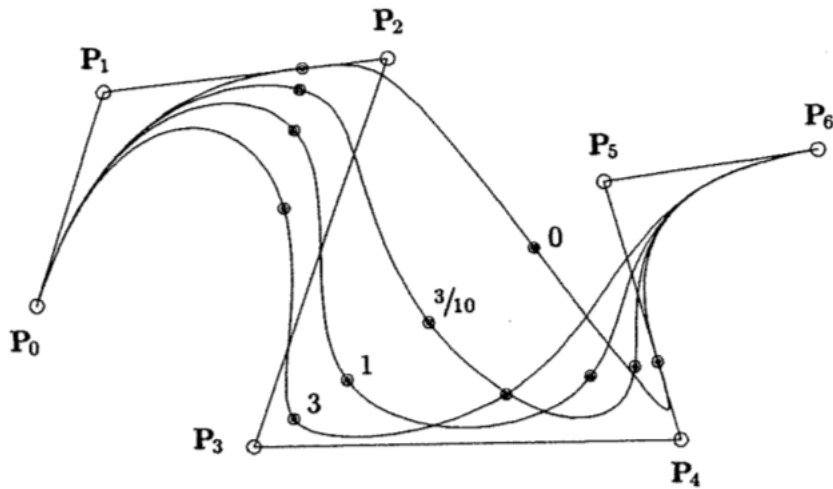


Σχήμα 2.12: Παράδειγμα κυβικής ($p = 3$) καμπύλης NURBS που προκύπτει από τις συναρτήσεις βάσης, το διάλυμα κόμβων και τα βάρη που περιγράφονται στο σχήμα 2.11. Αξίζει να σημειωθεί η αυξημένη έλξη από το σημείο P_3 που προκύπτει λόγω του $w_3 = 3$.

Για να γίνει πιο εύκολα αντιληπτή η αυξομείωση της επιρροής ενός σημείου ελέγχου στην καμπύλη μέσω αυξομείωσης του βάρους που του αντιστοιχεί, παρουσιάζεται η καμπύλη του σχήματος 2.12, και οι παραλλαγές της για διάφορες τιμές του w_3 στο σχήμα 2.13.

Αξίζει να αναφερθεί ότι και στην περίπτωση καμπυλών αλλά και σε αυτήν των επιφανειών, αν όλα τα βάρη είναι μοναδιαία τότε ισχύει ότι $R_{i,p} = N_{i,p}$.

Οι επιφάνειες NURBS, σε αντιστοιχία με τις επιφάνειες B-splines, προκύπτουν από



Σχήμα 2.13: Στο παρόν σχήμα παρουσιάζονται τέσσερις παραλλαγές της ίδιας καμπύλης NURBS. Υπενθυμίζεται ότι η καμπύλη είναι κυβική ($p=3$), με 7 σημεία ελέγχου και με ομογενές διάνυσμα κόμβων, το $U = [0, 0, 0, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1, 1, 1, 1]$. Τα βάρη τίθενται όλα ίσα με μονάδα και αλλάζει η τιμή του w_3 . Οι τιμές του w_3 φαίνονται δίπλα στις καμπύλες. Για $w_3 = 3$ προκύπτει η καμπύλη του σχήματος 2.12, ενώ για $w_3 = 1$ (όλα τα βάρη ίσα) προκύπτει μια κυβική καμπύλη B-splines. Όσο το w_3 ελαττώνεται περαιτέρω, η επιρροή του P_3 στην καμπύλη ελαττώνεται κι αυτή, ενώ για $w_3 = 0$ το σημείο δεν γίνεται αντιληπτό από την καμπύλη.

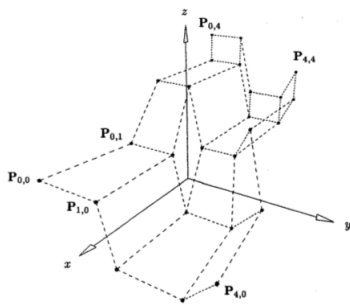
ένα πλέγμα σημείων ελέγχου με δύο παραμετρικές κατευθύνσεις και δύο διανύσματα κόμβων. Αν p ο βαθμός των πολυωνύμων βάσης κατά u και q ο βαθμός των πολυωνύμων βάσης κατά v , ορίζονται οι ρητές επιφάνειες με αντίστοιχο τρόπο με τις ρητές καμπύλες

$$\vec{S}(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m R_{i,j}(u, v) \vec{P}_{ij} \quad (2.21)$$

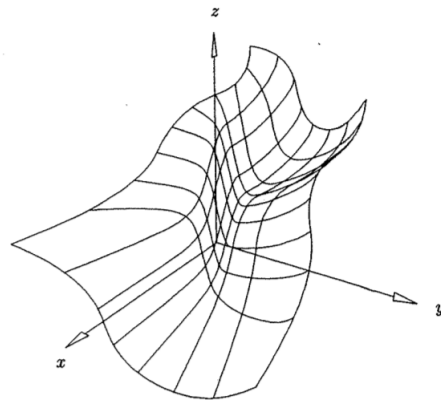
με

$$R_{i,j}(u, v) = \frac{N_{i,p}(u)N_{j,q}(v)w_{ij}}{\sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^m N_{k,p}(u)N_{l,q}(v)w_{ij}}$$

Ακριβώς όπως και στις καμπύλες NURBS, η αριθμητική τιμή του βάρους w_{ij} δείχνει την επιρροή του σημείου ελέγχου \vec{P}_{ij} στην επιφάνεια.



(α') Δίκτυο control Points.



(β') Προκύπτουσα επιφάνεια NURBS.

Σχήμα 2.14: Ένα δίκτυο με σημεία ελέγχου (αριστερά) και η προκύπτουσα επιφάνεια NURBS (δεξιά). Τα αποτελέσματα προέκυψαν για: $U = V = [0, 0, 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, 1, 1]$ και $w_{11} = w_{12} = w_{21} = w_{22} = 10$ και όλα τα υπόλοιπα $w_{ij} = 1$. Εξαιτίας των τιμών των βαρών, τα σημεία $P_{11}, P_{12}, P_{21}, P_{22}$ επηρεάζουν την επιφάνεια δέκα φορές περισσότερο.

Κεφάλαιο 3

Δημιουργία λογισμικού επαναπαραμετροποίησης και προσαρμογή του στη λογική πακέτων CAD

Κατά τη διάρκεια μιας διαδικασίας βελτιστοποίησης μορφής, ο αλγόριθμος βελτιστοποίησης δημιουργεί σχήματα μέσω της χρησιμοποιούμενης παραμετροποίησης. Τα σχήματα αυτά δεν μπορούν πάντοτε να τα αναπαραστήσουν πακέτα CAD της βιομηχανίας καθώς εκείνα χρησιμοποιούν συγκεκριμένα πρότυπα. Σκοπός της παρούσας διπλωματικής εργασίας είναι η επαναπαραμετροποίηση του προκύπτοντος σχήματος από βελτιστοποίηση μορφής και η επανασχεδιάσή του με τρόπο συμβατό με κάποιο πρότυπο CAD. Ένα από τα συνηθέστερα, συμβατά με CAD, εργαλεία σχεδίασης επιφανειών είναι τα επιφανειακά NURBS. Για να αποδώσουν τα NURBS μία επιφάνεια απαιτούν δύο παράμετρους. Αρχικό βήμα λοιπόν της επαναπαραμετροποίησης είναι να υπολογιστούν, για κάθε σημείο της επιφάνειας του εν λόγω σχήματος, δύο παράμετροι. Στη συνέχεια, με βάση αυτές τις παραμέτρους και τις συντεταγμένες των επιφανειακών σημείων, πρέπει να υπολογιστούν οι συντεταγμένες των σημείων ελέγχου. Τέλος, πρέπει να τρέξει ένας αλγόριθμος βελτιστοποίησης που θα προσδιορίσει τις βέλτιστες θέσεις των σημείων ελέγχου καθώς και τις τιμές των βαρών για κάθε σημείο.

Για την παρουσίαση της σχετικής θεωρίας, επιλέγεται να χρησιμοποιηθούν κάποια από τα συνηθέστερα αντικείμενα που υπόκεινται σε βελτιστοποίηση μορφής, οι πτέρυγες αεροσκαφών. Για αυτόν τον σκοπό, χρησιμοποιούνται τρεις πτέρυγες. Τα επιφανειακά πλέγματα και των τριών είναι μη-δομημένα. Η μία από τις τρεις πτέρυγες χρησιμοποιεί-

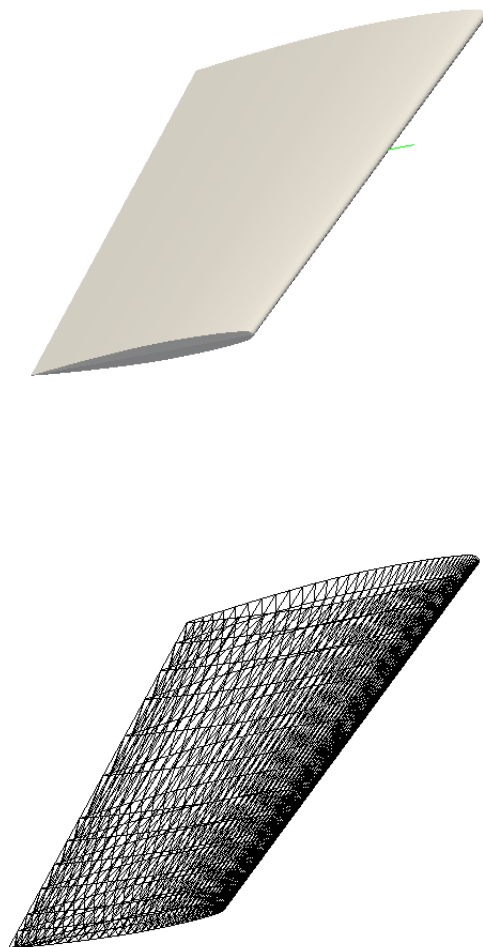
ίται ώστε, βήμα-βήμα, να παρουσιαστούν τα αποτελέσματα του ανωτέρω αλγορίθμου επαναπαραμετροποίησης. Σε αυτήν την πτέρυγα, το επιφανειακό πλέγμα θεωρείται ψευδο-δομημένο καθώς προέκυψε από τη δημιουργία τριγωνικών στοιχείων από δομημένα τοποθετημένους κόμβους. Η άλλες πτέρυγες έχουν μη-δομημένο πλέγμα και τα αποτελέσματά τους, μαζί με συμπεράσματα για τη λειτουργικότητα της μεθόδου, παρουσιάζονται στο επόμενο κεφάλαιο.

Η διαδικασία παραμετροποίησης των σημείων των πτερύγων περιλαμβάνει τα εξής βήματα:

- α) Χρησιμοποίηση των συντεταγμένων τεσσάρων μη-συνεπίπεδων οριακών σημείων (δύο που ορίζουν το ευθύγραμμο τμήμα της ακμής πρόσπτωσης και δύο για το αντίστοιχο της ακμής εκφυγής) τα οποία ορίζουν ένα τετράπλευρο περίγραμμα της πτέρυγας, για τον ορισμό ενός μέσου επιπέδου το οποίο κόβει κατά μήκος την πτέρυγα.
- β) Καταγραφή των σημείων του επιφανειακού πλέγματος που ανήκουν στο άνω κελύφος της πτέρυγας και εκείνων που ανήκουν στο κάτω.
- γ) Προβολή όλων των επιφανειακών σημείων της πτέρυγας στο μέσο επίπεδο.
- δ) Στροφή του μέσου επιπέδου ώστε να γίνει παράλληλο με ένα εκ των καρτεσιανών επιπέδων και μετατόπισή του ώστε το ένα εκ των οριακών σημείων του να βρεθεί στην αρχή των αξόνων.
- ε) Γραμμικό μετασχηματισμό όλων των επιφανειακών σημείων ώστε τα οριακά σημεία να βρεθούν στις γωνίες ενός τετραγώνου μοναδιαίας πλευράς.
- στ) Ταύτιση ακμών του μέσου επιπέδου στις πλευρές του τετραγώνου.
- ζ) Διαχωρισμός των επιφανειακών σημείων του άνω και του κάτω κελύφους της πτέρυγας.

Όλα τα ανωτέρω προγραμματίστηκαν στο λογισμικό ανοικτού κώδικα OpenFOAM [14] το οποίο είναι προγραμματισμένο σε γλώσσα C++ και διαθέτει βιβλιοθήκες με συναρτήσεις για τη διαχείριση των μεγεθών (πλεγματικών ή μη) που υπεισέρχονται σε μία ανάλυση Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής (CFD).

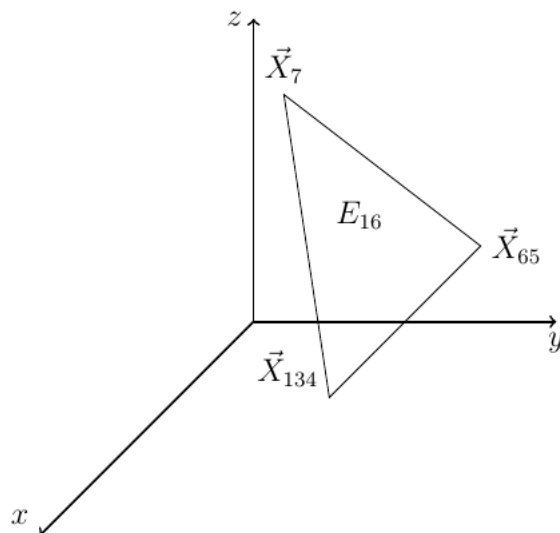
Στο σχήμα 3.1 διακρίνεται το νέφος σημείων που απαρτίζει την πτέρυγα με το ψευδο-δομημένο πλέγμα καθώς και η ίδια η πτέρυγα.



Σχήμα 3.1: Η πτέρυγα που θα υποστεί επεξεργασία στην παρούσα διπλωματική εργασία (πάνω). Ας θεωρηθεί ότι αποτελεί το τελικό αποτέλεσμα ενός βρόχου βελτιστοποίησης με κάποιο αεροδυναμικό κριτήριο. Επίσης παρουσιάζονται οι επιφανειακοί της κόμβοι (κάτω). Το ψευδο-δομημένο πλέγμα προέκυψε από δομημένο αφού τα τετράπλευρά του διαχωρίστηκαν σε τριγωνικά στοιχεία μέσω μιας διαγωνίου τους.

3.1 Ορισμός και Εύρεση Πρωταρχικών Μεγεθών

Το επιφανειακό πλέγμα της πρώτης πτέρυγας που εξετάζεται εδώ αποτελείται από 1149 σημεία. Ενημερωτικά, η δεύτερη πτέρυγα αποτελείται από 26498 σημεία και η τρίτη από 9753. Και για τις τρεις περιπτώσεις τα γωνιακά σημεία που ορίζουν το περίγραμμα της κάθε πτέρυγας ονομάζονται $\vec{C}_1, \vec{C}_2, \vec{C}_3, \vec{C}_4$. Εν προκειμένω, το ευθύγραμμο τμήμα που ορίζουν τα \vec{C}_1 και \vec{C}_4 αντιστοιχεί στην ακμή εκφυγής ενώ αυτό που ορίζουν τα \vec{C}_2 και \vec{C}_3 αντιστοιχεί στην ακμή πρόσπτωσης. Τα $n+1$ επιφανειακά σημεία συμβολίζονται με το σύνολο διανυσμάτων X το οποίο περιλαμβάνει τις συντεταγμένες τους. $X = (\vec{X}_0, \vec{X}_1 \dots \vec{X}_n)$ με $\vec{X}_i = (x_i, y_i, z_i) \in \mathbf{R}^3$. Στη συνέχεια, καταρτίζεται ένας αριθμός στοιχείων (επιφανειών) ή «φάτσων», στη γλώσσα του OpenFOAM. Οι «φάτσες» αυτές, οι οποίες είναι οι πλευρές των κελιών του υπολογιστικού πλέγματος που βρίσκονται επί της επιφάνειας της πτέρυγας, συμβολίζονται με μία λίστα από ακέραιους αριθμούς οι οποίοι υποδεικνύουν ποια σημεία συνθέτουν την εκάστοτε «φάτσα», στην τοπική αρίθμηση του X . Συνεπώς, προκύπτει η λίστα: $E = (E_0, E_1 \dots E_m)$ με E_i να είναι η προαναφερθείσα λίστα με ακέραιους και για τις $m+1$ «φάτσες». Για να γίνει πιο καθαρό αυτό, δίνεται το εξής παράδειγμα: Έστω ότι η 17^η «φάτσα» του E , αποτελείται από τα επιφανειακά σημεία με συντεταγμένες $\vec{X}_7, \vec{X}_{65}, \vec{X}_{134}$. Τότε ισχύει ότι $E_{16} = (7, 65, 134)$ όπως φαίνεται στο σχήμα 3.2.

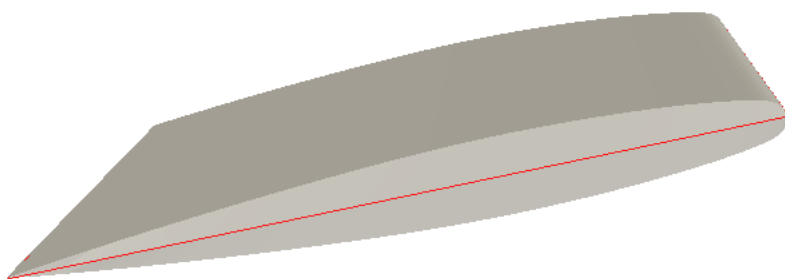


Σχήμα 3.2: Αναπαράσταση μιας «φάτσας» τριών κόμβων του επιφανειακού πλέγματος.

Εδώ αξίζει να σημειωθεί ότι το γεγονός ότι στο παράδειγμα χρησιμοποιήθηκε ένα αυθαίρετο τριγωνικό στοιχείο δεν εξειδικεύει το πρόβλημα. Στη γενική περίπτωση, είναι $E_i = (n^1, n^2 \dots n^j)$ με j να αντιστοιχεί στον αριθμό σημείων που συνθέτουν το στοιχείο i . Αυτό το γεγονός κάνει τον αλγόριθμο εφαρμόσιμο σε πτέρυγες για τις οποίες είναι γνωστές μόνο οι ανωτέρω πληροφορίες (X, C, E) .

3.2 Ορισμός Μέσου Επιπέδου

Αρχική κίνηση για την παραμετροποίηση είναι δημιουργία ενός μέσου επιπέδου το οποίο, ιδανικά, τέμνει την πτέρυγα κατά μήκος ώστε να τη διαχωρίζει σε άνω και κάτω κέλυφος (Σχήμα 3.3).



Σχήμα 3.3: Πρόοψη της πτέρυγας. Η παρουσιαζόμενη (κόκκινη) ευθεία απεικονίζει το μέσο επίπεδο.

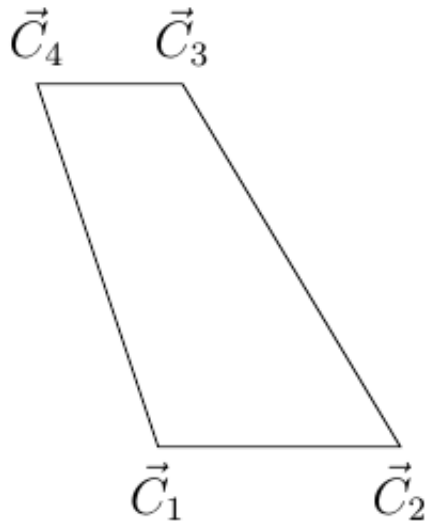
Το επίπεδο αυτό θα μπορούσε να οριστεί από τα τέσσερα γωνιακά σημεία \vec{C} . Γενικά όμως, δεν υπάρχει εγγύηση ότι και τα τέσσερα αυτά σημεία είναι συνεπίπεδα.

Ως λύση, αρχικά κατασκευάζονται δύο διανύσματα \vec{D}_1, \vec{D}_2 με άκρα τα διαγώνια σημεία \vec{C} ,

$$\vec{D}_1 = \vec{C}_3 - \vec{C}_1 \quad (3.1)$$

$$\vec{D}_2 = \vec{C}_4 - \vec{C}_2 \quad (3.2)$$

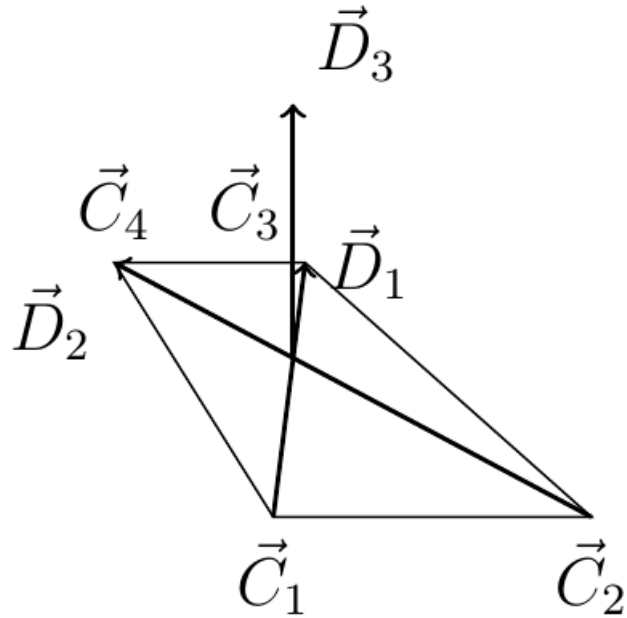
Στη συνέχεια, δημιουργείται ένα διάνυσμα \vec{D}_3 μοναδιαίο και κάθετο στα \vec{D}_1 και \vec{D}_2 το οποίο θα χρησιμοποιηθεί ως το κάθετο διάνυσμα στο μέσο επίπεδο (σχήμα 3.5).



