



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών
Τομέας Ρευστών
Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών
Μονάδα Παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής
& Βελτιστοποίησης

Βελτιστοποίηση Μορφής σε Προβλήματα
Συζευγμένης Μετάδοσης Θερμότητας μέσω της
Συνεχούς Συζυγούς Μεθόδου - Προγραμματισμός
σε OpenFOAM και Εφαρμογές

Διπλωματική Εργασία

ΜΑΡΙΟΣ ΧΡΥΣΟΛΟΥΡΗΣ

Επιβλέπων: Κυριάκος Χ. Γιαννάκογλου , Καθηγητής ΕΜΠ

Αθήνα, 2015

Περίληψη

Σκοπός της παρούσας διπλωματικής εργασίας είναι η εφαρμογή της συνεχούς συζυγούς μεθόδου (continuous adjoint method) στο πρόβλημα συζευγμένης μεταφοράς θερμότητας (Conjugate Heat Transfer), για βελτιστοποίηση μορφής (shape optimization) συγκεκριμένης διάταξης.

Η προς μελέτη διάταξη αποτελείται από αγωγό τετραγωνικής διατομής που βρίσκεται σε επαφή με στερεό από το οποίο απάγει θερμότητα. Ο όρος συζευγμένο πρόβλημα μεταφοράς θερμότητας χρησιμοποιείται για να περιγράψει τη συναλλαγή θερμότητας μεταξύ στερεού και ρευστού, όπου το ρευστό ρέει γύρω ή μέσα στα τοιχώματα του στερεού. Οι ροές οι οποίες εξετάζονται είναι ασυμπίεστες, στρωτές και διδιάστατες. Οι εξισώσεις που περιγράφουν τη ροή είναι οι εξισώσεις Navier – Stokes οι οποίες επιλύονται σύμφωνα με τον αλγόριθμο SIMPLE. Η εξίσωση που διέπει τη μεταφορά θερμότητας στο στερεό είναι μία εξίσωση Laplace. Συνδυάζοντας τις εξισώσεις κατάστασης (ευθύ πρόβλημα) με κατάλληλες οριακές συνθήκες, εφαρμόζοντας μεθόδους διακριτοποίησης και χρησιμοποιώντας επαναληπτικές μεθόδους επιτυγχάνεται η επίλυση του συζευγμένου προβλήματος μεταφοράς θερμότητας. Για την επίλυση των εξισώσεων κατάστασης χρησιμοποιείται το ανοιχτό λογισμικό υπολογιστικής ρευστοδυναμικής OpenFOAM[®].

Οι συζυγείς μέθοδοι χρησιμοποιούνται για την εύρεση της κλίσης της αντικειμενικής συνάρτησης η οποία εκφράζει τη μέση θερμοκρασία που επικρατεί στο στερεό. Η μεταβλητή σχεδιασμού ως προς την οποία γίνεται η βελτιστοποίηση μορφής σχετίζεται με το μέγεθος του αγωγού και το μέγεθος του στερεού. Οι συζυγείς εξισώσεις, οι συζυγείς οριακές συνθήκες και η παράγωγος ευαισθησίας προκύπτουν από την παραγωγή της αντικειμενικής συνάρτησης. Στη συνέχεια, λύνοντας τις συζυγείς εξισώσεις (συζυγές πρόβλημα) με αντίστοιχο τρόπο με τις εξισώσεις κατάστασης (ευθύ πρόβλημα) υπολογίζεται η παράγωγος ευαισθησίας. Για την επίλυση του συζυγούς προβλήματος προγραμματίστηκε κατάλληλος κώδικας στο OpenFOAM[®].

Για τη διερεύνηση του προβλήματος βελτιστοποίησης έγιναν συγκρίσεις μεταξύ διαφόρων διατάξεων οι οποίες προέκυψαν για διαφορετικές τιμές της μεταβλητής σχεδιασμού.

Τελικώς δημιουργήθηκε κεντρικό πρόγραμμα στο οποίο υλοποιούνται διαδοχικά η γένεση του πλέγματος, η επίλυση του ευθέως προβλήματος, η επίλυση του συζυγούς προβλήματος και η εκτέλεση της μεθόδου της απότομης καθόδου. Η μέθοδος της απότομης καθόδου είναι μία μέθοδος ανίχνευσης της βέλτιστης λύσης η οποία χρησιμοποιεί την παράγωγο ευαισθησίας ώστε να βελτιώνει την υπάρχουσα λύση. Εκτελώντας επαναλήψεις με το πρόγραμμα αυτό, εντοπίζονται οι βέλτιστες λύσεις.



NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY OF ATHENS
SCHOOL OF MECHANICAL ENGINEERING
FLUIDS DEPARTMENT
LABORATORY OF THERMAL TURBOMACHINES
PARALLEL CFD AND OPTIMIZATION UNIT

Shape Optimization in Conjugate Heat Transfer Problems using the Continuous Adjoint Method – Programming in OpenFOAM and Applications

Chryssolouris Marios

Advisor: Kyriakos C. Giannakoglou, Professor NTUA

Athens, March 2015

Abstract

The aim of this diploma thesis is the development of the continuous adjoint method for conjugate heat transfer problems in order to optimize the shape of the configuration of interest.

The aforementioned configuration is comprised of a rectangular duct which is in contact with a solid from which heat is dispensed. The term 'conjugate heat transfer problem' is used to describe the heat exchange between fluid and solid where the fluid flows around or into the walls of the solid. The flows that are examined are incompressible, laminar and two-dimensional. The equations that describe the flow are the Navier-Stokes equations which are solved according to the SIMPLE algorithm. The equation which models the heat conduction in the solid is a Laplace equation. Combining these state equations (primal problem) with the proper boundary conditions, implementing discretization schemes and using iterative methods the numerical solution of the conjugate heat transfer problem is achieved. In order to solve the state equations, OpenFOAM which is an open source, computational fluid dynamics software is used.

The adjoint methods are used for the calculation of the gradient of the objective function which is a mathematical representation of the average temperature of the solid. The design variable for which the shape optimization is implemented is related to the size of the duct and the size of the solid. The adjoint equations, the adjoint boundary conditions and the sensitivity derivative are formulated through the differentiation of the objective

function. Following this, through the solution of the adjoint equations (adjoint problem) with a similar process to that of the state equations (primal problem) the sensitivity derivatives are computed. For the purpose of solving the adjoint problem the necessary code was created in the OpenFOAM environment.

To further understand the optimization problem and the proposed solution the comparison of various configurations generated for different values of the design variables was conducted.

Finally, a software including mesh generation, primal problem solution, adjoint problem solution and steepest descent iterations was created. The steepest descent method is an optimization method which utilizes the sensitivity derivative in order to improve the present solution to the problem. Through the execution of iterations with this the optimal solution is obtained.

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Κυριάκο Γιαννάκογλου για την πολύτιμη καθοδήγησή του, τις συμβουλές του κατά τη διάρκεια της εκπόνησης της παρούσας διπλωματικής εργασίας και προπαντός για την ενθάρρυνση που μου έδωσε μέσα από το μάθημα Μέθοδοι Αεροδυναμικής Βελτιστοποίησης για να συνεχίσω της σπουδές μου.

Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον διδάκτορα Βαγγέλη Παπουτσή-Κιαχαγιά για όλη την πολύτιμη βοήθειά του σε όλους τους τομείς της διπλωματικής μου εργασίας καθώς και στις πρώτες μου απόπειρες στον κόσμο του OpenFOAM. Ακόμη, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον υποψήφιο διδάκτορα Γιάννη Καββαδία για την καθοδήγησή που μου προσέφερε σε προγραμματιστικά ζητήματα. Και φυσικά, θα ήθελα να ευχαριστήσω και όλο το προσωπικό του εργαστηρίου για όλη την βοήθεια που μου προσέφεραν σε ποικίλα ζητήματα και στη διαμόρφωση ενός ευχάριστου κλίματος εργασίας. Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένεια και τους φίλους μου για όλη τους την στήριξη καθόλη τη διάρκεια των σπουδών μου.

Περιεχόμενα

1	Εισαγωγή	1
1.1	Η σημασία του συζευγμένο προβλήματος μεταφοράς θερμότητας	1
1.2	Συζυγείς μέθοδοι	3
1.3	Δομή της εργασίας	5
2	Το πρωτεύον πρόβλημα και η αριθμητική του επίλυση	7
2.1	Εξισώσεις ροής και Επίλυση	7
2.1.1	Εξισώσεις ροής	7
2.1.2	Διακριτοποίηση και Αριθμητική Επίλυση στο OpenFO-AM®	9
2.2	Συζευγμένο Πρόβλημα Μεταφοράς Θερμότητας	16
3	Η Συνεχής Συζυγής μέθοδος για το Συζευγμένο Πρόβλημα Μεταφοράς Θερμότητας	23
3.1	Συζυγείς μεταβλητές	23
3.2	Γενικευμένη αντικειμενική συνάρτηση	26
3.3	Γεωμετρία προβλήματος	28
3.4	Αντικειμενική συνάρτηση	28
3.5	Παραγωγή εξισώσεων ροής και μεταφοράς θερμότητας	31
3.5.1	Παραγωγή εξισώσεων ροής	31
3.5.2	Παραγωγή εξισώσεων μεταφοράς θερμότητας στερεού	37
3.6	Συζυγείς οριακές συνθήκες στο S_F	42
3.6.1	Συζυγείς οριακές συνθήκες στο $S_{F,I}$	42
3.6.2	Συζυγείς οριακές συνθήκες στο $S_{F,O}$	44
3.6.3	Συζυγείς οριακές συνθήκες στο $S_{F,W}$	47
3.7	Συζυγείς οριακές συνθήκες στη διεπιφάνεια FSI	49
3.8	Συζυγείς οριακές συνθήκες στα όρια του χωρίου του στερεού S_S	53
3.8.1	Συζυγείς οριακές συνθήκες στο $S_{S,W}$	53
3.8.2	Συζυγείς οριακές συνθήκες στο $S_{S,B}$	54
3.9	Τελική έκφραση της παραγωγών ευαισθησίας	55

4	Επίλυση του ευθέως προβλήματος - συγκρίσεις	57
4.1	Γεωμετρία και σταθερές ροής	57
4.2	Σύγκριση τιμών αντικειμενικής συνάρτησης για διαφορετικές τιμές της μεταβλητής σχεδιασμού	59
4.3	Έλεγχος οριακών συνθηκών στη διεπιφάνεια	63
5	Βελτιστοποίηση στο Συζευγμένο Πρόβλημα Μεταφοράς Θερμότητας	65
5.1	Αγόριθμος Βελτιστοποίησης	66
5.2	Αποτελέσματα Βελτιστοποίησης	68
6	Ανακεφαλαίωση - Συμπεράσματα	75
7	Παράρτημα:	
	Επίλυση προβλήματος για δεδομένο ρεύμα θερμότητας	77
7.1	Το πρόβλημα	77
7.2	Αποτελέσματα	79

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

1.1 Η σημασία του συζευγμένο προβλήματος μεταφοράς θερμότητας

Ο όρος 'συζευγμένο πρόβλημα' (conjugate problem) χρησιμοποιήθηκε για πρώτη φορά από μία ερευνητική ομάδα υπό τον ακαδημαϊκό A. V. Luikov [21] στην ΕΣΣΔ, τη δεκαετία του 60, τότε που άρχισαν να διερευνώνται προβλήματα μεταφοράς θερμότητας ως συζευγμένα προβλήματα. Με τον όρο συζευγμένο πρόβλημα εννοείται πως συνυπάρχουν ρευστό με στερεό, όπου το ρευστό ρέει γύρω ή μέσα στα τοιχώματα του στερεού. Την ίδια εποχή με τον A. V. Luikov, πολλοί άλλοι ερευνητές όπως ο T. L. Perelman [22] άρχισαν να λύνουν απλά προβλήματα χρησιμοποιώντας διαφορετικές μεθόδους, αλλά ενώνοντας τις λύσεις για τη ροή και το στερεό στη διεπιφάνειά τους. Δηλαδή, αντιμετωπίζοντας τα προβλήματα αυτά ως συζευγμένα.

Από τη δεκαετία του 60 έως και έκτοτε, οι μέθοδοι επίλυσης του προβλήματος συζευγμένης μεταφοράς θερμότητας έχουν εδραιωθεί ως πολύτιμα εργαλεία επίλυσης με ευρύ φάσμα εφαρμογών. Τέτοιες εφαρμογές απαντώνται στον τομέα της αεροδιαστημικής, της πυρηνικής τεχνολογίας, στη βιομηχανία των τροφίμων και τη μετεωρολογία. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η εφαρμογή τέτοιων μεθόδων για τη διερεύνηση προβλημάτων ψύξης σε ηλεκτρικές μπαταρίες υψηλής ισχύος, των οποίων η χρήση γίνεται ολοένα και πιο διαδεδομένη.

Ίσως η πιο διαδεδομένη και σημαντικότερη χρήση τέτοιων ηλεκτρικών μπαταριών υψηλής ισχύος είναι στα υβριδικά και ηλεκτρικά αυτοκίνητα. Τις δύο τελευταίες δεκαετίες παρατηρείται μία στροφή της ατοκινητοβιομηχανίας προς υβριδικά και ηλεκτρικά αυτοκίνητα, λόγω της αυξανόμενης ζήτησης τέτοιων αυτοκινήτων. Ενδεικτικό αυτής της τάσης είναι το γεγονός, ότι κατά το πρώτο τέταρτο του 2012, οι πωλήσεις αυτοκινήτων της οικογένειας Prius της Toyota, ανέβηκαν στην τρίτη θέση ως προς τις πωλήσεις (247.230 πωλήσεις) ακολου-

θώντας τα Toyota Corolla (300.800 πωλήσεις) και Ford Focus (277.000 πωλήσεις). Ακόμη, το Tesla Model S της εταιρίας Tesla η οποία παράγει αμιγώς ηλεκτρικά αυτοκίνητα ήταν το πρώτο σε πωλήσεις αυτοκίνητο πολυτελείας το 2013, στις ΗΠΑ με 18.000 πωλήσεις. Άλλες εταιρίες οι οποίες παράγουν υβριδικά ή ηλεκτρικά αυτοκίνητα είναι η Volkswagen (L1), η Chevrolet (Chevrolet Volt), Nissan (Nissan Leaf).

Οι βασικοί λόγοι προτίμησης τέτοιων αυτοκινήτων είναι τα οικολογικά τους πλεονεκτήματα (χαμηλές εκπομπές CO_2) και η χαμηλή κατανάλωση, όπως φαίνεται στον πίνακα 1.1.

Πίνακας 1.1: Σύγκριση κατανάλωσης συμβατικών-υβριδικών αυτοκινήτων.[23]

Υβριδικό αυτοκίνητο	Honda Civic Hybrid	Toyota Prius	-
Miles per Gallon	50	55	-
Συμβατικό αυτοκίνητο	Ford Focus	Ford Fiesta	Toyota Corolla
Miles per Gallon	28	33	30

Τα πλεονεκτήματα αυτά οφείλονται κατά κύριο λόγο στη χρήση ηλεκτρικών μπαταριών ιόντων λιθίου (Li-ion). Όμως, κατά την αποφόρτιση τους οι μπαταρίες ιόντων λιθίου παράγουν θερμότητα κυρίως λόγω του φαινομένου Joule. Αυτή η έκλυση θερμότητας μπορεί να έχει αρνητικές επιπτώσεις στη ζωή των μπαταριών ή και να προκαλέσει ατυχήματα εξαιτίας της υπερθέρμανσης, όπως στο γνωστό περιστατικό της πυρκαγιάς που ξέσπασε στις μπαταρίες ενός Boeing 787 τον Ιανουάριο του 2013. Συνεπώς, είναι πολύ σημαντικό να λαμβάνεται υπόψη η παραγωγή θερμότητας από τις ηλεκτρικές μπαταρίες κατά το σχεδιασμό τους.

Η παρούσα διπλωματική υλοποιήθηκε έχοντας υπόψη τα παραπάνω. Δηλαδή, μέσω της βελτιστοποίησης μορφής (shape optimization) αναζητήθηκε η μορφή εκείνη την οποία πρέπει να έχει ο χώρος μέσα στον οποίο θα μπει ένα στερεό, που αντιπροσωπεύει μία ηλεκτρική μπαταρία, ώστε να ψύχεται βέλτιστα. Σαφέστατα όμως μεγαλύτερη σημασία δόθηκε όχι στην ακριβή μοντελοποίηση του παραπάνω προβλήματος ως προβλήματος συζευγμένης μεταφοράς θερμότητας, αλλά στην αριθμητική επίλυση του προβλήματος, τον προγραμματισμό αυτής στο ανοιχτό λογισμικό OpenFOAM και στον υπολογισμό της, αναγκαίας για τη βελτιστοποίηση, παραγωγού ευαισθησίας μέσω της συνεχούς συζυγούς μεθόδου (continuous adjoint method).

1.2 Συζυγείς μέθοδοι

Οι συζυγείς μέθοδοι (adjoint methods [1]) πρωτοξεκίνησαν από τη θεωρία ελέγχου και χρησιμοποιούνται ως μέθοδος βελτιστοποίησης, σε συνδυασμό με τεχνικές ανόδου ή καθόδου, σε φυσικά προβλήματα που περιγράφονται από συστήματα μερικών διαφορικών εξισώσεων (εξισώσεις κατάστασης). Ένα τέτοιο παράδειγμα αποτελούν οι εξισώσεις Navier Stokes. Συγκεκριμένα, οι συζυγείς μέθοδοι υπολογίζουν τις παραγώγους ευαισθησίας (sensitivity derivatives) της αντικειμενικής συνάρτησης (ή συνάρτησης στόχου) ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού και χρησιμοποιούνται σε αιτιοκρατικές μεθόδους βελτιστοποίησης βασισμένες στην κλίση της συνάρτησης στόχου (gradient based optimization methods).

Ένα παράδειγμα χρήσης των συζυγών μεθόδων στην αεροδυναμική είναι η εύρεση της βέλτιστης θέσης των σημείων ελέγχου της καμπύλης μίας αεροτομής που παραμετροποιείται με πολυώνυμα Bezier - Bernstein, όταν η συνάρτηση στόχος είναι η μείωση της οπισθέλκουσας σε προκαθορισμένες συνθήκες ροής. Δηλαδή, με χρήση των συζυγών μεθόδων υπολογίζονται οι παράγωγοι ευαισθησίας οι οποίες μεταβάλλουν τα σημεία ελέγχου κατά τρόπο ώστε να μειωθεί η οπισθέλκουσα, ενώ αν η όλη διαδικασία ενταχθεί σε μια διαδικασία βελτιστοποίησης τότε θα προσδιοριστεί η θέση των σημείων ελέγχου που δίνει καμπύλη αεροτομής με ελάχιστη οπισθέλκουσα (βέλτιστη λύση).

Οι συζυγείς μέθοδοι χωρίζονται σε δύο κατηγορίες: τις συνεχείς (continuous [1]) και τις διακριτές (discrete [1]). Στη διακριτή μέθοδο, πρώτα γραμμικοποιούνται (αν είναι μη-γραμμικές) και διακριτοποιούνται η αντικειμενική συνάρτηση και οι εξισώσεις ροής και, στη συνέχεια, παράγεται η προς επίλυση συζυγής εξίσωση από τις διακριτοποιημένες εξισώσεις της ροής. Η τελευταία προκύπτει σε μητρική γραφή και είναι έτοιμη για αριθμητική επίλυση. Αντίθετα, στη συνεχή συζυγή μέθοδο, η μαθηματική διατύπωση των συζυγών εξισώσεων γίνεται χρησιμοποιώντας τις συνεχείς εξισώσεις της ροής πριν αυτές διακριτοποιηθούν για να λυθούν αριθμητικά. Η συνάρτηση κόστους επαυξάνεται με την προσθήκη σε αυτή των εξισώσεων της ροής πολλαπλασιασμένων με τις συζυγείς μεταβλητές και με χρήση του θεωρήματος της απόκλισης (Green - Gauss), εξάγονται οι συνεχείς συζυγείς εξισώσεις, οι οριακές συνθήκες και η έκφραση για τις παραγώγους ευαισθησίας. Η διακριτοποίηση των συζυγών εξισώσεων γίνεται σε δεύτερο στάδιο προκειμένου να λυθούν αριθμητικά.

Το μεγάλο πλεονέκτημα των συζυγών μεθόδων σε σχέση με τις στοχαστικές μεθόδους βελτιστοποίησης, είναι ότι το υπολογιστικό κόστος υπολογισμού των παραγώγων της αντικειμενικής συνάρτησης ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού είναι ανεξάρτητο του πλήθους αυτών. Ενδεικτικά, για τον υπολογισμό των παραγώγων της αντικειμενικής συνάρτησης απαιτούνται δύο επιλύσεις, μία των εξισώσεων κατάστασης και μία των συζυγών τους εξισώσεων. Επίσης, το

κόστος επίλυσης του συζυγούς προβλήματος είναι περίπου ίσο με το κόστος επίλυσης του ευθέως προβλήματος ενώ η αριθμητική επίλυση των συζυγών εξισώσεων μπορεί να βασιστεί στα υπολογιστικά εργαλεία επίλυσης του ευθέως προβλήματος (ίδιοι αλγόριθμοι και λογισμικά επίλυσης), λόγω της παρόμοιας μορφής των μερικών διαφορικών εξισώσεων του προβλήματος.

Από την άλλη, οι συζυγείς μέθοδοι έχουν το μειονέκτημα της ανάγκης επαναδιατύπωσης των εξισώσεων και των οριακών συνθηκών αλλά και μερικού επαναπρογραμματισμού του λογισμικού, όταν η αντικειμενική συνάρτηση αλλάζει. Αυτό δεν συμβαίνει σε στοχαστικές μεθόδους βελτιστοποίησης, όπως οι εξελικτικοί αλγόριθμοι. Επίσης, η χρήση των συζυγών μεθόδων δεν είναι εφικτή για κάθε στόχο και, ως αιτιοκρατική μέθοδος βελτιστοποίησης μπορεί να παγιδευτεί σε τοπικό ακρότατο.

Μία από τις βασικές ερευνητικές δραστηριότητες της Μονάδας Παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής & Βελτιστοποίησης (ΜΠΥΡ&Β) του Εργαστηρίου Θερμικών Στροβιλομηχανών είναι ανάπτυξη συζυγών τεχνικών.

Κάποιες από τις πρώτες ερευνητικές προσπάθειες σε αυτόν τον τομέα αποτελούν οι εργασίες [5], [7], [8]. Αυτές, ασχολούνται κυρίως με θέματα που αφορούν στη συνεχή συζυγή μέθοδο και την εφαρμογή της σε προβλήματα όπως η ανάλυση και ο σχεδιασμός στροβιλομηχανών. Σε πρώτο στάδιο η διατύπωση των συζυγών εξισώσεων βασιζόταν στην ευρύτατα χρησιμοποιούμενη παραδοχή ότι οι μεταβλητές του μοντέλου τύρβης ήταν ανεξάρτητες των μεταβλητών σχεδιασμού ('frozen turbulence'). Αργότερα στις εργασίες [9], [10], [11] η συνεχής συζυγής μέθοδος επεκτάθηκε και πέραν αυτών των διατυπώσεων ώστε να μην λαμβάνεται υπόψη η παραδοχή της 'παγωμένης τύρβης' με διατυπώσεις των συζυγών εξισώσεων και για το μοντέλο τύρβης Spalart - Allmaras. Σε βάθος χρόνου η συζυγής μέθοδος έχει εφαρμοστεί σε πληθώρα προβλημάτων όπως σε προβλήματα βελτιστοποίησης μορφής ([2], [4]), τοπολογίας ([3], [4]), ενεργητικού ελέγχου ροής με δέσμες ρευστού ([9], [15]) και εύρωστου σχεδιασμού ([4]).

1.3 Δομή της εργασιάς

Η παρούσα διπλωματική εργασία δομείται ως εξής:

- Στο κεφάλαιο 2 ορίζεται η έννοια του προβλήματος συζευγμένης μεταφοράς θερμότητας. Ακόμη, αναλύονται οι εξισώσεις κατάστασης που διέπουν το πρόβλημα. Αναλύεται η αριθμητική επίλυση των εξισώσεων κατάστασης στη ροή και στο στερεό, όπως αυτή υλοποιείται στο ανοιχτό λογισμικό OpenFOAM.
- Στο κεφάλαιο 3 αναλύεται η μέθοδος της συνεχούς συζυγούς μεθόδου. Συγκεκριμένα, παρουσιάζεται η διαδικασία υπολογισμού των παραγώγων ευαισθησίας. Ακόμη, ορίζεται η αντικειμενική συνάρτηση η οποία εκφράζει το στόχο της βελτιστοποίησης.
- Στο κεφάλαιο 4 αναφέρονται οι συγκεκριμένες τιμές των σταθερών (σταθερές μετάδοσης θερμότητας, ταχύτητα και θερμοκρασία στην είσοδο του ρευστού κτλ) που χρησιμοποιήθηκαν. Γίνεται σύγκριση αποτελεσμάτων της επίλυσης του ευθέος προβλήματος για διάφορες τιμές της μεταβλητής σχεδιασμού. Τέλος, ελέγχεται με αριθμητικές μεθόδους εάν οι οριακές συνθήκες - όπως έχουν ορισθεί - ισχύουν στην τελική λύση.
- Στο κεφάλαιο 5 παρουσιάζονται τα τελικά αποτελέσματα της βελτιστοποίησης του προβλήματος συζευγμένης μεταφοράς θερμότητας καθώς και ο αλγόριθμος βελτιστοποίησης.
- Στο κεφάλαιο 6 συνοψίζονται τα συμπεράσματα.

Κεφάλαιο 2

Το πρωτεύον πρόβλημα και η αριθμητική του επίλυση

2.1 Εξισώσεις ροής και Επίλυση

2.1.1 Εξισώσεις ροής

Οι εξισώσεις κατάστασης που χρησιμοποιούνται για την περιγραφή της ροής είναι οι $2\Delta/3\Delta$ εξισώσεις Navier-Stokes. Η ροή είναι ασυμπίεστη, μόνιμη και στρωτή.

Οι εξισώσεις ροής γράφονται

$$R^p = -\frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0 \quad (2.1\alpha')$$

$$R_i^v = v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right] + \frac{\partial p}{\partial x_k} = 0, i = 1, 2, 3 \quad (2.1\beta')$$

$$R_F^T = c_p v_j \frac{\partial T}{\partial x_j} + v_j v_k \frac{\partial v_k}{\partial x_j} - c_p \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\nu}{Pr} \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) = 0 \quad (2.1\gamma')$$

όπου

c_p : η ειδική θερμοχωρητικότητα

v_i : οι καρτεσιανές συνιστώσες της ταχύτητας

ν : η κινηματική συνεκτικότητα

p : η στατική πίεση

T : η θερμοκρασία

Pr : ο αριθμός Prandtl

Η εξίσωση 2.1α' είναι η εξίσωση συνέχειας, η 2.1β' η εξίσωση ορμής και η 2.1γ' είναι η εξίσωση ενέργειας της ροής. Οι εξισώσεις κατάστασης επιλύο-

νται στο λογισμικό OpenFOAM[®] σύμφωνα με τον αλγόριθμο SIMPLE , όπως περιγράφεται σε επόμενη ενότητα.