Σχήμα 3.4: Περιγραμμο τετραπλεύρου (πιθανόν στρεβλού) που ορίζεται από τα γωνιακά σημεία.

$$\vec{D}_3 = \frac{\vec{D}_2 \times \vec{D}_1}{|\vec{D}_2 \times \vec{D}_1|} \quad (3.3)$$

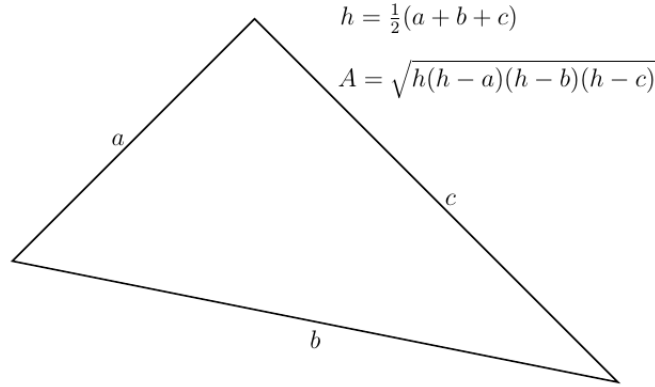
Η προσέγγιση με τα διαγώνια διανύσματα γίνεται γιατί, στη συνέχεια, τα σημεία από την άνω και κάτω πλευρά της πτέρυγας θα προβληθούν στο μέσο επίπεδο, και μέσω αυτής της προσέγγισης, τα σφάλματα προβολής ελαχιστοποιούνται. Για την ολοκλήρωση του ορισμού του μέσου επιπέδου απαιτείται ο υπολογισμός ενός κέντρου βάρους για το τετράπλευρο που ορίζουν τα τέσσερα σημεία \vec{C} . Για να γίνει αυτό, δημιουργούνται δύο τρίγωνα εκατέρωθεν της διαγωνίου \vec{D}_1 : Το $(\vec{C}_1, \vec{C}_2, \vec{C}_3)$ και το $(\vec{C}_1, \vec{C}_3, \vec{C}_4)$. Στη συνέχεια υπολογίζονται τα εμβαδά των τριγώνων με τη συνάρτηση του Ήρωνα (σχήμα (3.6)) και τα βαρύκεντρα του κάθε τριγώνου.



Σχήμα 3.5: Σχηματική απεικόνιση διαγώνιων διανυσμάτων και του κάθετου στο επίπεδο.

Για τα εμβαδά

$$\begin{aligned}
 h_1 &= \frac{1}{2}(|\vec{C}_2 - \vec{C}_1| + |\vec{C}_3 - \vec{C}_2| + |\vec{C}_3 - \vec{C}_1|) \\
 A_1 &= \sqrt{h_1(h_1 - |\vec{C}_2 - \vec{C}_1|)(h_1 - |\vec{C}_3 - \vec{C}_2|)(h_1 - |\vec{C}_3 - \vec{C}_1|)} \\
 h_2 &= \frac{1}{2}(|\vec{C}_3 - \vec{C}_1| + |\vec{C}_4 - \vec{C}_3| + |\vec{C}_4 - \vec{C}_1|) \\
 A_2 &= \sqrt{h_2(h_2 - |\vec{C}_3 - \vec{C}_1|)(h_2 - |\vec{C}_4 - \vec{C}_3|)(h_2 - |\vec{C}_4 - \vec{C}_1|)}
 \end{aligned}$$



Σχήμα 3.6: Χρήση συνάρτησης του Ήρωνα για υπολογισμό του εμβαδού του τριγώνου.

Για τα βαρύκεντρα

$$\vec{S}_1 = \frac{\vec{C}_1 + \vec{C}_2 + \vec{C}_3}{3}, \vec{S}_2 = \frac{\vec{C}_1 + \vec{C}_3 + \vec{C}_4}{3} \quad (3.4)$$

Πρακτικά, τα δύο τρίγωνα συνθέτουν το τετράπλευρο (σχήμα 3.5), συνεπώς ισχύει

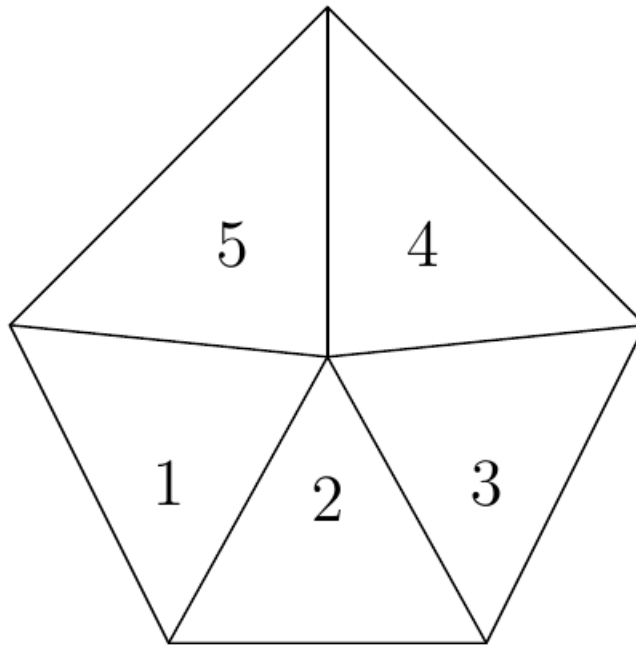
$$\vec{S}(A_1 + A_2) = \vec{S}_1 A_1 + \vec{S}_2 A_2 \Leftrightarrow \vec{S} = \frac{\vec{S}_1 A_1 + \vec{S}_2 A_2}{A_1 + A_2} \quad (3.5)$$

3.3 Διαχωρισμός άνω-κάτω κελύφους

Το άνω και το κάτω κέλυφος διαχωρίζονται με χρήση των «φατσών». Για κάθε «φάτσα» υπολογίζεται το κάθετο μοναδιαίο της διάνυσμα και, στη συνέχεια, συγκρίνεται η γωνία του με το κάθετο μοναδιαίο του μέσου επιπέδου \vec{D}_3 . Ο υπολογισμός του κάθετου μοναδιαίου της κάθε «φάτσας» είναι εφικτός μόνο αν η «φάτσα» είναι τριγωνική, κι αυτό διότι μόνο ένα τριγωνικό στοιχείο έχει σίγουρα συνεπίπεδα όλα του τα σημεία. Σε αυτήν την περίπτωση, έχοντας την πληροφορία για το ποια σημεία το συνθέτουν στο E αλλά και τις συντεταγμένες τους στο X γίνεται χρήση του εξωτερικού γινομένου ως εξής

$$\vec{E}n_i = \frac{(\vec{X}_{n_i^2} - \vec{X}_{n_i^1}) \times (\vec{X}_{n_i^3} - \vec{X}_{n_i^1})}{|(\vec{X}_{n_i^2} - \vec{X}_{n_i^1}) \times (\vec{X}_{n_i^3} - \vec{X}_{n_i^1})|}, i \in [0, m] \quad (3.6)$$

όπου $\vec{E}n_i$ το κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα της «φάτσας» i . Εφόσον όμως, στη γενική περίπτωση χρησιμοποιούνται μη-τριγωνικές «φάτσες», με κόμβους όχι υποχρεωτικά συνεπίπεδους, τα κάθετα μοναδιαία διανύσματα υπολογίζονται με τον ακόλουθο τρόπο.



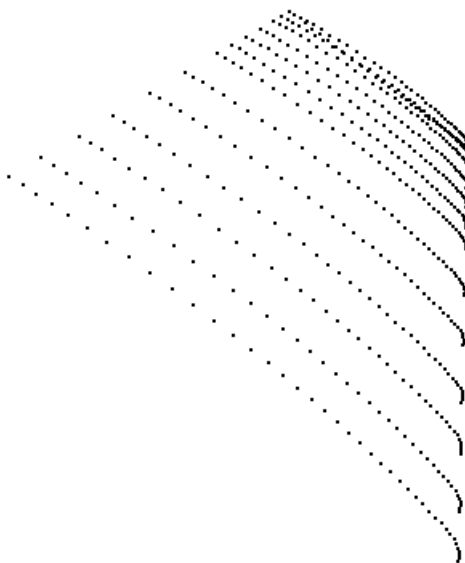
Σχήμα 3.7: Πενταγωνική «φάτσα» η οποία χωρίζεται σε 5 τριγωνικές για τις οποίες είναι εφικτός ο υπολογισμός κάθετου διανύσματος. Ο μέσος όρος των κάθετων διανυσμάτων και των πέντε υπό-φασών δίνει το τελικό μη-μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα της αρχικής φάτσας.

Όπως φαίνεται στο σχήμα 3.7 ένα στοιχείο με τυχαίο αριθμό κόμβων (εδώ λ.χ. με πέντε) χωρίζεται σε τριγωνικά μέσω των κορυφών του και του βαρύκεντρου του. Αρχικά υπολογίζονται τα μη-μοναδιαία κάθετα διανύσματα για κάθε τριγωνικό υποστοιχείο με τον τύπο του εξωτερικού γινομένου και στη συνέχεια, λαμβάνεται ο μέσος όρος αυτών. Η αιτία που λαμβάνονται τα μη-μοναδιαία κάθετα διανύσματα κι όχι τα κάθετα μοναδιαία διανύσματα του κάθε υποστοιχείου είναι ότι πρέπει να ληφθεί υπόψη, ως βάρος, το εμβαδόν του.

Αφού γίνει ο υπολογισμός του εκάστοτε $\vec{E}n_i$ χρησιμοποιείται ο τύπος του εσωτερικού γινομένου ώστε να επιστρέψει τη γωνία μεταξύ $\vec{E}n_i$ και \vec{D}_3 στο χωρίο $[0, \pi]$. Στη συνέχεια, υπολογίζεται η ποσότητα

$$\alpha_i = \arccos(\vec{E}n_i \cdot \vec{D}_3) \quad (3.7)$$

Αν $\alpha_i < \frac{\pi}{2}$, η «φάτσα» i ανήκει στην άνω πλευρά της πτέρυγας ενώ αν $\alpha_i > \frac{\pi}{2}$, η «φάτσα» i ανήκει στην κάτω πλευρά της πτέρυγας. Έτσι, γίνεται ο διαχωρισμός των «φατσών» E σε λίστες με «φάτσες» και σημεία του άνω (σχήμα 3.8) και του κάτω κελύφους της πτέρυγας (σχήμα 3.9).



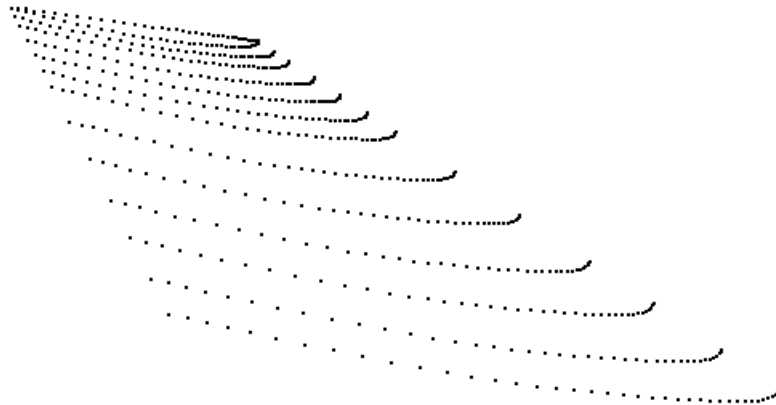
Σχήμα 3.8: Τα σημεία που αντιστοιχούν στο άνω κέλυφος μετά τον διαχωρισμό.

3.4 Προβολή στο μέσο επίπεδο

Ο αλγόριθμος προβολής διανύσματος σε επίπεδο έχει ως εξής: Αν \vec{P} ένα σημείο του εν λόγω επιπέδου και \vec{u} το μοναδιαίο κάθετο στο επίπεδο διάνυσμα, τότε μπορεί να προβληθεί ένα τυχαίο διάνυσμα \vec{V} σε αυτό (σχήμα 3.10) και να ληφθεί το προβεβλημένο διάνυσμα \vec{V} μέσω της σχέσης

$$\vec{V} = \vec{V} - \vec{u}((\vec{V} - \vec{P}) \cdot \vec{u}) \quad (3.8)$$

Έρα για τα σημεία \vec{C} ,



Σχήμα 3.9: Τα σημεία που αντιστοιχούν στο κάτω κέλυφος μετά τον διαχωρισμό.

$$\vec{C}_i = \vec{C}_i - \vec{D}_3((\vec{C}_i - \vec{S}) \cdot \vec{D}_3), 1 \leq i \leq 4 \quad (3.9)$$

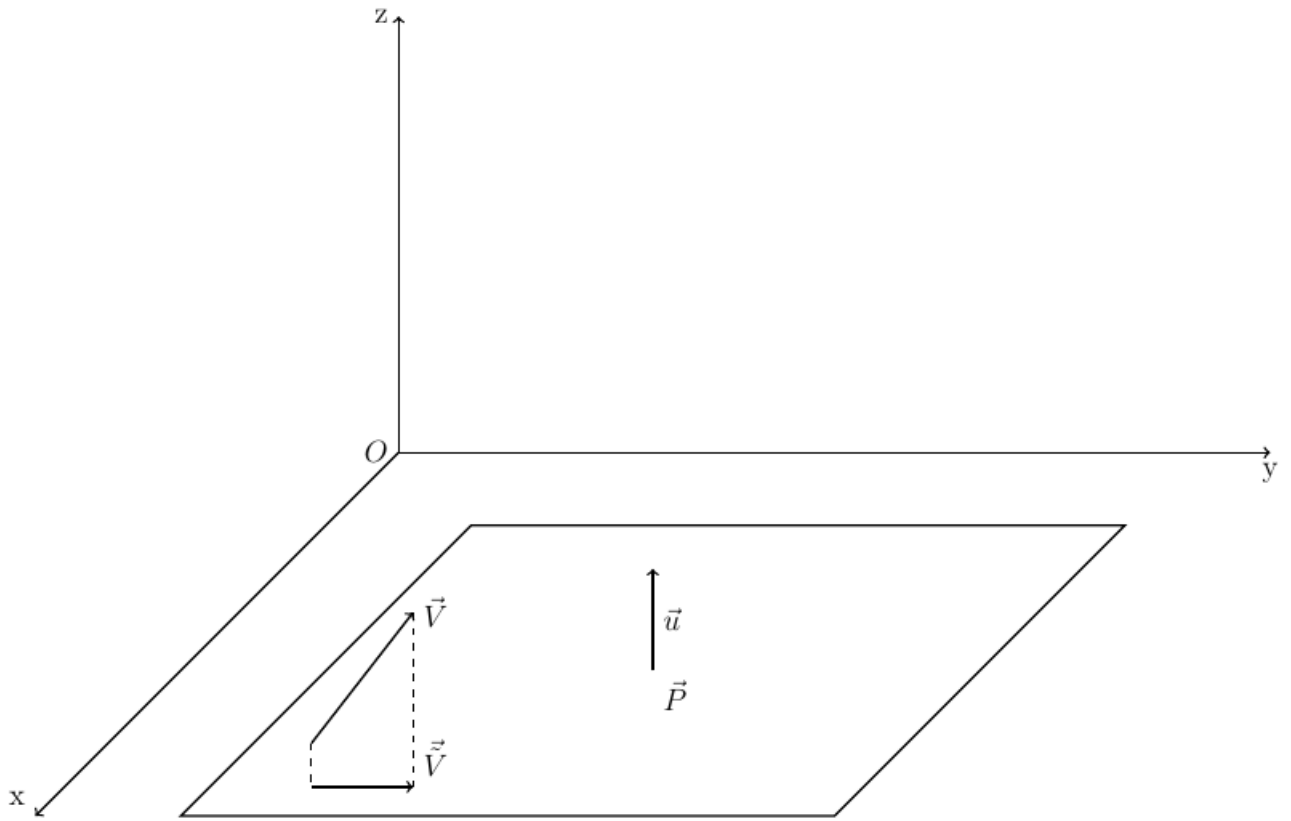
και για τα \vec{X} :

$$\vec{X}_i = \vec{X}_i - \vec{D}_3((\vec{X}_i - \vec{S}) \cdot \vec{D}_3), 0 \leq i \leq n \quad (3.10)$$

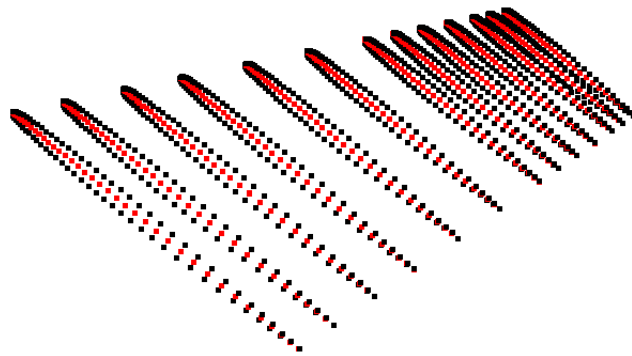
Εφαρμογή των εξισώσεων, δίνουν τα προβεβλημένα σημεία του σχήματος 3.11.

3.5 Στροφή και μεταφορά του μέσου επιπέδου

Το μέσο επίπεδο με τα σημεία \vec{X}_i, \vec{C}_i είναι τοποθετημένο σε ένα τυχαίο χώρο όπως και η αρχική πτέρυγα. Σε αυτό το βήμα, γίνεται η μετάβαση από το \mathbf{R}^3 στο \mathbf{R}^2 . Προκειμένου να γίνει αυτό και αφού τα αρχικά επιφανειακά σημεία της πτέρυγας είναι συνεπίπεδα, μεταφέρονται πάνω σε ένα από τα καρτεσιανά επίπεδα ώστε να έχουν νόημα πλέον μόνο οι δύο εκ των συντεταγμένων και να μηδενίσει η τρίτη. Εν προκειμένω επιλέχθηκε αυθαίρετα (χωρίς όμως βλάβη της γενικότητας) το επίπεδο x-z. Έπειτα, γίνεται μεταφορά του επιπέδου ώστε το σημείο \vec{C}_1 να ταυτιστεί με την αρχή των αξόνων. Αρχικά, για να γίνει η στροφή του επιπέδου κατασκευάζεται ένα μητρώο στροφής. Το μητρώο για να κατασκευαστεί απαιτεί ένα μοναδιαίο διάνυσμα του άξονα γύρω από τον



Σχήμα 3.10: Παράδειγμα προβολής διανύσματος σε επίπεδο.



Σχήμα 3.11: Παρουσίαση του μέσου επιπέδου μέσα από τα σημεία της πτέρυγας.

οποίο θα γίνει η στροφή και την τιμή της γωνίας στροφής.

Για να προσδιοριστούν όλα αυτά χρησιμοποιείται το κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα του επιπέδου \vec{D}_3 καθώς και το κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα του επιπέδου x-z, $\hat{y} = (0, 1, 0)$.

Η απαραίτητη γωνία στροφής υπολογίζεται μέσω του εσωτερικού γινομένου

$$\theta = \arccos(\vec{D}_3 \cdot \hat{y}) \quad (3.11)$$

Το διάνυσμα του άξονα, γύρω από τον οποίο θα στραφεί το επίπεδο, δίδεται από το εξωτερικό γινόμενο

$$\vec{u} = \frac{\vec{D}_3 \times \hat{y}}{|\vec{D}_3 \times \hat{y}|} \quad (3.12)$$

Προφανώς είναι: $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ ενώ σε περίπτωση που $|\vec{D}_3 \times \hat{y}| = 0$ ισχύει $u_1 = u_2 = u_3 = 0$. Αν $c = \cos \theta$, $s = \sin \theta$, τότε το μητρώο στροφής είναι το

$$T = \begin{bmatrix} u_1^2(1-c) + c & u_2u_1(1-c) - u_3s & u_3u_1(1-c) + u_2s \\ u_1u_2(1-c) + u_3s & u_2^2(1-c) + c & u_3u_2(1-c) - u_1s \\ u_1u_3(1-c) - u_2s & u_2u_3(1-c) + u_1s & u_3^2(1-c) + c \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

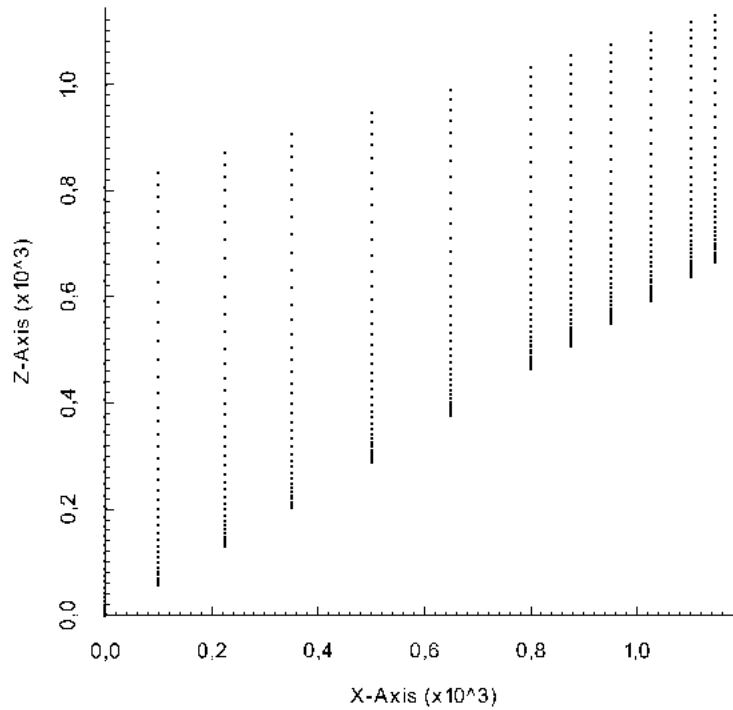
Μετά τον υπολογισμό του T , είναι προφανώς $\vec{X}_i = T \cdot \vec{X}_i$, $0 \leq i \leq n$ και $\vec{C}_i = T \cdot \vec{C}_i$, $1 \leq i \leq 4$. Με \vec{X}_i και \vec{C}_i συμβολίζονται τα επιφανειακά και τα γωνιακά σημεία αντίστοιχα τα οποία έχουν στραφεί με το μέσο επίπεδο. Για τη μεταφορά του επιπέδου και των σημείων πάνω σε αυτό, δεν μένει παρά να αφαιρεθεί το \vec{C}_1 από όλα τα σημεία. Οπότε και προκύπτει το τελικό επίπεδο όπως φαίνεται στο σχήμα 3.12.