Επίσης, για να αιτιολογηθεί ο χαρακτηρισμός της ροής ως στρωτής θα χρησιμοποιηθεί ο αριθμός Reynolds. Στη στρωτή ροή τα σωματίδια του ρευστού κινούνται κατά μήκος παραλλήλων τροχιών σε στρώματα. Τα μεγέθη των ταχυτήτων γειτονικών στρωμάτων δεν είναι ίσα ενώ οι διατμητικές δυνάμεις υπερισχύουν. Ο αριθμός Reynolds είναι ένα αδιάστατο μέγεθος που ισούται με το λόγο των δυνάμεων αδρανείας ως προς τις δυνάμεις της διάτμησης.

Στο πλαίσιο της παρούσας διπλωματικής εργασίας θα γίνει μελέτη της ροής εντός σωλήνων. Για σωλήνες ο τύπος ορισμού του αριθμού Reynolds είναι:

$$Re = \frac{\rho v D_H}{\mu} = \frac{v D_H}{\nu} \quad (2.2)$$

και

$$D_H = \frac{4A}{P}$$

όπου

- Re : ο αριθμός Reynolds
- D_H : η υδραυλική διάμετρος
- v : η μέση ταχύτητα
- ν : η κινηματική συνεκτικότητα
- μ : η δυναμική συνεκτικότητα
- A : η διατομή του αγωγού
- P : η βρεχόμενη περίμετρος του αγωγού

2.1.2 Διακριτοποίηση και Αριθμητική Επίλυση στο OpenFOAM®

Για την επίλυση του Συζευγμένου Πρόβληματος Μεταφοράς Θερμότητας χρησιμοποιήθηκε ο επιλύτης `chtMultiRegionSimpleFoam` του λογισμικού OpenFOAM® (Open Field Operation and Manipulation). Το OpenFOAM® είναι ένα ελεύθερο λογισμικό ανοιχτού κώδικα το οποίο δημιουργήθηκε για να λύνει προβλήματα Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής (Computational Fluid Dynamics). Το OpenFOAM® χρησιμοποιείται σε ένα μεγάλο εύρος προβλημάτων μηχανικών, σε εμπορικό αλλά και ακαδημαϊκό επίπεδο.

Το OpenFOAM® διαθέτει κάποια σημαντικά πλεονεκτήματα. Ένα πολύ σημαντικό πλεονέκτημα είναι πως αυτό διατίθεται δωρεάν. Ακόμη, επειδή είναι λογισμικό ανοιχτού κώδικα, ο εκάστοτε χρήστης μπορεί να μετατρέψει τον κώδικα του λογισμικού, ώστε να ικανοποιεί τις δικές του ανάγκες. Μέσα στο OpenFOAM® περιλαμβάνεται ένα μεγάλο εύρος από επιλύτες, από τον τομέα της Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής έως και τον τομέα του Ηλεκτρομαγνητισμού καθώς και μία πληθώρα άλλων εργαλείων όπως πλεγματοποιητές. Όλος ο κώδικας του είναι γραμμένος στη γλώσσα προγραμματισμού `C++`. Αυτό σε συνδυασμό με τις πληροφορίες που μπορεί να αντλήσει από το διαδίκτυο και συγκεκριμένα τα OpenFOAM® User's Guide, OpenFOAM® Programmer's Guide και το OpenFOAM® online documentation δίνουν στον χρήστη τη δυνατότητα να κατανοήσει διάφορες λειτουργίες του λογισμικού. Επίσης, το OpenFOAM® περιλαμβάνει εργαλεία τα οποία δίνουν τη δυνατότητα παράλληλης επεξεργασίας σε πολλούς επεξεργαστές, κάτι εξαιρετικά σημαντικό για την ταχεία επίλυση προβλημάτων. Τέλος, ένα ακόμα σημαντικό πλεονέκτημα του λογισμικού είναι πως ο χρήστης αρκεί να προγραμματίσει απευθείας τις εξισώσεις που θέλει να επιλυθούν και να διαλέξει έναν τύπο διακριτοποίησης τους από ένα σύνολο διαθέσιμων σχημάτων, χωρίς να αναγκασθεί να προγραμματίσει το σχήμα διακριτοποίησης.

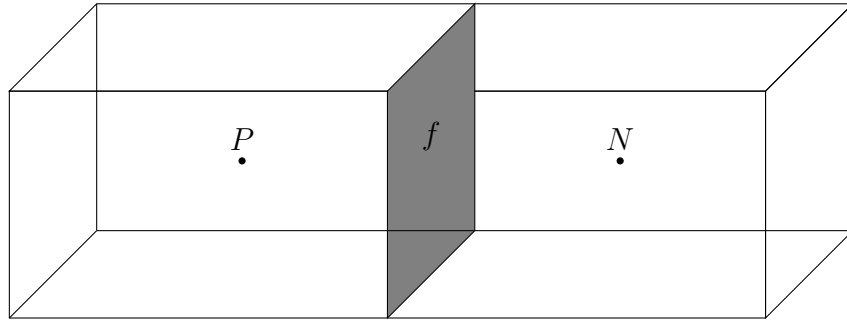
Στο λογισμικό αυτό χρησιμοποιείται η μέθοδος των πεπερασμένων όγκων η οποία ανάγει την επίλυση των συνεχών εξισώσεων κατάστασης που περιγράφουν ένα πρόβλημα στην επίλυση ενός συνόλου αλγεβρικών εξισώσεων μέσω της διακριτοποίησης. Έτσι, στη μέθοδο των πεπερασμένων όγκων, οι τιμές των μεταβλητών ροής υπολογίζονται σε συγκεκριμένα σημεία, λ.χ. στους κόμβους ή στα κέντρα των κελιών, όγκων ελέγχου το σύνολο των οποίων αποτελεί το διακριτοποιημένο υπολογιστικό χωρίο. Η μέθοδος αυτή εφαρμόζεται εύκολα και σε μη-δομημένα πλέγματα παρότι στην παρούσα εργασία θα μελετηθούν μόνο δομημένα πλέγματα.

Στις εξισώσεις κατάστασης της ροής δεν περιλαμβάνεται κάποια ρητή εξίσωση για τον υπολογισμό της πίεσης. Ο αλγόριθμος SIMPLE δημιουργεί μία ρητή εξίσωση για την πίεση μέσω της 'μερικής' διακριτοποίησης της εξίσωσης της ορμής (εξίσωση 2.1β') και αντικατάστασής της σε αυτήν της συνέχειας (εξίσωση 2.1α'). Αφού επιλυθούν οι εξισώσεις 2.1α' και 2.1β', ακολουθεί η επίλυση της εξίσωσης ενέργειας (εξίσωση 2.1γ') η οποία γίνεται ξεχωριστά. Η εξίσωση της ορμής ξαναγράφεται

$$a_P \vec{v}_P = H(\vec{v}) - \nabla p \Rightarrow \vec{v}_P = \frac{H(\vec{v})}{a_P} - \frac{\nabla p}{a_P} \quad (2.3)$$

$$H(\vec{v}) = - \sum_N a_N \vec{v}_N \quad (2.4)$$

όπου με \vec{v}_P , \vec{v}_N συμβολίζονται οι ταχύτητες στο κέντρο του υπό εξέταση κελιού (όγκος αναφοράς) και στα κέντρα των γειτονικών του κελιών, αντίστοιχα. Με a_P , a_N συμβολίζονται οι βαθμωτοί συντελεστές των ταχυτήτων στον κεντρικό κόμβο οι οποίοι υπολογίζονται συναρτήσει της ταχύτητας.



Σχήμα 2.1: Κελί με κέντρο το P και γειτονικό κελί με κέντρο το N . Η επιφάνεια f (γκρι χρώμα) ανήκει και στα δύο κελιά.

Η εξίσωση της συνέχειας για ασυμπίεστο ρευστό διακριτοποιείται ως εξής:

$$\nabla \cdot \vec{v} = \sum_f \vec{S}_f \vec{v}_f = 0 \quad (2.5)$$

όπου S_f είναι το κάθετο διάνυσμα στην κοινή επιφάνεια f των γειτονικών κελιών P και N , με μέτρο ίσο με το εμβαδό της επιφάνειας f και φορά από το σημείο P προς το σημείο N και \vec{v}_f είναι η ταχύτητα πάνω στην επιφάνεια f η οποία προκύπτει με παρεμβολή μεταξύ των δύο σημείων.

Η εξίσωση 2.3 ξαναγράφεται

$$\vec{v}_P = \frac{H(\vec{v})}{a_P} - \frac{1}{a_P} \nabla p \quad (2.6)$$

Η εξίσωση 2.6 με παρεμβολή στις επιφάνειες των κελιών παίρνει τη μορφή:

$$\vec{v}_f = \left(\frac{H(\vec{v})}{a_P} \right)_f - \frac{(\nabla p)_f}{(a_P)_f} \quad (2.7)$$

Αντικαθιστώντας την εξίσωση 2.7 στην 2.5 προκύπτει η τελική μορφή της εξίσωσης πίεσης:

$$\nabla \cdot \left(\frac{\nabla p}{a_P} \right) = \nabla \cdot \left(\frac{H(\vec{v})}{a_P} \right) = \sum_f \vec{S}_f \left(\frac{H(\vec{v})}{a_P} \right)_f \quad (2.8)$$

Η παροχή όγκου από την επιφάνεια f ορίζεται χρησιμοποιώντας την εξίσωση 2.7 ως εξής:

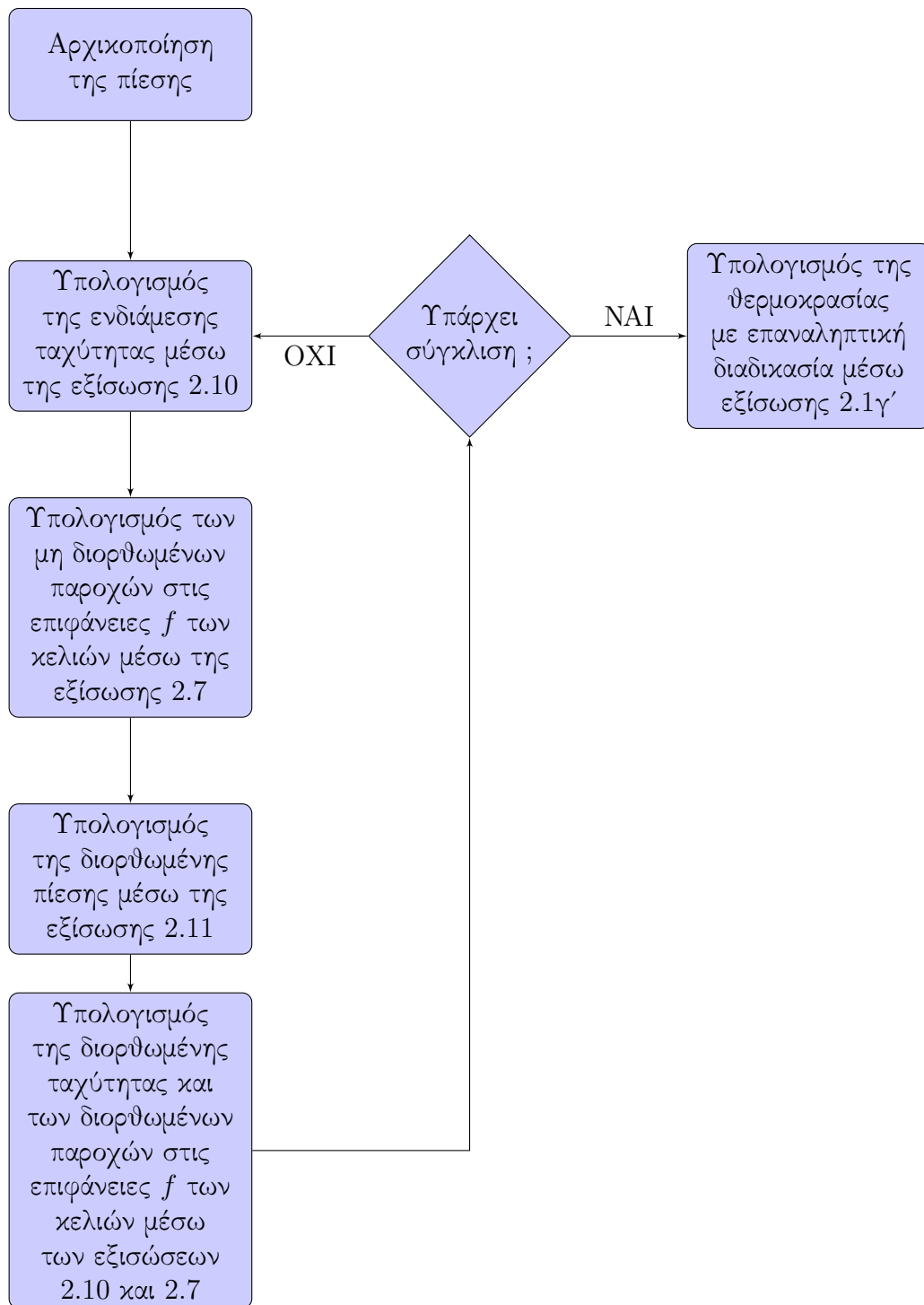
$$\phi = \vec{v}_f \vec{S} = S \left[\left(\frac{H(\vec{v})}{a_P} \right)_f - \frac{(\nabla p)_f}{(a_P)_f} \right] \quad (2.9)$$

Συνεπώς, η επίλυση των εξισώσεων 2.1α' για τον υπολογισμό της πίεσης και της ταχύτητας ανάγεται στο εξής σύστημα

$$\vec{v}_P = \frac{H(\vec{v})}{a_P} - \frac{1}{a_P} \nabla p \quad (2.10)$$

$$\sum_f \vec{S} \left(\frac{\nabla p}{a_P} \right)_f = \sum_f \vec{S} \left(\frac{H(\vec{v})}{a_P} \right)_f \quad (2.11)$$

Η επίλυση του συστήματος των εξισώσεων 2.10, 2.11 γίνεται σύμφωνα με τον αλγόριθμο του σχήματος 2.2.



Σχήμα 2.2: Αλγόριθμος επίλυσης των εξισώσεων κατάστασης ροής

Στο λογισμικό OpenFOAM[®], οι τιμές των ροϊκών μεταβλητών (στατική πίεση, ταχύτητα, θερμοκρασία) αποθηκεύονται στον κεντρικό κόμβο του κάθε όγκου αναφοράς (co-located grid).[18] Ο κεντρικός κόμβος αυτός είναι το βαρύκεντρο του όγκου αναφοράς.

Για την επίλυση των εξισώσεων ροής είναι αναγκαίο να γίνει διακριτοποίησή τους. Έτσι, οι διαφορικές εξισώσεις μετατρέπονται σε εξισώσεις πεπερασμένων όγκων, σε κεντροκυβελική διατύπωση όπως αναφέρθηκε παραπάνω. Τα πλέγματα τα οποία χρησιμοποιούνται σε αυτή τη μελέτη είναι δομημένα αν και οι μέθοδοι που αναπτύχθηκαν και εφαρμόζονται στο λογισμικό OpenFOAM[®] χειρίζονται και μη-δομημένα πλέγματα. Ο πλεγματοποιητής που χρησιμοποιήθηκε είναι ο blockMesh ο οποίος είναι ένα εργαλείο του OpenFOAM[®] και δημιουργεί πλέγματα τα οποία αποτελούνται από εξάεδρα.

Στον πίνακα 2.1 αναφέρονται τα σχήματα διακριτοποίησης τα οποία χρησιμοποιούνται.

Πίνακας 2.1: Συνοπτική παρουσίαση των σχημάτων διακριτοποίησης όπως αυτά αναφέρονται στο λογισμικό OpenFOAM[®]

Όρος	Σχήμα διακριτοποίησης	Περιγραφή
Μεταφοράς	Gauss upwind	Πρώτης τάξης
Διάχυσης	Gauss linear	Δεύτερης τάξης

Για τον υπολογισμό των όρων μεταφοράς και διάχυσης ακολουθείται μία διαδικασία παρόμοια με αυτήν που αναφέρθηκε παραπάνω, στον αλγόριθμο SIMPLE. Ο όρος μεταφοράς ολοκληρώνεται στον όγκο ελέγχου, μετασχηματίζεται με τη βοήθεια του θεωρήματος Gauss-Green και διακριτοποιείται ως εξής:

$$\int_{\Omega} \nabla (v\phi) d\Omega = \int_S d\vec{S} (v\phi) = \sum_f \vec{S}_f v_f \phi_f = \sum_f F \phi_f \quad (2.12)$$

όπου η τιμή του ϕ_f υπολογίζεται σύμφωνα με το σχήμα Upwind ως εξής

$$\phi_f = \begin{cases} \phi_P & \text{για } F \geq 0 \\ \phi_N & \text{για } F < 0 \end{cases} \quad (2.13)$$

Στην εξίσωση 2.13, ϕ_P και ϕ_N είναι οι τιμές του ϕ στους κόμβους P και N σύμφωνα με το σχήμα 2.1. Για τον όρο διάχυσης γράφεται

$$\int_{\Omega} \nabla (\Gamma \nabla \phi) d\Omega = \int_S d\vec{S} (\Gamma \nabla \phi) = \sum_f \vec{S}_f \Gamma_f (\nabla \phi)_f \quad (2.14)$$

Για τον υπολογισμό του $(\nabla\phi)_f$ σε ορθογωνικά πλέγματα ισχύει

$$\vec{S}_f (\nabla\phi)_f = |\vec{S}_f| \frac{\phi_N - \phi_P}{|\vec{d}|} \quad (2.15)$$

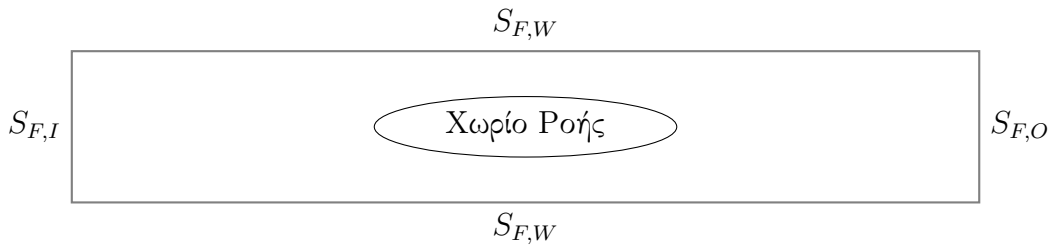
$|\vec{d}|$ το μέτρο του διανύσματος με αρχή τον κόμβο P και πέρας τον κόμβο N . Στην περίπτωση μη-ορθογωνικού πλέγματος προστίθεται ένας ακόμα όρος στο δεξί μέρος της εξίσωσης 2.15 αφού τα διανύσματα \vec{S}_f και \vec{d} δεν είναι παράλληλα.

Για την επίλυση των εξισώσεων κατάστασης απαιτείται να ορισθούν συνθήκες στο όριο του χωρίου της ροής. Το όριο του χωρίου της ροής S_F (Fluid) αποτελείται από την είσοδο του ρευστού $S_{F,I}$ (Fluid Inlet), την έξοδο του $S_{F,O}$ (Fluid Outlet) και το στερεό τοίχωμα $S_{F,W}$ (Wall) όπως φαίνεται στο σχήμα 2.3. Σημειώνεται ότι, για την επίλυση της ροής, θεωρείται ότι το ρευστό εισέρχεται με δεδομένη ταχύτητα από το $S_{F,I}$. Στο $S_{F,W}$ η ταχύτητα είναι μηδενική σύμφωνα με τη συνθήκη μη-ολίσθησης και επιβάλλονται αδιαβατικές συνθήκες.

Πίνακας 2.2: Συνοπτική παρουσίαση των οριακών συνθηκών της ροής

Όριο	p	v_i	T
$S_{F,I}$	zero Neumann	Dirichlet	Dirichlet
$S_{F,O}$	Dirichlet	zero Neumann	zero Neumann
$S_{F,W}$	zero Neumann	Dirichlet	zero Neumann

Με τον όρο zero Neumann νοείται πως η κάθετη παράγωγος του συγκεκριμένου μεγέθους τίθεται ίση με μηδέν στο συγκεκριμένο όριο. Με τον όρο Dirichlet νοείται πως η τιμή του μεγέθους ορίζεται στο συγκεκριμένο όριο.



Σχήμα 2.3: Απεικόνιση της γεωμετρίας του χωρίου της ροής

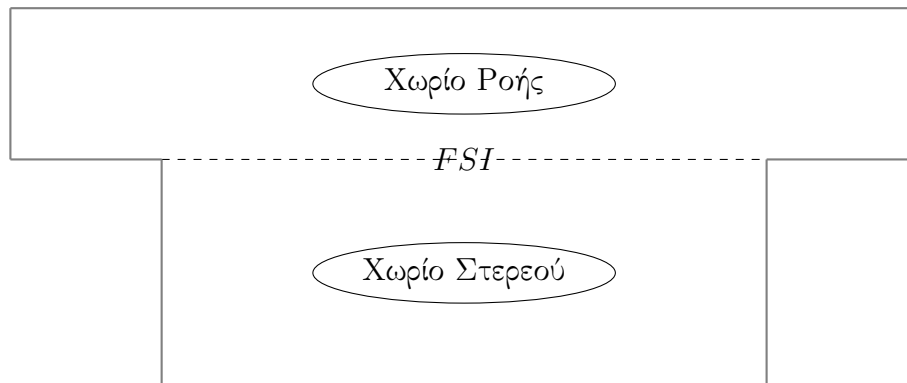
Πίνακας 2.3: Συνοπτική παρουσίαση των επιλυτών που χρησιμοποιούνται για κάθε μεταβλητή

Μεταβλητή	Επιλύτης	Περιγραφή
p	GAMG	Γενικευμένος Πολυπλεγματικός Αλγόριθμος
v_i	PBiCG	Αλγόριθμος που χρησιμοποιεί τη Μέθοδο Δισυζυγών Κλίσεων για μη-συμμετρικούς πίνακες
T	PBiCG	--

Η επίλυση των εξισώσεων 2.1α', 2.1β', 2.1γ' γίνεται στο OpenFOAM[®] χρησιμοποιώντας τους επιλύτες που παρουσιάζονται στον πίνακα 2.3. Η επίλυση των εξισώσεων κατάστασης της ροής γίνεται παράλληλα. Για αυτό παράλληλα απαιτείται προεργασία κατά την οποία το χωρίο της ροής χωρίζεται σε υποχωρία. Στη συνέχεια, οι εξισώσεις επιλύονται σε κάθε υποχωρίο από έναν ξεχωριστό επεξεργαστή. Ο χωρισμός σε υποχωρία γίνεται με το εργαλείο decomposePar του OpenFOAM[®]. Η μέθοδος με την οποία γίνεται ο χωρισμός είναι η simple. Για να υλοποιηθεί η simple αρκεί να ορισθεί ένα διάνυσμα στο αρχείο decomposeParDict, όπου κάθε διάσταση(x, y, z) του διανύσματος αυτού ορίζει τον αριθμό των υποχωρίων σε αυτή τη διάσταση. Μετά το πέρας της επίλυσης, οι λύσεις των υποχωρίων συνενώνονται σε μία λύση με το εργαλείο reconstructPar.

2.2 Συζευγμένο Πρόβλημα Μεταφοράς Θερμότητας

Η παρούσα ενότητα ασχολείται με το Συζευγμένο Πρόβλημα Μεταφοράς Θερμότητας (Conjugate Heat Transfer Problem). Ο όρος Συζευγμένο Πρόβλημα Μεταφοράς Θερμότητας χρησιμοποιείται για να περιγράψει τη συναλλαγή θερμότητας μεταξύ στερεού και ρευστού, όπου το ρευστό ρέει γύρω ή μέσα στα τοιχώματα του στερεού. Στο χωρίο της ροής η μεταφορά θερμότητας γίνεται κυρίως λόγω συναγωγής ενώ στο χωρίο του στερεού λόγω αγωγής. Η συναλλαγή θερμότητας μεταξύ στερεού και ρευστού λαμβάνει χώρα μέσω της διεπιφάνειας ρευστού/στερεού, δηλαδή της επιφάνειας όπου έρχονται σε επαφή το ρευστό με το στερεό. Οι εξισώσεις οι οποίες περιγράφουν τη ροή και το στερεό λύνονται ξεχωριστά και, κατόπιν, γίνεται η σύζευξη των δύο λύσεων, ώστε να υπολογιστεί η κατανομή της θερμοκρασίας στη διεπιφάνεια. Η διαδικασία αυτή επαναλαμβάνεται μέχρι σύγκλισης. Στη συνέχεια, αναλύονται οι εξισώσεις και οι οριακές συνθήκες που περιγράφουν το φαινόμενο καθώς και οι μέθοδοι αριθμητικής επίλυσης που χρησιμοποιούνται στη μελέτη.



Σχήμα 2.4: Απεικόνιση της γεωμετρίας του Συζευγμένου Προβλήματος Μεταφοράς Θερμότητας. Η διεπιφάνεια(FSI) παριστάται με διακεκομμένη γραμμή.

Η εξίσωση κατάστασης για το στερεό γράφεται

$$R_S^T = -\frac{\partial}{\partial x_j} \left(k^S \frac{\partial T^S}{\partial x_j} \right) = 0 \quad (2.16)$$

όπου k^S είναι η θερμική αγωγιμότητα του στερεού.

Οι εξισώσεις κατάστασης για το Συζευγμένο Πρόβλημα Μεταφοράς Θερμότητας γράφονται

$$R^p = -\frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0 \quad (2.17\alpha')$$

$$R_i^v = v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right] + \frac{\partial p}{\partial x_k} = 0 \quad (2.17\beta')$$

$$R_F^T = c_p v_j \frac{\partial T^F}{\partial x_j} + v_j v_k \frac{\partial v_k}{\partial x_j} - c_p \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\nu}{Pr} \frac{\partial T^F}{\partial x_j} \right) = 0 \quad (2.17\gamma')$$

$$R_S^T = -\frac{\partial}{\partial x_j} \left(k^S \frac{\partial T^S}{\partial x_j} \right) = 0 \quad (2.17\delta')$$

Οι εξισώσεις 2.17α', 2.17β', 2.17γ' λύνονται όπως προαναφέρθηκε. Η επίλυση της εξίσωσης 2.17δ' γίνεται με το σχήμα Gauss linear που χρησιμοποιείται για όρους διάχυσης και αναπτύχθηκε στις εξισώσεις 2.14 και 2.15. Ο επιλύτης που χρησιμοποιήθηκε είναι ο PBiCG ο οποίος επιλέχθηκε και για την επίλυση της εξίσωσης 2.17γ'.

Για την επίλυση των εξισώσεων κατάστασης απαιτείται να ορισθούν συνθήκες στα όρια του χωρίου της ροής και του χωρίου του ρευστού. Οι οριακές συνθήκες οι οποίες επιβάλλονται στη διεπιφάνεια είναι οι εξής:

$$q^S = -q^F \Rightarrow k^S \frac{\partial T^S}{\partial n} \Big|_{FSI_S} = -k^F \frac{\partial T^F}{\partial n} \Big|_{FSI_F} \quad (2.18)$$

δηλαδή το ρεύμα θερμότητας το οποίο εισέρχεται από το στερεό στο ρευστό είναι ίσο και αντίθετο αυτού που εισέρχεται από το ρευστό στο στερεό.