Τα σημεία επί του τελικού επιπέδου έχουν μη-μηδενικές συντεταγμένες μόνο x , z και την κατά y συντεταγμένη τους μηδενική.

3.6 Απεικόνιση στο $[0,1] \times [0,1]$

Επόμενος στόχος είναι ο γραμμικός μετασχηματισμός των συντεταγμένων όλων των επιφανειακών σημείων ώστε οι ακμές $(\vec{C}_2 - \vec{C}_1)$ και $(\vec{C}_4 - \vec{C}_1)$ να αποκτήσουν μοναδιαίο μήκος και να κείνται στους άξονες x , z αντιστοίχως. Τα νέα σημεία \vec{C}_i χρησιμοποιούνται ως οριακές συνθήκες σε αυτόν τον μετασχηματισμό. Συγκεκριμένα, πρέπει το \vec{C}_1 να παραμείνει στην αρχή των αξόνων, το \vec{C}_2 να μεταφερθεί στο σημείο $(1,0)$ και το \vec{C}_4 να μεταφερθεί στο σημείο $(0,1)$. Ο μετασχηματισμός αυτός μπορεί να επιτευχθεί με ένα μητρώο M και οι νέες, μετασχηματισμένες συντεταγμένες που θα προκύψουν είναι η u κατά x και η v κατά z . Τότε, προφανώς,

$$M \cdot \begin{bmatrix} uc_i \\ vc_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Xc_i \\ Zc_i \end{bmatrix}, 1 \leq i \leq 4 \quad (3.14)$$



Σχήμα 3.12: Σχήμα μέσου επιπέδου μετά τη στροφή και τη μεταφορά.

Με uc_i, vc_i συμβολίζονται οι μετασχηματισμένες συντεταγμένες του γωνιακού σημείου \vec{C}_i ενώ με Xc_i, Zc_i συμβολίζονται οι κατά X και Z συντεταγμένες τους. Για τα προαναφερθέντα οριακά σημεία \vec{C}_2 και \vec{C}_4 ισχύει

$$M \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Xc_2 \\ Zc_2 \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

$$M \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Xc_4 \\ Zc_4 \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

Το M θα είναι ένα μητρώο 2×2 με

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}$$

Συνεπώς, $M_{11} = Xc_2, M_{21} = Zc_2, M_{12} = Xc_4, M_{22} = Zc_4$, οπότε

$$M = \begin{bmatrix} Xc_2 & Xc_4 \\ Zc_2 & Zc_4 \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

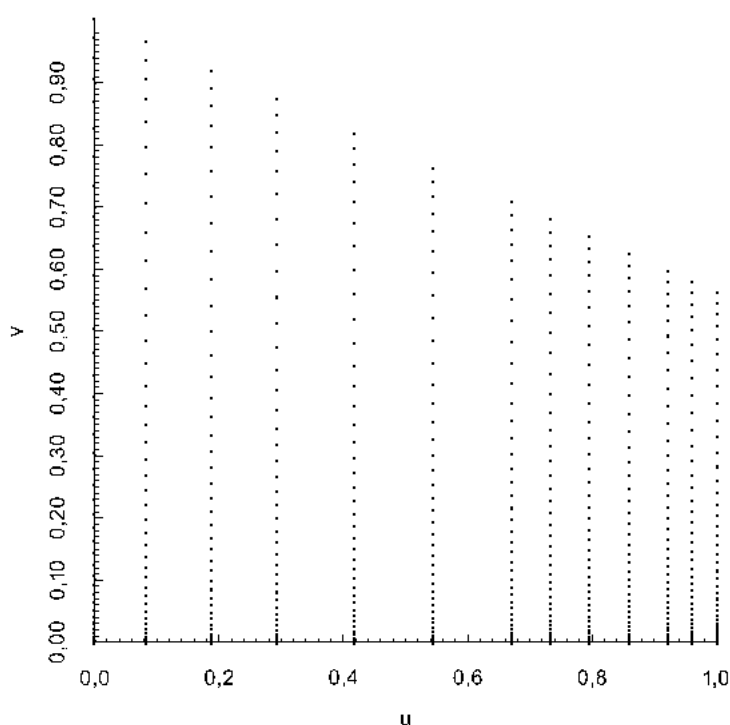
Τελικά, το μητρώο γραμμικού μετασχηματισμού M χρησιμοποιείται για τον μετασχηματισμό όλων των σημείων X . Συνεπώς, για $i = 0, \dots, n$, είναι

$$\begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix} = M^{-1} \cdot \begin{bmatrix} X_i \\ Z_i \end{bmatrix}$$

και, προφανώς,

$$\begin{bmatrix} uc_3 \\ vc_3 \end{bmatrix} = M^{-1} \cdot \begin{bmatrix} Xc_3 \\ Zc_3 \end{bmatrix}$$

Έτσι, προκύπτουν τα μετασχηματισμένα σημεία του σχήματος 3.13.



Σχήμα 3.13: Το μέσο επίπεδο με τις ακμές $\vec{C}_1\vec{C}_2, \vec{C}_1\vec{C}_4$ να ταυτίζονται με δύο ακμές του τετραγώνου $[0, 1] \times [0, 1]$.

3.7 Προσαρμογή σημείων στα όρια

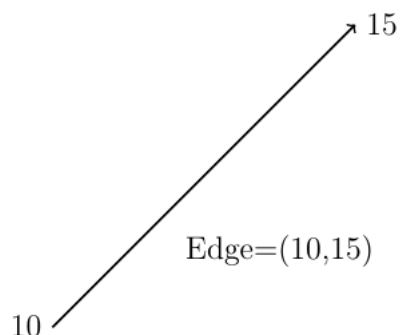
Οι νέες μετασχηματισμένες συντεταγμένες (u, v) , για να αποκτήσουν νόημα ως παράμετροι, πρέπει να καταλαμβάνουν όλο τον χώρο μοναδιαίου τετραγώνου στο οποίο προσαρμόστηκαν τα όριά τους. Παρόλο όμως, που τρία από τα τέσσερα οριακά σημεία

μεταφέρθηκαν στα άκρα του τετραγώνου $[0,1] \times [0,1]$, είναι φανερό ότι τα υπόλοιπα όρια δεν είναι προσαρμοσμένα σε αυτά του τετραγώνου. Κάποια σημεία είναι εντός του χωρίου αφήνοντας κάποια μεγάλη επιφάνειά του άδεια και κάποια εκτός. Το πρόβλημα αυτό είναι σύνθετο καθώς αφενός είναι δύσκολη η αντίληψη του ποια σημεία είναι οριακά και αφετέρου πρέπει να εφαρμοστεί ένα σχήμα ελέγχου το οποίο να αναγνωρίζει προς ποιο όριο πρέπει να κινηθεί το εκάστοτε σημείο και με ποιόν προσανατολισμό. Για να γίνει πιο κατανοητό αυτό γίνεται παραπομπή στο σχήμα 3.13. Από το σχήμα είναι προφανές πως όλο το πάνω όριο πρέπει να μεταφερθεί πάνω στην ευθεία $v = 1$. Αυτό όμως δεν είναι εφικτό με έλεγχο απόστασης καθώς κάποια σημεία του άνω ορίου βρίσκονται εγγύτερα στην ευθεία $u = 1$.

Παράλληλα, δεν αρκεί η κίνηση των οριακών σημείων αν αυτή δεν την ακολουθήσουν και τα εσωτερικά. Αν δεν γίνει αυτό, είναι προφανές ότι στο πλέγμα θα υπάρξουν ανακατατάξεις στην τοπολογία (το πλέγμα θα «καβαλήσει»). Για την επίλυση των ανωτέρω επιλέγεται ο επόμενος αλγόριθμος.

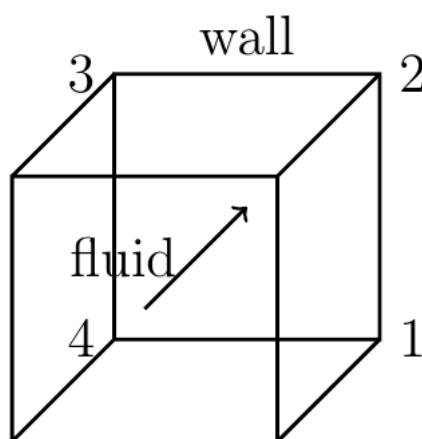
3.7.1 Αναγνώριση οριακών ακμών

Αρχικά χρησιμοποιούνται οι «φάτσες» της άνω και της κάτω πτέρυγας (σχήματα 3.8, 3.9) ώστε μέσω του OpenFOAM να καταρτιστούν δύο υπο-επιφάνειες που να αντιστοιχούν στα κελύφη τις πτέρυγας. Στη συνέχεια, καταγράφονται τα ευθύγραμμα τμήματα (ακμές) τα οποία ενώνουν τους κόμβους της κάθε υπο-επιφάνειας. Το κάθε τμήμα είναι ένα ζεύγος από ακέραιους που αντιστοιχούν στους κόμβους τους οποίους ενώνει. Λόγου χάρη, το τμήμα ή ακμή που ενώνει τους κόμβους 10,15 γράφεται ως (10 , 15) (σχήμα 3.14).



Σχήμα 3.14: Σχηματική αναπαράσταση και αρίθμηση μιας ακμής.

Το OpenFOAM αριθμεί τους κόμβους των «φατσών» των οριακών κελιών του ανθρωλογιακά, «κοιτώντας» από το ρευστό προς το όριο (σχήμα 3.15). Γνωρίζοντας αυτήν την πληροφορία και χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση ελέγχου `isInternalEdge` του OpenFOAM καθορίζονται δύο πράγματα. Αφενός κατασκευάζεται μία λίστα για καθένα από τις δύο υπο-επιφάνειες της πτέρυγας, η οποία θα διαθέτει τις εξωτερικές ακμές της και αφετέρου αναγνωρίζεται η φορά της κάθε εξωτερικής ακμής. Φορά της ακμής είναι το διάνυσμα το οποίο προκύπτει αφαιρώντας τις συντεταγμένες του πρώτου σημείου από αυτές του τελευταίου (σχήμα 3.14). Κοιτώντας τις οριακές «φάτσες» από το ρευστό προς τα στερεά τοιχώματα πρέπει να διαβάζονται οι κόμβοι που τις αποτελούν με συνεχή ωρολογιακή ή ανθρωλογιακή φορά ακολουθώντας τις φορές των ακμών της όπως φαίνεται στο σχήμα 3.16. Έπειτα, γίνεται έλεγχος για κάθε ακμή και υπολογίζεται αν αυτή συνάδει με την προκαθορισμένη φορά.

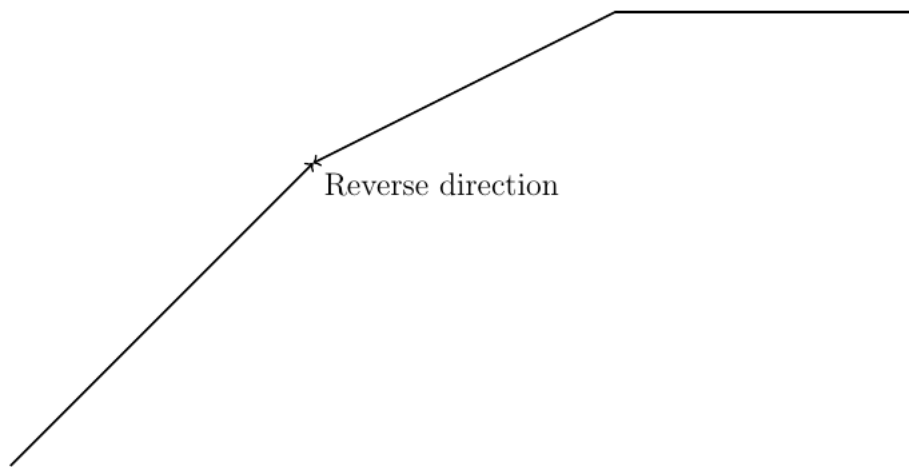


Σχήμα 3.15: Οριακό κελί. Παράδειγμα αρίθμησης «κοιτώντας» από το ρευστό προς το στερεό τοίχωμα.

3.7.2 Εύρεση προσανατολισμού εξωτερικών κόμβων

Η διαδικασία της προηγούμενης ενότητας γίνεται καθώς πρέπει να καθοριστούν τα κάθετα διανύσματα στη φορά κάθε ακμής και στη συνέχεια, να επιβεβαιωθεί ότι όλα τα διανύσματα αυτά «δείχνουν» έξω από το χωρίο (ή μέσα). Τα κάθετα διανύσματα καθορίζονται με την εφαρμογή απλού μητρώου στροφής στις φορές των ακμών. Για περιστροφή περί του άξονα y το μητρώο στροφής γίνεται

$$Ry = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (3.18)$$



Σχήμα 3.16: Παράδειγμα μιας ακμής με ανάποδη φορά από τις γειτονικές της. Αν αυτή η ακμή ανήκει σε οριακή «φάτσα», είναι προφανές ότι δεν γίνεται τα διανύσματα των φορών των ακμών να ολοκληρώσουν μια πλήρη κυκλική κίνηση (ωρολογιακή ή μη.)

Άρα,

$$\begin{bmatrix} x' \\ z' \end{bmatrix} = Ry \cdot \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix}$$

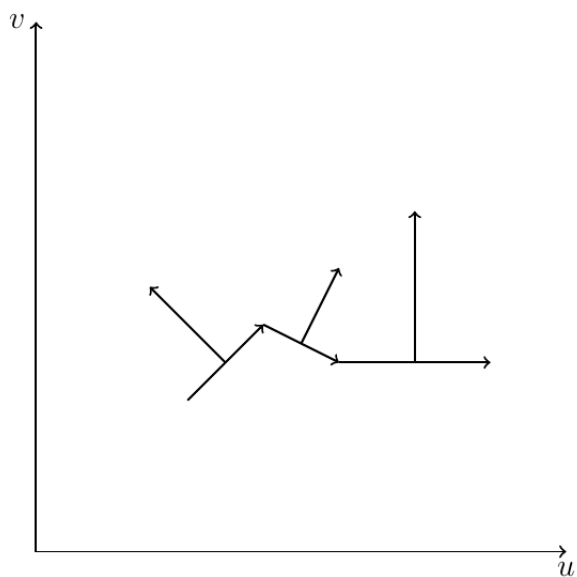
Τα σημεία του μέσου επιπέδου βρίσκονται στο επίπεδο $x-z$ το οποίο είναι αριστερόστροφο (το δεξιόστροφο είναι το $z-x$). Συνεπώς, στροφή 90° περί τον άξονα των y σημαίνει στο $x-z$ επίπεδο στροφή -90° περί τον άξονα των y . Συνεπώς, η γωνία στροφής είναι $\theta = -90^\circ$ οπότε

$$\begin{bmatrix} x' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

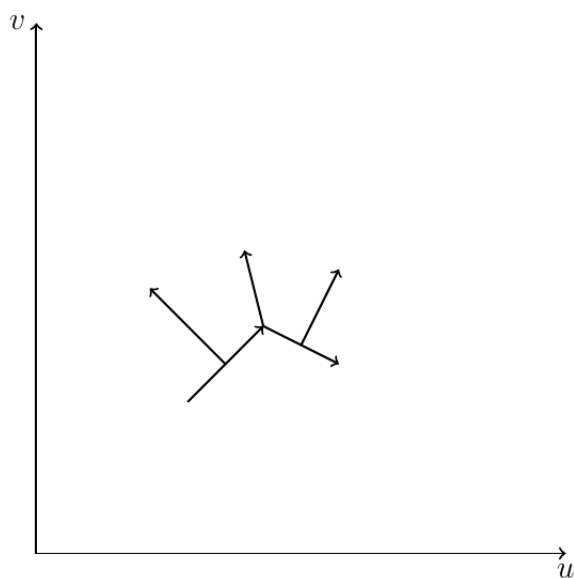
Άν λοιπόν για κάθε ένα εκ των $n + 1$ σημείων τεθεί στη σχέση (3.19) $x = u$ και $z = v$, βρίσκω τα κάθετα στις ακμές διανύσματα (σχήμα 3.17).

Έπειτα από αυτό το βήμα, το ενδιαφέρον μεταφέρεται από τις οριακές ακμές, στους οριακούς κόμβους. Ορίζεται το ψευδο-κάθετο διάνυσμα κάθε κόμβου, με αρχή τις συντεταγμένες του κόμβου, ως το ημι-άθροισμα των κάθετων διανυσμάτων των δύο ακμών στις οποίες ανήκει (σχήμα 3.18).

Πλέον, όταν γίνεται αναφορά σε κάθετα διανύσματα θα εννοούνται τα ψευδο-κάθετα των κόμβων. Στη συνέχεια, υπολογίζονται για κάθε κάθετο διάνυσμα δύο γωνίες: μία με τον άξονα των u και μία με τον άξονα των v . Αυτό γίνεται μέσω εσωτερικού γινομένου, πράγμα που, όπως προαναφέρθηκε, σημαίνει ότι θα επιστρέψει γωνίες μεταξύ 0° και 180° . Οι γωνίες αυτές χρησιμοποιούνται ως δείκτης προσανατολισμού του κόμβου. Οι γωνίες συγκρίνονται και η μικρότερη καθορίζει τον προσανατολισμό. Οι υπολογιζόμενες γωνίες, θ_u και θ_v , αντικαθίστανται με τις παραπληρωματικές τους αν



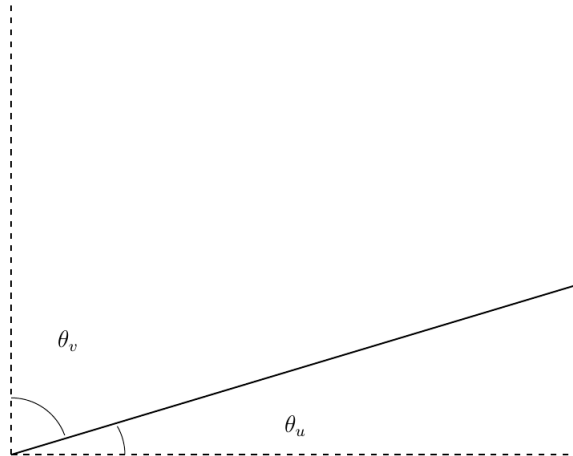
Σχήμα 3.17: Φορά κάθετων στις ακμές διανυσμάτων. Πρόκειται ουσιαστικά για τα διανύσματα-φορές των ακμών όταν στραφούν κατά 90° ανθρωρολογικά.



Σχήμα 3.18: Αναπαράσταση ψευδοκάθετου διανύσματος κόμβου. Αρχικά, υπολογίζονται τα κάθετα διανύσματα των ακμών εκατέρωθεν σε αυτόν και, στη συνέχεια, υπολογίζεται το ημίθροισμά τους.

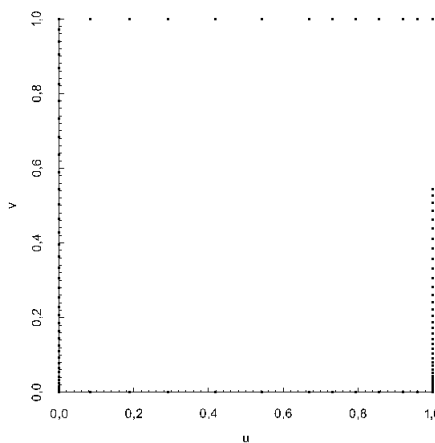
ξεπερνούν τις 90° .