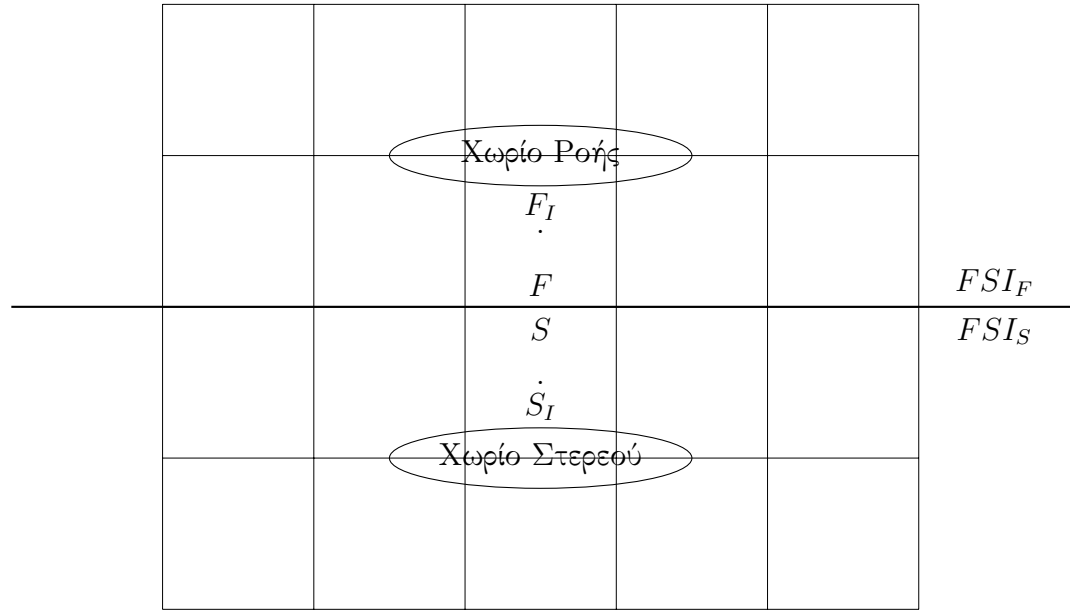
$$T^S = T^F = T^{FSI} \quad (2.19)$$

δηλαδή η θερμοκρασία του στερεού στη διεπιφάνεια είναι ίση με την εκεί θερμοκρασία του ρευστού.

Διακριτοποιώντας την εξίσωση 2.18 γράφεται

$$k^S \frac{T^{FSI} - T^{S,I}}{SS^I} = -k^F \frac{T^{FSI} - T^{F,I}}{FF^I} \quad (2.20)$$

όπου T^S είναι η θερμοκρασία του στερεού πάνω στην διεπιφάνεια και $T^{S,I}$ η θερμοκρασία του στερεού στο πρώτο κελί που εφάπτεται στη διεπιφάνεια. Το αντίστοιχο ισχύει για τα $T^F, T^{F,I}$ όπως φαίνεται στο σχήμα 2.5.



Σχήμα 2.5: Περιοχή του πλέγματος κοντά στη διεπιφάνεια. Εκατέρωθεν της διεπιφάνειας υπάρχουν τα χωρία του ρευστού και του στερεού. Επίσης, διακρίνεται το πρώτο κελί από το χωρίο του στερεού το οποίο εφάπτεται στη διεπιφάνεια (S_I) και το αντίστοιχο κελί από το χωρίο του ρευστού (F_I).

Λύνοντας την εξίσωση 2.20 ως προς T^{FSI} προκύπτει:

$$k^S \frac{T^{FSI} - T^{S,I}}{SS^I} = -k^F \frac{T^{FSI} - T^{F,I}}{FF^I} \Rightarrow \frac{k^S}{SS^I} T^{FSI} - \frac{k^S}{SS^I} T^{S,I} = -\frac{k^F}{FF^I} T^{FSI} + \frac{k^F}{FF^I} T^{F,I}$$

$$\Rightarrow T^{FSI} \left(\frac{k^S}{SS^I} + \frac{k^F}{FF^I} \right) = \frac{k^S}{SS^I} T^{S,I} + \frac{k^F}{FF^I} T^{F,I} \quad (2.21)$$

Γράφοντας δύο φορές την εξίσωση 2.21, μία από την πλευρά του στερεού και μία από την πλευρά της ροής, προκύπτει:

$$T^F \left(\frac{k^S}{SS^I} + \frac{k^F}{FF^I} \right) = \frac{k^S}{SS^I} T^{S,I} + \frac{k^F}{FF^I} T^{F,I} \quad (2.22\alpha')$$

$$T^S \left(\frac{k^S}{SS^I} + \frac{k^F}{FF^I} \right) = \frac{k^S}{SS^I} T^{S,I} + \frac{k^F}{FF^I} T^{F,I} \quad (2.22\beta')$$

όπου σύμφωνα με την εξίσωση 2.19 τα T^F και T^S ταυτίζονται.

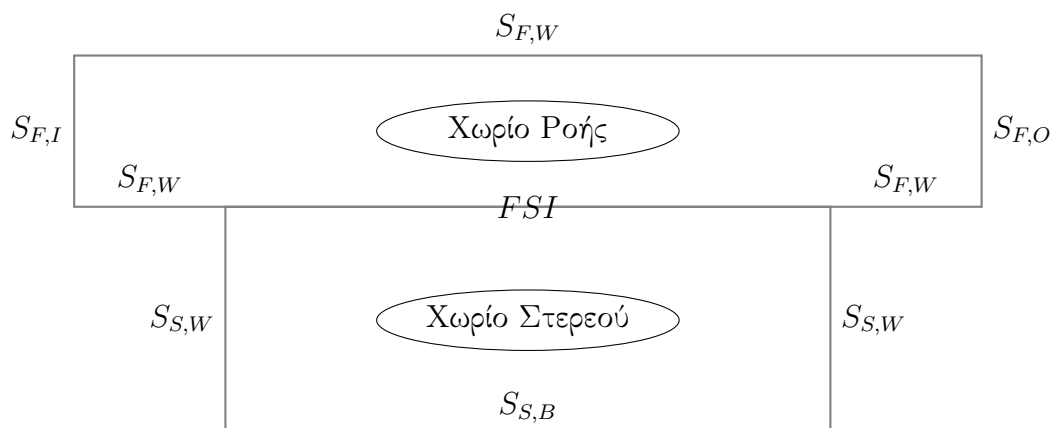
Οι εξισώσεις 2.22α' και 2.22β' χρησιμοποιούνται για την ανανέωση της θερμοκρασίας στη διεπιφάνεια κατά την επίλυση των εξισώσεων κατάστασης της ροής και του στερεού αντίστοιχα.

Οι συνθήκες οι οποίες επιβάλλονται στο όριο της περιοχής της ροής S_F (Fluid) έχουν αναφερθεί προηγουμένως. Σε αυτές προστίθεται η επιβολή μηδενικής ταχύτητας στο όριο FSI_S (Fluid Solid Interface) σύμφωνα με τη συνθήκη μη ολίσθησης.

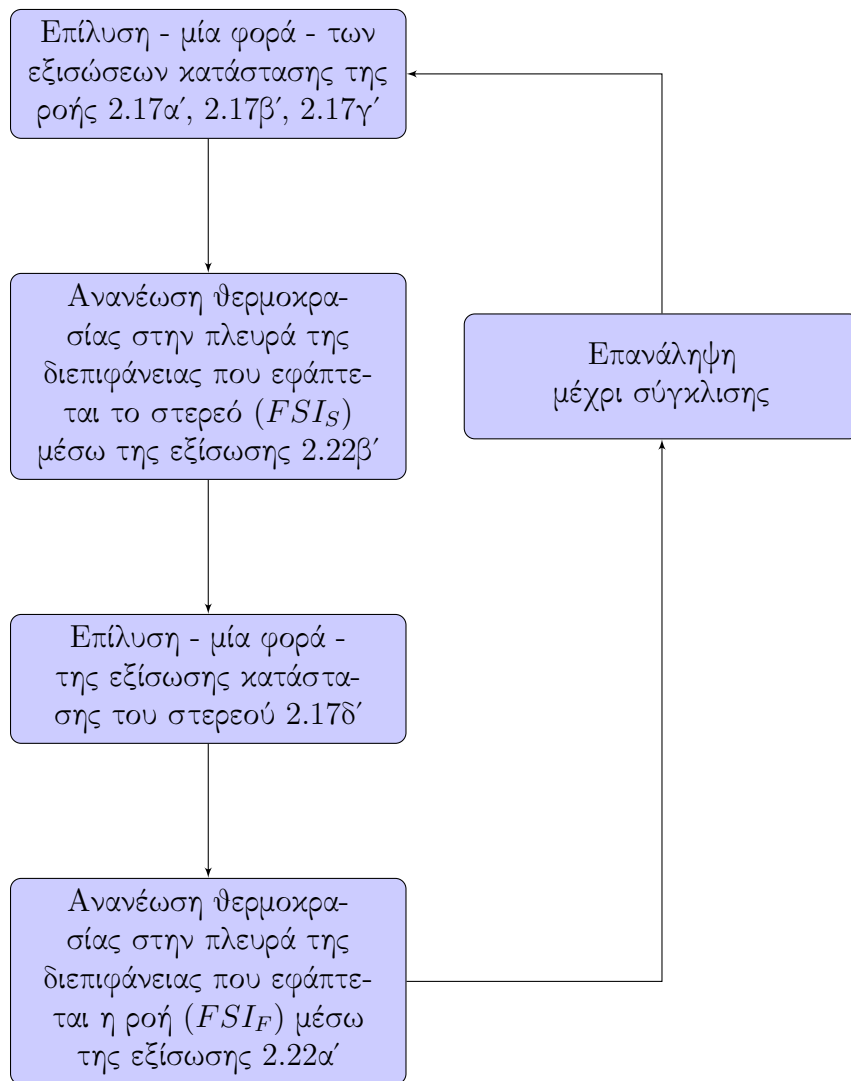
Το όριο της περιοχής του στερεού S_S (Solid) αποτελείται από τη διεπιφάνεια με τη ροή FSI_S (Fluid Solid Interface), το τοίχωμα $S_{S,W}$ (Solid Wall) και το κατώτατο επίπεδο του στερεού $S_{S,B}$ (Solid Bottom), όπως επίσης φαίνεται στο σχήμα 2.6. Στο $S_{S,W}$ επιβάλλονται αδιαβατικές συνθήκες.

Πίνακας 2.4: Συνοπτική παρουσίαση των οριακών συνθηκών

Όριο	p	v_i	T
$S_{F,I}$	zero Neumann	Dirichlet	Dirichlet
$S_{F,O}$	Dirichlet	zero Neumann	zero Neumann
$S_{F,W}$	zero Neumann	Dirichlet	zero Neumann
$S_{S,W}$	-	-	zero Neumann
$S_{S,B}$	-	-	Dirichlet



Σχήμα 2.6: Απεικόνιση της γεωμετρίας του Συζευγμένου Πρόβληματος Μεταφοράς Θερμότητας όπου διακρίνονται τα όρια των χωρίων ροής και στερεού.

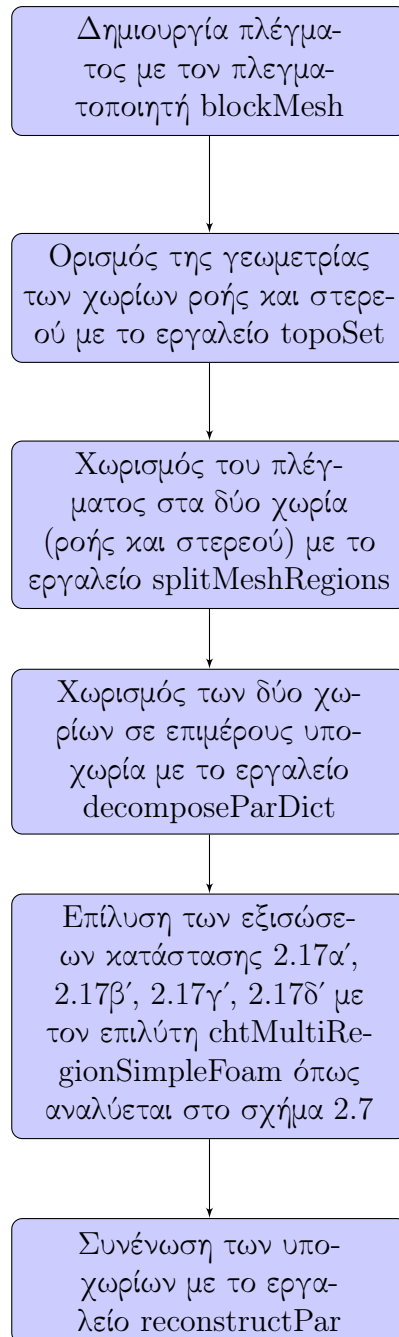


Σχήμα 2.7: Αλγόριθμος του επιλύτη chtMultiRegionSimpleFoam του Συζευγμένου Προβλήματος Μεταφοράς Θερμότητας

Για την επίλυση των εξισώσεων ροής πρώτα επιλύονται οι εξισώσεις 2.17α' και 2.17β' σύμφωνα με τον αλγόριθμο SIMPLE και ύστερα επιλύεται η εξίσωση 2.17γ' σύμφωνα με το σχήμα 2.2. Στη συνέχεια, η θερμοκρασία της διεπιφάνειας ανανεώνεται σύμφωνα με την εξίσωση 2.22β'. Μετά λύνεται η εξίσωση κατάστασης του στερεού, δηλαδή η εξίσωση 2.17δ'. Η θερμοκρασία στην διεπιφάνεια ανανεώνεται ξανά σύμφωνα με την εξίσωση 2.22α'. Η διαδικασία αυτή συνεχίζεται μέχρι να επιτευχθεί η σύγκλιση των εξισώσεων 2.17α', 2.17β', 2.17γ' και 2.17δ'.

Η επίλυση των εξισώσεων κατάστασης γίνεται παράλληλα όπως φαίνεται στο

σχήμα 2.9.



Σχήμα 2.8: Αλγόριθμος επίλυσης του Συζευγμένου Πρόβληματος Μεταφοράς Θερμότητας με παράλληλη επεξεργασία δεδομένων.

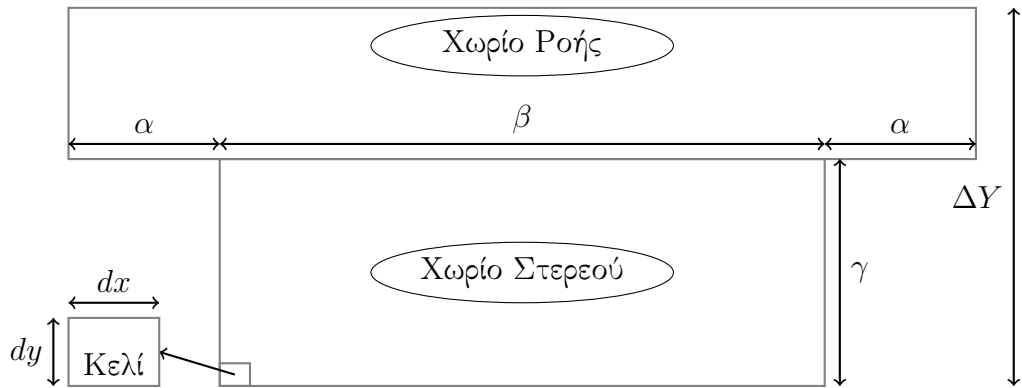
Εξετάζοντας τον τρόπο με τον οποίο το πλέγμα χωρίζεται σε δύο χωρία

(ροής και στερεού) παρουσιάζει ενδιαφέρον η μεταβολή του πλέγματος ανάλογα με την τιμή του γ (που αργότερα θα δούμε πως ταυτίζεται με τη μεταβλητή σχεδιασμού b) κρατώντας σταθερό το ΔY , σύμφωνα με το σχήμα 2.9. Θεωρώντας ομοιόμορφο πλέγμα με σταθερό μήκος κελιού dx και σταθερό πλάτος κελιού dy προκύπτουν οι παρακάτω τύποι, για το πλήθος κελιών του χωρίου ροής και του χωρίου του στερεού:

$$fluidCells = \left(\frac{\Delta Y - \gamma}{dy} \right) \left(\frac{\beta + 2\alpha}{dx} \right) \quad (2.23)$$

$$solidCells = \left(\frac{\gamma}{dy} \right) \left(\frac{\beta}{dx} \right) \quad (2.24)$$

Η αριθμητική επίλυση των εξισώσεων ροής απαιτεί εν γένει μεγαλύτερο υπολογιστικό κόστος έναντι της εξίσωσης κατάστασης του στερεού. Άρα, η επίλυση μίας γεωμετρίας με μεγάλο πλήθος κελιών στο χωρίο ροής και μικρό στο χωρίο του στερεού είναι συνήθως πιο χρονοβόρα από ότι μίας γεωμετρίας με μικρό πλήθος κελιών στο χωρίο ροής και μεγάλο στο χωρίο του στερεού. Συνεπώς, οι σχέσεις 2.24 και 2.23 δίνουν τη δυνατότητα ποιοτικής εκτίμησης του χρόνου επίλυσης.



Σχήμα 2.9: Απεικόνιση της γεωμετρίας του Συζευγμένου Πρόβληματος Μεταφοράς Θερμότητας όπου διακρίνονται τα όρια των χωρίων ροής και στερεού.

Κεφάλαιο 3

Η Συνεχής Συζυγής μέθοδος για το Συζευγμένο Πρόβλημα Μεταφοράς Θερμότητας

Στο κεφάλαιο αυτό, θα αναλυθεί η αντικειμενική συνάρτηση (objective function) και οι μεταβλητές σχεδιασμού (design variables). Ακόμη, θα εφαρμοσθεί η συνεχής συζυγής μέθοδος (continuous adjoint method) ώστε να προκύψουν οι συζυγείς εξισώσεις (adjoint equations), οι συζυγείς οριακές συνθήκες (adjoint boundary conditions) και οι παράγωγοι ευαισθησίας (sensitivity derivative).

3.1 Συζυγείς μεταβλητές

Στην παρούσα διπλωματική επιλύεται ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης μορφής, δηλαδή στόχος είναι ο σχεδιασμός της βέλτιστης γεωμετρίας σύμφωνα με ένα κριτήριο. Το κριτήριο αυτό λαμβάνει τη μορφή μιας αντικειμενικής συνάρτησης F η οποία πρέπει να ελαχιστοποιηθεί. Η συνάρτηση F είναι βαθμωτή, δηλαδή υπάρχει μόνο ένας στόχος. Η προς βελτιστοποίηση γεωμετρία καθορίζεται από τις μεταβλητές σχεδιασμού \vec{b} . Η συνεχής συζυγής μέθοδος είναι μία μέθοδος υπολογισμού των παραγώγων ευαισθησίας $\frac{\delta F}{\delta b_n}$ οι οποίες εκφράζουν τη μεταβολή της αντικειμενικής συνάρτησης F ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού b_n , όπου n είναι ο αριθμός των μεταβλητών σχεδιασμού. Η αντικειμενική συνάρτηση διατυπώνεται στη γενική μορφή ως

$$F = F(\vec{U}, \vec{b}) \quad (3.1)$$

όπου \vec{U} είναι το διάνυσμα των μεταβλητών ροής. Η εξίσωση 3.1 εκφράζει την εξάρτηση της τιμής της αντικειμενικής συνάρτησης αφενός μεν από τη γεωμετρία του προβλήματος (διάνυσμα b), αφετέρου δε από το πεδίο ροής (διάνυσμα \vec{U}). Πρακτικά, δηλαδή, κάθε αλλαγή τιμής των μεταβλητών σχεδιασμού \vec{b} , τροποποιεί τη γεωμετρία του προβλήματος, διαμορφώνει διαφορετικό πεδίο ροής \vec{U} και, με την μετεπεξεργασία (λ.χ. ολοκλήρωση, κλπ) στοιχείων του πεδίου ροής υπολογίζεται νέα τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης. Είναι σωστή, λοιπόν, και η διατύπωση $F = F(\vec{U}(\vec{b}), \vec{b})$. Τα \vec{U}, \vec{b} θα θεωρούνται διανύσματα στήλης.[1]

Για τη διατύπωση του συζυγούς προβλήματος στη γενική του περίπτωση απαιτείται η δημιουργία της επαυξημένης αντικειμενικής συνάρτησης η οποία ορίζεται ως

$$F_{aug} = F + \int_{\Omega} \Psi_l R_l^U d\Omega \quad (3.2)$$

όπου Ω είναι ο χώρος της βελτιστοποίησης, Ψ_l το διάνυσμα των συζυγών μεταβλητών και R_l^U οι εξισώσεις κατάστασης οι οποίες διέπουν το πρόβλημα και είναι ίσες με μηδέν ($R_l^U = 0$). Συγκεκριμένα, για τη μελέτη του προβλήματος συζευγμένης μεταφοράς θερμότητας ισχύει

$$\Omega = \Omega_S \cup \Omega_F \quad (3.3)$$

$$\Psi_l = [q \quad u_i \quad T_{\alpha}^F \quad T_{\alpha}^S] \quad (3.4)$$

$$R_l^U = [R^p \quad R_i^v \quad R_F^T \quad R_F^S] \quad (3.5)$$

όπου το χωρίο Ω αποτελείται από το χωρίο του στερεού Ω_S και από το χωρίο της ροής Ω_F . Με $q, u_i, T_{\alpha}^F, T_{\alpha}^S$ συμβολίζονται, αντιστοίχως, τα συζυγή ως προς την πίεση, ως προς το διάνυσμα της ταχύτητας, ως προς τη θερμοκρασία στο χωρίο της ροής και ως προς τη θερμοκρασία στο χωρίο του στερεού, πεδία. Ακόμα, με R^p, R_i^v, R_F^T, R_F^S συμβολίζονται αντιστοίχως η εξίσωση συνέχειας, η εξίσωση της ορμής, η εξίσωση της ενέργειας στο χωρίο της ροής και η εξίσωση της ενέργειας στο χωρίο του στερεού. Αναλύοντας το χωρικό ολοκλήρωμα στις συνιστώσες του, η εξίσωση της επαυξημένης αντικειμενικής συνάρτησης γράφεται ως

$$F_{aug} = F + \int_{\Omega_F} q R^p d\Omega + \int_{\Omega_F} u_i R_i^v d\Omega + \int_{\Omega_F} T_{\alpha}^F R_F^T d\Omega + \int_{\Omega_S} T_{\alpha}^S R_S^T d\Omega \quad (3.6)$$

Στόχος της συζυγούς μεθόδου είναι ο υπολογισμός των παραγώγων ευαισθησίας $\frac{\delta F_{aug}}{\delta b_n}$ της αντικειμενικής συνάρτησης ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού, ώστε αυτές να χρησιμοποιηθούν για την επίτευξη της βελτιστοποίησης. Εφόσον, το ολοκλήρωμα στο δεξί μέλος της εξίσωσης 3.2 είναι μηδενικό, η επαυξημένη αντικειμενική συνάρτηση F_{aug} θα είναι ίση με την F . Άρα, και οι αντίστοιχες παράγωγοι $\frac{\delta F_{aug}}{\delta b_n}$ και $\frac{\delta F}{\delta b_n}$ θα είναι ίσες. Συνεπώς, αρκεί να υπολογιστεί η παράγωγος $\frac{\delta F_{aug}}{\delta b_n}$, αντί της $\frac{\delta F}{\delta b_n}$. Παραγωγίζοντας την εξίσωση 3.6 προκύπτει

$$\begin{aligned} \frac{\delta F_{aug}}{\delta b_n} &= \frac{\delta F}{\delta b_n} + \int_{\Omega_F} q \frac{\delta R^p}{\delta b_n} d\Omega + \int_{\Omega_F} u_i \frac{\delta R_i^v}{\delta b_n} d\Omega + \int_{\Omega_F} T_\alpha^F \frac{\delta R_F^T}{\delta b_n} d\Omega + \int_{\Omega_S} T_\alpha^S \frac{\delta R_S^T}{\delta b_n} d\Omega \\ &+ \int_{\Omega_F} (qR^p + u_i R_i^v + T_\alpha^F R_F^T) \frac{\delta(d\Omega)}{\delta b_n} + \int_{\Omega_S} T_\alpha^S R_S^T \frac{\delta(d\Omega)}{\delta b_n} \end{aligned} \quad (3.7)$$

Η ολική παράγωγος ως προς μεταβλητή σχεδιασμού συμβολίζεται με $\frac{\delta}{\delta b_n}$ και η αντίστοιχη μερική παράγωγος με $\frac{\partial}{\partial b_n}$. Για οποιαδήποτε ποσότητα Φ ισχύει

$$\frac{\delta \Phi}{\delta b_n} = \frac{\partial \Phi}{\partial b_n} + \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_n} \quad (3.8)$$

Για τον στοιχειώδη όγκο $d\Omega$ ισχύει

$$\frac{\delta(d\Omega)}{\delta b_n} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\delta x_k}{\delta b_n} \right) d\Omega \quad (3.9)$$

Οι εξισώσεις 3.8 και 3.9 έχουν αναπτυχθεί και αποδειχθεί στη διδακτορική διατριβή του Δ. Παπαδημητρίου [5].

Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις 3.8 και 3.9, η εξίσωση 3.7 ξαναγράφεται ως

$$\begin{aligned} \frac{\delta F_{aug}}{\delta b_n} &= \frac{\delta F}{\delta b_n} + \int_{\Omega_F} q \frac{\partial R^p}{\partial b_n} d\Omega + \int_{\Omega_F} u_i \frac{\partial R_i^v}{\partial b_n} d\Omega + \int_{\Omega_F} T_\alpha^F \frac{\partial R_F^T}{\partial b_n} d\Omega + \int_{\Omega_S} T_\alpha^S \frac{\partial R_S^T}{\partial b_n} d\Omega \\ &+ \int_{\Omega_F} (qR^p + u_i R_i^v + T_\alpha^F R_F^T) \frac{\delta x_k}{\delta b_n} d\Omega + \int_{\Omega_S} T_\alpha^S R_S^T \frac{\delta x_k}{\delta b_n} d\Omega \\ &+ \int_{\Omega_F} (qR^p + u_i R_i^v + T_\alpha^F R_F^T) \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\delta x_k}{\delta b_n} \right) d\Omega + \int_{\Omega_S} T_\alpha^S R_S^T \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\delta x_k}{\delta b_n} \right) d\Omega \end{aligned} \quad (3.10)$$

Αντικαθιστώντας $\Phi = R_l^U$ στην εξίσωση 3.8 και επειδή $R_l^U = 0$ παντού προκύπτει

$$\frac{\delta R_l^U}{\delta b_n} = \frac{\partial R_l^U}{\partial b_n} = 0 \quad (3.11)$$

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση 3.11 και το θεώρημα της απόκλισης (Green-Gauss), η εξίσωση 3.10 λαμβάνει τη μορφή

$$\begin{aligned} \frac{\delta F_{aug}}{\delta b_n} &= \frac{\delta F}{\delta b_n} + \int_{\Omega_F} q \frac{\partial R^p}{\partial b_n} d\Omega + \int_{\Omega_F} u_i \frac{\partial R_i^v}{\partial b_n} d\Omega + \int_{\Omega_F} T_\alpha^F \frac{\partial R_F^T}{\partial b_n} d\Omega + \int_{\Omega_S} T_\alpha^S \frac{\partial R_S^T}{\partial b_n} d\Omega \\ &+ \int_{S_F} (qR^p + u_i R_i^v + T_\alpha^F R_F^T) n_k \frac{\delta x_k}{\delta b_n} dS + \int_{S_S} T_\alpha^S R_S^T n_k \frac{\delta x_k}{\delta b_n} dS \end{aligned} \quad (3.12)$$

όπου S_F και S_S τα όρια των χωρίων της ροής και του στερεού αντίστοιχα.