Όπως είναι πλέον προφανές, οι θ_u, θ_v χρησιμοποιούνται για τον καθορισμό των ορίων, προς τα οποία πρέπει να κινηθεί κάθε κόμβος. Κάθε οριακός κόμβος, λοιπόν, ακολουθεί



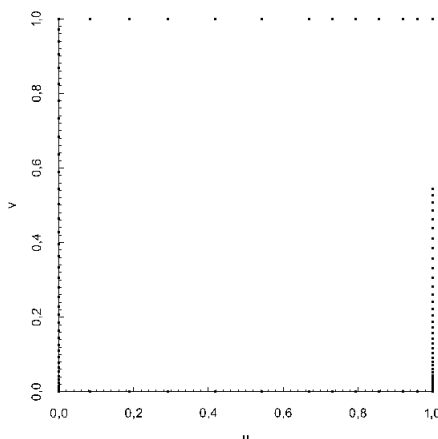
Σχήμα 3.19: Παράδειγμα επιλογής προσανατολισμού. Παρουσιάζεται το ψευδο-κάθετο διάνυσμα πάνω σε ένα κόμβο. Είναι ευκρινές ότι $\theta_u < \theta_v$. Συνεπώς, ο κόμβος θα ακολουθήσει το δεξί όριο.

το όριο με το οποίο, πρωτίστως το κάθετο διάνυσμά του παρουσίασε μικρότερη γωνία, και δευτερευόντως βρίσκεται πιο κοντά του. Εφαρμογή των ανωτέρω στην περίπτωση που εξετάζεται δίνει τα αποτελέσματα των σχημάτων 3.20, 3.21.



Σχήμα 3.20: Οριακά σημεία της άνω πλευράς της πτέρυγας τα οποία έχουν πιάσει το όριο του τετραγώνου $[0, 1] \times [0, 1]$. Έπειτα από αυτό πρέπει να ακολουθήσουν οι εσωτερικοί κόμβοι την κίνηση του ορίου.

Αξίζει να σημειωθεί πως τα άνω και κάτω κελύφη της πτέρυγας μοιάζουν εξαιτίας της μορφής οριακού πλέγματος στην πτέρυγα με το ψευδοδομημένο πλέγμα. Οι κόμβοι είχαν τοποθετηθεί συμμετρικά ως προς το μέσο επίπεδο συνεπώς η προβολή που έγινε στην ενότητα (3.3) έδωσε σχεδόν ίδιες συντεταγμένες σε κάποια ζεύγη σημείων.



Σχήμα 3.21: Οριακά σημεία της κάτω πλευράς της πτέρυγας τα οποία έχουν πιάσει το όριο του τετραγώνου $[0, 1] \times [0, 1]$. Έπειτα από αυτό πρέπει να ακολουθήσουν οι εσωτερικοί κόμβοι την κίνηση των εξωτερικών.

3.7.3 Μετακίνηση εσωτερικών κόμβων

Αφού μετακινηθούν όλοι οι οριακοί κόμβοι, πρέπει οι εσωτερικοί να τους ακολουθήσουν. Ο τρόπος με τον οποίο γίνεται αυτό λαμβάνει υπόψη τα εξής: Κάθε εσωτερικός κόμβος πρέπει να ακολουθεί τον πλησιέστερο οριακό και η απόσταση που θα διανύει να είναι συνάρτηση της απόστασής του από τον πλησιέστερο οριακό. Έτσι εξασφαλίζεται ομοιομορφία στο πλέγμα ώστε να μην αλλάξει η τοπολογία των «φατσών» και επιπλέον, ο κάθε οριακός κόμβος θα επηρεάζει όσους εσωτερικούς βρίσκονται εντός μιας συγκεκριμένης ακτίνας από το όριο.

Αυτά οδηγούν στο εξής: Αν i ένας εσωτερικός κόμβος για τον οποίο αναζητείται η μετατόπιση και i_b ο πλησιέστερος οριακός κόμβος, ορίζεται

$$\vec{d}r(i) = f(i)\vec{d}r(i_b) \quad (3.20)$$

όπου

$\vec{d}r(i)$: το αναζητούμενο διάνυσμα μετατόπισης για τον κόμβο i ,

f : η συνάρτηση απόσβεσης που καθορίζει τι ποσοστό της μετατόπισης του οριακού κόμβου θα ακολουθήσει ο εσωτερικός,

$\vec{d}r(i_b)$: το διάνυσμα μετατόπισης του οριακού κόμβου i_b όπως υπολογίστηκε στην προηγούμενη ενότητα.

Για κάθε εσωτερικό κόμβο i , ο i_b εντοπίζεται με έλεγχο απόστασης ως ο κοντινότερος εκ των οριακών. Η απόσταση του i από τον i_b ονομάζεται $d(i)$. Επίσης ορίζεται και μία μέγιστη απόσταση d_{max} (προαναφερθείσα ακτίνα) η οποία προκύπτει ως η μέγιστη εκ των αποστάσεων $d(i)$.

Με βάση τα παραπάνω, χρησιμοποιείται [15] συνάρτηση απόσβεσης η οποία υπολογίζεται για κάθε κόμβο (εσωτερικό και οριακό)

$$f(i) = \frac{f_2^2(i)}{f_1^2(i) + f_2^2(i)} \quad (3.21)$$

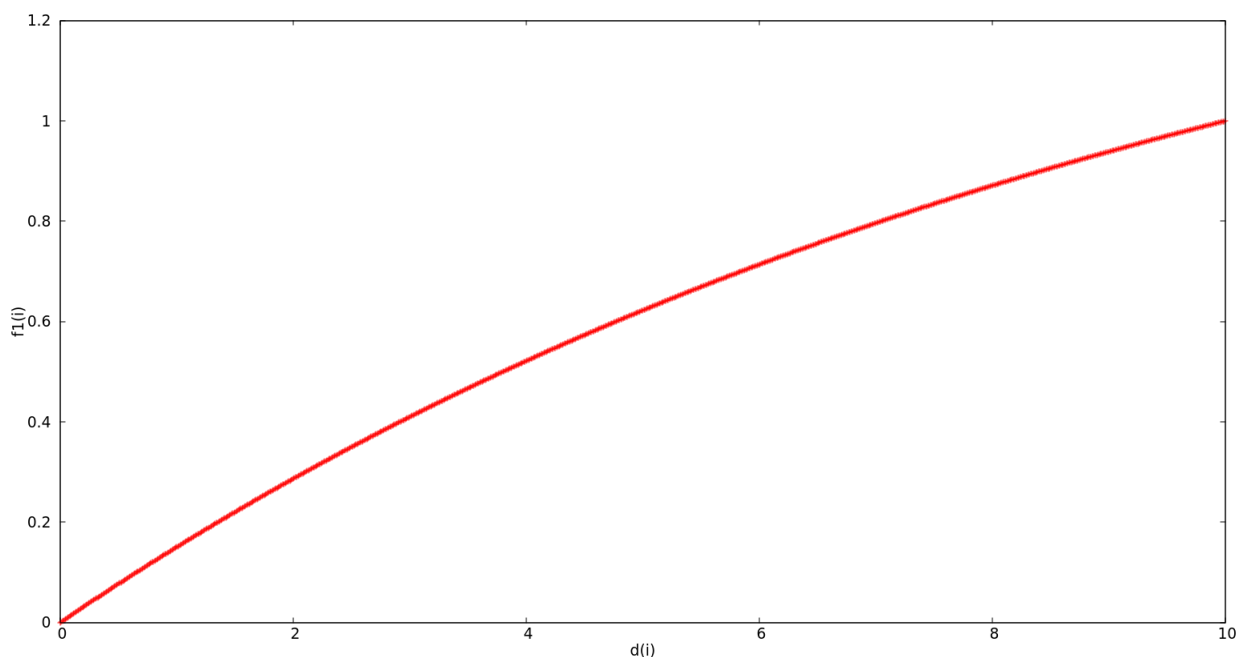
με

$$f_1(i) = \frac{1 - \exp(-d(i)/d_{max})}{(e - 1)/e} \quad (3.22)$$

και

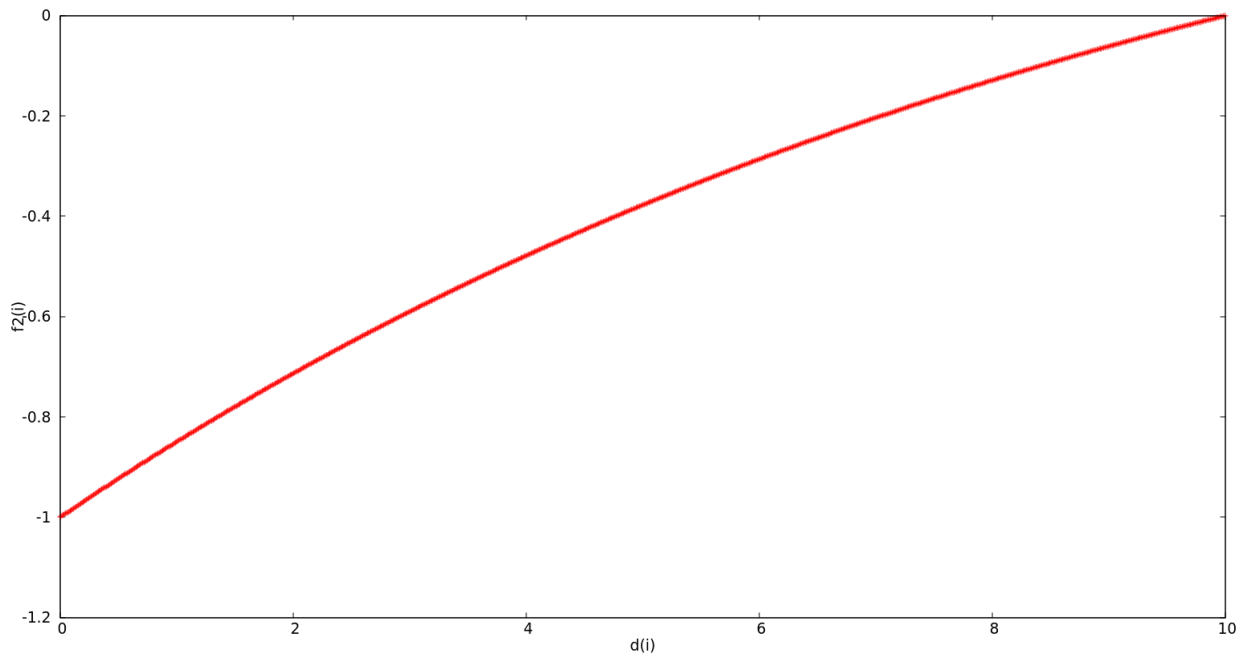
$$f_2(i) = \frac{1 - \exp(1 - d(i)/d_{max})}{e - 1} \quad (3.23)$$

Αφού εξετάζονται όλοι οι κόμβοι, το $d(i)$ εκτείνεται από 0 έως d_{max} . Προφανώς, όταν $d(i) = 0$, ο i βρίσκεται πάνω στο όριο οπότε $i = i_b$.

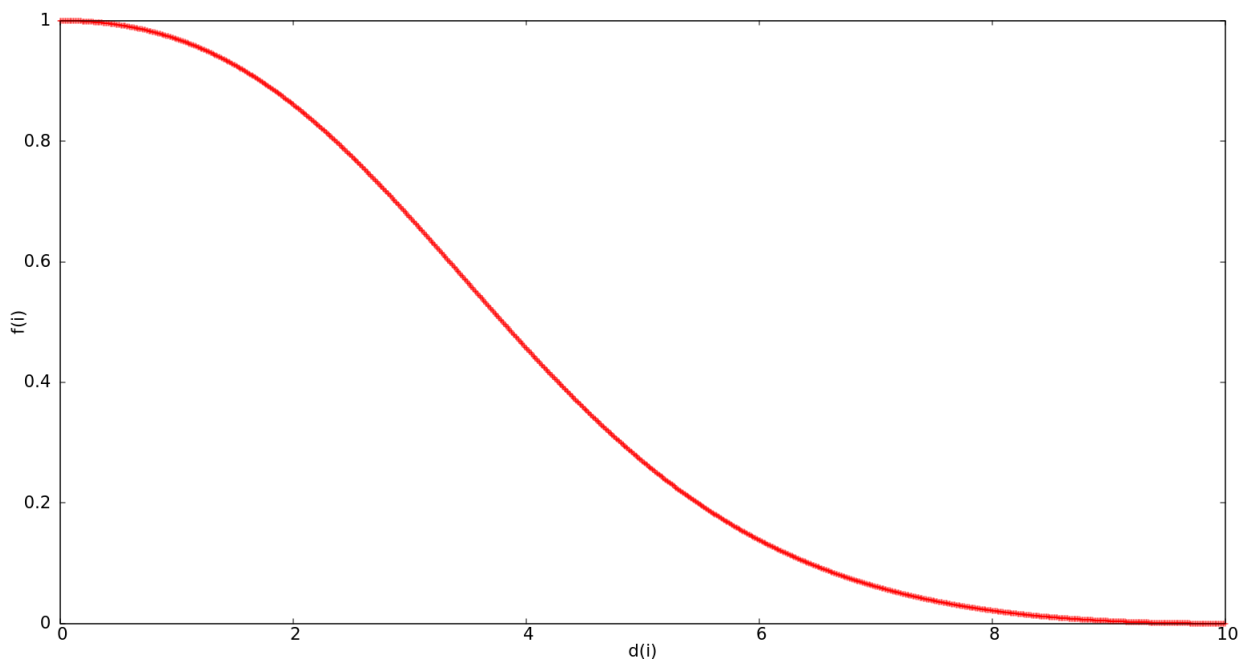


Σχήμα 3.22: Γραφική παράσταση της συνάρτησης f_1 για τυχαίο d_{max} .

Όπως γίνεται φανερό από τα σχήματα 3.22, 3.23, 3.24, η f φθίνει από το 1 στο 0 καθώς το $d(i)$ αυξάνει από 0 έως d_{max} . Συνεπώς, οι οριακοί κόμβοι πραγματοποιούν την υπολογισμένη μετατόπιση ενώ οι εσωτερικοί ακολουθούν εκτελώντας ένα ποσοστό αυτής.



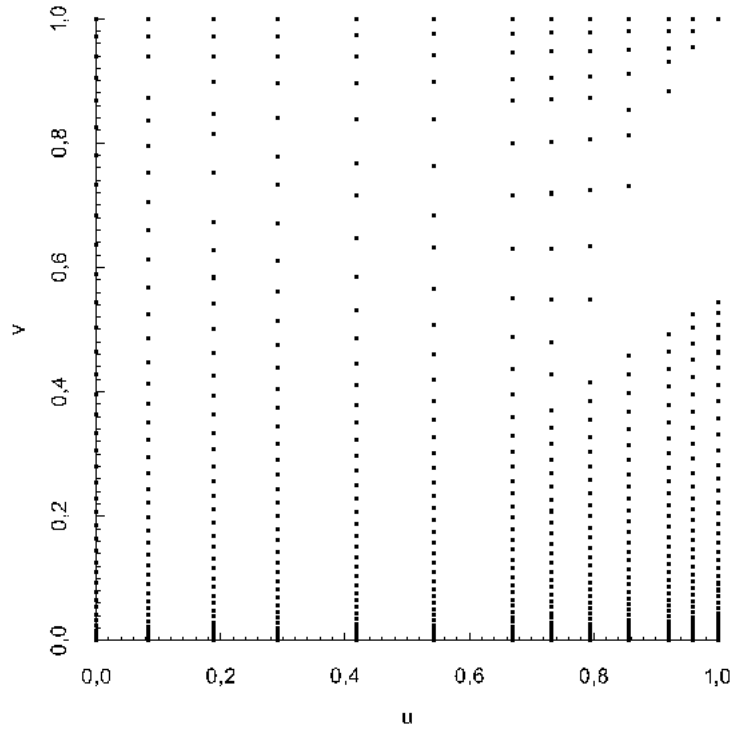
Σχήμα 3.23: Γραφική παράσταση της συνάρτησης f_2 για τυχαίο d_{max} .



Σχήμα 3.24: Γραφική παράσταση της συνάρτησης f για τυχαίο d_{max} .

3.8 Διαχωρισμός κόμβων των δύο πλευρών της πτέρυγας

Η κατάληξη του προηγούμενου βήματος είναι ένα τετράγωνο στο $[0, 1] \times [0, 1]$ το οποίο έχει διάσπαρτους τους κόμβους της άνω και της κάτω πλευράς της πτέρυγας. Σε αι



Σχήμα 3.25: Τελική προσαρμογή των σημείων στο όριο. Αρχικά, μετατοπίστηκαν οι οριακοί κόμβοι όπως φαίνεται στα σχήματα 3.20, 3.21. Στη συνέχεια, ακολούθησαν την κίνηση αυτή οι εσωτερικοί κόμβοι ώστε να προκύψει η παρούσα εικόνα. Στην άνω δεξιά γωνία, παρατηρείται ένας κενός χώρος. Αυτό συμβαίνει καθώς, στο συγκεκριμένο πλέγμα, χρειάστηκε να μετακινηθεί μόνο το άνω όριο και όχι το δεξί. Συνεπώς, οι εσωτερικοί κόμβοι ακολούθησαν την κίνηση μόνο του πάνω ορίου δημιουργώντας το κενό.

το βήμα διαχωρίζονται ώστε οι μεν της κάτω πλευράς να καταλαμβάνουν το μισό του υπάρχοντος τετραγώνου και το υπόλοιπο μισό οι πάνω. Το βήμα αυτό είναι αναγκαίο καθώς, όπως προαναφέρθηκε, κατά την προβολή στην ενότητα (3.3), προέκυψαν ζεύγη κόμβων με ίδιες συντεταγμένες. Εφόσον είχαν ίδιες συντεταγμένες μετά την προβολή και υπέστησαν τους ίδιους μετασχηματισμούς, τότε είναι λογικό στο τετράγωνο του σχήματος 3.25, οι κόμβοι να είναι διπλοί. Ο διαχωρισμός μπορεί να γίνει είτε κατά την u είτε κατά την v διεύθυνση. Επιλέγεται να γίνει κατά την u . Αν συμβολιστούν με l_{ow} οι κόμβοι της κάτω πλευράς και n_{low} ο αριθμός τους και με u_p οι κόμβοι της πάνω πλευράς και n_{up} ο αριθμός τους, τότε οι συντεταγμένες και των δύο μετασχηματίζονται ως:

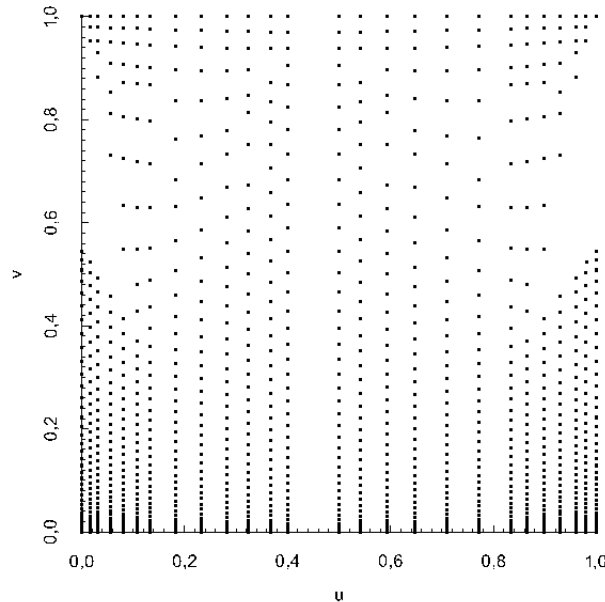
$$\begin{aligned} u_i &= 0.5(1 - u_{i,low}) \\ v_i &= v_{i,low} \end{aligned} \quad (3.24)$$

για $i \in [1, n_{low}]$ και

$$\begin{aligned} u_{i+n_{low}} &= 0.5(1 + u_{i,up}) \\ v_{i+n_{low}} &= v_{i,up} \end{aligned} \quad (3.25)$$

για $i \in [1, n_{up}]$

Έτσι το τετράγωνο διαχωρίζεται κατακόρυφα και προκύπτει το αποτέλεσμα του σχήματος 3.26.



Σχήμα 3.26: Τελική παραμετροποίηση της πτέρυγας με το ψευδο-δομημένο πλέγμα. Οι τελικές θέσεις των κόμβων προέκυψαν μετά τον διαχωρισμό των διπλών κόμβων του σχήματος 3.25

Όπως αναμενόταν, εξαιτίας των διπλών κόμβων, το σχήμα 3.26 είναι ένα διπλός κατοπτρισμός του 3.25 περί το $u = 0.5$. Παρόλα αυτά, οι κόμβοι που βρίσκονται στο $u = 0.5$ παρέμειναν διπλοί αφού προέκυψαν για $u_{low} = u_{up} = 0$. Αυτό δημιουργεί προβλήματα αργότερα, όταν γίνεται χρήση επιφάνειας NURBS. Οι συναρτήσεις βάσης εφαρμόζονται στα διπλά σημεία και καλούνται να παράξουν από ίδια ζεύγη (u, v) διαφορετικές χωρικές συντεταγμένες. Αυτό προφανώς δεν είναι εφικτό. Ως λύση γίνεται να εφαρμοστούν οι εξισώσεις (3.24)-(3.25) ελαφρώς διαφορετικά, ώστε ο διαχωρισμός να μην γίνει ακριβώς στη μέση του τετραγώνου και οι παράμετροι της κάτω πτέρυγας να εκτείνονται μέχρι το 0.48 αντί το 0.5 και αυτές της άνω να ξεκινούν από το 0.5 και μετά.

3.9 Κατασκευή ενός διανύσματος κόμβων

Στις προηγούμενες οκτώ ενότητες του παρόντος κεφαλαίου, στόχος ήταν η επιτυχής παραμετροποίηση των επιφανειακών σημείων της πτέρυγας ώστε οι χωρικές συντεταγμένες να γίνουν παραμετρικές (u,v) . Για να δημιουργηθεί επιφάνεια NURBS η οποία προσεγγίζει την επιφάνεια της πτέρυγας με βέλτιστο τρόπο, απαιτείται ο υπολογισμός δύο ακόμα στοιχείων: πρωτεύοντως, ενός διανύσματος κόμβων (knot vector) που να λαμβάνει υπόψη του την αυξημένη συγκέντρωση σημείων εντός του τετραγώνου $[0, 1] \times [0, 1]$ και, δευτερευόντως, μίας αρχικής προσέγγισης της θέσης των σημείων ελέγχου (control points).

Στην περίπτωση που εξετάζεται, ένα ομογενές διάνυσμα κόμβων είναι επαρκές για την κατασκευή της επιφάνειας αλλά, επειδή στην γενική περίπτωση τα πλέγματα δεν είναι ψευδοδομημένα, προτείνεται [16] η εξής μέθοδος εύρεσης του διανύσματος (η οποία εφαρμόζεται στην πτέρυγα με το μη-δομημένο πλέγμα): Έστω ένα διάνυσμα $\vec{\xi}$ που αναφέρεται στην παράμετρο u και ένα διάνυσμα \vec{v} που αναφέρεται στην παράμετρο v . Εδώ θα παρουσιαστεί η μέθοδος για τη δημιουργία του $\vec{\xi}$, με αυτήν για το \vec{v} να είναι πανομοιότυπη. Πρώτη κίνηση είναι διάταξη των u, v σε αύξουσα σειρά. Αυτό γίνεται με τον αλγόριθμο διάταξης ShellSort [17] ο οποίος αναλύεται στο παράρτημα. Έστω \tilde{u}, \tilde{v} οι διατεταγμένες παράμετροι u, v . Επιλέγεται ο βαθμός των πολυωνύμων βάσης p και ο αριθμός των σημείων ελέγχου n_{CP} . Το μέγεθος του διανύσματος $\vec{\xi}$ θα είναι $m + 1 = n_{CP} + p + 1$. Εξ αυτών, τα πρώτα $p + 1$ στοιχεία είναι μηδενικά και τα τελευταία $p + 1$ είναι μοναδιαία. Τα ενδιάμεσα θα προκύψουν ως εξής:

Αν I μια παράμετρος βήμα που ορίζεται ως

$$I = \frac{n}{n_{CP} - p + 1} \quad (3.26)$$

Έπειτα, για $i = 1, 2, \dots, (n_{CP} - p)$, υπολογίζονται

$$j = \lfloor Ii \rfloor$$

και

$$Rg = Ii - j$$

$$\xi_{p+i} = (1 - Rg)\tilde{u}_j + Rg\tilde{v}_{j+1} \quad (3.27)$$

Έτσι υπολογίζεται κάθε στοιχείο του διανύσματος $\vec{\xi}$ και, στη συνέχεια, και του \vec{v} .

Ενδεικτικά, για $n_{CP} = 18$ και $p = 3$, λαμβάνεται το εξής διάνυσμα $\vec{\xi}$ με μήκος: $m + 1 = n_{CP} + p + 1 = 18 + 3 + 1 = 22$

$$\vec{\xi} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.0001 \\ 0.03 \\ 0.08 \\ 0.1 \\ 0.14 \\ 0.28 \\ 0.36 \\ 0.4 \\ 0.54 \\ 0.64 \\ 0.77 \\ 0.83 \\ 0.89 \\ 0.96 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

3.10 Κατασκευή επιφάνειας NURBS

3.10.1 Εύρεση αρχικών σημείων ελέγχου

Στο σημείο αυτό, αυτά που είναι διαθέσιμα για τον υπολογισμό της NURBS επιφάνειας είναι οι παραμετρικές συντεταγμένες u, v καθώς και τα διανύσματα κόμβων. Πρέπει, συνεπώς, να υπολογιστούν και οι συντεταγμένες των σημείων ελέγχου προκειμένου να ληφθεί μία πρώτη προσέγγιση της προς κατασκευήν επιφάνειας. Αυτό γίνεται μέσω σχημάτων γραμμικής παλινδρόμησης (linear regression) [18]. Στη στατιστική, γραμμική παλινδρόμηση είναι μία μέθοδος εύρεσης της γραμμικής σχέσης που συνδέει ένα μέγεθος με ένα άλλο. Εν προκειμένω, αναζητείται το μητρώο N που συνδέει τις συντεταγμένες των επιφανειακών κόμβων με τις συντεταγμένες των σημείων ελέγχου. Χρησιμοποιώντας την επαναληπτική μέθοδο Cox-deBoor [13] γίνεται ο υπολογισμός ενός μητρώου N που θα περιέχει τις συναρτήσεις βάσης των επιφανειακών B-splines. Αν n_{CP}, m_{CP} οι αριθμοί των σημείων ελέγχου στις u, v διευθύνσεις αντίστοιχα, τότε ο συνολικός αριθμός σημείων ελέγχου θα είναι $k = n_{CP}m_{CP}$ και το μητρώο N πρέπει

να είναι τέτοιο ώστε

$$X = N \cdot P \quad (3.28)$$

X είναι το $[n \times 3]$ μητρώο με τις συντεταγμένες των επιφανειακών σημείων της πτέρυγας (προ επεξεργασίας). P είναι το $[k \times 3]$ μητρώο με τις συντεταγμένες των προς υπολογισμό σημείων ελέγχου. N είναι το $[n \times k]$ μητρώο με τις τιμές των συναρτήσεων βάσης. Ενδεχόμενα βάρη των σημείων ελέγχου σε αυτό το πρώτο στάδιο αγνοούνται. Το μητρώο αυτό διαθέτει τόσες σειρές όσος είναι και ο αριθμός των παραμέτρων u ή v που προέκυψαν από τους πλεγματοκούς κόμβους και τόσες στήλες όσα και τα σημεία ελέγχου. Εφόσον πρόκειται για επιφάνεια, τότε το κάθε στοιχείο του N προκύπτει ως γινόμενο μιας συνάρτησης βάσης για την παράμετρο u και μιας συνάρτησης βάσης για την παράμετρο v . Οι συναρτήσεις πρέπει να συνδυάζονται με τέτοιο τρόπο ώστε να υπάρχει αντιστοιχία μεταξύ αυτών και των σημείων ελέγχου. Έστω λοιπόν p, q οι βαθμοί των πολυωνύμων βάσης στις u, v κατευθύνσεις. Στον συνήθη συμβολισμό, ένα σημείο ελέγχου γράφεται ως ένα διάνυσμα \vec{P}_{ij} με $i = 1, \dots, n_{CP}$ και $j = 1, \dots, m_{CP}$. Το συγκεκριμένο σημείο ελέγχου για να δώσει χωρικές συντεταγμένες πρέπει να πολλαπλασιάζεται με $N_{i,p}(u) \cdot N_{j,q}(v)$. Αν στο σημείο \vec{X}_0 αντιστοιχούν οι παράμετροι (u_0, v_0) τότε προφανώς είναι

$$\vec{X}_0 = \sum_{i=1}^{n_{CP}} \sum_{j=1}^{m_{CP}} N_{i,p}(u_0) N_{j,q}(v_0) \vec{P}_{ij} \quad (3.29)$$

Η αντιστοιχία μεταξύ της γραμμής l στο μητρώο P και της αρίθμησης i, j προκύπτει $l = j + (i - 1)m_{CP}$ και προφανώς $l = 1, \dots, k$ εφόσον $i = 1, \dots, n_{CP}$ και $j = 1, \dots, m_{CP}$

Αντίστοιχα, προκύπτει και η αρίθμηση των στηλών του μητρώου N

$$N_{o \times l} = N_{i,p}(u_o) N_{j,q}(v_o) \quad (3.30)$$

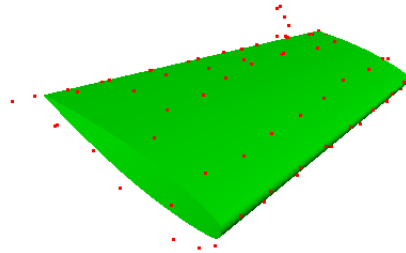
όπου o είναι ο δείκτης των σημείων / παραμέτρων που λαμβάνει τιμές στο $[0, n]$. Παραστατικά τα μητρώα είναι

$$N = \begin{bmatrix} N_{1,p}(u_0)N_{1,q}(v_0) & N_{1,p}(u_0)N_{2,q}(v_0) & \dots & \dots & N_{n_{CP},p}(u_0)N_{m_{CP},q}(v_0) \\ N_{1,p}(u_1)N_{1,q}(v_1) & N_{1,p}(u_1)N_{2,q}(v_1) & \dots & \dots & N_{n_{CP},p}(u_1)N_{m_{CP},q}(v_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} P_{x,11} & P_{y,11} & P_{z,11} \\ P_{x,12} & P_{y,12} & P_{z,12} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ P_{x,n_{CP}m_{CP}} & P_{y,n_{CP}m_{CP}} & P_{z,n_{CP}m_{CP}} \end{bmatrix}$$

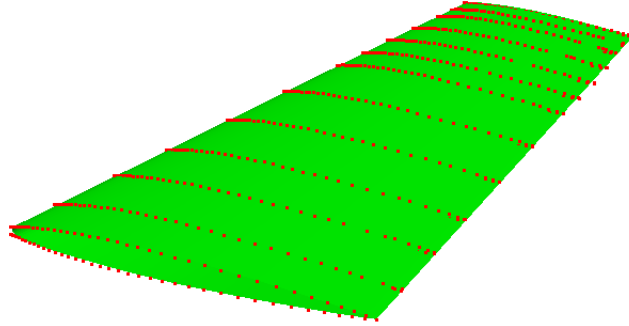
Πλέον, αφού κατασκευάστηκε το μητρώο N πρέπει να γίνει χρήση αυτού ώστε από το N και το X να υπολογιστεί το P . Το πρόβλημα είναι υπερ-ορισμένο, δηλαδή υπάρχουν περισσότερες εξισώσεις από αγνώστους. Προφανώς, το N δεν είναι τετραγωνικό μητρώο οπότε δεν αντιστρέφεται. Μπορεί όμως, με διαδικασία ελαχίστων τετραγώνων, να υπολογιστεί ένας ψευδο-αντίστροφος ο οποίος πολλαπλασιαζόμενος με το μητρώο X να δώσει το μητρώο P . Για τον υπολογισμό του ψευδο-αντιστρόφου αυτού γίνεται χρήση της μεθόδου SVD (Singular Value Decomposition), [19], η οποία αναλύεται στο παράρτημα. Η μέθοδος SVD θα δώσει ένα μητρώο N_{inv} με διαστάσεις $[k \times n]$. Συνεπώς, $P = N_{inv} \cdot X$.

Τα αρχικά σημεία ελέγχου που λαμβάνονται φαίνονται στο σχήμα 3.27:



Σχήμα 3.27: Αρχικά σημεία ελέγχου που προκύπτουν από το πρόβλημα γραμμικής παλινδρόμησης (με κόκκινο χρώμα), και η σχετική τους θέση με την αρχική πτέρυγα (με πράσινο χρώμα).

Αυτά, πολλαπλασιαζόμενα με το μητρώο N , δίνουν τα σημεία του σχήματος 3.28.



Σχήμα 3.28: Σύγκριση επιφάνειας αρχικής πτέρυγας με αυτήν που προέκυψε έπειτα από την γραμμική παλινδρόμηση. Διακρίνεται η αρχική επιφάνεια της πτέρυγας (πράσινο) και οι κόμβοι που δημιουργήθηκαν από την επιφάνεια NURBS με τα σημεία ελέγχου του σχήματος 3.27 (κόκκινο).

3.10.2 Βελτιστοποίηση της θέσης των σημείων ελέγχου και των βαρών

Η λύση του προβλήματος που προκύπτει με τη μέθοδο γραμμικής παλινδρόμησης (linear regression), δίνει πολύ καλά αποτελέσματα. Η SVD ως μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων δίνει το βέλτιστο από μόνη της. Όμως, για μεγάλα μητρώα ή μητρώα χωρίς διαγώνια κυριαρχία, η μέθοδος SVD μπορεί να παρουσιάσει σφάλματα. Για την ολοκλήρωση της μεθόδου που υλοποιείται σε αυτήν την εργασία παρουσιάζεται μέθοδος βελτιστοποίησης, η οποία με ελεύθερες παραμέτρους τα σημεία ελέγχου αλλά και τα βάρη, στοχεύει στην εξάλειψη σφαλμάτων.

Πρώτο στάδιο της βελτιστοποίησης είναι ο ορισμός μιας αντικειμενικής συνάρτησης. Κύριο μέλημα είναι η ελαχιστοποίηση της απόστασης μεταξύ της αρχικής επιφάνειας της πτέρυγας και της προκύπτουσας επιφάνειας. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί αν μηδενιστούν οι αποστάσεις των αρχικών επιφανειακών πλεγματικών κόμβων της πτέρυγας και των προκυπτόντων επιφανειακών κόμβων από τη βελτιστοποίηση. Συνεπώς, για $0 \leq i \leq n$, αν $\vec{X}_i = (x_i, y_i, z_i)$ τα αρχικά σημεία (στην πτέρυγα προ επεξεργασίας) και $\vec{X}_{opt,i} = (x_{opt,i}, y_{opt,i}, z_{opt,i})$ τα προκύπτοντα σημεία (λόγω βελτιστοποίησης), τότε πρέπει να ελαχιστοποιηθεί η

$$J = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^n [(x_{opt,i} - x_i)^2 + (y_{opt,i} - y_i)^2 + (z_{opt,i} - z_i)^2] \quad (3.31)$$

Για να υπολογιστούν τα σημεία \vec{X}_{opt} γίνεται χρήση του τύπου των ρητών (rational) B-splines ο οποίος αν χρησιμοποιηθεί το μητρώο N που υπολογίστηκε στην προηγούμενη ενότητα γίνεται

$$\vec{X}_{opt,i} = \frac{\sum_{j=1}^k N_{ij} w_j \vec{P}_j}{\sum_{j=1}^k N_{ij} w_j}. \quad (3.32)$$

Οι ελεύθερες παράμετροι όπως προαναφέρθηκε είναι οι συντεταγμένες των σημείων ελέγχου καθώς και τα βάρη. Συνεπώς, αν k τα συνολικά σημεία ελέγχου τότε το διάνυσμα παραμέτρων βελτιστοποίησης \vec{b} έχει $4k$ στοιχεία. Αρχικά, έχει όλες τις συντεταγμένες κατά x των σημείων \vec{P} , έπειτα αυτές κατά y , έπειτα αυτές κατά z και, τέλος, τα βάρη w . Δηλαδή,

$$\vec{b} = \begin{bmatrix} P_{x,1} \\ P_{x,2} \\ \vdots \\ P_{x,k} \\ P_{y,1} \\ P_{y,2} \\ \vdots \\ P_{y,k} \\ P_{z,1} \\ P_{z,2} \\ \vdots \\ P_{z,k} \\ w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_k \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

Επόμενη κίνηση είναι ο υπολογισμός του διανύσματος των παραγώγων $\frac{dJ}{db}$. Στη σχέση (3.31) οι συνιστώσες που εξαρτώνται με τον ένα ή τον άλλο τρόπο από το \vec{b} είναι αυτές του \vec{X}_{opt} καθώς οι συνιστώσες του \vec{X} είναι σταθερές.

Άρα, με παραγωγή της (3.31),

$$\frac{dJ}{db} = \sum_{i=0}^n \left[(x_{opt,i} - x_i) \frac{\partial x_{opt,i}}{\partial \vec{b}} + (y_{opt,i} - y_i) \frac{\partial y_{opt,i}}{\partial \vec{b}} + (z_{opt,i} - z_i) \frac{\partial z_{opt,i}}{\partial \vec{b}} \right] \quad (3.34)$$

Επίσης, υπολογίζονται οι συνιστώσες του \vec{X}_{opt} ,

$$x_{opt,i} = \frac{\sum_{j=1}^k N_{ij} w_j P_{x,j}}{\sum_{j=1}^k N_{ij} w_j} \quad (3.35)$$

$$y_{opt,i} = \frac{\sum_{j=1}^k N_{ij} w_j P_{y,j}}{\sum_{j=1}^k N_{ij} w_j} \quad (3.36)$$

$$z_{opt,i} = \frac{\sum_{j=1}^k N_{ij} w_j P_{z,j}}{\sum_{j=1}^k N_{ij} w_j} \quad (3.37)$$

Για $j = 1, \dots, 4k$

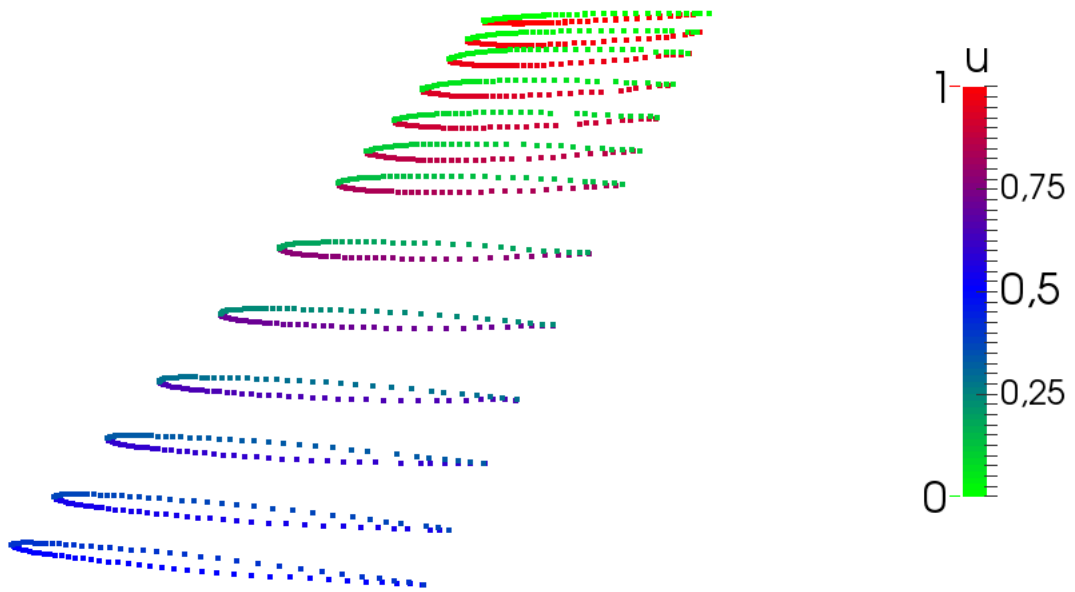
$$\frac{\partial x_{opt,i}}{\partial b_j} = \begin{cases} \frac{P_{x,(j-3k)} N_{i(j-3k)} \sum_{g=1}^k N_{ig} w_g - N_{i(j-3k)} \sum_{g=1}^k P_{x,g} N_{ig} w_g}{(\sum_{g=1}^k N_{ig} w_g)^2} , & \alpha \nu \ j > 3k \\ \frac{w_j N_{ij}}{\sum_{g=1}^k N_{ig} w_g} , & \alpha \nu \ 1 \leq j \leq k \\ 0 , & \alpha \nu \ k + 1 \leq j \leq 2k \\ 0 , & \alpha \nu \ 2k + 1 \leq j \leq 3k \end{cases} \quad (3.38)$$

$$\frac{\partial y_{opt,i}}{\partial b_j} = \begin{cases} \frac{P_{y,(j-3k)} N_{i(j-3k)} \sum_{g=1}^k N_{ig} w_g - N_{i(j-3k)} \sum_{g=1}^k P_{y,g} N_{ig} w_g}{(\sum_{g=1}^k N_{ig} w_g)^2} , & \alpha \nu \ j > 3k \\ 0 , & \alpha \nu \ 1 \leq j \leq k \\ \frac{w_{j-k} N_{i(j-k)}}{\sum_{g=1}^k N_{ig} w_g} , & \alpha \nu \ k + 1 \leq j \leq 2k \\ 0 , & \alpha \nu \ 2k + 1 \leq j \leq 3k \end{cases} \quad (3.39)$$