3.2 Γενικευμένη αντικειμενική συνάρτηση

Στη γενική της μορφή, η αντικειμενική συνάρτηση γράφεται

$$F = \int_{\Omega_F} F_{\Omega_F} d\Omega + \int_{\Omega_S} F_{\Omega_S} d\Omega + \int_{S_F} F_{S_F} dS + \int_{S_S} F_{S_S} dS \quad (3.13)$$

όπου με F_{Ω_F} και F_{Ω_S} συμβολίζονται οι ολοκληρωταίες ποσότητες στα χωρία Ω_F και Ω_S αντίστοιχα και με F_{S_F} και F_{S_S} συμβολίζονται οι προς ολοκλήρωση ποσότητες στα όρια S_F και S_S αντίστοιχα.

Η παράγωγος της αντικειμενικής συνάρτησης γράφεται

$$\begin{aligned} \frac{\delta F}{\delta b_n} &= \int_{\Omega_F} \frac{\partial F_{\Omega_F}}{\partial b_n} d\Omega + \int_{\Omega_F} \frac{\partial F_{\Omega_F}}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_n} d\Omega + \int_{\Omega_F} F_{\Omega_F} \frac{\delta(d\Omega)}{\delta b_n} \\ &+ \int_{\Omega_S} \frac{\partial F_{\Omega_S}}{\partial b_n} d\Omega + \int_{\Omega_S} \frac{\partial F_{\Omega_S}}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_n} d\Omega + \int_{\Omega_S} F_{\Omega_S} \frac{\delta(d\Omega)}{\delta b_n} \\ &+ \int_{S_F} \frac{\partial F_{S_F}}{\partial b_n} dS + \int_{S_F} \frac{\partial F_{S_F}}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_n} dS + \int_{S_F} F_{S_F} \frac{\delta(dS)}{\delta b_n} \\ &+ \int_{S_S} \frac{\partial F_{S_S}}{\partial b_n} dS + \int_{S_S} \frac{\partial F_{S_S}}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_n} dS + \int_{S_S} F_{S_S} \frac{\delta(dS)}{\delta b_n} \end{aligned} \quad (3.14)$$

Χρησιμοποιώντας των εξίσωση 3.9 και το θεώρημα της απόκλισης, ο όρος

$\int_{\Omega_F} F_{\Omega_F} \frac{\delta(d\Omega)}{\delta b_n}$ της εξίσωσης 3.14 γράφεται

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_F} F_{\Omega_F} \frac{\delta(d\Omega)}{\delta b_n} &= \int_{\Omega_F} F_{\Omega_F} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\delta x_k}{\delta b_n} \right) d\Omega \\ &= \int_{\Omega_F} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(F_{\Omega_F} \frac{\delta x_k}{\delta b_n} \right) d\Omega - \int_{\Omega_F} \frac{\partial F_{\Omega_F}}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_n} d\Omega \\ &= \int_{S_F} F_{\Omega_F} \frac{\delta x_k}{\delta b_n} n_k d\Omega - \int_{\Omega_F} \frac{\partial F_{\Omega_F}}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_n} d\Omega \end{aligned} \quad (3.15)$$

Ομοίως, ο όρος $\int_{\Omega_S} F_{\Omega_S} \frac{\delta(d\Omega)}{\delta b_n}$ της εξίσωσης 3.14 γράφεται

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_S} F_{\Omega_S} \frac{\delta(d\Omega)}{\delta b_n} &= \int_{\Omega_S} F_{\Omega_S} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\delta x_k}{\delta b_n} \right) d\Omega \\ &= \int_{\Omega_S} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(F_{\Omega_S} \frac{\delta x_k}{\delta b_n} \right) d\Omega - \int_{\Omega_S} \frac{\partial F_{\Omega_S}}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_n} d\Omega \\ &= \int_{S_S} F_{\Omega_S} \frac{\delta x_k}{\delta b_n} n_k d\Omega - \int_{\Omega_S} \frac{\partial F_{\Omega_S}}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_n} d\Omega \end{aligned} \quad (3.16)$$

Σύμφωνα με τις εξισώσεις 3.15 και 3.16, η εξίσωση 3.14 ξαναγράφεται

$$\begin{aligned} \frac{\delta F}{\delta b_n} &= \int_{\Omega_F} \frac{\partial F_{\Omega_F}}{\partial b_n} d\Omega + \int_{\Omega_S} \frac{\partial F_{\Omega_S}}{\partial b_n} d\Omega \\ &+ \int_{S_F} \frac{\partial F_{S_F}}{\partial b_n} dS + \int_{S_F} \left(\frac{\partial F_{S_F}}{\partial x_k} + F_{\Omega_F} n_k \right) \frac{\delta x_k}{\delta b_n} dS + \int_{S_F} F_{S_F} \frac{\delta(dS)}{\delta b_n} \\ &+ \int_{S_S} \frac{\partial F_{S_S}}{\partial b_n} dS + \int_{S_S} \left(\frac{\partial F_{S_S}}{\partial x_k} + F_{\Omega_S} n_k \right) \frac{\delta x_k}{\delta b_n} dS + \int_{S_S} F_{S_S} \frac{\delta(dS)}{\delta b_n} \end{aligned} \quad (3.17)$$

Σύμφωνα με τον κανόνα της αλυσίδας, οι παραγώγοι $\frac{\partial F_{\Omega_F}}{\partial b_n}$, $\frac{\partial F_{\Omega_S}}{\partial b_n}$, $\frac{\partial F_{S_F}}{\partial b_n}$, $\frac{\partial F_{S_S}}{\partial b_n}$ γράφονται

$$\frac{\partial F_{\Omega_F}}{\partial b_n} = \frac{\partial F_{\Omega_F}}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial b_n} + \frac{\partial F_{\Omega_F}}{\partial v_i} \frac{\partial v_i}{\partial b_n} + \frac{\partial F_{\Omega_F}}{\partial T^F} \frac{\partial T^F}{\partial b_n} \quad (3.18)$$

$$\frac{\partial F_{S_F}}{\partial b_n} = \frac{\partial F_{S_F}}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial b_n} + \frac{\partial F_{S_F}}{\partial v_i} \frac{\partial v_i}{\partial b_n} + \frac{\partial F_{S_F}}{\partial T^F} \frac{\partial T^F}{\partial b_n} \quad (3.19)$$

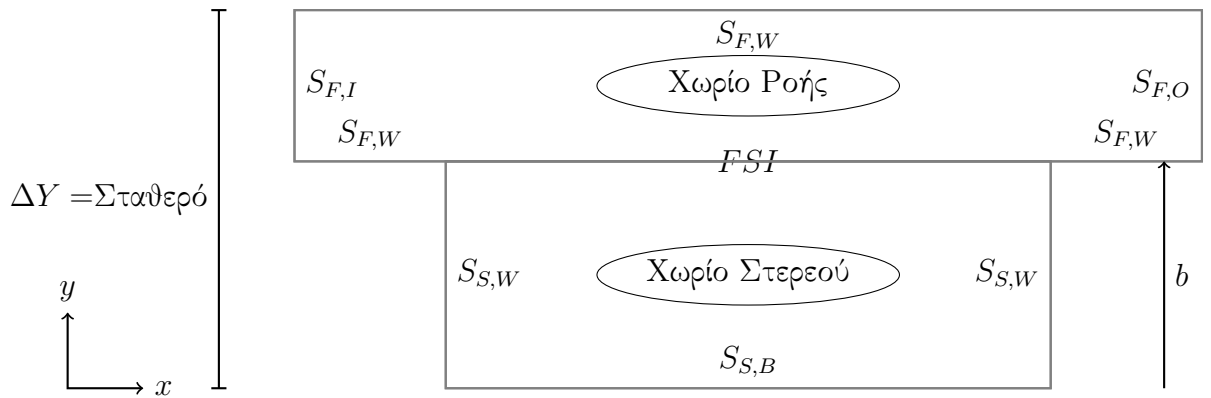
$$\frac{\partial F_{\Omega_S}}{\partial b_n} = \frac{\partial F_{\Omega_S}}{\partial T^S} \frac{\partial T^S}{\partial b_n} \quad (3.20)$$

$$\frac{\partial F_{S_S}}{\partial b_n} = \frac{\partial F_{S_S}}{\partial T^S} \frac{\partial T^S}{\partial b_n} \quad (3.21)$$

Η απαλοιφή των όρων που περιείχαν την παράγωγο $\frac{\delta(d\Omega)}{\delta b_n}$ στην εξίσωση 3.14, μετασχηματίζοντάς την στην εξίσωση 3.17 έχει ορισμένα πλεονεκτήματα. Ο υπολογισμός των όρων που απαλείφθηκαν έχει μεγαλύτερο υπολογιστικό κόστος από τους υπόλοιπους όρους της εξίσωσης 3.14. Δηλαδή, ο υπολογισμός της εξίσωσης 3.17 έχει χαμηλότερο υπολογιστικό κόστος από την εξίσωση 3.14. Επίσης, η μορφή της εξίσωσης 3.17 διευκολύνει την ομαδοποίηση των όρων της εξίσωσης 3.12 ώστε να προκύψουν οι συζυγείς εξισώσεις όπως θα αναλυθούν παρακάτω.

3.3 Γεωμετρία προβλήματος

Η προς βελτιστοποίηση γεωμετρία παρουσιάζεται στο σχήμα 3.1.



Σχήμα 3.1: Διάταξη προς βελτιστοποίηση όπου ορίζεται η μεταβλητή σχεδιασμού b ως η απόσταση της διεπιφάνειας(FSI) από το επίπεδο $y = 0$.

Σύμφωνα με το σχήμα 3.1 ορίζεται η μεταβλητή σχεδιασμού b η οποία είναι ίση με την απόσταση του $S_{S,B}$ από τη διεπιφάνεια FSI . Η απόσταση του $S_{S,B}$ από το άνω $S_{F,W}$ είναι σταθερή και ανεξάρτητη του b . Δηλαδή, αύξηση της μεταβλητής σχεδιασμού b ισοδυναμεί με αύξηση του χωρίου του στερεού και μείωση του χωρίου της ροής.

3.4 Αντικειμενική συνάρτηση

Στόχος της παρούσας εργασίας είναι ο σχεδιασμός της βέλτιστης γεωμετρίας του σχήματος 3.1 ώστε να επιτευχθεί η ελάχιστη μέση θερμοκρασία στο χωρίο του στερεού. Δηλαδή αναζητείται η τιμή της μεταβλητής σχεδιασμού b η οποία

δίνει την ελάχιστη μέση θερμοκρασία στο χωρίο του στερεού. Για τον σκοπό, αυτό η αντικειμενική συνάρτηση ορίζεται σύμφωνα με την εξίσωση

$$F = \frac{\int_{\Omega_S} T^S d\Omega}{\int_{\Omega_S} d\Omega} \quad (3.22)$$

Η εξίσωση 3.22 παραγωγίζεται ως

$$\frac{\delta F}{\delta b_n} = \frac{\frac{\delta}{\delta b_n}(\int_{\Omega_S} T^S d\Omega)(\int_{\Omega_S} d\Omega) - (\int_{\Omega_S} T^S d\Omega)\frac{\delta}{\delta b_n}(\int_{\Omega_S} d\Omega)}{(\int_{\Omega_S} d\Omega)^2} \quad (3.23)$$

Σύμφωνα με την εξίσωση 3.8 και το θεώρημα Leibniz

$$\frac{\delta}{\delta b_n} \left(\int_{\Omega_S} T^S d\Omega \right) = \int_{\Omega_S} \frac{\partial T^S}{\partial b_n} d\Omega + \int_{S_S} T^S n_k \frac{\delta x_k}{\delta b_n} dS \quad (3.24\alpha')$$

$$\frac{\delta}{\delta b_n} \left(\int_{\Omega_S} d\Omega \right) = \int_{S_S} n_k \frac{\delta x_k}{\delta b_n} dS \quad (3.24\beta')$$

Έτσι, η εξίσωση 3.23 ξαναγράφεται σύμφωνα με τις εξισώσεις 3.24 ως

$$\begin{aligned} \frac{\delta F}{\delta b_n} &= \frac{(\int_{\Omega_S} \frac{\partial T^S}{\partial b_n} d\Omega + \int_{S_S} T^S n_k \frac{\delta x_k}{\delta b_n} dS)(\int_{\Omega_S} d\Omega) - (\int_{\Omega_S} T^S d\Omega)(\int_{S_S} n_k \frac{\delta x_k}{\delta b_n} dS)}{(\int_{\Omega_S} d\Omega)^2} \\ &= \frac{\int_{\Omega_S} \frac{\partial T^S}{\partial b_n} d\Omega}{\int_{\Omega_S} d\Omega} + \frac{\int_{S_S} T^S n_k \frac{\delta x_k}{\delta b_n} dS}{\int_{\Omega_S} d\Omega} - \frac{(\int_{S_S} n_k \frac{\delta x_k}{\delta b_n} dS)(\int_{\Omega_S} T^S d\Omega)}{(\int_{\Omega_S} d\Omega)^2} \end{aligned} \quad (3.25)$$

Η εξίσωση 3.25 ξαναγράφεται στη γενικευμένη μορφή της εξίσωσης 3.17

$$\frac{\delta F}{\delta b_n} = \left(\int_{\Omega_S} d\Omega \right)^{-1} \int_{\Omega_S} \frac{\partial T^S}{\partial b_n} d\Omega + \int_{S_S} \left[\left(\frac{T^S}{\int_{\Omega_S} d\Omega} \right) - \left(\frac{\int_{\Omega_S} T^S d\Omega}{(\int_{\Omega_S} d\Omega)^2} \right) \right] n_k \frac{\delta x_k}{\delta b_n} dS \quad (3.26)$$

Επειδή τα όρια $S_{F,W}$ και $S_{S,B}, S_{S,W}$ δεν επηρεάζονται από τις μεταβολές της μεταβλητής σχεδιασμού b εκεί ισχύει ότι

$$\frac{\delta x_k}{\delta b_n} = 0 \quad (3.27)$$

Ακόμα στα όρια $S_{F,I}$ και $S_{F,O}$ ισχύει $\frac{\delta y}{\delta b_n} = 0$, δηλαδή η κάθετη συνιστώσα της παραγώγου $\frac{\delta x_k}{\delta b_n}$ είναι μηδενική. Άρα, οποιαδήποτε μεταβολή των επιφανειών $S_{F,I}$ και $S_{F,O}$ θα είναι προς την ακτινική κατεύθυνση, δηλαδή με κατεύθυνση παράλληλη σε αυτές. Έτσι, το σχήμα των επιφανειών παραμένει το ίδιο και η γεωμετρία του προβλήματος παραμένει επίσης η ίδια. Για το λόγο αυτό, οι όροι των αριστερών μελών των εξισώσεων 3.28 και 3.29 μπορούν να αμεληθούν, δηλαδή

$$\int_{S_{F,I}} A \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_n} dS = 0 \quad (3.28)$$

$$\int_{S_{F,O}} A \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_n} dS = 0 \quad (3.29)$$

όπου Φ οποιαδήποτε ποσότητα και A οποιαδήποτε παράσταση.

Στα όρια FSI_F και FSI_S που επηρεάζονται από τις μεταβολές της μεταβλητής σχεδιασμού b η παράγωγος $\frac{\delta x_k}{\delta b_n}$ υπολογίζεται σύμφωνα με την εργασία [2] ως εξής

$$\frac{\delta x_k}{\delta b_n} = \left[0 \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{y(b+\epsilon) - y(b)}{\epsilon} \quad 0 \right] = \left[0 \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{(b+\epsilon) - b}{\epsilon} \quad 0 \right] = \left[0 \quad 1 \quad 0 \right] \quad (3.30)$$

Αντικαθιστώντας την εξίσωση 3.27 στην εξίσωση 3.26 προκύπτει

$$\frac{\delta F}{\delta b_n} = \left(\int_{\Omega_S} d\Omega \right)^{-1} \int_{\Omega_S} \frac{\partial T^S}{\partial b_n} d\Omega + \int_{FSI_S} \left[\left(\frac{T^S}{\int_{\Omega_S} d\Omega} \right) - \left(\frac{\int_{\Omega_S} T^S d\Omega}{\left(\int_{\Omega_S} d\Omega \right)^2} \right) \right] n_k \frac{\delta x_k}{\delta b_n} dS \quad (3.31)$$

Η εξίσωση 3.31 γράφεται στη γενική μορφή

$$\frac{\delta F}{\delta b_n} = \int_{\Omega_S} OF \frac{\partial T^S}{\partial b_n} d\Omega + sensOF \quad (3.32)$$

όπου

$$OF = \left(\int_{\Omega_S} d\Omega \right)^{-1} \quad (3.33)$$

και

$$sensOF = \int_{FSI_S} \left[\left(\frac{T^S}{\int_{\Omega_S} d\Omega} \right) - \left(\frac{\int_{\Omega_S} T^S d\Omega}{(\int_{\Omega_S} d\Omega)^2} \right) \right] n_k \frac{\delta x_k}{\delta b_n} dS \quad (3.34)$$

3.5 Παραγωγήιση εξισώσεων ροής και μεταφοράς θερμότητας

Για τον υπολογισμό της παραγώγου $\frac{\delta F_{aug}}{\delta b_n}$ η οποία θα αναφέρεται πλέον ως παράγωγος ευαισθησίας απαιτείται η εύρεση των αναλυτικών εκφράσεων των ολοκληρωμάτων $\int_{\Omega_F} q \frac{\partial R^p}{\partial b_n} d\Omega$, $\int_{\Omega_F} u_i \frac{\partial R_i^v}{\partial b_n} d\Omega$, $\int_{\Omega_F} T_\alpha^F \frac{\partial R_F^T}{\partial b_n} d\Omega$, $\int_{\Omega_S} T_\alpha^S \frac{\partial R_S^T}{\partial b_n} d\Omega$.

3.5.1 Παραγωγήιση εξισώσεων ροής

Παραγωγήιση εξίσωσης συνέχειας

Η ανάλυση του όρου $\int_{\Omega_F} q \frac{\partial R^p}{\partial b_n} d\Omega$ γράφεται ως

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_F} q \frac{\partial R^p}{\partial b_n} d\Omega &= - \int_{\Omega_F} q \frac{\partial}{\partial b_n} \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_j} \right) d\Omega = - \int_{\Omega_F} q \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v_j}{\partial b_n} \right) d\Omega \\ &= - \int_{S_F} n_j q \frac{\partial v_j}{\partial b_n} dS + \int_{\Omega_F} \frac{\partial q}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial b_n} d\Omega \\ &= - \int_{S_F} n_i q \frac{\partial v_i}{\partial b_n} dS + \int_{\Omega_F} \frac{\partial q}{\partial x_i} \frac{\partial v_i}{\partial b_n} d\Omega \end{aligned} \quad (3.35)$$

Σημειώνεται ότι, η μερική παράγωγος $\frac{\partial}{\partial b_n}$ είναι απεμπλεγμένη από οποιαδήποτε χωρική μετατόπιση δx_j . Συνεπώς, είναι επιτρεπτή η εναλλαγή της σειράς παραγώγισης στους όρους εκείνους με μικτές παραγώγους των μεταβλητών ροής ως προς μεταβλητές σχεδιασμού και τις χωρικές συντεταγμένες. Άρα γράφεται [14]

$$\frac{\partial}{\partial b_n} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial b_n} \right) \quad (3.36)$$

Η εξίσωση 3.36 για $\Phi = v_j$ χρησιμοποιήθηκε στη δεύτερη ισότητα της εξίσωσης 3.35.

Παραγωγή της εξίσωσης ορμής

Η ανάλυση του όρου $\int_{\Omega_F} u_i \frac{\partial R_i^v}{\partial b_n} d\Omega$ γράφεται ως

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_F} u_i \frac{\partial R_i^v}{\partial b_n} d\Omega &= \int_{\Omega_F} u_i \frac{\partial}{\partial b_n} \left\{ v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right] + \frac{\partial p}{\partial x_i} \right\} d\Omega \\ &= \int_{\Omega_F} u_i \frac{\partial}{\partial b_n} \left(v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) d\Omega - \int_{\Omega_F} u_i \frac{\partial}{\partial b_n} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right] \right\} d\Omega \\ &\quad + \int_{\Omega_F} u_i \frac{\partial}{\partial b_n} \left(\frac{\partial p}{\partial x_i} \right) d\Omega \end{aligned} \quad (3.37)$$

Στη συνέχεια, κάθε όρος της εξίσωσης 3.37 θα αναπτυχθεί ξεχωριστά.

Από την ανάλυση του μη-συνεκτικού όρου $\int_{\Omega_F} u_i \frac{\partial}{\partial b_n} \left(v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) d\Omega$ της εξίσωσης 3.37 προκύπτει

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_F} u_i \frac{\partial}{\partial b_n} \left(v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) d\Omega &= \int_{\Omega_F} u_i \left[\frac{\partial v_j}{\partial b_n} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + v_j \frac{\partial}{\partial b_n} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) \right] d\Omega \\ &= \int_{\Omega_F} u_i \frac{\partial v_j}{\partial b_n} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} d\Omega + \int_{\Omega_F} u_i v_j \frac{\partial}{\partial b_n} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) d\Omega \\ &= \int_{\Omega_F} u_j \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \frac{\partial v_i}{\partial b_n} d\Omega + \int_{\Omega_F} u_i v_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v_i}{\partial b_n} \right) d\Omega \\ &= \int_{\Omega_F} \left(u_j \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial v_i}{\partial b_n} d\Omega + \int_{S_F} u_i v_j \left(\frac{\partial v_i}{\partial b_n} \right) n_j dS - \int_{\Omega_F} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} v_j \frac{\partial v_i}{\partial b_n} d\Omega \\ &\quad - \int_{\Omega_F} u_i \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial b_n} d\Omega \end{aligned} \quad (3.38)$$

όπου ο όρος

$$\int_{\Omega_F} u_i \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial b_n} d\Omega = 0 \quad \text{διότι} \quad \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0 \quad \text{σύμφωνα με την εξίσωση συνέχειας}$$

Από την ανάλυση του συνεκτικού όρου $-\int_{\Omega_F} u_i \frac{\partial}{\partial b_n} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right] \right\} d\Omega$ της εξίσωσης 3.37 προκύπτει

$$\begin{aligned}
& - \int_{\Omega_F} u_i \frac{\partial}{\partial b_n} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right] \right\} d\Omega = - \int_{\Omega_F} u_i \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \frac{\partial}{\partial b_n} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right] d\Omega \\
& = - \int_{S_F} u_i \left[\nu \frac{\partial}{\partial b_n} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right] n_j dS + \int_{\Omega_F} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \left[\nu \frac{\partial}{\partial b_n} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right] d\Omega \\
& = - \int_{S_F} u_i \left[\nu \frac{\partial}{\partial b_n} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right] n_j dS + \int_{\Omega_F} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \left[\nu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v_i}{\partial b_n} \right) \right] d\Omega \\
& + \int_{\Omega_F} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \left[\nu \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial v_j}{\partial b_n} \right) \right] d\Omega \\
& = - \int_{S_F} u_i \left[\nu \frac{\partial}{\partial b_n} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right] n_j dS + \int_{S_F} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \nu \frac{\partial v_i}{\partial b_n} n_j dS \\
& - \int_{\Omega_F} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \frac{\partial v_i}{\partial b_n} d\Omega \\
& + \int_{S_F} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \nu \frac{\partial v_j}{\partial b_n} n_i dS - \int_{\Omega_F} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \nu \right) \frac{\partial v_j}{\partial b_n} d\Omega \\
& = - \int_{S_F} u_i \left[\nu \frac{\partial}{\partial b_n} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right] n_j dS + \int_{S_F} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \nu \left(\frac{\partial v_i}{\partial b_n} \right) n_j dS \\
& - \int_{\Omega_F} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \frac{\partial v_i}{\partial b_n} d\Omega \\
& + \int_{S_F} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \nu \frac{\partial v_i}{\partial b_n} n_j dS - \int_{\Omega_F} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} \nu \right) \frac{\partial v_i}{\partial b_n} d\Omega \\
& = - \int_{S_F} u_i \left[\nu \frac{\partial}{\partial b_n} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right] n_j dS + \int_{S_F} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \nu \frac{\partial v_i}{\partial b_n} n_j dS \\
& - \int_{\Omega_F} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] \frac{\partial v_i}{\partial b_n} d\Omega
\end{aligned} \tag{3.39}$$

Από την ανάλυση του μη-συνεκτικού όρου $\int_{\Omega_F} u_i \frac{\partial}{\partial b_n} \left(\frac{\partial p}{\partial x_i} \right) d\Omega$ της εξίσωσης 3.37 προκύπτει

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_F} u_i \frac{\partial}{\partial b_n} \left(\frac{\partial p}{\partial x_i} \right) d\Omega & = \int_{\Omega_F} u_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial p}{\partial b_n} \right) d\Omega \\
& = \int_{S_F} n_i u_i \frac{\partial p}{\partial b_n} dS - \int_{\Omega_F} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \frac{\partial p}{\partial b_n} d\Omega
\end{aligned} \tag{3.40}$$

Παραγωγή της εξίσωσης ενέργειας

Η ανάλυση του όρου $\int_{\Omega_F} T_\alpha^F \frac{\partial R_F^T}{\partial b_n} d\Omega$ γράφεται ως

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega_F} T_\alpha^F \frac{\partial R_F^T}{\partial b_n} d\Omega &= \int_{\Omega_F} T_\alpha^F \frac{\partial}{\partial b_n} \left\{ c_p \frac{\partial (v_j T^F)}{\partial x_j} - c_p \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\nu}{Pr} \frac{\partial T^F}{\partial x_j} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial (v_j v_k^2)}{\partial x_j} \right\} d\Omega \\
 &= \int_{\Omega_F} T_\alpha^F \frac{\partial}{\partial b_n} \left[c_p \frac{\partial (v_j T^F)}{\partial x_j} \right] d\Omega - \int_{\Omega_F} T_\alpha^F \frac{\partial}{\partial b_n} \left[c_p \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\nu}{Pr} \frac{\partial T^F}{\partial x_j} \right) \right] d\Omega \\
 &\quad + \int_{\Omega_F} \frac{1}{2} T_\alpha^F \frac{\partial}{\partial b_n} \left[\frac{\partial (v_j v_k^2)}{\partial x_j} \right] d\Omega
 \end{aligned} \tag{3.41}$$

Στη συνέχεια, κάθε όρος της εξίσωσης 3.41 θα αναπτυχθεί ξεχωριστά.

Από την ανάλυση του όρου $\int_{\Omega_F} c_p T_\alpha^F \frac{\partial}{\partial b_n} \left[\frac{\partial (v_j T^F)}{\partial x_j} \right] d\Omega$ της εξίσωσης 3.41 προκύπτει

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega_F} c_p T_\alpha^F \frac{\partial}{\partial b_n} \left[\frac{\partial (v_j T^F)}{\partial x_j} \right] d\Omega &= \int_{\Omega_F} c_p T_\alpha^F \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{\partial (v_j T^F)}{\partial b_n} \right] d\Omega \\
 &= \int_{\Omega_F} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[c_p T_\alpha^F \frac{\partial (v_j T^F)}{\partial b_n} \right] d\Omega - \int_{\Omega_F} c_p \frac{\partial T_\alpha^F}{\partial x_j} \frac{\partial (v_j T^F)}{\partial b_n} d\Omega \\
 &= \int_{S_F} \left[c_p T_\alpha^F \frac{\partial (v_j T^F)}{\partial b_n} \right] n_j dS - \int_{\Omega_F} c_p \frac{\partial T_\alpha^F}{\partial x_j} \frac{\partial (v_j T^F)}{\partial b_n} d\Omega \\
 &= \int_{S_F} n_j c_p T_\alpha^F T^F \frac{\partial v_j}{\partial b_n} dS + \int_{S_F} n_j c_p T_\alpha^F v_j \frac{\partial T^F}{\partial b_n} dS \\
 &\quad - \int_{\Omega_F} c_p \frac{\partial T_\alpha^F}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial b_n} T^F d\Omega - \int_{\Omega_F} c_p \frac{\partial T_\alpha^F}{\partial x_j} v_j \frac{\partial T^F}{\partial b_n} d\Omega \\
 &= \int_{S_F} c_p n_j T_\alpha^F T^F \frac{\partial v_j}{\partial b_n} dS + \int_{S_F} c_p n_j T_\alpha^F v_j \frac{\partial T^F}{\partial b_n} dS \\
 &\quad - \int_{\Omega_F} c_p \frac{\partial T_\alpha^F}{\partial x_i} \frac{\partial v_i}{\partial b_n} T^F d\Omega - \int_{\Omega_F} c_p \frac{\partial T_\alpha^F}{\partial x_j} v_j \frac{\partial T^F}{\partial b_n} d\Omega
 \end{aligned} \tag{3.42}$$

Από την ανάλυση του όρου $\int_{\Omega_F} T_\alpha^F \frac{\partial}{\partial b_n} \left[\frac{1}{2} \frac{\partial (v_j v_k^2)}{\partial x_j} \right] d\Omega$ της εξίσωσης 3.41 προκύπτει

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_F} T_\alpha^F \frac{\partial}{\partial b_n} \left[\frac{1}{2} \frac{\partial (v_j v_k^2)}{\partial x_j} \right] d\Omega &= \int_{\Omega_F} T_\alpha^F \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{1}{2} \frac{\partial (v_j v_k^2)}{\partial b_n} \right] d\Omega \\
&= \int_{S_F} n_j T_\alpha^F \left[\frac{1}{2} \frac{\partial (v_j v_k^2)}{\partial b_n} \right] dS - \int_{\Omega_F} \frac{\partial T_\alpha^F}{\partial x_j} \left[\frac{1}{2} \frac{\partial (v_j v_k^2)}{\partial b_n} \right] d\Omega \\
&= \int_{S_F} n_j T_\alpha^F \left(\frac{1}{2} \frac{\partial v_j}{\partial b_n} v_k^2 + v_j v_k \frac{\partial v_k}{\partial b_n} \right) dS \\
&\quad - \int_{\Omega_F} \frac{\partial T_\alpha^F}{\partial x_j} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial v_j}{\partial b_n} v_k^2 + v_j v_k \frac{\partial v_k}{\partial b_n} \right) d\Omega \\
&= \int_{S_F} T_\alpha^F \left(\frac{1}{2} \frac{\partial v_j}{\partial b_n} n_j v_k^2 + v_j n_j v_k \frac{\partial v_k}{\partial b_n} \right) dS \\
&\quad - \int_{\Omega_F} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial v_j}{\partial b_n} \frac{\partial T_\alpha^F}{\partial x_j} v_k^2 + v_j \frac{\partial T_\alpha^F}{\partial x_j} v_k \frac{\partial v_k}{\partial b_n} \right) d\Omega \\
&= \int_{S_F} T_\alpha^F \left(\frac{1}{2} n_j v_k^2 + v_j n_k v_k \right) \frac{\partial v_j}{\partial b_n} dS \\
&\quad - \int_{\Omega_F} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial T_\alpha^F}{\partial x_j} v_k^2 + v_j \frac{\partial T_\alpha^F}{\partial x_k} v_k \right) \frac{\partial v_j}{\partial b_n} d\Omega \\
&= \int_{S_F} T_\alpha^F \left(\frac{1}{2} n_i v_k^2 + v_i n_k v_k \right) \frac{\partial v_i}{\partial b_n} dS \\
&\quad - \int_{\Omega_F} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial T_\alpha^F}{\partial x_i} v_k^2 + v_i \frac{\partial T_\alpha^F}{\partial x_k} v_k \right) \frac{\partial v_i}{\partial b_n} d\Omega
\end{aligned} \tag{3.43}$$

Από την ανάλυση του όρου $-\int_{\Omega_F} c_p T_\alpha^F \frac{\partial}{\partial b_n} \left[\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\nu}{Pr} \frac{\partial T^F}{\partial x_j} \right) \right] d\Omega$ της εξίσωσης 3.41 προκύπτει

$$\begin{aligned}
-\int_{\Omega_F} c_p T_\alpha^F \frac{\partial}{\partial b_n} \left[\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\nu}{Pr} \frac{\partial T^F}{\partial x_j} \right) \right] d\Omega &= -\int_{\Omega_F} c_p T_\alpha^F \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{\partial}{\partial b_n} \left(\frac{\nu}{Pr} \frac{\partial T^F}{\partial x_j} \right) \right] d\Omega \\
&= -\int_{S_F} c_p T_\alpha^F \frac{\partial}{\partial b_n} \left(\frac{\nu}{Pr} \frac{\partial T^F}{\partial x_j} \right) n_j dS \\
&\quad + \int_{\Omega_F} c_p \frac{\partial T_\alpha^F}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial b_n} \left(\frac{\nu}{Pr} \frac{\partial T^F}{\partial x_j} \right) d\Omega \\
&= -\int_{S_F} c_p T_\alpha^F \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\nu}{Pr} \frac{\partial T^F}{\partial b_n} \right) n_j dS \\
&\quad + \int_{\Omega_F} c_p \frac{\partial T_\alpha^F}{\partial x_j} \frac{\nu}{Pr} \frac{\partial}{\partial b_n} \left(\frac{\partial T^F}{\partial x_j} \right) d\Omega \\
&\quad + \int_{\Omega_F} c_p \frac{\partial T_\alpha^F}{\partial x_j} \left[\frac{\partial}{\partial b_n} \left(\frac{\nu}{Pr} \right) \right] \frac{\partial T^F}{\partial x_j} d\Omega
\end{aligned} \tag{3.44}$$

Ακόμα ισχύει $\int_{\Omega_F} c_p \frac{\partial T_\alpha^F}{\partial x_j} \left[\frac{\partial}{\partial b_n} \left(\frac{\nu}{Pr} \right) \right] \frac{\partial T^F}{\partial x_j} d\Omega = 0$

Άρα η εξίσωση 3.44 ξαναγράφεται ως

$$\begin{aligned}
-\int_{\Omega_F} c_p T_\alpha^F \frac{\partial}{\partial b_n} \left[\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\nu}{Pr} \frac{\partial T^F}{\partial x_j} \right) \right] d\Omega &= -\int_{S_F} c_p T_\alpha^F \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\nu}{Pr} \frac{\partial T^F}{\partial b_n} \right) n_j dS \\
&\quad + \int_{\Omega_F} c_p \frac{\partial T_\alpha^F}{\partial x_j} \frac{\nu}{Pr} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial T^F}{\partial b_n} \right) d\Omega \\
&= -\int_{S_F} c_p T_\alpha^F \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\nu}{Pr} \frac{\partial T^F}{\partial b_n} \right) n_j dS \\
&\quad + \int_{S_F} c_p \frac{\partial T_\alpha^F}{\partial x_j} \frac{\nu}{Pr} \frac{\partial T^F}{\partial b_n} n_j dS \\
&\quad - \int_{\Omega_F} c_p \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\nu}{Pr} \frac{\partial T_\alpha^F}{\partial x_j} \right) \frac{\partial T^F}{\partial b_n} d\Omega
\end{aligned} \tag{3.45}$$

3.5.2 Παραγωγή της εξίσωσης μεταφοράς θερμότητας στερεού

Η ανάλυση του όρου $\int_{\Omega_S} T_\alpha^S \frac{\partial R_S^T}{\partial b_n} d\Omega$ γράφεται ως

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega_S} T_\alpha^S \frac{\partial R_S^T}{\partial b_n} d\Omega &= \int_{\Omega_S} T_\alpha^S \frac{\partial}{\partial b_n} \left[-\frac{\partial}{\partial x_j} \left(k^S \frac{\partial T^S}{\partial x_j} \right) \right] d\Omega \\
 &= \int_{\Omega_S} T_\alpha^S \frac{\partial}{\partial x_j} \left[-\frac{\partial}{\partial b_n} \left(k^S \frac{\partial T^S}{\partial x_j} \right) \right] d\Omega \\
 &= - \int_{S_S} n_j T_\alpha^S \frac{\partial}{\partial b_n} \left(k^S \frac{\partial T^S}{\partial x_j} \right) dS + \int_{\Omega_S} \frac{\partial T_\alpha^S}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial b_n} \left(k^S \frac{\partial T^S}{\partial x_j} \right) d\Omega \\
 &= - \int_{S_S} n_j T_\alpha^S \frac{\partial}{\partial b_n} \left(k^S \frac{\partial T^S}{\partial x_j} \right) dS + \int_{\Omega_S} \frac{\partial T_\alpha^S}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(k^S \frac{\partial T^S}{\partial b_n} \right) d\Omega \\
 &= - \int_{S_S} n_j T_\alpha^S k^S \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial T^S}{\partial b_n} \right) dS + \int_{S_S} n_j \frac{\partial T_\alpha^S}{\partial x_j} \left(k^S \frac{\partial T^S}{\partial b_n} \right) dS \\
 &\quad - \int_{\Omega_S} \frac{\partial^2 T_\alpha^S}{\partial x_j^2} k^S \frac{\partial T^S}{\partial b_n} d\Omega
 \end{aligned} \tag{3.46}$$

Αντικαθιστώντας τις εξισώσεις 3.35 έως 3.46 στην 3.12

$$\begin{aligned}
\frac{\delta F_{aug}}{\delta b_n} &= \frac{\delta F}{\delta b_n} - \int_{S_F} n_j q \frac{\partial v_j}{\partial b_n} dS + \int_{\Omega_F} \frac{\partial q}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial b_n} d\Omega \\
&+ \int_{\Omega_F} \left(u_j \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial v_i}{\partial b_n} d\Omega + \int_{S_F} u_i v_j \left(\frac{\partial v_i}{\partial b_n} \right) n_j dS - \int_{\Omega_F} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} v_j \frac{\partial v_i}{\partial b_n} d\Omega \\
&- \int_{S_F} u_i \left[\nu \frac{\partial}{\partial b_n} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right] n_j dS + \int_{S_F} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \nu \frac{\partial v_i}{\partial b_n} n_j dS \\
&- \int_{\Omega_F} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] \frac{\partial v_i}{\partial b_n} d\Omega \\
&+ \int_{S_F} n_i u_i \frac{\partial p}{\partial b_n} dS - \int_{\Omega_F} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \frac{\partial p}{\partial b_n} d\Omega \\
&+ \int_{S_F} c_p n_j T_\alpha^F T^F \frac{\partial v_j}{\partial b_n} dS + \int_{S_F} c_p n_j T_\alpha^F v_j \frac{\partial T^F}{\partial b_n} dS \\
&- \int_{\Omega_F} c_p \frac{\partial T_\alpha^F}{\partial x_i} \frac{\partial v_i}{\partial b_n} T^F d\Omega - \int_{\Omega_F} c_p \frac{\partial T_\alpha^F}{\partial x_j} v_j \frac{\partial T^F}{\partial b_n} d\Omega \\
&+ \int_{S_F} T_\alpha^F \left(\frac{1}{2} n_i v_k^2 + v_i n_k v_k \right) \frac{\partial v_i}{\partial b_n} dS \\
&- \int_{\Omega_F} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial T_\alpha^F}{\partial x_i} v_k^2 + v_i \frac{\partial T_\alpha^F}{\partial x_k} v_k \right) \frac{\partial v_i}{\partial b_n} d\Omega \\
&- \int_{S_F} c_p T_\alpha^F \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\nu}{Pr} \frac{\partial T^F}{\partial b_n} \right) n_j dS \\
&+ \int_{S_F} c_p \frac{\partial T_\alpha^F}{\partial x_j} \frac{\nu}{Pr} \frac{\partial T^F}{\partial b_n} n_j dS \\
&- \int_{\Omega_F} c_p \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\nu}{Pr} \frac{\partial T_\alpha^F}{\partial x_j} \right) \frac{\partial T^F}{\partial b_n} d\Omega \\
&- \int_{S_S} n_j T_\alpha^S k^S \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial T^S}{\partial b_n} \right) dS + \int_{S_S} n_j \frac{\partial T_\alpha^S}{\partial x_j} k^S \frac{\partial T^S}{\partial b_n} dS \\
&- \int_{\Omega_S} \frac{\partial^2 T_\alpha^S}{\partial x_j^2} k^S \frac{\partial T^S}{\partial b_n} d\Omega \\
&+ \int_{S_F} (q R^p + u_i R_i^v + T_\alpha^F R_F^T) n_k \frac{\delta x_k}{\delta b_n} dS + \int_{S_S} T_\alpha^S R_S^T n_k \frac{\delta x_k}{\delta b_n} dS
\end{aligned} \tag{3.47}$$

Επιπλέον, με την αντικατάσταση της έκφρασης της παραγώγου της αντικειμενικής συνάρτησης $\frac{\delta F}{\delta b_n}$ της εξίσωσης 3.32 στην εξίσωση 3.47, προκύπτει

$$\begin{aligned}
\frac{\delta F_{aug}}{\delta b_n} = & \\
= & \int_{\Omega_F} \left(-\frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right) \frac{\partial p}{\partial b_n} d\Omega \\
& + \int_{\Omega_F} \left\{ u_j \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j} v_j - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] \right. \\
& + \left. \frac{\partial q}{\partial x_i} - c_p \frac{\partial T_\alpha^F}{\partial x_i} T^F - \frac{1}{2} \frac{\partial T_\alpha^F}{\partial x_i} v_k^2 - v_i \frac{\partial T_\alpha^F}{\partial x_k} v_k \right\} \frac{\partial v_i}{\partial b_n} d\Omega \\
& + \int_{\Omega_F} \left[-\frac{\partial T_\alpha^F}{\partial x_j} v_j c_p - c_p \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\nu}{Pr} \frac{\partial T_\alpha^F}{\partial x_j} \right) \right] \frac{\partial T^F}{\partial b_n} d\Omega \\
& + \int_{\Omega_S} \left[-\frac{\partial}{\partial x_j} \left(k^S \frac{\partial T_\alpha^S}{\partial x_j} \right) + OF \right] \frac{\partial T^S}{\partial b_n} d\Omega \\
& + \int_{S_F} \left[-n_i q + u_i v_j n_j + \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \nu n_j + T_\alpha^F \left(c_p n_i T^F + \frac{1}{2} n_i v_k^2 + v_i n_k v_k \right) \right] \frac{\partial v_i}{\partial b_n} dS \\
& - \int_{S_F} u_i \nu \frac{\partial}{\partial b_n} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) n_j dS + \int_{S_F} u_i n_i \frac{\partial p}{\partial b_n} dS \\
& + \int_{S_F} \left(c_p \frac{\partial T_\alpha^F}{\partial x_j} \frac{\nu}{Pr} n_j + c_p n_j T_\alpha^F v_j \right) \frac{\partial T^F}{\partial b_n} dS \\
& - \int_{S_F} c_p T_\alpha^F \frac{\nu}{Pr} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial T^F}{\partial b_n} \right) n_j dS \\
& - \int_{S_S} n_j T_\alpha^S k^S \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial T^S}{\partial b_n} \right) dS + \int_{S_S} n_j \frac{\partial T_\alpha^S}{\partial x_j} k^S \frac{\partial T^S}{\partial b_n} dS + sensOF \\
& + \int_{S_F} (q R^p + u_i R_i^v + T_\alpha^F R_F^T) n_k \frac{\delta x_k}{\delta b_n} dS + \int_{S_S} T_\alpha^S R_S^T n_k \frac{\delta x_k}{\delta b_n} dS
\end{aligned} \tag{3.48}$$

Στην εξίσωση 3.48 διακρίνονται τριών ειδών όροι:

(α) χωρικά ολοκληρώματα που περιέχουν τις παραγώγους των μεταβλητών κατάστασης $\frac{\partial p}{\partial b_n}$, $\frac{\partial v_i}{\partial b_n}$, $\frac{\partial T^F}{\partial b_n}$, $\frac{\partial T^S}{\partial b_n}$ από όπου θα προκύψουν οι συζυγείς εξισώσεις,

(β) επιφανειακά ολοκληρώματα που περιέχουν τις παραγώγους των μεταβλητών κατάστασης $\frac{\partial p}{\partial b_n}$, $\frac{\partial v_i}{\partial b_n}$, $\frac{\partial T^F}{\partial b_n}$, $\frac{\partial T^S}{\partial b_n}$ από όπου θα προκύψουν οι συζυγείς οριακές συνθήκες και

(γ) επιφανειακά ολοκληρώματα που περιέχουν τα υπόλοιπα των εξισώσεων κατάστασης (Residuals) R_l^U και τις παραγώγους των γεωμετρικών ποσοτήτων $\frac{\delta x_k}{\delta b_n}$.

Για τον υπολογισμό των χωρικών ολοκληρωμάτων της κατηγορίας (α) α-

παιτείται ο υπολογισμός των παραγώγων των μεταβλητών κατάστασης με την μέθοδο της ευθείας διαφορίσης ή των πεπερασμένων διαφορών. Επειδή, αυτές οι μέθοδοι έχουν υψηλό υπολογιστικό κόστος ο υπολογισμός των παραγώγων των μεταβλητών κατάστασης δεν είναι επιθυμητός. Αντίθετα, ο υπολογισμός των ολοκληρωμάτων των κατηγοριών (β) και (γ) έχουν πολύ μικρό υπολογιστικό κόστος. Συνεπώς, απαλείφοντας τα χωρικά ολοκληρωμάτα της κατηγορίας (α) μειώνεται το υπολογιστικό κόστος των παραγώγων ευαισθησίας.

Στην εξίσωση 3.48 τα ολοκληρώματα της κατηγορίας (α) τίθενται ίσα με μηδέν. Οι εξισώσεις οι οποίες προκύπτουν από αυτή τη διαδικασία ονομάζονται συζυγείς εξισώσεις. Οι συζυγείς εξισώσεις γράφονται

$$R_q = -\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (3.49)$$

$$R_i^u = u_j \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j} v_j - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] + \frac{\partial q}{\partial x_i} - c_p \frac{\partial T_\alpha^F}{\partial x_i} T^F - \frac{1}{2} \frac{\partial T_\alpha^F}{\partial x_i} v_k^2 - v_i \frac{\partial T_\alpha^F}{\partial x_k} v_k = 0 \quad (3.50)$$

$$R_F^{T_\alpha} = -\frac{\partial T_\alpha^F}{\partial x_j} v_j c_p - c_p \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\nu}{Pr} \frac{\partial T_\alpha^F}{\partial x_j} \right) = 0 \quad (3.51)$$

$$R_S^{T_\alpha} = -\frac{\partial}{\partial x_j} \left(k^S \frac{\partial T_\alpha^S}{\partial x_j} \right) + OF = -\frac{\partial}{\partial x_j} \left(k^S \frac{\partial T_\alpha^S}{\partial x_j} \right) + \frac{1}{\int_{\Omega_S} d\Omega} = 0 \quad (3.52)$$

όπου οι $R_q, R_i^u, R_F^{T_\alpha}, R_S^{T_\alpha}$ είναι οι εξισώσεις συζυγούς πίεσης, ταχύτητας, θερμοκρασίας ροής, θερμοκρασίας στερεού αντίστοιχα.

Οι εξισώσεις αυτές είναι ανεξάρτητες των μεταβολών db_n των μεταβλητών σχεδιασμού. Το ίδιο ισχύει και για τις συζυγείς οριακές συνθήκες. Έτσι και η συζυγής λύση είναι ανεξάρτητη των μεταβλητών σχεδιασμού. Επομένως, το υπολογιστικό κόστος της επίλυσης των συζυγών εξισώσεων είναι ανεξάρτητο του πλήθους N των μεταβλητών σχεδιασμού, ενώ το κόστος του υπολογισμού των ολοκληρωμάτων της κατηγορίας (β) και (γ) είναι συγκριτικά αμελητέο.

Ακόμα, οι συζυγείς εξισώσεις έχουν ‘αντίστοιχη’ μορφή με τις εξισώσεις κατάστασης του ευθέος προβλήματος και, για αυτόν το λόγο, η επίλυση των συζυγών εξισώσεων έχει περίπου το ίδιο υπολογιστικό κόστος με την επίλυση των εξισώσεων κατάστασης. Συνεπώς, το υπολογιστικό κόστος της επίλυσης ενός προβλήματος βελτιστοποίησης με N μεταβλητές σχεδιασμού με τη συζυγή μέθοδο είναι περίπου διπλάσιο του υπολογιστικού κόστους της επίλυσης των εξισώσεων κατάστασης του ευθέος προβλήματος [1], μία φορά το υπολογιστικό κόστος για να επιλυθεί το ευθύ πρόβλημα και μία για να επιλυθεί το συζυγές.

Αντίθετα με την ευθεία διαφόριση, η επίλυση ενός προβλήματος βελτιστοποίησης με N μεταβλητές σχεδιασμού απαιτεί $N + 1$ φορές το υπολογιστικό κόστος της επίλυσης του ευθέος προβλήματος. Άρα, για την επίλυση ενός προβλήματος βελτιστοποίησης με $N > 1$ μεταβλητές σχεδιασμού η συζυγής μέθοδος υπερτερεί έναντι της ευθείας ως προς το υπολογιστικό κόστος.[1]

Μετά, την απαλοιφή των ολοκληρωμάτων της κατηγορίας (α) η εξίσωση 3.48 γράφεται

$$\begin{aligned}
\frac{\delta F_{aug}}{\delta b_n} = & \\
= & \int_{S_F} \left[-n_i q + u_i v_j n_j + \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \nu n_j + T_\alpha^F \left(c_p n_i T_\alpha^F + \frac{1}{2} n_i v_k^2 + v_i n_k v_k \right) \right] \frac{\partial v_i}{\partial b_n} dS \\
& \underbrace{\hspace{15em}}_{I1} \\
& - \int_{S_F} u_i \nu \frac{\partial}{\partial b_n} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) n_j dS + \int_{S_F} u_i n_i \frac{\partial p}{\partial b_n} dS \\
& \underbrace{\hspace{15em}}_{I2} \quad \underbrace{\hspace{15em}}_{I3} \\
& + \int_{S_F} \left(c_p \frac{\partial T_\alpha^F}{\partial x_j} \frac{\nu}{Pr} n_j + c_p n_j T_\alpha^F v_j \right) \frac{\partial T^F}{\partial b_n} dS \\
& \underbrace{\hspace{15em}}_{I4} \\
& - \int_{S_F} c_p T_\alpha^F \frac{\nu}{Pr} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial T^F}{\partial b_n} \right) n_j dS \\
& \underbrace{\hspace{15em}}_{I5} \\
& - \int_{S_S} n_j T_\alpha^S k^S \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial T^S}{\partial b_n} \right) dS + \int_{S_S} n_j \frac{\partial T_\alpha^S}{\partial x_j} k^S \frac{\partial T^S}{\partial b_n} dS + sensOF \\
& \underbrace{\hspace{15em}}_{I6} \quad \underbrace{\hspace{15em}}_{I7} \\
& + \int_{S_F} (q R^p + u_i R_i^v + T_\alpha^F R_F^T) n_k \frac{\delta x_k}{\delta b_n} dS + \int_{S_S} T_\alpha^S R_S^T n_k \frac{\delta x_k}{\delta b_n} dS
\end{aligned} \tag{3.53}$$

όπου τα επιφανειακά ολοκληρώματα της κατηγορίας (β) ονομάζονται $I1$ έως $I7$ σύμφωνα με την εξίσωση 3.53.

3.6 Συζυγείς οριακές συνθήκες στο S_F

3.6.1 Συζυγείς οριακές συνθήκες στο $S_{F,I}$

Για $\Phi = v_i$ η εξίσωση 3.8 στο $S_{F,I}$ γράφεται

$$\frac{\delta v_i}{\delta b_n} = \frac{\partial v_i}{\partial b_n} + \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_n} \quad (3.54)$$

Επειδή η οριακή συνθήκη της ταχύτητας στο $S_{F,I}$ είναι Dirichlet ισχύει $\frac{\delta v_i}{\delta b_n} = 0$. Άρα, η εξίσωση 3.89 ξαναγράφεται

$$\frac{\partial v_i}{\partial b_n} = -\frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_n} \quad (3.55)$$

Συνεπώς, ο όρος $I1$ της εξίσωσης 3.53 στο $S_{F,I}$ εξαιτίας της εξίσωσης 3.28 γράφεται

$$\begin{aligned} & - \int_{S_{F,I}} [-n_i q + u_i v_j n_j + \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \nu n_j \\ & + T_\alpha^F \left(c_p n_i T^F + \frac{1}{2} n_i v_k^2 + v_i n_k v_k \right)] \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_n} dS = 0 \end{aligned} \quad (3.56)$$

Για $\Phi = T^F$, η εξίσωση 3.8 στο $S_{F,I}$ γράφεται

$$\frac{\delta T^F}{\delta b_n} = \frac{\partial T^F}{\partial b_n} + \frac{\partial T^F}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_n} \quad (3.57)$$

Επειδή η οριακή συνθήκη της θερμοκρασίας στο $S_{F,I}$ είναι Dirichlet ισχύει $\frac{\delta T^F}{\delta b_n} = 0$. Άρα, η εξίσωση 3.57 ξαναγράφεται

$$\frac{\partial T^F}{\partial b_n} = -\frac{\partial T^F}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_n} \quad (3.58)$$

Συνεπώς, ο όρος $I4$ της εξίσωσης 3.53 στο $S_{F,I}$ εξαιτίας της εξίσωσης 3.28

γράφεται

$$- \underbrace{\int_{S_{F,I}} \left(c_p \frac{\partial T_\alpha^F}{\partial x_j} \frac{\nu}{Pr} n_j + c_p n_j T_\alpha^F v_j \right) \frac{\partial T^F}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_n} dS}_{I4} = 0 \quad (3.59)$$

Για να απαλειφθούν ο όρος $I2$ της εξίσωσης 3.53 στο $S_{F,I}$ και ο όρος $I3$ της εξίσωσης 3.53 στο $S_{F,I}$ αρκεί να επιβληθεί ως οριακή συνθήκη για τη συζυγή ταχύτητα

$$u_i = 0 \quad (3.60)$$

Επομένως

$$- \underbrace{\int_{S_F} u_i \nu \frac{\partial}{\partial b_n} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) n_j dS}_{I2} = 0 \quad (3.61)$$

$$\underbrace{\int_{S_{F,I}} u_i n_i \frac{\partial p}{\partial b_n} dS}_{I3} = 0 \quad (3.62)$$

Όπως στο ευθύ πρόβλημα, στην πίεση επιβάλλεται οριακή συνθήκη zero Neumann έτσι και για το συζυγές πρόβλημα στο $S_{F,I}$ επιβάλλεται για τη συζυγή πίεση οριακή συνθήκη zero Neumann δηλαδή

$$\frac{\partial q}{\partial n} = 0 \quad (3.63)$$

Για να απαλειφθεί ο όρος $I5$ της εξίσωσης 3.53 στο $S_{F,I}$ αρκεί να επιβληθεί ως οριακή συνθήκη για τη συζυγή θερμοκρασία

$$T_a^F = 0 \quad (3.64)$$

Συνεπώς

$$- \underbrace{\int_{S_{F,I}} c_p T_\alpha^F \frac{\nu}{Pr} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial T^F}{\partial b_n} \right) n_j dS}_{I5} = 0 \quad (3.65)$$

3.6.2 Συζυγείς οριακές συνθήκες στο $S_{F,O}$

Για $\Phi = p$, η εξίσωση 3.8 στο $S_{F,O}$ γράφεται

$$\frac{\delta p}{\delta b_n} = \frac{\partial p}{\partial b_n} + \frac{\partial p}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_n} \quad (3.66)$$

Επειδή η οριακή συνθήκη της πίεσης στο $S_{F,O}$ είναι Dirichlet ισχύει $\frac{\delta p}{\delta b_n} = 0$. Άρα, η εξίσωση 3.66 ξαναγράφεται

$$\frac{\partial p}{\partial b_n} = - \frac{\partial p}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_n} \quad (3.67)$$

Άρα, ο όρος $I3$ της εξίσωσης 3.53 στο $S_{F,O}$ εξαιτίας της 3.29 γράφεται

$$- \underbrace{\int_{S_{F,O}} u_i n_i \frac{\partial p}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_n} dS}_{I3} = 0 \quad (3.68)$$

Για το διάνυσμα της ταχύτητας ισχύει

$$v_i = v_n n_i + v_t t_i \quad (3.69)$$

όπου n_i το μοναδιαίο κάθετο στην επιφάνεια διάνυσμα, n_t το μοναδιαίο εφαπτομενικό στην επιφάνεια διάνυσμα, v_n το μέτρο της κάθετης στην επιφάνεια ταχύτητας και v_t το μέτρο της εφαπτομενικής στην επιφάνεια ταχύτητας.