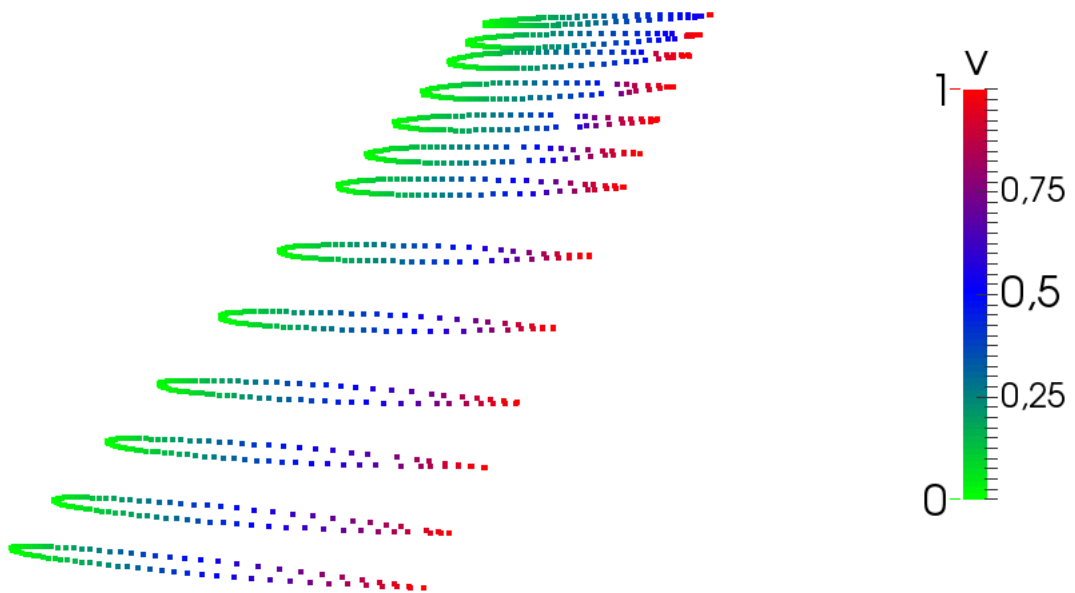
$$\frac{\partial z_{opt,i}}{\partial b_j} = \begin{cases} \frac{P_{z,(j-3k)} N_{i(j-3k)} \sum_{g=1}^k N_{ig} w_g - N_{i(j-3k)} \sum_{g=1}^k P_{y,g} N_{ig} w_g}{(\sum_{g=1}^k N_{ig} w_g)^2} , & \text{αν } j > 3k \\ 0 , & \text{αν } 1 \leq j \leq k \\ 0 , & \text{αν } k+1 \leq j \leq 2k \\ \frac{w_{j-2k} N_{i(j-2k)}}{\sum_{g=1}^k N_{ig} w_g} , & \text{αν } 2k+1 \leq j \leq 3k \end{cases} \quad (3.40)$$

Μετά τον υπολογισμό των μερικών παραγώγων μέσω των (3.38),(3.39),(3.40), αυτές αντικαθίστανται στην (3.34) και λαμβάνεται η έκφραση των παραγώγων ευαισθησίας. Στη συνέχεια, εφαρμόζεται σχήμα βελτιστοποίησης ώστε να επιτευχθεί σύγκλιση της συνάρτησης στόχου. Στην περίπτωση που εξετάζεται, επιλέχθηκε μια παραλλαγή της BFGS μεθόδου [1] για αυξημένη ευστάθεια και πιθανότητες σύγκλισης. Στην αρχική θεώρηση δεν λήφθηκαν υπόψη βάρη. Αυτό οδηγεί στο να υπολογίζονται οι αρχικές παράγωγοι ως προς τα βάρη, αρκετές τάξεις μεγέθους μεγαλύτερες από τις παραγώγους των σημείων ελέγχου. Η καταλληλότερη μέθοδος για τον χειρισμό τέτοιων περιπτώσεων είναι η BFGS. Η παραλλαγή που αναφέρθηκε προηγουμένως έχει να κάνει με το ότι αντί να χρησιμοποιηθεί απότομη καθόδος για τον υπολογισμό της διόρθωσης του πρώτου κύκλου βελτιστοποίησης, χρησιμοποιήθηκε για τον υπολογισμό των διορθώσεων των πρώτων 2000 κύκλων ενώ παράλληλα ανανεωνόταν η προσέγγιση του Εσσιανού μητρώου κανονικά. Αυτό έγινε γιατί η προσέγγιση του Εσσιανού μητρώου στις πρώτες επαναλήψεις της BFGS παρουσιάζει αστάθεια. Όσο όμως ανανεώνεται με βάση την προσέγγιση του προηγούμενου βήματος τόσο πιο στιβαρό γίνεται. Συνεπώς, η απότομη καθόδος τρέχει για τους πρώτους 2000 κύκλους και, για τους επόμενους ως τη σύγκλιση, οι διορθώσεις υπολογίζονται με τον αλγόριθμο BFGS. Οι αλγόριθμοι βελτιστοποίησης απότομης καθόδου (steepest descent) και BFGS αναλύονται στο παράρτημα.

Αφού ολοκληρωθεί ο αλγόριθμος βελτιστοποίησης, προκύπτουν οι βελτιωμένες θέσεις των επιφανειακών σημείων της πτέρυγας όπως φαίνονται στα σχήματα 3.29, 3.30.



Σχήμα 3.29: Τελικά σημεία προκύπτουσας πτέρυγας και παρουσίαση παραμέτρου u .



Σχήμα 3.30: Τελικά σημεία προκύπτουσας πτέρυγας και παρουσίαση παραμέτρου v .

Κεφάλαιο 4

Αποτελέσματα

Στο προηγούμενο κεφάλαιο έγινε ανάλυση των βημάτων για την επαναπαραμετροποίηση των πλεγματοκτικών κόμβων που απαρτίζουν την επιφάνεια μιας πτέρυγας με ψευδο-δομημένο πλέγμα και, στη συνέχεια, χρησιμοποιήθηκε η επαναπαραμετροποίηση αυτή για την προσέγγιση της επιφάνειας της πτέρυγας με χρήση επιφανειακών NURBS. Σε αυτό το κεφάλαιο γίνεται παρουσίαση της επαναπαραμετροποίησης και προσέγγισης μέσω επιφανειακών NURBS δύο πτερυγών που αρχικά περιγράφονται με μη-δομημένο πλέγμα.

4.1 Πτέρυγα M6

Αρχικά παρουσιάζεται η επιφάνεια της πτέρυγας και οι πλεγματοκτικοί της κόμβοι (σχήμα 4.1). Στη συνέχεια, ορίζεται το μέσο επίπεδο (σχήμα 4.2), πάνω στο οποίο θα προβληθούν οι επιφανειακοί κόμβοι της πτέρυγας. Αφού γίνει η προβολή, διαχωρίζονται τα σημεία της άνω και της κάτω πλευράς της πτέρυγας με κριτήριο την γωνία των κάθετων μοναδιαίων διανυσμάτων των «φατσών», με το κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα του μέσου επιπέδου. Τα επιφανειακά σημεία των δύο κελυφών παρουσιάζονται στο σχήμα 4.3. Τα προβεβλημένα σημεία των δύο κελυφών πάνω στο μέσο επίπεδο παρουσιάζονται στο σχήμα 4.4.

Προκειμένου να επιτευχθεί η αδρανοποίηση της μίας εκ των συντεταγμένων των επιφανειακών κόμβων, το μέσο επίπεδο με τα προβεβλημένα σημεία στρέφεται προκειμένου να γίνει παράλληλο στο επίπεδο $x-z$ και, στη συνέχεια, μετατοπίζεται το άκρο του \vec{C}_1 στην αρχή των αξόνων, όπως φαίνεται στα σχήματα 4.5, 4.6.

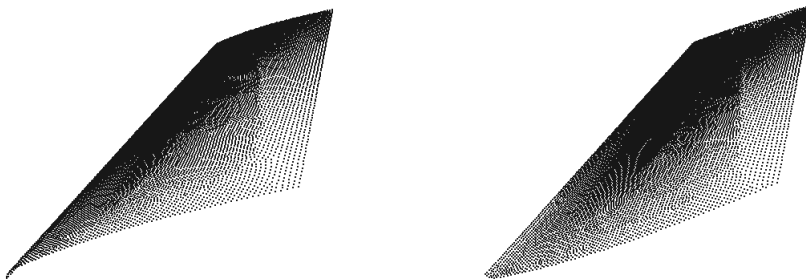
Επόμενο βήμα είναι η μετακίνηση των επιφανειακών κόμβων από τον καρτεσιανό χώρο



Σχήμα 4.1: Η επιφάνεια της πτέρυγας M6 (αριστερά) όπως προκύπτει στο τέλος ενός κύκλου ενός βρόχου βελτιστοποίησης. Επίσης παρουσιάζονται οι επιφανειακοί της κόμβοι (δεξιά).

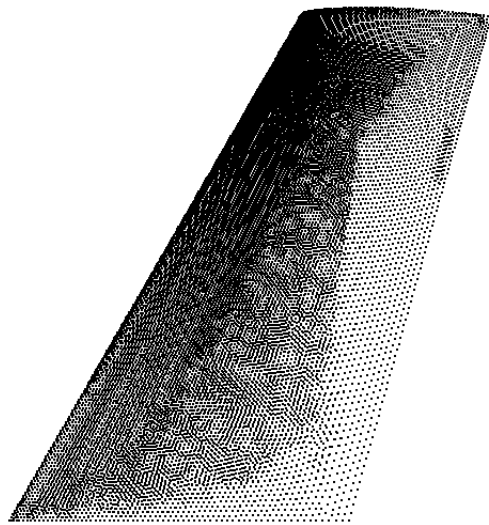


Σχήμα 4.2: Πρόοψη της πτέρυγας M6. Διακρίνεται η ευθεία (κόκκινη) που αντιπροσωπεύει την τομή του μέσου επιπέδου με την πτέρυγα.

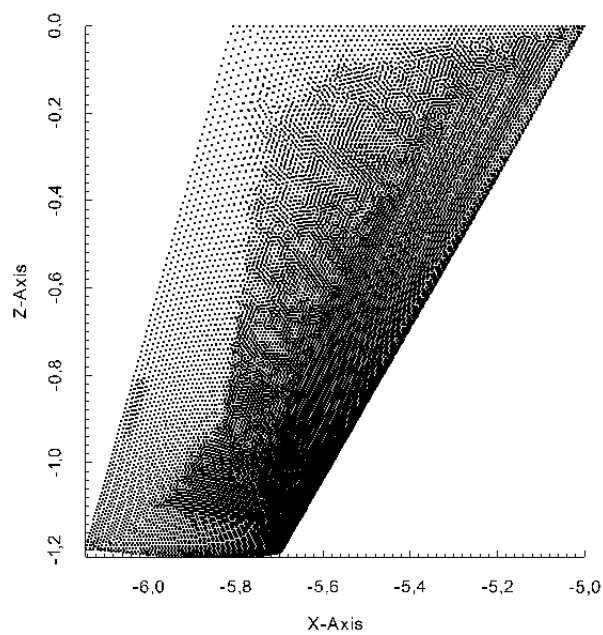


Σχήμα 4.3: Τα δύο κελύφη της πτέρυγας M6 που προέκυψαν έπειτα από το διαχωρισμό από το μέσο επίπεδο. Διακρίνεται το άνω (αριστερά) και το κάτω (δεξιά) κέλυφος.

στον παραμετρικό χώρο (σχήμα 4.7). Αυτό επιτυγχάνεται με τον γραμμικό μετασχη-



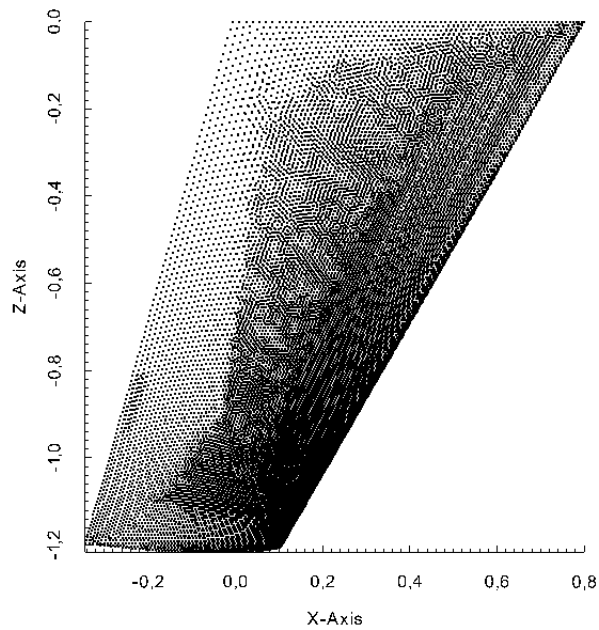
Σχήμα 4.4: Η κάτοψη του μέσου επιπέδου.



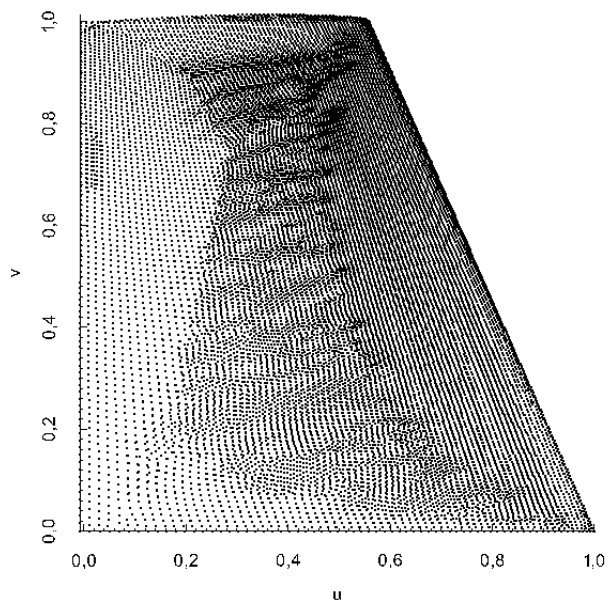
Σχήμα 4.5: Το μέσο επίπεδο αφού στράφηκε, ώστε να γίνει παράλληλο στο επίπεδο $x-z$.

ματισμό που περιγράφεται από την σχέση (3.17).

Η κατάληψη όλου του παραμετρικού χώρου από τους επιφανειακούς κόμβους γίνεται



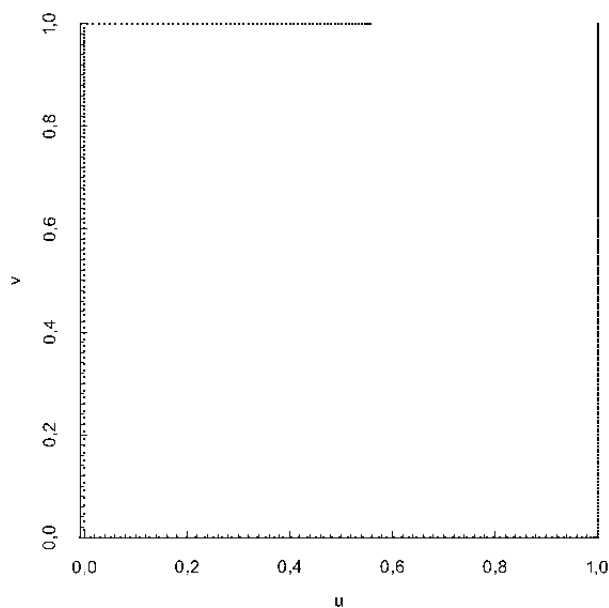
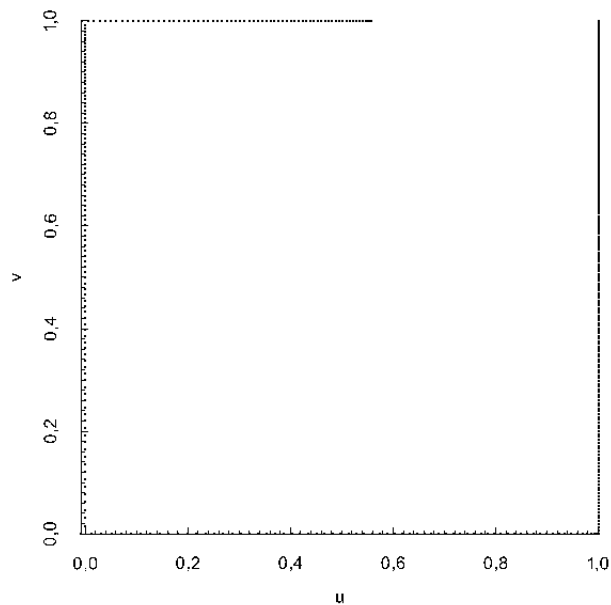
Σχήμα 4.6: Το μέσο επίπεδο αφού στράφηκε ώστε να γίνει παράλληλο στο x - z και αφού μεταφέρθηκε το σημείο \vec{C}_1 στην αρχή των αξόνων.



Σχήμα 4.7: Το μέσο επίπεδο αφού υποστεί γραμμικό μετασχηματισμό μέσω του μητρώου M (σχέση (3.17)).

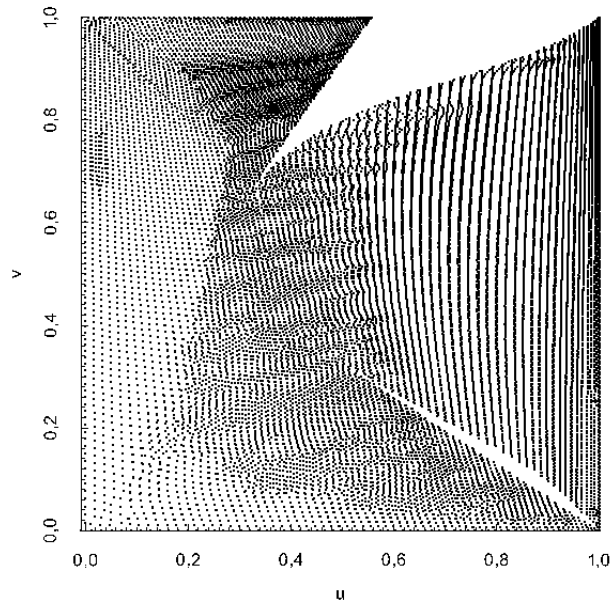
σε δύο βήματα: (α) Μετακίνηση των οριακών κόμβων και για τα δύο κελύφη στα όρια του παραμετρικού χώρου (σχήμα 4.8) και (β) παρακολούθηση της κίνησης των οριακών

κόμβων από τους εσωτερικούς (σχήμα 4.9).



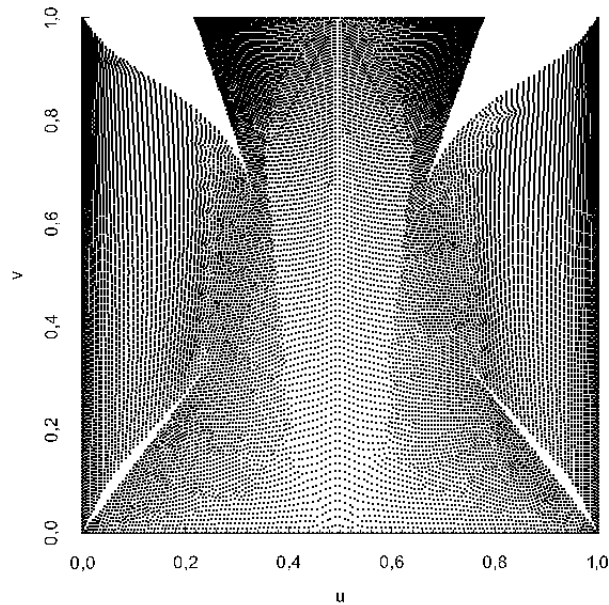
Σχήμα 4.8: Τα οριακά σημεία του χωρίου που έχουν μεταφερθεί στα όρια του τετραγώνου $[0, 1] \times [0, 1]$. Διακρίνονται όσα ανήκουν στην άνω πλευρά της πτέρυγας (πάνω) κι αυτά που ανήκουν στην κάτω πλευρά της πτέρυγας (κάτω).

Η τελική παραμετροποίηση προκύπτει ύστερα από διαχωρισμό του παραμετρικού χώρου ώστε ο μισός να ανήκει στο άνω κέλυφος της πτέρυγας και ο άλλος μισός στο κάτω



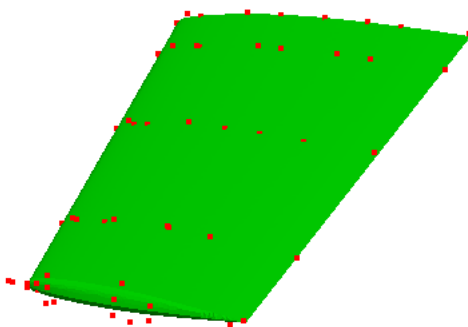
Σχήμα 4.9: Η μορφή του τετραγώνου $[0, 1] \times [0, 1]$ αφού οι εσωτερικοί κόμβοι ακολουθήσουν το όριο.

(σχήμα 4.10).

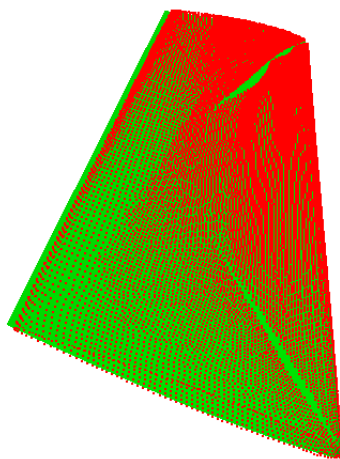


Σχήμα 4.10: Η τελική παραμετροποίηση, μετά και από τον διαχωρισμό των σημείων του άνω και του κάτω κελύφους.

Μετά την ολοκλήρωση της διαδικασίας παραμετροποίησης, γίνεται γραμμική παλινδρόμηση ώστε να προκύψουν οι αρχικές θέσεις των σημείων ελέγχου (σχήμα 4.11).

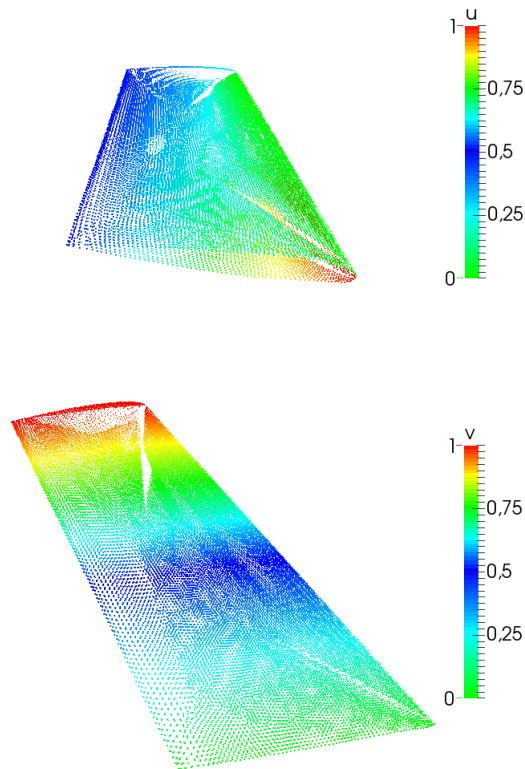


Σχήμα 4.11: Παρουσίαση της αρχικής πτέρυγας (πράσινο) με τα σημεία ελέγχου (κόκκινο) που προκύπτουν από το πρόβλημα γραμμικής παλινδρόμησης.



Σχήμα 4.12: Σύγκριση αρχικής πτέρυγας (πράσινο) με την επιφάνεια NURBS που προκύπτει με χρήση των σημείων ελέγχου του σχήματος 4.11.

Τέλος, γίνεται βελτιστοποίηση των θέσεων των σημείων ελέγχου αλλά και των αριθμητικών τιμών των βαρών που τους αντιστοιχούν ώστε η επανασχεδίαση της επιφάνειας της αρχικής πτέρυγας να γίνει η βέλτιστη. Τα αποτελέσματα φαίνονται στο σχήμα 4.13.

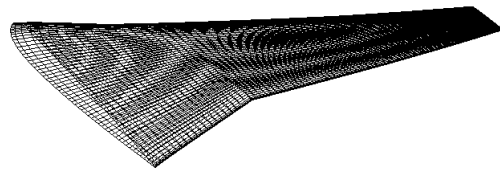
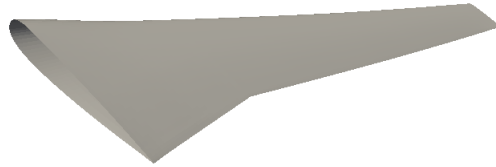


Σχήμα 4.13: Η τελική επιφάνεια NURBS για την οποία χρησιμοποιούνται οι βέλτιστες θέσεις των σημείων ελέγχου και οι βέλτιστες τιμές των βαρών. Με τα χρώματα του υπομνήματος φαίνεται η αλλαγή της τιμής της παραμέτρου u (πάνω) καθώς και της v (κάτω).

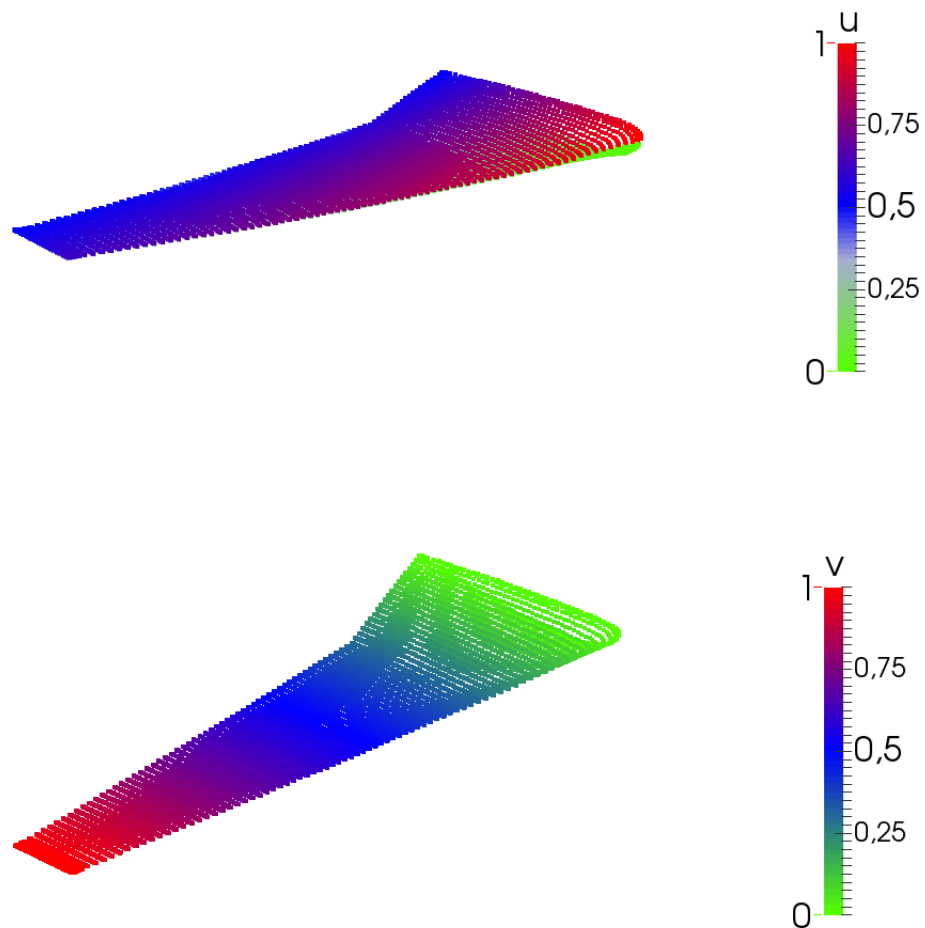
4.2 Πτέρυγα Common Research Model (CRM) της NASA

Για την πτέρυγα CRM ακολουθούνται οι ίδιες διαδικασίες. Η αρχική πτέρυγα καθώς και οι επιφανειακοί κόμβοι της, παρουσιάζονται στο σχήμα 4.14.

Στη συνέχεια, στο σχήμα 4.15 παρουσιάζεται η τελική προσέγγισή της από επιφανειακά NURBS.



Σχήμα 4.14: Η πτέρυγα CRM (πάνω) και οι επιφανειακοί της κόμβοι (κάτω).



Σχήμα 4.15: Η τελική επιφάνεια NURBS για την οποία χρησιμοποιούνται οι βέλτιστες θέσεις των σημείων ελέγχου και οι βέλτιστες τιμές των βαρών. Με τα χρώματα του υπομνήματος φαίνεται η αλλαγή της τιμής της παραμέτρου u (πάνω) καθώς και της v (κάτω).

Κεφάλαιο 5

Συμπεράσματα

Σε αυτήν τη διπλωματική εργασία αναπτύχθηκε η θεωρία επαναπαραμετροποίησης επιφανειών και, στη συνέχεια, αυτή χρησιμοποιήθηκε ώστε να γίνει η προσέγγισή τους από επιφάνεια NURBS. Συχνά, κατά τη διάρκεια του βρόχου βελτιστοποίησης, προκύπτει η ανάγκη για απεικόνιση της βέλτιστης γεωμετρίας ενός αεροδυναμικού σώματος. Αυτό όμως δεν είναι εφικτό μέσω των μεταβλητών βελτιστοποίησης. Έτσι, χρησιμοποιείται η θεωρία που παρουσιάστηκε, ώστε να κατασκευαστούν οι επιφάνειες του βέλτιστου αεροδυναμικού σώματος μέσω επιφανειακών NURBS, που είναι συμβατά με CAD.

Η επαναπαραμετροποίηση των οριακών επιφανειών των στερεών σωμάτων έχει δυσκολία, καθώς κάθε σώμα διαθέτει τα δικά του χαρακτηριστικά και μορφή. Συνεπώς, είναι φανερό πως δεν μπορεί να υιοθετηθεί μίας μορφής επαναπαραμετροποίηση (λ.χ. όπως αυτή που παρουσιάστηκε στην παρούσα εργασία) για κάθε σχήμα. Κατά τη διάρκεια της επαναπαραμετροποίησης, κάθε επιφανειακός κόμβος ενός σώματος δέχεται επεξεργασία, μέσω γεωμετρικών μετασχηματισμών, η οποία έχει στόχο να αντιστοιχήσει στις συντεταγμένες του (διάνυσμα $\vec{X} \in \mathbf{R}^3$), ένα ζευγάρι παραμέτρων (u, v) . Η αντιστοίχιση αυτή πρέπει να είναι ένα-προς-ένα και να διατηρεί την σχετική θέση ενός κόμβου ως προς έναν άλλον. Η επιλεγμένη μορφή επαναπαραμετροποίησης για πτέρυγες αεροσκαφών το επιτυγχάνει αυτό κατά ένα πολύ μεγάλο ποσοστό καθώς ο κάθε επιφανειακός κόμβος αποκτά ένα μοναδικό ζεύγος τιμών (u, v) . Οι κόμβοι για τους οποίους δεν επιτεύχθηκε αυτό ήταν οι κόμβοι που κείνται πάνω στην καμπύλη που αποτελεί την τομή του μέσου επιπέδου με την πτέρυγα. Με κάποιο εκ των τμημάτων αυτής της καμπύλης, γίνεται ο διαχωρισμός του άνω και του κάτω κελύφους της πτέρυγας και αυτό οδηγεί στην παρουσία διπλών κόμβων στο τμήμα αυτό. Για να αποφευχθεί αυτό, μπορεί να αναπτυχθεί περαιτέρω λογισμικό το οποίο θα αναγνωρίζει και θα εξαλείφει τους διπλούς κόμβους.

Η προσέγγιση μέσω επιφανειακών NURBS διαθέτει ευκολία ως προς την εφαρμογή. Η επιλογή των βασικών στοιχείων για μία B-splines επιφάνεια (βαθμός p και αριθμός

σημείων ελέγχου), γίνεται εμπειρικά κατά τη δημιουργία του λογισμικού. Αυτές οι παράμετροι αφορούν το πόσο σύνθετο είναι το σχήμα που προσπαθούν τα NURBS να προσεγγίσουν. Η επιλογή αυτή θα μπορούσε ενδεχομένως να μοντελοποιηθεί με βάση έναν γεωμετρικό αλγόριθμο που να αντικατοπτρίζει την εμπειρική πληροφορία στην οποία βασίζεται. Η κατασκευή των επιφανειών εφόσον βασίζεται στη μέθοδο γραμμικής παλινδρόμησης οφείλει να είναι ακριβής. Παρόλα αυτά, παρατηρούνται κάποια ανοίγματα στην επιφάνεια της προκύπτουσας πτέρυγας τα οποία δεν εξαλείφονται ακόμα και μετά τη διαδικασία της βελτιστοποίησης. Άρα, εξάγεται το συμπέρασμα ότι ευθύνη για αυτά τα ανοίγματα φέρει η επαναπαραμετροποίηση. Οι βελτιώσεις για αυτό αφορούν δύο σημεία. Πρώτον, τη μετακίνηση των οριακών κόμβων στα όρια του χωρίου $[0, 1] \times [0, 1]$, και δεύτερον, τη μέθοδο με την οποία οι εσωτερικοί κόμβοι ακολουθούν την κίνηση των εξωτερικών. Αφενός, στις πτέρυγες που επεξεργάστηκαν προέκυψαν ορισμένες κενές περιοχές στα όρια του χωρίου. Αφετέρου, η συνάρτηση από την οποία προέκυπτε ποιοι κόμβοι θα ακολουθήσουν ποιο όριο, προκάλούσε «βίαιο διαχωρισμό» των εσωτερικών κόμβων σε κάποιες περιοχές. Για την επίλυση των ανωτέρω προτάθηκαν οι ανωτέρω δύο αλγόριθμοι:

- 1) Για τις κενές περιοχές στα όρια: Καταγραφή του αριθμού των σημείων που ανήκουν σε κάθε όριο και μοίρασμά τους πάνω σε αυτό ομογενώς.
- 2) Για τους διαχωρισμούς: Χρησιμοποίηση διαφορετικής μεθόδου για τον υπολογισμό της μετατόπισης των εσωτερικών ορίων, όπως μεθόδους ελατηρίων (spring analogies).

Παράρτημα Α΄

Ο αλγόριθμος διάταξης Shellsort

Ο αλγόριθμος διάταξης ShellSort [17] είναι ένας αλγόριθμος ο οποίος διατάσσει σε φθίνουσα ή αύξουσα σειρά ένα διάνυσμα πραγματικών αριθμών. Ο αλγόριθμος αυτός χρησιμοποιείται στην ενότητα 3.9 όπου κατά την κατασκευή ενός διανύσματος κόμβων, πρέπει να γίνει χρήση ενός διανύσματος με τα στοιχεία (τιμές των αριθμών που το απαρτίζουν) του τοποθετημένα σε αύξουσα σειρά.

Ο αλγόριθμος αυτός πήρε την ονομασία του από τον εμπνευστή του, Donald L. Shell [17]. Χαρακτηριστικό αυτού του αλγορίθμου είναι ότι, αντί να συγκρίνει ένα σύνολο στοιχείων με τη σειρά, παίρνοντας κάθε στοιχείο ξεχωριστά όπως πιο απλοί αλγόριθμοι, συγκρίνει στοιχεία που απέχουν μία συγκεκριμένη απόσταση d μέσα στο αρχικό διάνυσμα στοιχείων. Η τιμή του d ξεκινά ως το μισό του μήκους του αρχικού διανύσματος και στην αρχή κάθε σάρωσης του διανύσματος, μειώνεται στο μισό. Τα στοιχεία συγκρίνονται και εναλλάσσονται, όποτε προκύπτει η ανάγκη. Η σχέση με βάση την οποία ανανεώνεται η τιμή του d , μετά από κάθε σάρωση είναι η

$$d = \lfloor \frac{d+1}{2} \rfloor \quad (\text{Α΄.1})$$

με αρχική τιμή του d ίση με το μήκος του διανύσματος N . Ας γίνει ένα παράδειγμα με ένα απλό διάνυσμα λ.χ. ακέραιων για κατανόηση. Έστω το αρχικό διάνυσμα

$$\vec{R} = \begin{bmatrix} 84 \\ 69 \\ 76 \\ 86 \\ 94 \\ 91 \end{bmatrix}$$

το οποίο πρέπει να διαταχθεί σε φθίνουσα σειρά. Ισχύει ότι το μέγεθος του είναι $N=6$

και, συνεπώς, $d=N=6$. Για την πρώτη σάρωση ισχύει

$$d = \lfloor \frac{6+1}{2} \rfloor = 3$$

Συνεπώς, συγκρίνονται $1^{\circ}-4^{\circ}$, $2^{\circ}-5^{\circ}$ και $3^{\circ}-6^{\circ}$ στοιχείο. Εφόσον είναι επιθυμητό τα στοιχεία να είναι διατεταγμένα σε φθίνουσα σειρά, τότε, αν το δεύτερο συγκρινόμενο στοιχείο είναι μεγαλύτερο από το πρώτο, τα συγκρινόμενα στοιχεία αλλάζουν θέση. Αν όχι, μένουν ως έχουν και εκτελείται η επόμενη σύγκριση. Μετά, λοιπόν, την πρώτη σάρωση το διάνυσμα \vec{R} γίνεται

$$\vec{R} = \begin{bmatrix} 86 \\ 94 \\ 91 \\ 84 \\ 69 \\ 76 \end{bmatrix}$$

Για τη δεύτερη σάρωση υπολογίζεται το

$$d = \lfloor \frac{3+1}{2} \rfloor = 2$$

Συνεπώς, συγκρίνονται $1^{\circ}-3^{\circ}$, $2^{\circ}-4^{\circ}$, $3^{\circ}-5^{\circ}$, και $4^{\circ}-6^{\circ}$ στοιχείο. Μετά το πέρας της δεύτερης σάρωσης το \vec{R} γίνεται

$$\vec{R} = \begin{bmatrix} 91 \\ 94 \\ 86 \\ 84 \\ 69 \\ 76 \end{bmatrix}$$

Για την τρίτη σάρωση είναι

$$d = \lfloor \frac{2+1}{2} \rfloor = 1$$

Άρα, συγκρίνονται τα στοιχεία ένα-ένα. Μετά το τέλος και της τρίτης σάρωσης, το \vec{R} γίνεται

$$\vec{R} = \begin{bmatrix} 94 \\ 91 \\ 86 \\ 84 \\ 76 \\ 69 \end{bmatrix}$$

που είναι και η τελική διατεταγμένη μορφή του διανύσματος. Τέλος, γίνεται και μία

ακόμα σάρωση με $d = 1$, για έλεγχο κατά την οποία αν δεν γίνει καμία αλλαγή, ο αλγόριθμος λήγει. Αν όμως, γίνει έστω μία αλλαγή γίνεται κι άλλη σάρωση με $d = 1$. Ο αλγόριθμος είναι αποδοτικότετος και χρησιμοποιείται για γρήγορη κατάταξη μεγάλων διανυσμάτων.

Παράρτημα Β΄

Η μέθοδος SVD (Singular Value Decomposition)

Στη γραμμική άλγεβρα, SVD (Singular Value Decomposition) [19], [20] είναι μία μέθοδος παραγοντοποίησης πραγματικών ή μιγαδικών μητρώων. Η μέθοδος αυτή έχει πολλές εφαρμογές στα πεδία επεξεργασίας σημάτων και στατιστικής. Εν προκειμένω, ενδιαφέρον παρουσιάζει μία εφαρμογή της μεθόδου SVD σύμφωνα με την οποία είναι εφικτή η αντιστροφή (θα μπορούσε να ειπωθεί ψευδο-αντιστροφή) ενός μη-τετραγωνικού μητρώου, ώστε να λυθεί ένα σύστημα γραμμικών εξισώσεων με περισσότερες εξισώσεις από αγνώστους (υπερ-ορισμένο).

Η μέθοδος SVD στηρίζεται στο θεώρημα της γραμμικής άλγεβρας που αναφέρει ότι: Οποιοδήποτε μητρώο A (τετραγωνικό ή μη) μπορεί να προκύψει ως γινόμενο τριών άλλων μητρώων. Ενός ορθογωνικού μητρώου U ενός διαγώνιου μητρώου S και του ανάστροφου ενός ακόμα ορθογωνικού μητρώου V . Σε μαθηματική διατύπωση

$$A_{mn} = U_{mm} S_{mn} V_{nn}^T \quad (\text{B'.1})$$

Με m, n συμβολίζεται, αντίστοιχα, το πλήθος των σειρών και των στηλών του, προς παραγοντοποίηση μητρώου, A . Στα υπόλοιπα μητρώα οι δείκτες ομοίως συμβολίζουν τις διαστάσεις τους. Προκειμένου το μητρώο A να είναι μητρώο συντελεστών ενός υπερ-ορισμένου συστήματος γραμμικών εξισώσεων, πρέπει να ισχύει $m > n$. Οι στήλες του μητρώου U αποτελούνται από τα ορθοκανονικά ιδιοδιανύσματα του μητρώου AA^T , οι στήλες του μητρώου V αποτελούνται από τα ορθοκανονικά ιδιοδιανύσματα του μητρώου $A^T A$ και η διαγώνιος του S αποτελείται από τις τετραγωνικές ρίζες των μη-αρνητικών ιδιοτιμών του AA^T (ή του $A^T A$) σε φθίνουσα σειρά και μηδέν στα υπόλοιπα στοιχεία της διαγώνιου. Αφού γίνει η παραγοντοποίηση, υιοθετείται ο όρος ψευδο-αντίστροφο μητρώο ώστε να περιγραφεί ένα μητρώο A^{-1} με διαστάσεις $n \times m$, τέτοιο ώστε $A^{-1}A = I_n$. Εφαρμόζοντας στη σχέση (B'.1) την «αντιστροφή» και ιδιότητες

γινομένου αντίστροφων και ανάστροφων πινάκων [21] λαμβάνεται η έκφραση

$$A^{-1} = (USV^T)^{-1} = VS^{-1}U^T \quad (\text{B'.2})$$

Το μητρώο S^{-1} «αντιστρέφεται» αν όλα τα μη-μηδενικά στοιχεία του αντικατασταθούν με τα αντίστροφά τους και, στη συνέχεια, το μητρώο αναστραφεί. Σε περίπτωση που ένα εκ των στοιχείων προς αντιστροφή δεν είναι μηδενικό αλλά είναι αρκετά μικρό ώστε να προκύπτει πρόβλημα στην αντιστροφή, τότε αυτό αντικαθίσταται με το μηδέν. Έστω τώρα μία γραμμική εξίσωση της μορφής

$$A\vec{x} = \vec{b} \quad (\text{B'.3})$$

Αν n το μέγεθος του διανύσματος \vec{x} και m το μέγεθος του διανύσματος b ($m > n$) τότε πρόκειται για ένα υπερ-ορισμένο σύστημα εξισώσεων-αγνώστων. Ο πολλαπλασιασμός και των δύο μελών της σχέσης (B'.3) με A^{-1} δίνει

$$A^{-1}A\vec{x} = A^{-1}\vec{b} \Leftrightarrow \vec{x} = VS^{-1}U^T\vec{b} \quad (\text{B'.4})$$