Ομοίως, για το διάνυσμα της συζυγούς ταχύτητας ισχύει

$$u_i = u_n n_i + u_t t_i \quad (3.70)$$

Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις 3.69 και 3.70 ο όρος $I2$ της εξίσωσης 3.53 στο $S_{F,O}$ γράφεται

$$\begin{aligned}
& - \underbrace{\int_{S_{F,O}} u_i \nu \frac{\partial}{\partial b_n} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) n_j dS}_{I2} \\
& = - \int_{S_{F,O}} u_i \nu \frac{\partial}{\partial b_n} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_n} + \frac{\partial v_n}{\partial x_i} \right) dS \\
& = - \int_{S_{F,O}} \nu (u_n n_i + u_i n_t) \frac{\partial}{\partial b_n} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_n} + \frac{\partial v_n}{\partial x_i} \right) dS \\
& = - \int_{S_{F,O}} \nu u_n \frac{\partial}{\partial b_n} \left(\frac{\partial v_n}{\partial n} + \frac{\partial v_n}{\partial n} \right) dS - \int_{S_{F,O}} \nu u_t \frac{\partial}{\partial b_n} \left(\frac{\partial v_t}{\partial n} + \frac{\partial v_n}{\partial t} \right) dS \\
& = - \int_{S_{F,O}} 2\nu u_n \frac{\partial}{\partial b_n} \left(\frac{\partial v_n}{\partial n} \right) dS - \int_{S_{F,O}} \nu u_t \frac{\partial}{\partial b_n} \left(\frac{\partial v_t}{\partial n} + \frac{\partial v_n}{\partial t} \right) dS
\end{aligned} \tag{3.71}$$

Υπολογιστικά πειράματα [13] έχουν δείξει πως ο όρος του αριστερού μέρους της εξίσωσης 3.71 μπορεί να θεωρηθεί αμελητέος. Αυτό μπορεί να εξηγηθεί με την παραδοχή πως η κάθετη στο $S_{F,O}$ και η εφαπτομενική στο $S_{F,O}$ συνιστώσες της ταχύτητας είναι σταθερές ως προς τη διεύθυνση που είναι κάθετη στο $S_{F,O}$ δηλαδή $\frac{\partial v_n}{\partial n} = 0$ και $\frac{\partial v_t}{\partial n} = 0$. Ακόμη, θεωρώντας πως η μεταβολή της κάθετης στο $S_{F,O}$ συνιστώσας της ταχύτητας δηλαδή της v_n ως προς την εφαπτομενική κατεύθυνση είναι μηδενική προκύπτει ότι $\frac{\partial v_n}{\partial t} = 0$.

Ο όρος $I5$ της εξίσωσης 3.53 στο $S_{F,O}$ γράφεται

$$\begin{aligned}
& - \underbrace{\int_{S_{F,O}} c_p T_\alpha^F \frac{\nu}{Pr} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial T^F}{\partial b_n} \right) n_j dS}_{I5} = \\
& = - \int_{S_{F,O}} c_p T_\alpha^F \frac{\nu}{Pr} \frac{\partial}{\partial b_n} \left(\frac{\partial T^F}{\partial x_j} \right) n_j dS \\
& = - \int_{S_{F,O}} c_p T_\alpha^F \frac{\nu}{Pr} \frac{\delta}{\delta b_n} \left(\frac{\partial T^F}{\partial x_j} \right) n_j dS + \int_{S_{F,O}} c_p T_\alpha^F \frac{\nu}{Pr} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial T^F}{\partial x_j} \right) \frac{\delta x_k}{\delta b} n_j dS \\
& = - \int_{S_{F,O}} c_p T_\alpha^F \frac{\nu}{Pr} \frac{\delta}{\delta b_n} \left(\frac{\partial T^F}{\partial x_j} n_j \right) dS + \int_{S_{F,O}} c_p T_\alpha^F \frac{\nu}{Pr} \frac{\delta n_j}{\delta b_n} \frac{\partial T^F}{\partial x_j} dS \\
& + \int_{S_{F,O}} c_p T_\alpha^F \frac{\nu}{Pr} \frac{\partial^2 T^F}{\partial x_j \partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b} n_j dS
\end{aligned} \tag{3.72}$$

Επειδή η οριακή συνθήκη της θερμοκρασίας στο $S_{F,O}$ είναι zeroNeumann ισχύει

$$\frac{\partial T}{\partial x_j} n_j = 0 \quad (3.73)$$

Εξαιτίας της εξίσωσης 3.73, ο πρώτος όρος του αριστερού μέρους της εξίσωσης 3.72 είναι ίσος με μηδέν. Ο δεύτερος και ο τρίτος όρος του αριστερού μέρους της εξίσωσης 3.72 περιέχονται στην τελική έκφραση της παραγώγου ευαισθησίας.

Για να απαλειφθεί ο όρος $I1$ της εξίσωσης 3.53 στο $S_{F,O}$ αρκεί να επιβληθεί ως οριακή συνθήκη η

$$-n_i q + u_i v_j n_j + \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \nu n_j + T_\alpha^F \left(c_p n_i T^F + \frac{1}{2} n_i v_k^2 + v_i n_k v_k \right) = 0 \quad (3.74)$$

Συνεπώς

$$\underbrace{\int_{S_{F,O}} \left[-n_i q + u_i v_j n_j + \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \nu n_j + T_\alpha^F \left(c_p n_i T^F + \frac{1}{2} n_i v_k^2 + v_i n_k v_k \right) \right] \frac{\partial v_i}{\partial b_n} dS}_{I1} = 0 \quad (3.75)$$

Για να απαλειφθεί ο όρος $I4$ της εξίσωσης 3.53 στο $S_{F,O}$ αρκεί να επιβληθεί ως οριακή συνθήκη

$$c_p \frac{\partial T_\alpha^F}{\partial x_j} \frac{\nu}{Pr} n_j + c_p n_j T_\alpha^F v_j = 0 \quad (3.76)$$

Έτσι

$$\underbrace{\int_{S_{F,O}} \left(c_p \frac{\partial T_\alpha^F}{\partial x_j} \frac{\nu}{Pr} n_j + c_p n_j T_\alpha^F v_j \right) \frac{\partial T^F}{\partial b_n} dS}_{I4} = 0 \quad (3.77)$$

Πολλαπλασιάζοντας την εξίσωση 3.74 με n_i προκύπτει

$$q = u_n v_n + \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \nu n_j n_i + T_\alpha^F \left(c_p T^F + \frac{1}{2} v_k^2 + v_n^2 \right) \quad (3.78)$$

Πολλαπλασιάζοντας την εξίσωση 3.74 με t_i προκύπτει

$$0 = u_t v_n + \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \nu n_j t_i + T_\alpha^F v_n v_t \quad (3.79)$$

Εάν η έξοδος του χωρίου της ροής δεν έχει καθόλου ή έχει μικρή καμπυλότητα, οι εξισώσεις 3.78 και 3.79 ξαναγράφονται ως

$$q = u_n v_n + 2\nu \frac{\partial u_n}{\partial n} + T_\alpha^F \left(c_p T^F + \frac{1}{2} v_k^2 + v_n^2 \right) \quad (3.80)$$

και

$$0 = u_t v_n + \left(\frac{\partial u_t}{\partial n} + \frac{\partial u_n}{\partial t} \right) \nu + T_\alpha^F v_n v_t \quad (3.81)$$

Επιπλέον, επιβάλλεται η ακόλουθη συνθήκη ώστε όλη η συζυγής ροή μάζας να εξέρχεται από το $S_{F,O}$

$$\frac{\partial u_n}{\partial n} = 0 \quad (3.82)$$

Ακόμα θεωρείται $\frac{\partial u_t}{\partial n} = 0$ λόγω ομοιομορφίας της ροής όπως ισχύει και για την ταχύτητα $\frac{\partial v_t}{\partial n} = 0$. Έτσι η εξίσωση 3.81 ξαναγράφεται

$$0 = u_t v_n + \nu \frac{\partial u_n}{\partial t} + T_\alpha^F v_n v_t \quad (3.83)$$

Οι εξισώσεις 3.80, 3.83, 3.82 και 3.76 αρκούν για τον υπολογισμό της ροής στο $S_{F,O}$. Η εξίσωση 3.80 χρησιμοποιείται για τον προσδιορισμό της συζυγούς πίεσης. Επίσης, οι εξισώσεις 3.83 και 3.82 χρησιμοποιούνται για τον προσδιορισμό της συζυγούς ταχύτητας. Τέλος, η εξίσωση 3.76 χρησιμοποιείται για τον προσδιορισμό της συζυγούς θερμοκρασίας του ρευστού στο $S_{F,O}$.

3.6.3 Συζυγείς οριακές συνθήκες στο $S_{F,W}$

Επειδή η οριακή συνθήκη της ταχύτητας στο $S_{F,W}$ είναι Dirichlet ισχύει $\frac{\delta v_i}{\delta b_n} = 0$. Συνεπώς, η εξίσωση 3.8 για $\Phi = v_i$ ξαναγράφεται

$$\frac{\partial v_i}{\partial b_n} = - \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_n} \quad (3.84)$$

Με χρήση της εξίσωσης 3.84 ο όρος $I1$ της εξίσωσης 3.53 στο $S_{F,W}$ γράφεται

$$\begin{aligned} & \int_{S_{F,W}} \underbrace{\left[-n_i q + u_i v_j n_j + \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \nu n_j + T_\alpha^F \left(c_p n_i T^F + \frac{1}{2} n_i v_k^2 + v_i n_k v_k \right) \right]}_{I1} \frac{\partial v_i}{\partial b_n} dS = \\ & - \int_{S_{F,W}} \left[-n_i q + \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \nu n_j + T_\alpha^F c_p n_i T^F \right] \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_n} dS \end{aligned} \quad (3.85)$$

Ο όρος του δεξιού μέλους της εξίσωσης 3.87 συμπεριλαμβάνεται στην τελική έκφραση της παραγώγου ευαισθησίας.

Επειδή $v_i = 0$, ο όρος $I4$ της εξίσωσης 3.53 στο $S_{F,W}$ γράφεται

$$\int_{S_{F,W}} \underbrace{\left(c_p \frac{\partial T_\alpha^F}{\partial x_j} \frac{\nu}{Pr} n_j + c_p n_j T_\alpha^F v_j \right)}_{I4} \frac{\partial T^F}{\partial b_n} dS = \int_{S_{F,W}} c_p \frac{\nu}{Pr} \frac{\partial T_\alpha^F}{\partial x_j} n_j \frac{\partial T^F}{\partial b_n} dS \quad (3.86)$$

Για να απαλειφθεί ο όρος του δεξιού μέλους της εξίσωσης 3.86 επιβάλλεται η οριακή συνθήκη

$$\frac{\partial T_\alpha^F}{\partial x_j} n_j = 0 \quad (3.87)$$

Όπως και στο $S_{F,I}$ για να απαλειφθούν ο όρος $I2$ της εξίσωσης 3.53 στο $S_{F,O}$ και ο όρος $I3$ της εξίσωσης 3.53 στο $S_{F,O}$ αρκεί να επιβληθεί ως οριακή συνθήκη για τη συζυγή ταχύτητα η εξίσωση 3.60.

Για τη συζυγή πίεση ισχύει πάλι η εξίσωση 3.63.

Ο όρος $I5$ της εξίσωσης 3.53 στο $S_{F,W}$ γράφεται

$$\begin{aligned}
& - \underbrace{\int_{S_{F,W}} c_p T_\alpha^F \frac{\nu}{Pr} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial T^F}{\partial b_n} \right) n_j dS}_{I5} \\
& = - \int_{S_{F,W}} c_p T_\alpha^F \frac{\nu}{Pr} \frac{\partial}{\partial b_n} \left(\frac{\partial T^F}{\partial x_j} \right) n_j dS \\
& = - \int_{S_{F,W}} c_p T_\alpha^F \frac{\nu}{Pr} \frac{\delta}{\delta b_n} \left(\frac{\partial T^F}{\partial x_j} \right) n_j dS + \int_{S_{F,W}} c_p T_\alpha^F \frac{\nu}{Pr} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial T^F}{\partial x_j} \right) \frac{\delta x_k}{\delta b} n_j dS \\
& = - \int_{S_{F,W}} c_p T_\alpha^F \frac{\nu}{Pr} \frac{\delta}{\delta b_n} \left(\frac{\partial T^F}{\partial x_j} n_j \right) dS + \int_{S_{F,W}} c_p T_\alpha^F \frac{\nu}{Pr} \frac{\delta n_j}{\delta b_n} \frac{\partial T^F}{\partial x_j} dS \\
& + \int_{S_{F,W}} c_p T_\alpha^F \frac{\nu}{Pr} \frac{\partial^2 T^F}{\partial x_j \partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b} n_j dS
\end{aligned} \tag{3.88}$$

Όπου ο πρώτος όρος του δεξιού μέλους είναι ίσος με μηδέν διότι $\frac{\partial T}{\partial x_j} n_j = 0$ αφού η οριακή συνθήκη της θερμοκρασίας στο $S_{F,W}$ είναι zero Neumann. Ο δεύτερος και ο τελευταίος όρος του δεξιού μέλους περιέχονται στην τελική έκφραση της παραγώγου ευαισθησίας.

3.7 Συζυγείς οριακές συνθήκες στη διεπιφάνεια FSI

Για $\Phi = v_i$, η εξίσωση 3.8 στο FSI_F γράφεται

$$\frac{\delta v_i}{\delta b_n} = \frac{\partial v_i}{\partial b_n} + \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_n} \tag{3.89}$$

Επειδή η οριακή συνθήκη της ταχύτητας στο FSI_F είναι Dirichlet ισχύει $\frac{\delta v_i}{\delta b_n} = 0$. Άρα η εξίσωση 3.89 ξαναγράφεται

$$\frac{\partial v_i}{\partial b_n} = - \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_n} \tag{3.90}$$

Συνεπώς, ο όρος $I1$ της εξίσωσης 3.53 στο FSI_F γράφεται

$$\begin{aligned}
& \underbrace{\int_{FSI_F} \left[-n_i q + u_i v_j n_j + \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \nu n_j + T_\alpha^F \left(c_p n_i T^F + \frac{1}{2} n_i v_k^2 + v_i n_k v_k \right) \right] \frac{\partial v_i}{\partial b_n} dS}_{\text{II}} \\
&= - \int_{FSI_F} \left[-n_i q + \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \nu n_j + T_\alpha^F c_p n_i T^F \right] \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_n} dS
\end{aligned} \tag{3.91}$$

Ο όρος του δεξιού μέλους της εξίσωσης 3.91 συμπεριλαμβάνεται στην τελική έκφραση των παραγώγων ευαισθησίας.

Για τη συζυγή πίεση ισχύουν πάλι οι οριακές συνθήκες που περιγράφονται από την εξίσωση 3.63.

Αθροίζοντας τους όρους I4, I7 της εξίσωσης 3.53 στο *FSI* γράφεται

$$\begin{aligned}
& \underbrace{\int_{FSI_F} \left(c_p \frac{\partial T_\alpha^F}{\partial x_j} \frac{\nu}{Pr} n_j + c_p n_j T_\alpha^F v_j \right) \frac{\partial T^F}{\partial b_n} dS}_{\text{I4}} + \underbrace{\int_{FSI_S} n_j \frac{\partial T_\alpha^S}{\partial x_j} k^S \frac{\partial T^S}{\partial b_n} dS}_{\text{I7}} \\
&= \int_{FSI_F} c_p \frac{\partial T_\alpha^F}{\partial x_j} \frac{\nu}{Pr} n_j \frac{\partial T^F}{\partial b_n} dS + \int_{FSI_S} n_j \frac{\partial T_\alpha^S}{\partial x_j} k^S \frac{\partial T^S}{\partial b_n} dS \\
&= \int_{FSI_F} c_p \frac{\partial T_\alpha^F}{\partial x_j} \frac{\nu}{Pr} n_j \frac{\delta T^F}{\delta b_n} dS + \int_{FSI_S} n_j \frac{\partial T_\alpha^S}{\partial x_j} k^S \frac{\delta T^S}{\delta b_n} dS \\
&- \int_{FSI_F} c_p \frac{\partial T_\alpha^F}{\partial x_j} \frac{\nu}{Pr} n_j \frac{\partial T^F}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_n} dS - \int_{FSI_S} n_j \frac{\partial T_\alpha^S}{\partial x_j} k^S \frac{\partial T^S}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_n} dS
\end{aligned} \tag{3.92}$$

Στη διεπιφάνεια *FSI* ισχύει

$$T^S = T^F \tag{3.93}$$

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση 3.93 στην εξίσωση 3.92 γράφεται

$$\begin{aligned}
& \underbrace{\int_{FSI_F} \left(c_p \frac{\partial T_\alpha^F}{\partial x_j} \frac{\nu}{Pr} n_j + c_p n_j T_\alpha^F v_j \right) \frac{\partial T^F}{\partial b_n} dS}_{I4} + \underbrace{\int_{FSI_S} n_j \frac{\partial T_\alpha^S}{\partial x_j} k^S \frac{\partial T^S}{\partial b_n} dS}_{I7} \\
&= \int_{FSI_F} \left(c_p \frac{\partial T_\alpha^F}{\partial n} \frac{\nu}{Pr} + \frac{\partial T_\alpha^S}{\partial n} k^S \right) \frac{\delta T^S}{\delta b_n} dS - \int_{FSI_F} \left(c_p \frac{\partial T_\alpha^F}{\partial n} \frac{\nu}{Pr} \right) \frac{\partial T^S}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_n} dS \\
&- \int_{FSI_S} \left(\frac{\partial T_\alpha^S}{\partial n} k^S \right) \frac{\partial T^S}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_n} dS
\end{aligned} \tag{3.94}$$

Οι δύο τελευταίοι όροι του δεξιού μέλους της εξίσωσης 3.94 συμπεριλαμβάνονται στην τελική έκφραση της παραγώγου ευαισθησίας. Για να απαλειφθεί ο πρώτος όρος επιβάλεται η οριακή συνθήκη

$$c_p \frac{\partial T_\alpha^F}{\partial n} \frac{\nu}{Pr} + \frac{\partial T_\alpha^S}{\partial n} k^S = 0 \Rightarrow c_p \frac{\nu}{Pr} \frac{\partial T_\alpha^F}{\partial n} = -k^S \frac{\partial T_\alpha^S}{\partial n} \Rightarrow q_\alpha^F = -q_\alpha^S \tag{3.95}$$

Η σημασία της εξίσωσης 3.95 είναι πως το συζυγές ρεύμα θερμότητας το οποίο εισέρχεται από τη ροή στο στερεό είναι ίσο και αντίθετο αυτού που εισέρχεται από το στερεό στη ροή.

Αθροίζοντας τους όρους $I5, I6$ της εξίσωσης 3.53 στο FSI_F γράφεται

$$\begin{aligned}
& - \underbrace{\int_{FSI_F} c_p T_\alpha^F \frac{\nu}{Pr} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial T^F}{\partial b_n} \right) n_j dS}_{I5} - \underbrace{\int_{FSI_F} n_j T_\alpha^S k^S \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial T^S}{\partial b_n} \right) dS}_{I6} \\
& = - \int_{FSI_F} c_p T_\alpha^F \frac{\nu}{Pr} \frac{\partial}{\partial b_n} \left(\frac{\partial T^F}{\partial x_j} \right) n_j dS - \int_{FSI_F} n_j T_\alpha^S k^S \frac{\partial}{\partial b_n} \left(\frac{\partial T^S}{\partial x_j} \right) dS \\
& = - \int_{FSI_F} c_p T_\alpha^F \frac{\nu}{Pr} \frac{\delta}{\delta b_n} \left(\frac{\partial T^F}{\partial x_j} \right) n_j dS - \int_{FSI_F} n_j T_\alpha^S k^S \frac{\delta}{\delta b_n} \left(\frac{\partial T^S}{\partial x_j} \right) dS \\
& + \int_{FSI_F} c_p T_\alpha^F \frac{\nu}{Pr} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial T^F}{\partial x_j} \right) \frac{\delta x_k}{\delta b_n} n_j dS + \int_{FSI_F} n_j T_\alpha^S k^S \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial T^S}{\partial x_j} \right) \frac{\delta x_k}{\delta b_n} dS \\
& = - \int_{FSI_F} c_p T_\alpha^F \frac{\nu}{Pr} \frac{\delta}{\delta b_n} \left(\frac{\partial T^F}{\partial x_j} n_j \right) dS - \int_{FSI_F} T_\alpha^S k^S \frac{\delta}{\delta b_n} \left(\frac{\partial T^S}{\partial x_j} n_j \right) dS \\
& + \int_{FSI_F} c_p T_\alpha^F \frac{\nu}{Pr} \frac{\delta n_j}{\delta b_n} \frac{\partial T^F}{\partial x_j} dS + \int_{FSI_F} T_\alpha^S k^S \frac{\delta n_j}{\delta b_n} \frac{\partial T^S}{\partial x_j} dS \\
& + \int_{FSI_F} c_p T_\alpha^F \frac{\nu}{Pr} \frac{\partial^2 T^F}{\partial x_k \partial x_j} \frac{\delta x_k}{\delta b_n} n_j dS + \int_{FSI_F} n_j T_\alpha^S k^S \frac{\partial^2 T^S}{\partial x_k \partial x_j} \frac{\delta x_k}{\delta b_n} dS \\
& = - \int_{FSI_F} (T_\alpha^F - T_\alpha^S) \frac{\delta}{\delta b_n} c_p \frac{\nu}{Pr} \frac{\partial T^F}{\partial n} dS + \int_{FSI_F} c_p T_\alpha^F \frac{\nu}{Pr} \frac{\delta n_j}{\delta b_n} \frac{\partial T^F}{\partial x_j} dS \\
& + \int_{FSI_F} T_\alpha^S k^S \frac{\delta n_j}{\delta b_n} \frac{\partial T^S}{\partial x_j} dS + \int_{FSI_F} c_p T_\alpha^F \frac{\nu}{Pr} \frac{\partial^2 T^F}{\partial x_k \partial x_j} \frac{\delta x_k}{\delta b_n} n_j dS \\
& + \int_{FSI_F} n_j T_\alpha^S k^S \frac{\partial^2 T^S}{\partial x_k \partial x_j} \frac{\delta x_k}{\delta b_n} dS
\end{aligned} \tag{3.96}$$

Εδώ, όλοι οι όροι του δεξιού μέλους της εξίσωσης 3.96 περιέχονται στην τελική έκφραση της παραγώγου ευαισθησίας, εκτός του πρώτου. Για να απαλειφθεί ο πρώτος όρος του δεξιού μέλους της εξίσωσης 3.96 επιβάλλεται η οριακή συνθήκη

$$T_\alpha^F = T_\alpha^S \tag{3.97}$$

Η σημασία της εξίσωσης 3.97 είναι πως η συζυγής θερμοκρασία της ροής είναι ίση με αυτή του στερεού.

3.8 Συζυγείς οριακές συνθήκες στα όρια του χωρίου του στερεού S_S

3.8.1 Συζυγείς οριακές συνθήκες στο $S_{S,W}$

Ο όρος $I6$ της εξίσωσης 3.53 στο $S_{S,W}$ γράφεται

$$\begin{aligned}
 & \underbrace{- \int_{S_{S,W}} n_j T_\alpha^S k^S \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial T^S}{\partial b_n} \right) dS}_{I6} \\
 &= - \int_{S_{S,W}} n_j T_\alpha^S k^S \frac{\partial}{\partial b_n} \left(\frac{\partial T^S}{\partial x_j} \right) dS \\
 &= - \int_{S_{S,W}} n_j T_\alpha^S k^S \frac{\delta}{\delta b_n} \left(\frac{\partial T^S}{\partial x_j} \right) dS + \int_{S_{S,W}} n_j T_\alpha^S k^S \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial T^S}{\partial x_j} \right) \frac{\delta x_k}{\delta b} dS \\
 &= - \int_{S_{S,W}} T_\alpha^S k^S \frac{\delta}{\delta b_n} \left(\frac{\partial T^S}{\partial x_j} n_j \right) dS + \int_{S_{S,W}} T_\alpha^S k^S \frac{\delta n_j}{\delta b_n} \frac{\partial T^S}{\partial x_j} dS \\
 &+ \int_{S_{S,W}} n_j T_\alpha^S k^S \frac{\partial^2 T^S}{\partial x_j \partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b} dS
 \end{aligned} \tag{3.98}$$

όπου ο πρώτος όρος του δεξιού μέλους της εξίσωσης 3.98 είναι ίσος με μηδέν διότι $\frac{\partial T}{\partial x_j} n_j = 0$, αφού η οριακή συνθήκη της θερμοκρασίας στο $S_{S,W}$ είναι zero Neumann. Οι υπόλοιποι όροι του δεξιού μέλους συμπεριλαμβάνονται στην τελική έκφραση της παραγωγού ευαισθησίας.

Για να μηδενιστεί ο όρος $I7$ της εξίσωσης 3.53 στο $S_{S,W}$ επιβάλλεται η οριακή συνθήκη

$$n_j \frac{\partial T_\alpha^S}{\partial x_j} = 0 \tag{3.99}$$

Συνεπώς,

$$\underbrace{\int_{S_{S,W}} n_j \frac{\partial T_\alpha^S}{\partial x_j} k^S \frac{\partial T^S}{\partial b_n} dS}_{I7} = 0 \tag{3.100}$$

3.8.2 Συζυγείς οριακές συνθήκες στο $S_{S,B}$

Για να μηδενιστεί ο όρος $I6$ της εξίσωσης 3.53 στο $S_{S,W}$ επιβάλλεται η οριακή συνθήκη

$$T_\alpha^S = 0 \quad (3.101)$$

Συνεπώς

$$-\underbrace{\int_{S_{S,B}} n_j T_\alpha^S k^S \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial T^S}{\partial b_n} \right) dS}_{I6} = 0 \quad (3.102)$$

Σύμφωνα με την εξίσωση 3.27 και για $\Phi = T^S$ η εξίσωση 3.8 στο $S_{S,B}$ γράφεται

$$\frac{\delta T^S}{\delta b_n} = \frac{\partial T^S}{\partial b_n} \quad (3.103)$$

Επειδή η οριακή συνθήκη της θερμοκρασίας στο $S_{S,B}$ είναι τύπου Dirichlet ισχύει $\frac{\delta T^S}{\delta b_n} = 0$. Άρα η εξίσωση 3.103 ξαναγράφεται

$$\frac{\partial T^S}{\partial b_n} = 0 \quad (3.104)$$

Ο όρος $I7$ της εξίσωσης 3.53 στο $S_{S,B}$ γράφεται

$$\underbrace{\int_{S_B} n_j \frac{\partial T_\alpha^S}{\partial x_j} k^S \frac{\partial T^S}{\partial b_n} dS}_{I7} = 0 \quad (3.105)$$

3.9 Τελική έκφραση της παραγώγων ευαισθησίας

Μετά την απαλοιφή των συζυγών εξισώσεων και των οριακών συνθηκών η παράγωγος ευαισθησίας λαμβάνει την εξής μορφή

$$\begin{aligned}
\frac{\delta F_{aug}}{\delta b_n} = & - \int_{S_{F,W}} \left[-n_i q + \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \nu n_j + T_\alpha^F c_p n_i T^F \right] \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_n} dS \\
& + \int_{S_{F,W}} c_p T_\alpha^F \frac{\nu}{Pr} \frac{\partial^2 T^F}{\partial x_j \partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_n} n_j dS + \int_{S_{F,W}} c_p T_\alpha^F \frac{\nu}{Pr} \frac{\partial T^F}{\partial x_j} \frac{\delta n_j}{\delta b_n} dS \\
& + \int_{S_{S,W}} n_j T_\alpha^S k^S \frac{\partial^2 T^S}{\partial x_j \partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_n} dS \\
& - \int_{FSI_F} \left[-n_i q + \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \nu n_j + T_\alpha^F c_p n_i T^F \right] \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_n} dS \\
& - \int_{FSI_F} c_p T_\alpha^F \frac{\nu}{Pr} \frac{\partial T_\alpha^F}{\partial x_j} n_j \frac{\partial T^F}{\partial x_j} \frac{\delta x_k}{\delta b_n} dS + \int_{FSI_F} c_p T_\alpha^F \frac{\nu}{Pr} \frac{\partial^2 T^F}{\partial x_k \partial x_j} \frac{\delta x_k}{\delta b_n} n_j dS \\
& + \int_{FSI_F} c_p T_\alpha^F \frac{\nu}{Pr} \frac{\partial T^F}{\partial x_j} \frac{\delta n_j}{\delta b_n} dS \\
& - \int_{FSI_S} k^S \frac{\partial T_\alpha^S}{\partial x_j} n_j \frac{\partial T^S}{\partial x_j} \frac{\delta x_k}{\delta b_n} dS + \int_{FSI_S} n_j T_\alpha^S k^S \frac{\partial^2 T^S}{\partial x_j \partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_n} dS + \int_{FSI_S} T_\alpha^S k^S \frac{\partial T^S}{\partial x_j} \frac{\delta n_j}{\delta b_n} dS \\
& + \int_{FSI_F} n_j T_\alpha^S k^S \frac{\partial^2 T^S}{\partial x_k \partial x_j} \frac{\delta x_k}{\delta b_n} dS + sensOF \\
& + \int_{S_F} (q R^p + u_i R_i^v + T_\alpha^F R_F^T) n_k \frac{\delta x_k}{\delta b_n} dS + \int_{S_S} T_\alpha^S R_S^T n_k \frac{\delta x_k}{\delta b_n} dS
\end{aligned} \tag{3.106}$$

Αντικαθιστώντας την εξίσωση 3.34 στην εξίσωση 3.106 προκύπτει η τελική έκφραση της παραγώγου ευαισθησίας

$$\begin{aligned}
\frac{\delta F_{aug}}{\delta b_n} = & - \int_{S_{F,W}} \left[-n_i q + \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \nu n_j + T_\alpha^F c_p n_i T^F \right] \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_n} dS \\
& + \int_{S_{F,W}} c_p T_\alpha^F \frac{\nu}{Pr} \frac{\partial^2 T^F}{\partial x_j \partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_n} n_j dS + \int_{S_{F,W}} c_p T_\alpha^F \frac{\nu}{Pr} \frac{\partial T^F}{\partial x_j} \frac{\delta n_j}{\delta b_n} dS \\
& + \int_{S_{S,W}} n_j T_\alpha^S k^S \frac{\partial^2 T^S}{\partial x_j \partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_n} dS \\
& - \int_{FSI_F} \left[-n_i q + \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \nu n_j + T_\alpha^F c_p n_i T^F \right] \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_n} dS \\
& - \int_{FSI_F} c_p T_\alpha^F \frac{\nu}{Pr} \frac{\partial T_\alpha^F}{\partial x_j} n_j \frac{\partial T^F}{\partial x_j} \frac{\delta x_k}{\delta b_n} dS + \int_{FSI_F} c_p T_\alpha^F \frac{\nu}{Pr} \frac{\partial^2 T^F}{\partial x_k \partial x_j} \frac{\delta x_k}{\delta b_n} n_j dS \\
& + \int_{FSI_F} c_p T_\alpha^F \frac{\nu}{Pr} \frac{\partial T^F}{\partial x_j} \frac{\delta n_j}{\delta b_n} dS \\
& - \int_{FSI_S} k^S \frac{\partial T_\alpha^S}{\partial x_j} n_j \frac{\partial T^S}{\partial x_j} \frac{\delta x_k}{\delta b_n} dS + \int_{FSI_S} n_j T_\alpha^S k^S \frac{\partial^2 T^S}{\partial x_j \partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_n} dS + \int_{FSI_S} T_\alpha^S k^S \frac{\partial T^S}{\partial x_j} \frac{\delta n_j}{\delta b_n} dS \\
& + \int_{FSI_S} n_j T_\alpha^S k^S \frac{\partial^2 T^S}{\partial x_k \partial x_j} \frac{\delta x_k}{\delta b_n} dS \\
& + \int_{FSI_S} \left[\left(\frac{T^S}{\int_{\Omega_S} d\Omega} \right) - \left(\frac{\int_{\Omega_S} T^S d\Omega}{(\int_{\Omega_S} d\Omega)^2} \right) \right] n_k \frac{\delta x_k}{\delta b} dS \\
& + \int_{S_F} (q R^p + u_i R_i^v + T_\alpha^F R_F^T) n_k \frac{\delta x_k}{\delta b_n} dS + \int_{S_S} T_\alpha^S R_S^T n_k \frac{\delta x_k}{\delta b_n} dS
\end{aligned} \tag{3.107}$$

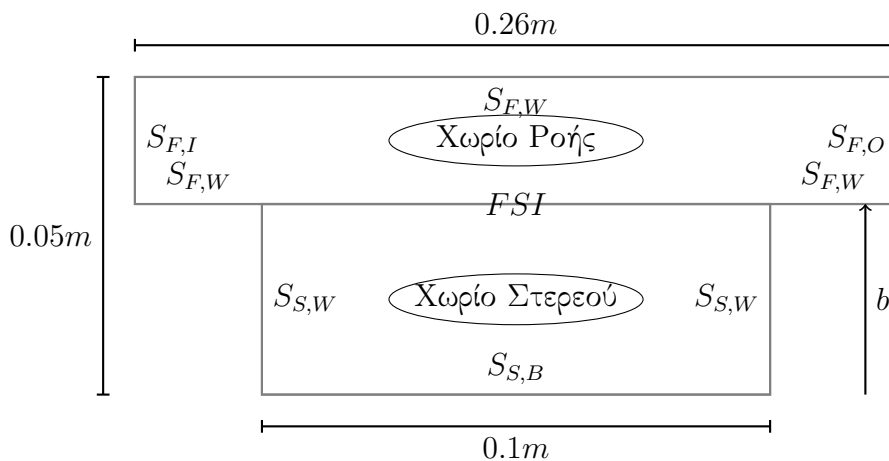
Κεφάλαιο 4

Επίλυση του ευθέος προβλήματος - συγκρίσεις

Στο παρόν κεφάλαιο παρουσιάζονται τα αποτελέσματα για το ευθύ πρόβλημα. Ακόμα, παρουσιάζονται η γεωμετρία και οι σταθερές που επιλέχθηκαν για το Συζευγμένο Πρόβλημα Μεταφοράς Θερμότητας. Τέλος, πραγματοποιείται σύγκριση των αποτελεσμάτων για διαφορετικές τιμές της αντικειμενικής συνάρτησης.

4.1 Γεωμετρία και σταθερές ροής

Η γεωμετρία του προβλήματος είναι αυτή που έχει προαναφερθεί στο σχήμα 3.1. Οι διαστάσεις της γεωμετρίας αυτής φαίνονται στο σχήμα 4.1.



Σχήμα 4.1: Διάταξη προς βελτιστοποίηση όπου ορίζονται οι ακριβείς της διαστάσεις.

Οι τιμές που χρησιμοποιούνται για τις οριακές συνθήκες αναφέρονται στον πίνακα 4.1.

Πίνακας 4.1: Οριακές συνθήκες ευθέος προβλήματος

Όριο	$p \left(\frac{kg}{ms^2} \right)$	$v_i \left(\frac{m}{s} \right)$	$T (K)$
$S_{F,I}$	zero Neumann	1	300
$S_{F,O}$	0	zero Neumann	zero Neumann
$S_{F,W}$	zero Neumann	0	zero Neumann
$S_{S,W}$	-	-	zero Neumann
$S_{S,B}$	-	-	500

Στο σχήμα 3.1 φαίνεται πως το εμβαδό της εισόδου της ροής $A_{S_{F,I}}$ είναι αντιστρόφως ανάλογο της μεταβλητής σχεδιασμού b . Για την παροχή όγκου \dot{V} στο $S_{F,I}$ ισχύει

$$\dot{V} = v_n A_{S_{F,I}} \quad (4.1)$$

Εφόσον η κάθετη ταχύτητα v_n είναι σταθερή και ίση με $1 \frac{m}{s}$ σε όλο το $S_{F,I}$ συνεπάγεται πως η παροχή της ροής \dot{V} είναι αντιστρόφως ανάλογη της μεταβλητής σχεδιασμού b σύμφωνα με την εξίσωση 4.1. Η ροή απάγει θερμότητα από το στερεό κυρίως μέσω συναγωγής. Το ποσό της θερμότητας που απάγεται λόγω συναγωγής είναι ανάλογο της παροχής. Συνεπώς, η θερμότητα που απάγεται λόγω συναγωγής είναι αντιστρόφως ανάλογη της μεταβλητής σχεδιασμού b .

Επειδή η προς ελαχιστοποίηση αντικειμενική συνάρτηση εκφράζει τη μέση θερμοκρασία του χωρίου του στερεού, είναι θεμιτό η θερμότητα που απάγεται από το στερεό να μεγιστοποιηθεί. Αυτό θα συνέβαινε αν η μεταβλητή σχεδιασμού b έπαιρνε τη ελάχιστη δυνατή τιμή της. Όμως κάτι τέτοιο θα μείωνε την επίδραση της διάχυσης της θερμότητας στο στερεό. Στο όριο $S_{S,B}$ έχει επιβληθεί σταθερή θερμοκρασία $500K$. Συνεπώς, για χαμηλές τιμές της μεταβλητής σχεδιασμού b , η μέση θερμοκρασία του χωρίου του στερεού τείνει στην τιμή της θερμοκρασίας του ορίου $S_{S,B}$ η οποία είναι ιδιαίτερα υψηλή. Δηλαδή οι χαμηλές τιμές της μεταβλητής σχεδιασμού b αντιστοιχούν σε υψηλές τιμές της αντικειμενικής συνάρτησης.

Άρα για ακραίες, χαμηλές τιμές της μεταβλητής σχεδιασμού b υπάρχει έντονη επίδραση του φαινομένου της συναγωγής ενώ για ακραίες, υψηλές τιμές υπάρχει έντονη επίδραση του φαινομένου της διάχυσης. Εξαιτίας αυτού, η βέλτιστη λύση αναμένεται να βρίσκεται σε μία ενδιάμεση τιμή της μεταβλητής σχεδιασμού b όπως θα δειχθεί παρακάτω.

Πίνακας 4.2: Σταθερές προβλήματος συζευγμένης μεταφοράς θερμότητας

Χωρίο	$k \left(\frac{W}{mK} \right)$	$c_p \left(\frac{J}{kgK} \right)$	$\nu \left(\frac{m^2}{s} \right)$	Pr
Ω_F	0.022	1004.5	15.11×10^{-6}	0.7
Ω_S	80	-	-	-

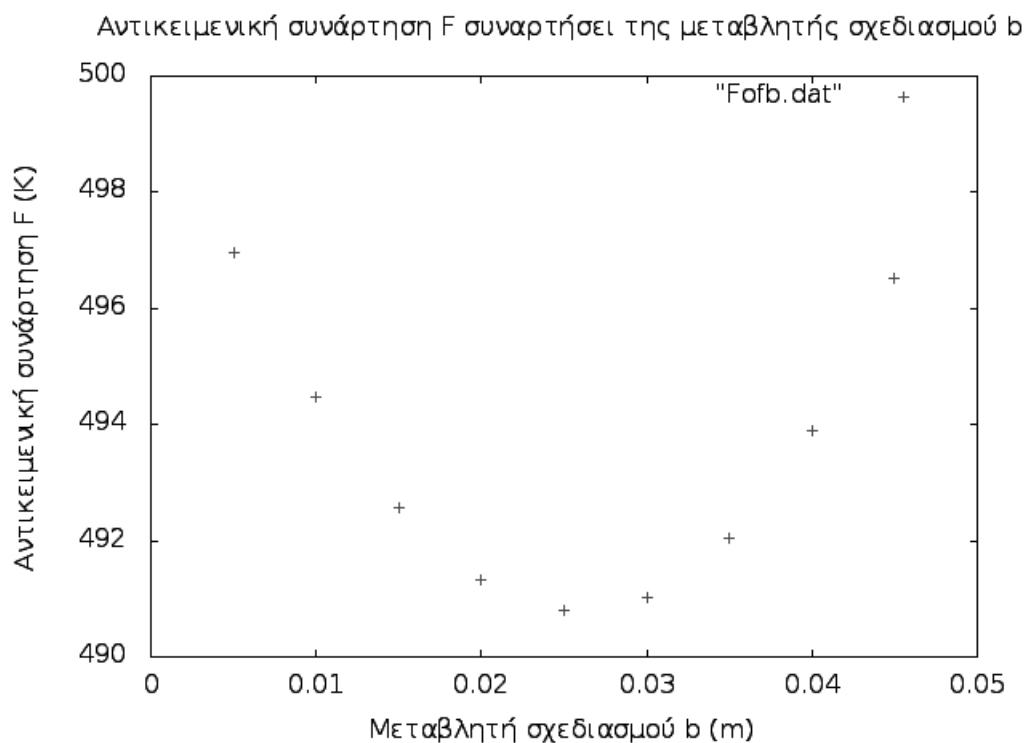
Οι σταθερές για το πρόβλημα παρουσιάζονται στον πίνακα 4.2. Για το χωρίο της ροής Ω_F οι τιμές σταθερών έχουν επιλεγθεί για τον αέρα. Για το χωρίο του στερεού Ω_S οι τιμές σταθερών έχουν επιλεγθεί για τον χαλκό. Ακόμα η θερμική αγωγιμότητα της ροής k^F υπολογίζεται σύμφωνα με τον τύπο

$$k^F = \frac{\nu}{Pr} c_p \quad (4.2)$$

Συγκρίνοντας τις τιμές της θερμικής αγωγιμότητας $k^F = 0.022$ (χωρίο Ω_F) και $k^S = 80$ (χωρίο Ω_S) είναι προφανές πως η θερμική αγωγιμότητα στο χωρίο Ω_S είναι πολύ μεγαλύτερη από ότι στο χωρίο Ω_F . Αυτό επιβεβαιώνει τον ισχυρισμό πως η μεταφορά θερμότητας γίνεται κυρίως μέσω αγωγής στο χωρίο Ω_S ενώ στο χωρίο Ω_F γίνεται κυρίως λόγω συναγωγής.

4.2 Σύγκριση τιμών αντικειμενικής συνάρτησης για διαφορετικές τιμές της μεταβλητής σχεδιασμού

Για να επιβεβαιωθεί ο ισχυρισμός πως οι ακραίες τιμές της μεταβλητής σχεδιασμού b δίνουν συγκριτικά μεγάλες τιμές για την αντικειμενική συνάρτηση εκτελέστηκαν δοκιμές για διάφορες τιμές του b . Τα αποτελέσματα αυτών των δοκιμών παρουσιάζονται στο σχήμα 4.2, όπου πράγματι παρατηρείται πως οι ενδιάμεσες τιμές του b ($b = 0.02 - 0.03m$) δίνουν καλύτερα αποτελέσματα.



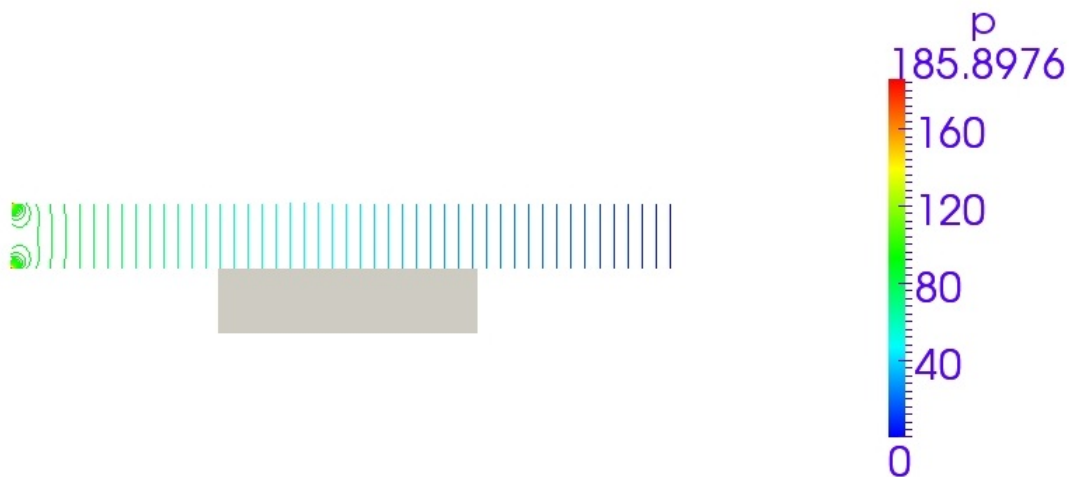
Σχήμα 4.2: Οι τιμές της αντικειμενικής συνάρτησης F για διάφορες τιμές της μεταβλητής σχεδιασμού b .

Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται αναλυτικά στον πίνακα 4.3. Εξετάζοντας τα δεδομένα του πίνακα 4.3, του διαγράμματος 4.2 παρατηρείται πως η συνάρτηση $F(b)$ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο κοντά στο $b = 0.025m$ το οποίο θα είναι και το ολικό ελάχιστο στο διάστημα $(0, 0.05)$.

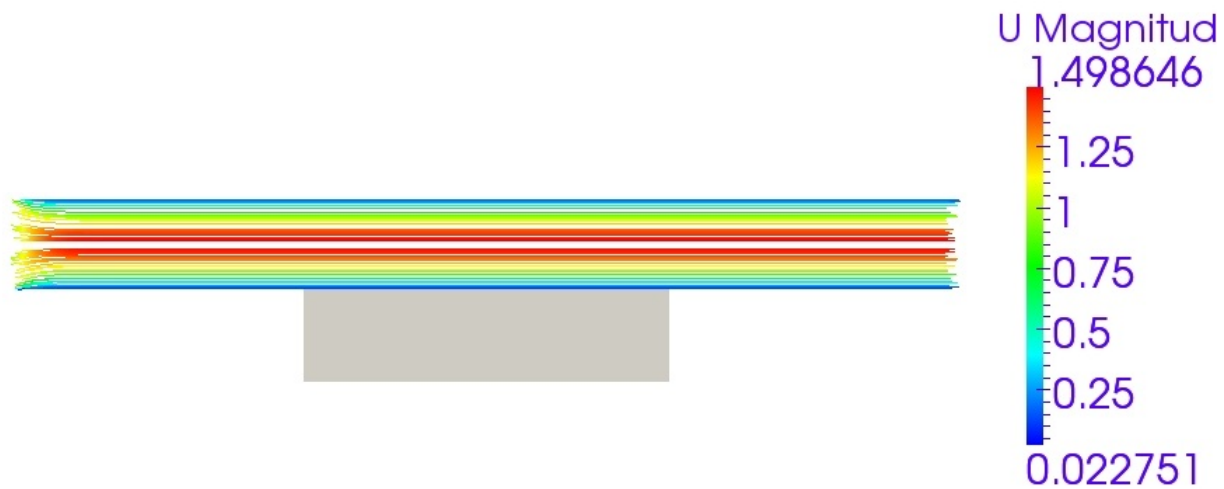
Πίνακας 4.3: $F(b)$

$b(m)$	$F(K)$
0.005	496.9601
0.01	494.4687
0.015	492.5703
0.020	491.3239
0.025	490.7912
0.030	491.0244
0.035	492.0541
0.04	493.8893
0.045	496.5303

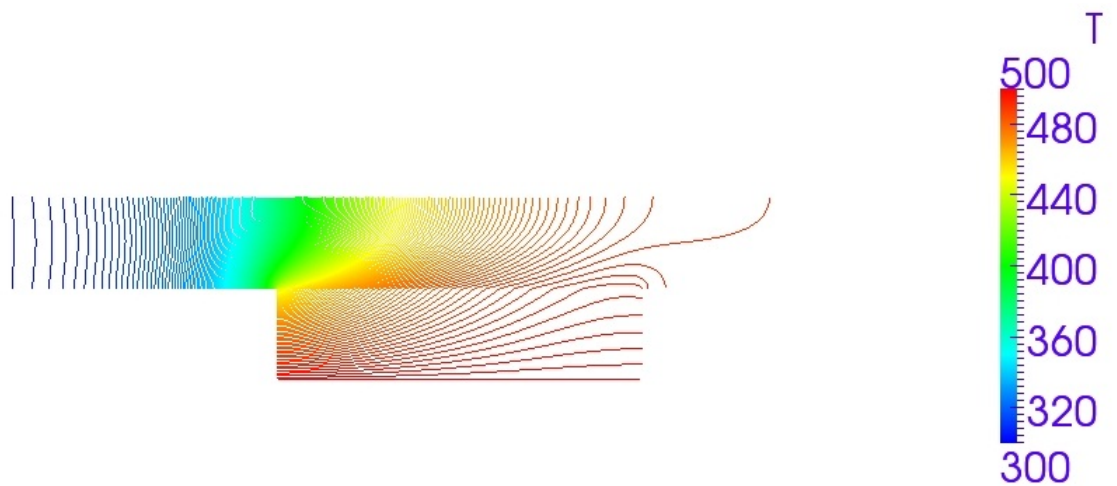
Για την καλύτερη λύση η οποία βρέθηκε να είναι για $b = 0.025m$ παρατίθενται τα σχήματα 4.3, 4.4 και 4.5, όπου παρουσιάζονται αντιστοίχως τα πεδία της πίεσης, του μέτρου της ταχύτητας και της θερμοκρασίας.



Σχήμα 4.3: Το πεδίο της πίεσης για $b = 0.025m$. Στο σχήμα 4.3 παρατηρείται η πτώση πίεσης από την είσοδο του ρευστού προς την έξοδο λόγω της ροής. (Το πεδίο της πίεσης δεν ορίζεται στο χωρίο του στερεού.)



Σχήμα 4.4: Το πεδίο του μέτρου της ταχύτητας για $b = 0,025m$. Στο σχήμα 4.4 παρατηρείται η αύξηση του μέτρου της ταχύτητας καθώς μειώνεται η απόσταση από τα τοιχώματα, όπου έχει επιβληθεί συνθήκη μη-ολίσθησης. (Το πεδίο του μέτρου της ταχύτητας δεν ορίζεται στο χωρίο του στερεού.)



Σχήμα 4.5: Το πεδίο της θερμοκρασίας για $b = 0,025m$. Στο σχήμα 4.5 παρατηρείται πως η ροή η οποία εισέρχεται σε θερμοκρασία $300K$ θερμαίνεται από το χωρίο του στερεού. Υπενθυμίζεται πως στο χωρίο του στερεού στο $S_{S,B}$ έχει επιβληθεί σταθερή θερμοκρασία $500K$.

4.3 Έλεγχος οριακών συνθηκών στη διεπιφάνεια

Κατόπιν, ελεγχθηκε εάν ισχύουν οι εξισώσεις 2.18 και 2.19 στη διεπιφάνεια, ώστε να ισχύουν οι οριακές συνθήκες 2.22α' και 2.22β'. Για να γίνει αυτό υπολογίστηκε η συναλλασσόμενη θερμότητα που διέρχεται μέσα από τη διεπιφάνεια και η μέση θερμοκρασία της διεπιφάνειας. Τα δύο αυτά μεγέθη υπολογίστηκαν εκατέρωθεν της διεπιφάνειας, στο χωρίο της ροής και το χωρίο του στερεού. Οι τύποι υπολογισμού των θερμοτήτων γράφονται

$$Q_F = \int_{FSI_F} k^F \frac{\partial T^F}{\partial n} dS \quad (4.3\alpha')$$

$$Q_S = \int_{FSI_S} k^S \frac{\partial T^S}{\partial n} dS \quad (4.3\beta')$$

Οι τύποι υπολογισμού των μέσων θερμοκρασιών γράφονται

$$T_{FSI_F} = \frac{\int_{FSI_F} T^F dS}{\int_{FSI_F} dS} \quad (4.4\alpha')$$

$$T_{FSI_S} = \frac{\int_{FSI_S} T^S dS}{\int_{FSI_S} dS} \quad (4.4\beta')$$

Στη συνέχεια, τα αντίστοιχα μεγέθη των εξισώσεων 4.3α', 4.3β' και 4.4α', 4.4β' συγκρίθηκαν και βρέθηκαν ίσα μεταξύ τους όπως φαίνεται στον πίνακα 4.4.