Σε περίπτωση που το μητρώο A έχει ιδιομορφίες, τότε αποκτά όλο και λιγότερες διακριτές ιδιοτιμές και πέφτει η τάξη του. Αν η τάξη του μητρώου γίνει μικρότερη από τον αριθμό αγνώστων n τότε το μητρώο γίνεται πλήρως ιδιόμορφο και δεν είναι εφικτή η ψευδο-αντιστροφή. Σε περίπτωση που το μητρώο A δεν είναι πλήρως ιδιόμορφο και το σύστημα εξισώσεων που περιγράφεται από τη σχέση (B'.3) έχει λύση, τότε αυτή περιγράφεται με απόλυτη ακρίβεια από το διάνυσμα \vec{x} της σχέσης (B'.4). Αν παρόλα αυτά, το σύστημα που περιγράφεται από τη σχέση (B'.3) δεν έχει λύση τότε το διάνυσμα \vec{x} είναι τέτοιο ώστε, η διαφορά του $A\vec{x}$ από το \vec{b} , να γίνει η ελάχιστη δυνατή. Συνεπώς, αν

$$\vec{b}' = A\vec{x} \quad (\text{B'.5})$$

και με $b_i, b'_i, i \in [1, m]$ συμβολίζονται τα στοιχεία των διανυσμάτων \vec{b}, \vec{b}' αντίστοιχα, τότε το διάνυσμα \vec{x} θα είναι τέτοιο ώστε να ελαχιστοποιείται η

$$R = \sqrt{\sum_{i=1}^m (b'_i - b_i)^2} \quad (\text{B'.6})$$

Ελαχιστοποίηση της (B'.6), σημαίνει πως το διάνυσμα \vec{x} πολλαπλασιαζόμενο με το μητρώο A θα δώσει ένα διάνυσμα \vec{b}' το οποίο θα αποτελεί την καλύτερη δυνατή προσέγγιση του \vec{b} . Παρακάτω δίδεται ένα απλό παράδειγμα για κατανόηση. Έστω ένα

μητρώο 3×2 , το

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B'.7})$$

Προφανώς, είναι $m = 3$ και $n = 2$. Αρχικά, γίνεται ο υπολογισμός του μητρώου U . Ισχύει ότι

$$A^T = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B'.8})$$

και

$$AA^T = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 2 \\ 0 & 10 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \end{bmatrix} \quad (\text{B'.9})$$

Οι ιδιοτιμές του μητρώου AA^T είναι $\lambda_1 = 12, \lambda_2 = 10, \lambda_3 = 0$ και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα είναι τα $\vec{v}_1 = (1, 2, 1), \vec{v}_2 = (2, -1, 0), \vec{v}_3 = (1, 2, -5)$. Συνεπώς,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

είναι το μητρώο που δημιουργείται με τα ιδιοδιανύσματα ως στήλες. Κανονικοποίηση αυτού του μητρώου δίνει το

$$U = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{30}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{30}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{-5}{\sqrt{30}} \end{bmatrix} \quad (\text{B'.10})$$

Με όμοιο τρόπο, γίνεται ο υπολογισμός του μητρώου V . Ισχύει

$$A^T A = \begin{bmatrix} 11 & 1 \\ 1 & 11 \end{bmatrix} \quad (\text{B'.11})$$

που έχει ιδιοτιμές τις $\lambda_1 = 12, \lambda_2 = 10$ και αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα τα $\vec{v}_1 = (1, 1), \vec{v}_2 = (1, -1)$. Ας είναι

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

το μητρώο που έχει τα παραπάνω ιδιοδιανύσματα ως στήλες. Κανονικοποίηση αυτού

του μητρώου δίνει την τελική έκφραση του V

$$V = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad (\text{B'.12})$$

Γνωρίζοντας τις ιδιοτιμές του AA^T αλλά και του $A^T A$ το μητρώο S προκύπτει εύκολα ως

$$S = \begin{bmatrix} \sqrt{12} & 0 \\ 0 & \sqrt{10} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B'.13})$$

Πλέον είναι διαθέσιμοι όλοι οι παράγοντες. Ως επαλήθευση αξίζει να υπολογιστεί το γινόμενο USV^T ,

$$USV^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{30}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{30}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{-5}{\sqrt{30}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sqrt{12} & 0 \\ 0 & \sqrt{10} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = A \quad (\text{B'.14})$$

Επόμενο βήμα για την αντιστροφή του A είναι η αντιστροφή του S . Αυτό είναι εφικτό όπως προαναφέρθηκε με αντιστροφή των μη-μηδενικών στοιχείων του και αναστροφή του. Άρα,

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{12}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{10}} & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B'.15})$$

Τελικά,

$$A^{-1} = VS^{-1}U^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{12}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{10}} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{2}{\sqrt{30}} & \frac{-5}{\sqrt{30}} \end{bmatrix} \quad (\text{B'.16})$$

ή, μετά από πράξεις,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{34}{120} & \frac{8}{120} & \frac{10}{120} \\ \frac{-14}{120} & \frac{32}{120} & \frac{10}{120} \end{bmatrix} \quad (\text{B'.17})$$

Για επαλήθευση υπολογίζεται το γινόμενο $A^{-1}A$ και αναμένεται να ισούται με το μοναδιαίο μητρώο. Πράγματι,

$$A^{-1}A = \begin{bmatrix} \frac{34}{120} & \frac{8}{120} & \frac{10}{120} \\ \frac{-14}{120} & \frac{32}{120} & \frac{10}{120} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B'.18})$$

Το ανωτέρω παράδειγμα δείχνει την εφαρμογή της θεωρίας πάνω στην οποία βασίζεται η μέθοδος SVD. Υπολογιστικά όμως, η αποθήκευση των μητρώων A, A^T καθώς και η εύρεση των ιδιοτιμών τους με τον τρόπο που παρουσιάστηκε, είναι ασύμφορη από άποψης υπολογιστικής ισχύος αλλά και χρόνου. Για να υπολογιστούν τα μητρώα U, S, V και ως εκ τούτου να γίνει εφικτή η ψευδο-αντιστροφή του A , γίνεται χρήση ανακλάσεων Householder και περιστροφών Given's [22]. Η μέθοδος αυτή περιλαμβάνει αρχικά τον πολλαπλασιασμό του μητρώου A , εναλλάξ και εκατέρωθεν του, με μητρώα Householder, μέχρι το μητρώο A να μετατραπεί σε ένα διδιαγώνιο μητρώο B . Αν δηλαδή το μητρώο A ονομαστεί A_0 και P_i, D_i είναι τα μητρώα Householder τότε

$$\begin{aligned} A_1 &= P_1 A_0 D_1 \\ A_2 &= P_2 A_1 D_2 \\ &\vdots = \vdots \end{aligned} \quad (\text{B'.19})$$

Η διαδικασία επαναλαμβάνεται μέχρι στην θέση του A_k να προκύψει ένα διδιαγώνιο μητρώο B . Είναι προφανές ότι

$$B = A_k = P_k A_{k-1} D_k = P_k P_{k-1} A_{k-2} D_{k-1} D_k = P_k P_{k-1} \dots P_1 A_0 D_1 \dots D_{k-1} D_k$$

Τίθενται

$$\begin{aligned} P &= P_k P_{k-1} \dots P_1 \\ D &= D_k D_{k-1} \dots D_1 \end{aligned}$$

άρα

$$B = PAD \quad (\text{B'.20})$$

Επόμενο βήμα είναι η μετατροπή του διδιαγώνιου μητρώου B στο διαγώνιο μητρώο S . Αυτό γίνεται με συνεχείς μετασχηματισμούς QR, μέσω μητρώων περιστροφής Given's. Αν Q_i ονομάζονται τα μητρώα περιστροφής Given's, αυτά και τα ανάστροφά τους πολλαπλασιάζονται με το μητρώο B εκατέρωθεν έως ότου αυτό γίνει διαγώνιο. Αν λοιπόν, $B = B_0$

$$\begin{aligned} B_1 &= Q_1^T B_0 Q_1 \\ B_2 &= Q_2^T B_1 Q_2 \\ &\vdots = \vdots \end{aligned} \quad (\text{B'.21})$$

Είναι προφανές ότι

$$S = B_l = Q_l^T B_{l-1} Q_l = Q_l^T Q_{l-1}^T B_{l-2} Q_{l-1} Q_l = Q_l^T Q_{l-1}^T \dots Q_1^T B_0 Q_1 \dots Q_{l-1} Q_l$$

Αντίστοιχα με πριν τίθενται

$$\begin{aligned} Q^T &= Q_l^T Q_{l-1}^T \dots Q_1^T \\ Q &= Q_l Q_{l-1} \dots Q_1 \end{aligned}$$

άρα

$$S = Q^T B Q$$

και λόγω της (B'.20),

$$S = Q^T P A D Q \quad (\text{B'.22})$$

Τα μητρώα Householder και Given's είναι ορθογώνια μητρώα, συνεπώς, ορθογώνια θα είναι και τα μητρώα που προκύπτουν ως το γινόμενο τους. Για ένα ορθογώνιο μητρώο C ισχύουν οι εξής ιδιότητες

$$\begin{aligned} C &= C^T \\ C^{-1} &= C^T \end{aligned}$$

Λόγω των ανωτέρω ιδιοτήτων, η (B'.22) ισοδυναμεί με την

$$A = P Q^T S Q D \quad (\text{B'.23})$$

ή αν

$$\begin{aligned} U &= P Q^T \\ V^T &= Q D \end{aligned}$$

τότε

$$A = U S V^T \quad (\text{B'.24})$$

Με αυτόν τον αλγόριθμο επιτυγχάνεται η παραγοντοποίηση του μητρώου A μέσω γινο-

μένων. Η σχέση (B'.24) χρησιμοποιείται ώστε σύμφωνα με την (B'.2) να αντιστραφεί το μητρώο A .

Παράρτημα Γ'

Αλγόριθμοι βελτιστοποίησης

Στην παρούσα εργασία προέκυψε η ανάγκη για εφαρμογή των αλγόριθμων βελτιστοποίησης της απότομης καθόδου (steepest descent) και BFGS (Broyden, Fletcher, Goldfarb, Shanno). Και οι δύο αλγόριθμοι υπάγονται στην κατηγορία μεθόδων που βασίζονται στην κλίση της αντικειμενικής συνάρτησης (Gradient-based methods). Οι μέθοδοι αυτές χρησιμοποιούν την κλίση της αντικειμενικής συνάρτησης ως εργαλείο για τον προσδιορισμό της κατεύθυνσης αναζήτησης της βέλτιστης λύσης. Με βάση την διόρθωση που προσδιορίζεται, υπολογίζεται μία νέα προσέγγιση και ο αλγόριθμος συνεχίζει. Όταν η διόρθωση τείνει να γίνει μηδέν, τότε ο αλγόριθμος σταματά. Αν $F(\vec{x})$ η αντικειμενική συνάρτηση που εξαρτάται από το διάνυσμα των ελεύθερων μεταβλητών \vec{x} , τότε προφανώς είναι προαπαιτούμενο να έχει υπολογιστεί ήδη το $\nabla F(\vec{x})$. Στις επόμενες δύο υποενότητες θα παρουσιαστεί το πως οι αλγόριθμοι απότομης καθόδου και BFGS κάνουν χρήση του $\nabla F(\vec{x})$ για τον προσδιορισμό της διόρθωσης.

Γ'.1 Ο αλγόριθμος της απότομης καθόδου

Η μέθοδος της απότομης καθόδου steepest descent είναι η απλούστερη από τις μεθόδους βελτιστοποίησης. Έστω ότι ο αλγόριθμος βελτιστοποίησης βρίσκεται στην n -οστή επανάληψή του, με $n \geq 0$. Αν η προσέγγιση της βέλτιστης λύσης σε αυτήν την επανάληψη είναι η \vec{x}^n , τότε η προσέγγιση της επόμενης επανάληψης δίδεται από τον τύπο

$$\vec{x}^{n+1} = \vec{x}^n + \eta \vec{p}^n \quad (\Gamma'.1)$$

Με \vec{p}^n συμβολίζεται το διάνυσμα των διορθώσεων και με η συμβολίζεται ένα βαθμωτό μέγεθος που αντιπροσωπεύει το βήμα. Η επιλογή βήματος έχει να κάνει με την τάξη μεγέθους των παραγώγων και με το αν αυτή είναι ίδια με αυτήν των προσεγγίσεων. Ένα μεγάλο βήμα μπορεί να οδηγήσει τον αλγόριθμο σε απόκλιση καθώς η προσέγγιση

του επόμενου βήματος μπορεί να απέχει πολύ από αυτήν του προηγούμενου. Από την άλλη, ένα μικρό βήμα μπορεί να οδηγήσει σε πολύ αργή σύγκλιση του αλγορίθμου. Για τη μέθοδο της απότομης καθόδου, το διάνυσμα των διορθώσεων προκύπτει ως

$$\bar{p}^n = -\nabla F(\bar{x}^n) \quad (\Gamma'.2)$$

Αντικαθιστώντας την (Γ'.2) στην (Γ'.1) προκύπτει η τελική σχέση ανανέωσης της προσέγγισης,

$$\bar{x}^{n+1} = \bar{x}^n - \eta \nabla F(\bar{x}^n) \quad (\Gamma'.3)$$

Σε περίπτωση που $\eta > 0$, τότε ο αλγόριθμος έχει στόχο την ελαχιστοποίηση της $F(\bar{x})$ ενώ, αν $\eta < 0$, ο αλγόριθμος έχει στόχο την μεγιστοποίησή της. Παρακάτω παρουσιάζεται ο αλγόριθμος βήμα-βήμα.

Βήμα 0: Εμπειρική πρώτη προσέγγιση της βέλτιστης λύσης και αποθήκευσή της στο διάνυσμα \bar{x}^0 ($n = 0$).

Βήμα 1: Υπολογισμός του διανύσματος των κλίσεων $\nabla F(\bar{x}^n)$.

Βήμα 2: Υπολογισμός της νέας προσέγγισης της βέλτιστης λύσης μέσω της (Γ'.3).

Βήμα 3: Ανανέωση δείκτη επανάληψης ($n = n + 1$) και επιστροφή στο Βήμα 1 μέχρι σύγκλισης.

Γ'.2 Ο αλγόριθμος BFGS

Η μέθοδος BFGS [1] ανήκει στην οικογένεια των προσεγγιστικών μεθόδων quasi-Newton. Οι μέθοδοι αυτές, χρησιμοποιούν τα διανύσματα των προσεγγίσεων και των κλίσεων της τρέχουσας και της προηγούμενης επανάληψης για να υπολογίσουν μία αρκετά καλή προσέγγιση B του Εσσιανού μητρώου. Έστω ότι ο αλγόριθμος βελτιστοποίησης βρίσκεται στην (n)-οστή επανάληψή του. Υπολογίζονται δύο διανύσματα, το

$$\bar{s}^n = \bar{x}^n - \bar{x}^{n-1} \quad (\Gamma'.4)$$

και το

$$\bar{y}^n = \nabla F(\bar{x}^n) - \nabla F(\bar{x}^{n-1}) \quad (\Gamma'.5)$$

Με βάση αυτά ανανεώνεται η προσέγγιση του μητρώου B μέσω της

$$B^n = B^{n-1} - \frac{B^{n-1} \bar{s}^n \bar{s}^{nT} B^{n-1}}{\bar{s}^{nT} B^{n-1} \bar{s}^n} + \frac{\bar{y}^n \bar{y}^{nT}}{\bar{y}^{nT} \bar{s}^n} \quad (\Gamma'.6)$$

Στη συνέχεια, το μητρώο B^n αντιστρέφεται και προκύπτει το

$$H^n = (B^n)^{-1} \quad (\Gamma'.7)$$

Τέλος, για να ληφθεί η νέα διορθωμένη προσέγγιση της βέλτιστης λύσης εφαρμόζεται η σχέση (Γ'.1) αφού τεθεί

$$\vec{p}^n = -H^n \nabla F(\vec{x}^n) \quad (\Gamma'.8)$$

και λαμβάνεται η αναδρομική σχέση ανανέωσης της προσέγγισης:

$$\vec{x}^{n+1} = \vec{x}^n - \eta H^n \nabla F(\vec{x}^n) \quad (\Gamma'.9)$$

Το βαθμωτό μέγεθος η έχει την ίδια σημασία με αυτήν που έχει στην μέθοδο της Απότομης Καθόδου. Παρακάτω παρουσιάζεται ο αλγόριθμος BFGS βήμα-βήμα:

Βήμα 0α: Εμπειρική πρώτη προσέγγιση του Εσσιανού μητρώου B^0 ($n = 0$). Το μητρώο B^0 οφείλει να είναι συμμετρικό, όπως και κάθε Εσσιανό μητρώο. Μια συνήθης πρώτη επιλογή για το B^0 είναι το μοναδιαίο μητρώο.

Βήμα 0β: Εμπειρική πρώτη προσέγγιση της βέλτιστης λύσης \vec{x}^0 .

Βήμα 0γ: Εκτέλεση του αλγορίθμου απότομης καθόδου ώστε να ληφθεί η προσέγγιση \vec{x}^1 , και ανανέωση δείκτη επανάληψης $n = n + 1$.

Βήμα 1: Υπολογισμός του διανύσματος των κλίσεων $\nabla F(\vec{x}^n)$.

Βήμα 2: Υπολογισμός των διανυσμάτων \vec{s}^n, \vec{y}^n .

Βήμα 3: Χρήση σχέσης (Γ'.6) για την ανανέωση του Εσσιανού μητρώου B^n .

Βήμα 4: Αντιστροφή του B^n και χρήση της σχέσης (Γ'.9) για την ανανέωση της προσέγγισης της βέλτιστης λύσης.

Βήμα 5: Ανανέωση δείκτη επανάληψης και επιστροφή στο Βήμα 1 μέχρι σύγκλισης.

Βιβλιογραφία

- [1] Γιαννάκογλου, Κ.: *Μέθοδοι Βελτιστοποίησης στην Αεροδυναμική*. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις ΕΜΠ, 2006.
- [2] Καρακάσης, Μ.: *Ιεραρχικοί, κατανεμημένοι εξελικτικοί αλγόριθμοι και υπολογιστική ευφυΐα στη σχεδίαση βέλτιστων αεροδυναμικών μορφών σε περιβάλλον πολυεπεξεργασίας*. Διδακτορική διατριβή, Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, Ε.Μ.Π., Αθήνα, 2006.
- [3] Κοντολέοντος, Ε.: *Ανάλυση και βελτιστοποίηση σύνθετων ρευστομηχανικών διατάξεων με χρήση υπολογιστικής ρευστοδυναμικής και εξελικτικών αλγορίθμων*. Διδακτορική διατριβή, Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, Ε.Μ.Π., Αθήνα, 2012.
- [4] *The Evolutionary Algorithms SYstem*. <http://velos0.ltt.mech.ntua.gr/EASY/>.
- [5] Burden R., Faires J.: *Numerical Analysis, (7th Ed)*. Brooks/Cole, 2000.
- [6] Squire W., Trapp G.: *Using complex variables to estimate derivatives of real functions*. SIAM REVIEW, 1998.
- [7] Παπουτσή-Κιαχαγιάς, Ε.: *Συζυγείς μέθοδοι χαμηλού υπολογιστικού κόστους για τυρβώδεις ροές, στην αεροδυναμική βελτιστοποίηση*. Διδακτορική διατριβή, Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, Ε.Μ.Π., Αθήνα, σε εξέλιξη.
- [8] Ζερβογιάννης, Θ.: *Μέθοδοι βελτιστοποίησης στην αεροδυναμική και τις στροβιλομηχανές με χρήση συζυγών τεχνικών, υβριδικών πλεγμάτων και του ακριβούς εσσιανού μητρώου*. Διδακτορική διατριβή, Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, Ε.Μ.Π., Αθήνα, 2011.
- [9] Ζυμάρης, Α.: *Συζυγείς μέθοδοι για το σχεδιασμό μορφών με βέλτιστη αεροδυναμική συμπεριφορά σε στρωτές και τυρβώδεις ροές*. Διδακτορική διατριβή, Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, Ε.Μ.Π., Αθήνα, 2010.
- [10] E. Kontoleonos, E. Papoutsis-Kiachagias, A. Zymaris D. Papadimitriou K. Giannakoglou: *Adjoint-based constrained topology optimization for viscous flows, including heat transfer*. Engineering Optimization, 45(8):941–961, 2013.

- [11] E. Papoutsis-Kiachagias, S. Kyriacou, K. Giannakoglou: *The continuous adjoint method for the design of hydraulic turbomachines*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 248:621–639, 2014.
- [12] E. Papoutsis-Kiachagias, A. Zymaris, I. Kavvadias D. Papadimitriou K. Giannakoglou: *The continuous adjoint approach to the k- turbulence model for shape optimization and optimal active control of turbulent flows*. Engineering Optimization, 47(3):370–389, 2015.
- [13] Piegl L., Tyler W.: *The NURBS Book*. Springer, 1996.
- [14] *The OpenFOAM Foundation*. <http://openfoam.org/>.
- [15] Zhao Y., Forhad A.: "A general method for simulation of fluid flows with moving and compliant boundaries on unstructured grids". Applied Mechanical Engineering 192 (2003).
- [16] Becker G., Schafer M., Jameson A.: "An advanced NURBS fitting procedure for post-processing of grid-based shape optimizations". 49th AIAA Aerospace Sciences Meeting, Orlando, FL USA (2011).
- [17] Shell D.: *A high speed sorting procedure*. Communications of the ACM, 2(7):30–32, 1959.
- [18] Hazewinkel M.: *Regression analysis, Encyclopedia of Mathematics*. Springer, 2001.
- [19] Baker K.: *Singular value decomposition tutorial (2005, unpublished)* . <http://www.ling.ohio-state.edu/~kbaker/pubs>.
- [20] Horn R., Johnson C.: *Topics in Matrix Analysis*. Cambridge University Press, 1991.
- [21] Petersen K., Pedersen M.: *The Matrix Cookbook*. Technical University of Denmark, 2012.
- [22] Golub G., Kahan W.: *Calculating the Singular Values and Pseudo-Inverse of a Matrix*. SIAM Journal for Numerical Analysis, 2(2), 1965.