Πίνακας 4.4: Σύγκριση τιμών θερμότητας και θερμοκρασίας στη διεπιφάνεια για διάφορες τιμές του b .

$b(m)$	$Q_F(J)$	$Q_S(J)$	T_{FSI_F}	T_{FSI_S}
0.005	97.27694	-97.27694	493.9202	493.9202
0.01	88.50016	-88.50016	488.9374	488.9374
0.015	79.24964	-79.24964	485.1406	485.1406
0.020	69.40814	-69.40814	482.6478	482.6478
0.025	58.93598	-58.93598	481.5824	481.5824
0.030	47.86951	-47.86951	482.0488	482.0488
0.035	36.32012	-36.32012	484.1085	484.1085
0.04	24.43907	-24.43907	487.7786	487.7786
0.045	12.33403	-12.33403	493.0609	493.0609

Είναι προφανές από τα δεδομένα του πίνακα 4.4 πως $Q = Q_F = |Q_S|$ και $T_{FSI} = T_{FSI_F} = T_{FSI_S}$, όπως και ήταν αναμενόμενο. Για τα δεδομένα ως

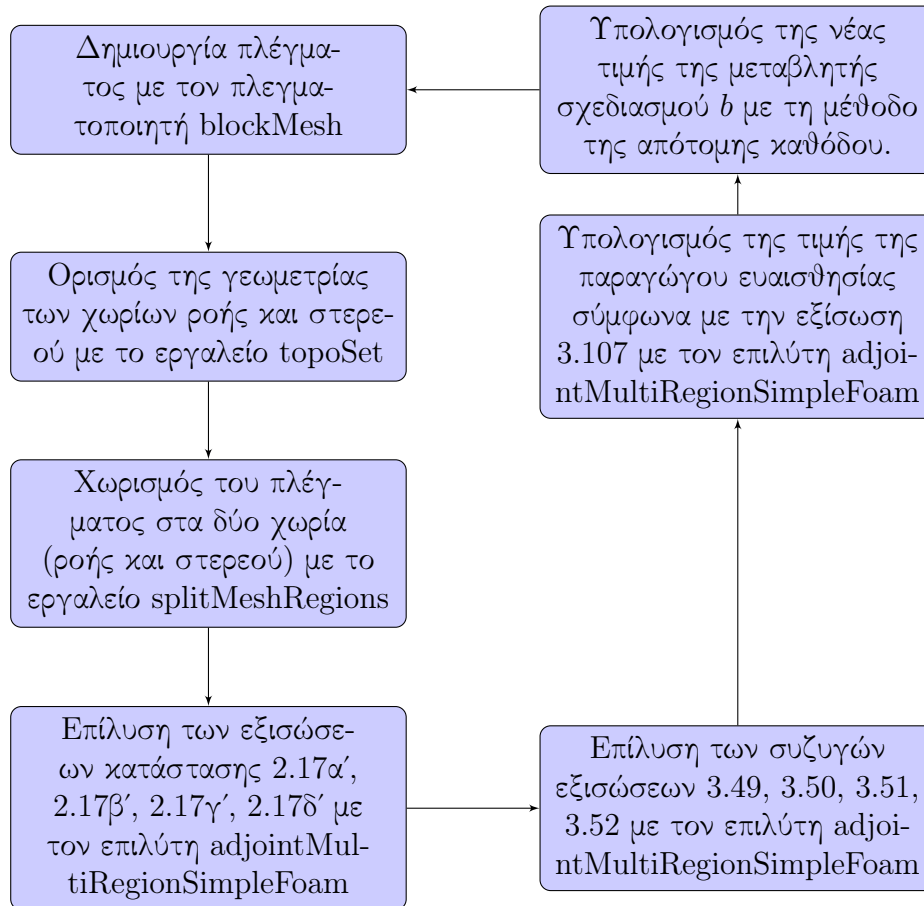
προς την θερμότητα Q παρατηρείται ότι όσο αυξάνει η μεταβλητή σχεδιασμού b , τόσο μικραίνει η θερμότητα Q . Αυτό συμβαίνει διότι όσο αυξάνει η μεταβλητή σχεδιασμού b , τόσο μικραίνει η παροχή \dot{V} σύμφωνα με την εξίσωση 4.1. Ακόμα, για τα δεδομένα ως προς T_{FSI} παρατηρείται πως η ελάχιστη τιμή επιτυγχάνεται για $b = 0.025m$ που είναι η τιμή εκείνη για την οποία επιτυγχάνεται η ελάχιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης F .

Κεφάλαιο 5

Βελτιστοποίηση στο Συζευγμένο Πρόβλημα Μεταφοράς Θερμότητας

Στο παρόν κεφάλαιο παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της εφαρμογής της συνεχούς συζυγούς μεθόδου για τη βελτιστοποίηση του Συζευγμένου Προβλήματος Μεταφοράς Θερμότητας. Επίσης, παρουσιάζονται και συγκρίνονται τα πεδία των καταστατικών και των συζυγών μεταβλητών. Τέλος, παρουσιάζονται και επεξηγούνται τα αποτελέσματα της βελτιστοποίησης.

5.1 Αγόριθμος Βελτιστοποίησης



Σχήμα 5.1: Αλγόριθμος βελτιστοποίησης του Συζευγμένου Πρόβληματος Μεταφοράς Θερμότητας.

Η δημιουργία του πλέγματος γίνεται με τον πλεγματοποιητή `blockMesh` ο οποίος δέχεται ως είσοδο το αρχείο `blockMeshDict`. Οι πληροφορίες για το πλέγμα που περιέχονται στο αρχείο `blockMeshDict` αλλάζουν κάθε φορά που ανανεώνεται η τιμή της μεταβλητής σχεδιασμού b . Στη συνέχεια, ορίζεται η γεωμετρία των χωρίων ροής και στερεού με το εργαλείο `topoSet` ο οποίος δέχεται ως είσοδο το αρχείο `topoSetDict`, το οποίο επίσης αλλάζει όταν ανανεώνεται η τιμή της μεταβλητής σχεδιασμού b . Μετά, το πλέγμα χωρίζεται με το εργαλείο `splitMeshRegions` στα δύο χωρία της ροής και του στερεού τα οποία θα χρησιμοποιηθούν για την επίλυση των καταστατικών εξισώσεων και συζυγών εξισώσεων του κάθε χωρίου αντιστοίχως. Ακολουθεί η επίλυση των καταστατικών εξισώσεων όπως έχει αναλυθεί σε προηγούμενη ενότητα. Έπειτα,

λύνονται οι συζυγείς εξισώσεις με αντίστοιχο τρόπο. Κατόπιν, υπολογίζεται η τιμή της παραγώγου ευαισθησίας η οποία χρησιμοποιείται στη μέθοδο της απότομης καθόδου (steepest descent method) για την εύρεση της νέας τιμής της μεταβλητής σχεδιασμού b .

Η μέθοδος της απότομης καθόδου είναι μία μέθοδος ανίχνευσης της βέλτιστης λύσης. Η μέθοδος αυτή ανήκει στη βασική κατηγορία μεθόδων ανίχνευσης που ονομάζεται ανίχνευση κατά γραμμή (line search methods), [1]. Η βασική αρχή της επαναληπτικής μεθόδου ανίχνευσης κατά γραμμή είναι να δημιουργείται η επόμενη προσέγγιση \bar{x}^{n+1} της λύσης χρησιμοποιώντας την τρέχουσα \bar{x}^n και μία κατεύθυνση ανίχνευσης \bar{p}^n , σύμφωνα με το σχήμα

$$\bar{x}^{n+1} = \bar{x}^n + \eta \bar{p}^n \quad (5.1)$$

όπου η είναι μία βαθμωτή ποσότητα που ρυθμίζει το μήκος βήματος (step length) στην κατεύθυνση \bar{p}^n και ο δείκτης n συμβολίζει τον αριθμό επανάληψης ή βήματος. [1]

Στη μέθοδο της απότομης καθόδου, η εφαρμογή της σχέσης 5.1 ανανέωσης της τιμής του διανύσματος \bar{x} γίνεται επιλέγοντας ως κατεύθυνση ανίχνευσης \bar{p}^n το αντίθετο του τοπικού διανύσματος κλίσης της συνάρτησης $F(\bar{x}^n)$. Αφού η κλίση της $F(\bar{x})$, δηλαδή το διάνυσμα $\nabla F(\bar{x})$, δείχνει σε κάθε σημείο την κατεύθυνση μέγιστης μεταβολής της τιμής της $F(\bar{x})$, (η κατεύθυνση $-\nabla F(\bar{x}^n)$ είναι ορθογώνια στις ισο- F γραμμές που διέρχονται από το σημείο \bar{x}^n) η επιλογή του διανύσματος

$$\bar{p}^n = -\nabla F(\bar{x}^n) \quad (5.2)$$

ως κατεύθυνση ανίχνευσης της βέλτιστης λύσης έχει προφανή αιτιολογία, [1]. Συνοψίζοντας, ο τύπος της μεθόδου της απότομης καθόδου που χρησιμοποιήθηκε γράφεται

$$b^n = b^{n-1} - \eta \left(\frac{\delta F}{\delta b} \right)^{(n-1)} \quad (5.3)$$

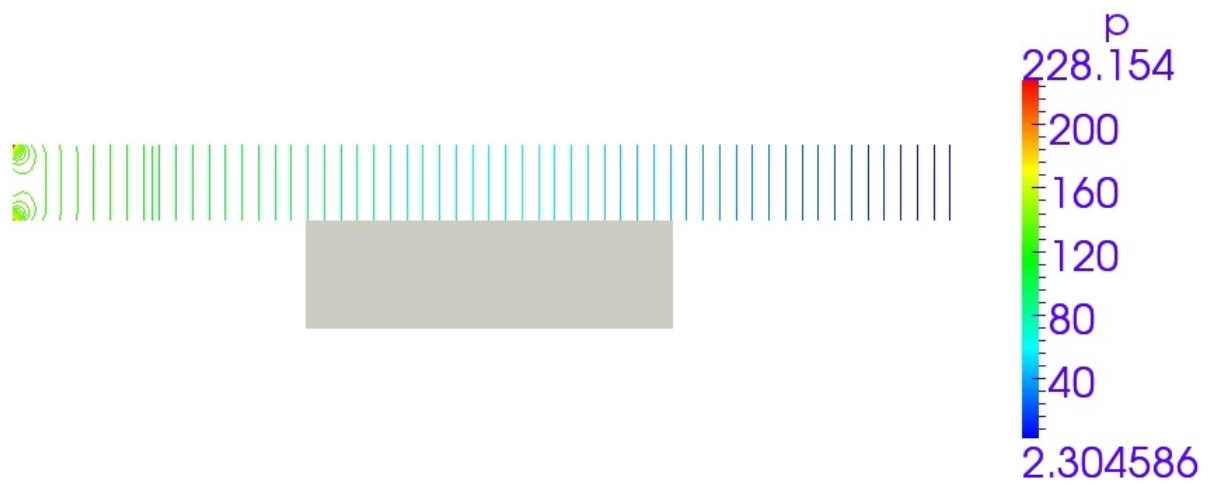
5.2 Αποτελέσματα Βελτιστοποίησης

Για την επιλογή του η της εξίσωσης 5.3 εκτελέστηκαν δοκιμές. Η τιμή η οποία χρησιμοποιήθηκε για τη βελτιστοποίηση είναι $\eta = 5 \times 10^{-5}$. Η αρχική τιμή του b από την οποία εκκινεί η διαδικασία της βελτιστοποίησης δοκιμάστηκαν διάφορες τιμές. Όλες έδωσαν το ίδιο τελικό αποτέλεσμα $b = 0.0295m$ το οποίο είναι το βέλτιστο. Η βελτιστοποίηση η οποία θα παρουσιαστεί είναι για αρχική τιμή εκκίνησης το $b = 0.0125m$. Το πλέγμα αποτελείται από εξαεδρικά κελιά το πλήθος των οποίων κυμαίνεται κοντά στα 40.000. Οι τιμές που χρησιμοποιούνται για τις συζυγείς οριακές συνθήκες αναφέρονται στον πίνακα 5.1.

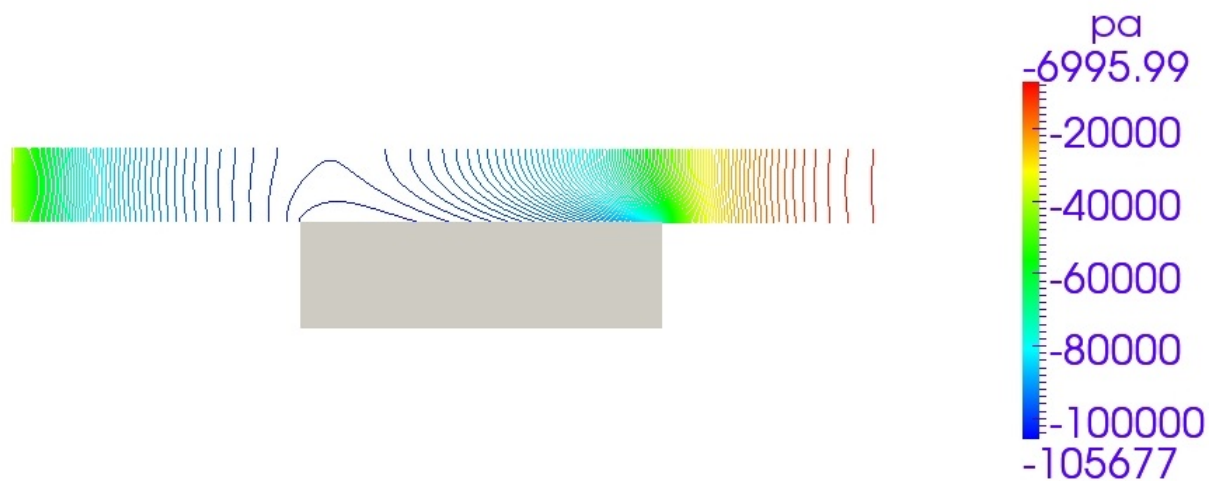
Πίνακας 5.1: Οριακές συνθήκες συζυγούς προβλήματος

Όριο	$q \left(\frac{sK}{m^3} \right)$	$u_i \left(\frac{s^2K}{kgm} \right)$	$T_a \left(\frac{s^3K}{kgm^2} \right)$
$S_{F,I}$	zero Neumann	0	0
$S_{F,O}$	0	zero Neumann	zero Neumann
$S_{F,W}$	zero Neumann	0	zero Neumann
$S_{S,W}$	-	-	zero Neumann
$S_{S,B}$	-	-	0

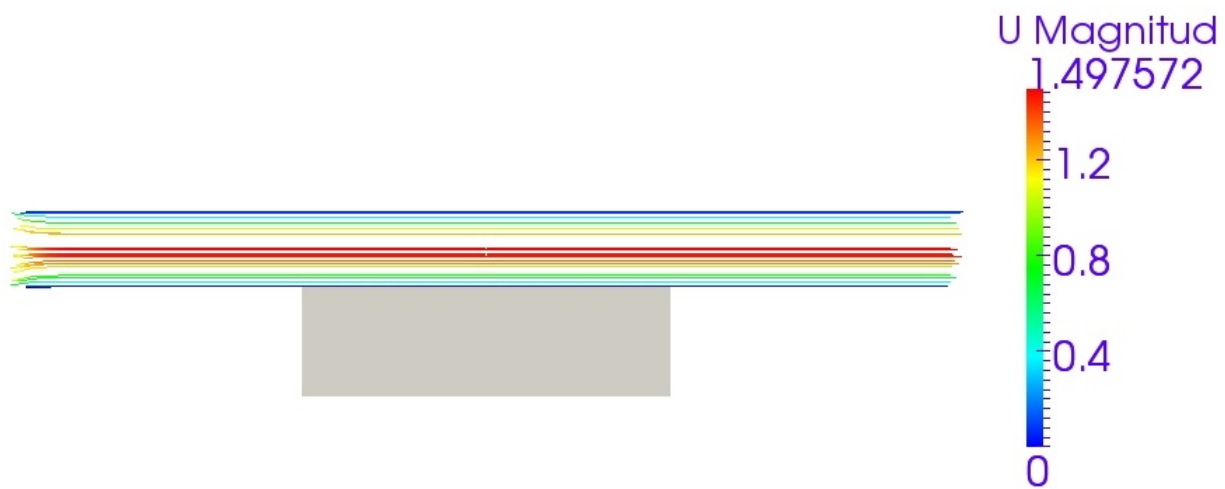
Για τη βέλτιστη λύση η οποία βρέθηκε να είναι για $b = 0.0295m$ παρατίθενται τα σχήματα 5.2, 5.4 και 5.6, όπου παρουσιάζονται αντιστοίχως τα πεδία της πίεσης, του μέτρου της ταχύτητας και της θερμοκρασίας. Επίσης, παρατίθενται τα σχήματα 5.3, 5.5 και 5.7, όπου παρουσιάζονται αντιστοίχως τα πεδία της συζυγούς πίεσης, του μέτρου της συζυγούς ταχύτητας και της συζυγούς θερμοκρασίας.



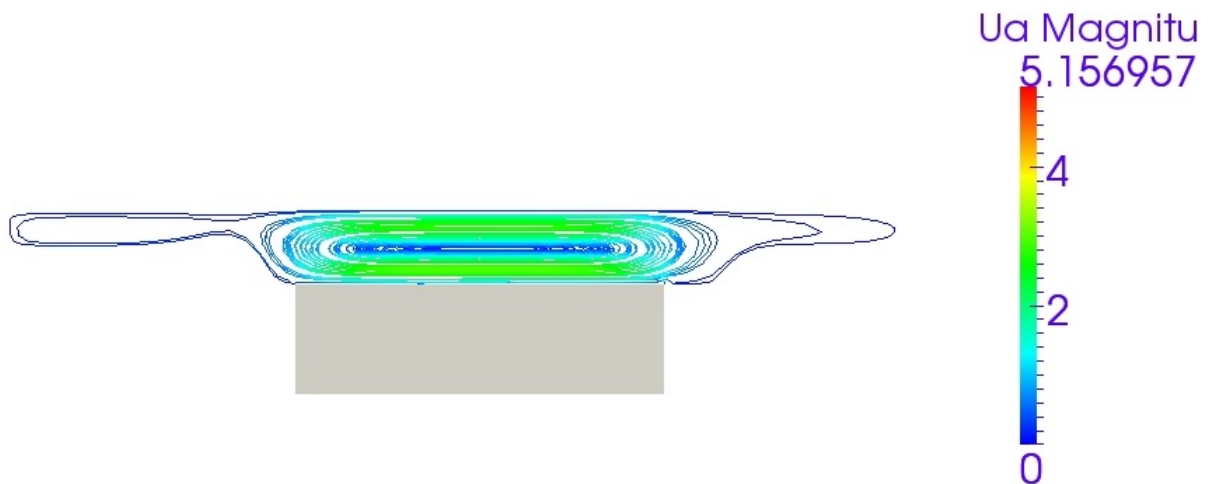
Σχήμα 5.2: Το πεδίο της πίεσης για το βέλτιστο $b = 0.0295m$. (Το πεδίο της πίεσης δεν ορίζεται στο χωρίο του στερεού.)



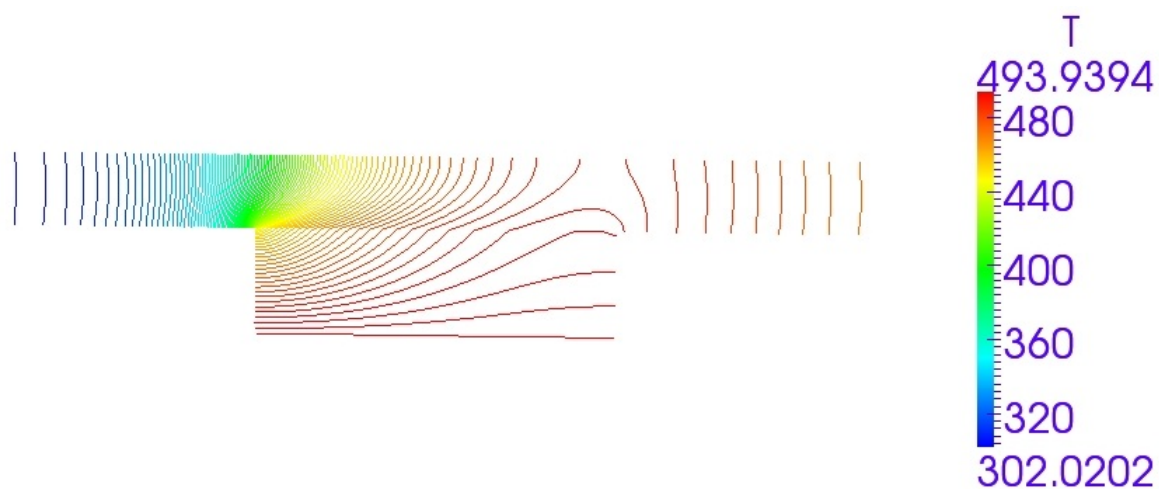
Σχήμα 5.3: Το πεδίο της συζυγούς πίεσης για το βέλτιστο $b = 0.0295m$. (Το πεδίο της συζυγούς πίεσης δεν ορίζεται στο χωρίο του στερεού.)



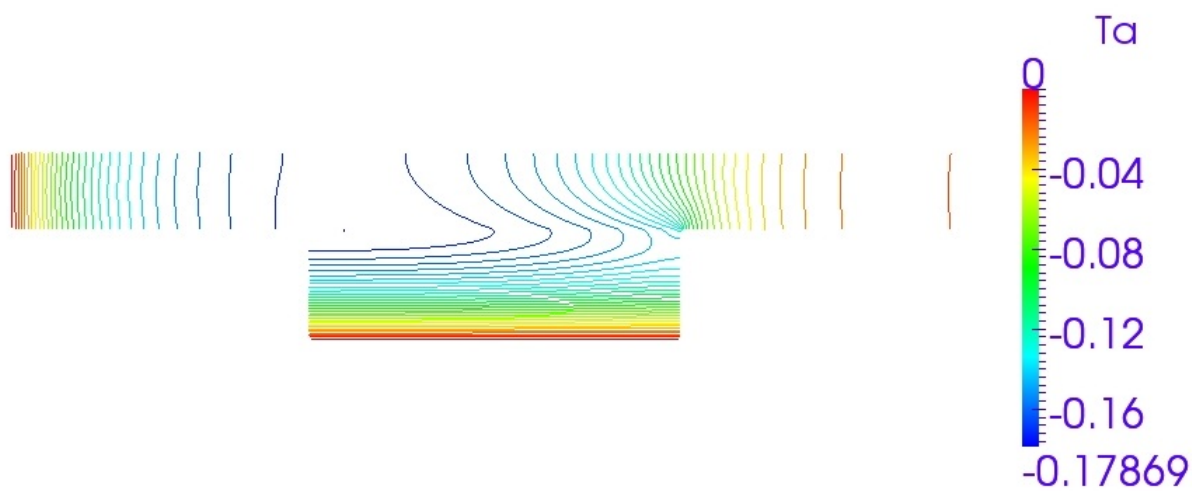
Σχήμα 5.4: Το πεδίο του μέτρου της ταχύτητας για το βέλτιστο $b = 0.0295m$.
(Το πεδίο του μέτρου της ταχύτητας δεν ορίζεται στο χωρίο του στερεού.)



Σχήμα 5.5: Το πεδίο του μέτρου της συζυγούς ταχύτητας για το βέλτιστο $b = 0.0295m$. (Το πεδίο του μέτρου της συζυγούς ταχύτητας δεν ορίζεται στο χωρίο του στερεού.)

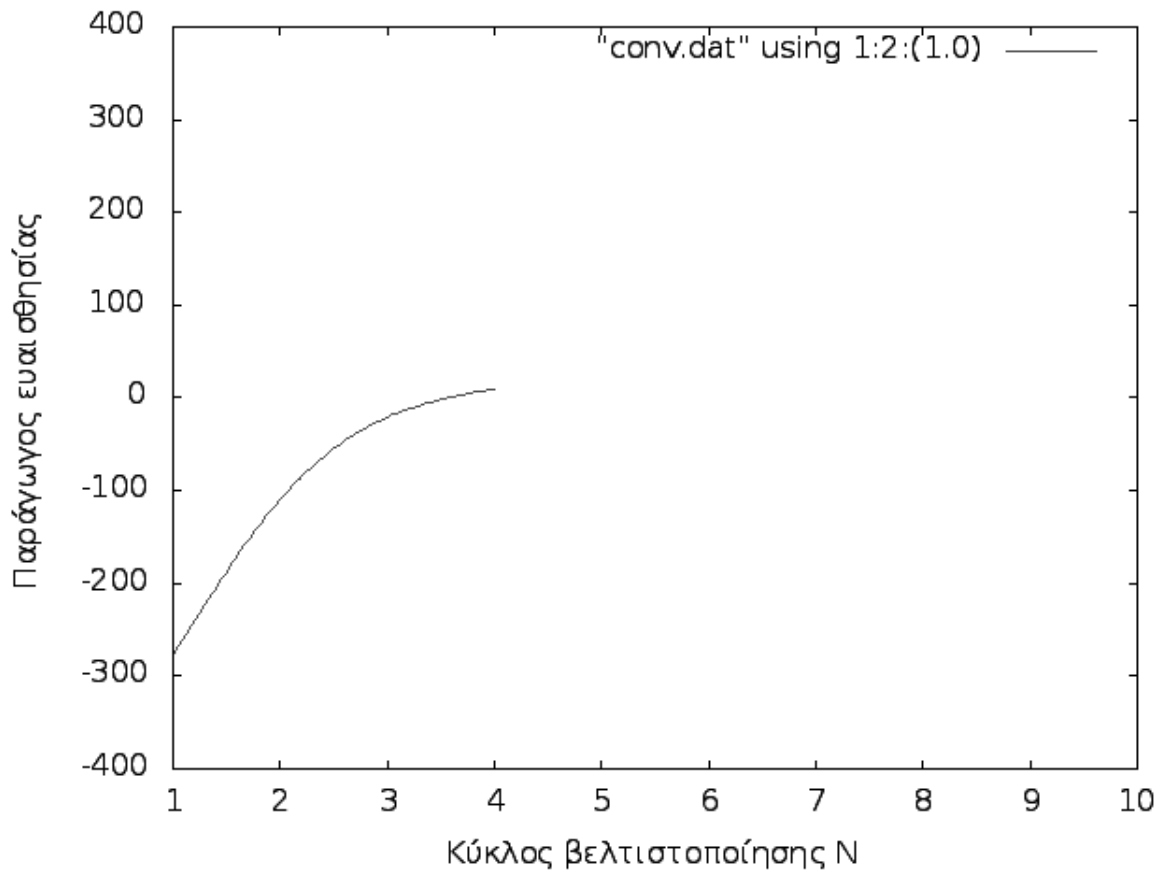


Σχήμα 5.6: Το πεδίο της θερμοκρασίας για το βέλτιστο $b = 0.0295m$.



Σχήμα 5.7: Το πεδίο της συζυγούς θερμοκρασίας για το βέλτιστο $b = 0.0295m$.

Στο διάγραμμα 5.8 παρουσιάζεται η σύγκλιση της βελτιστοποίησης.



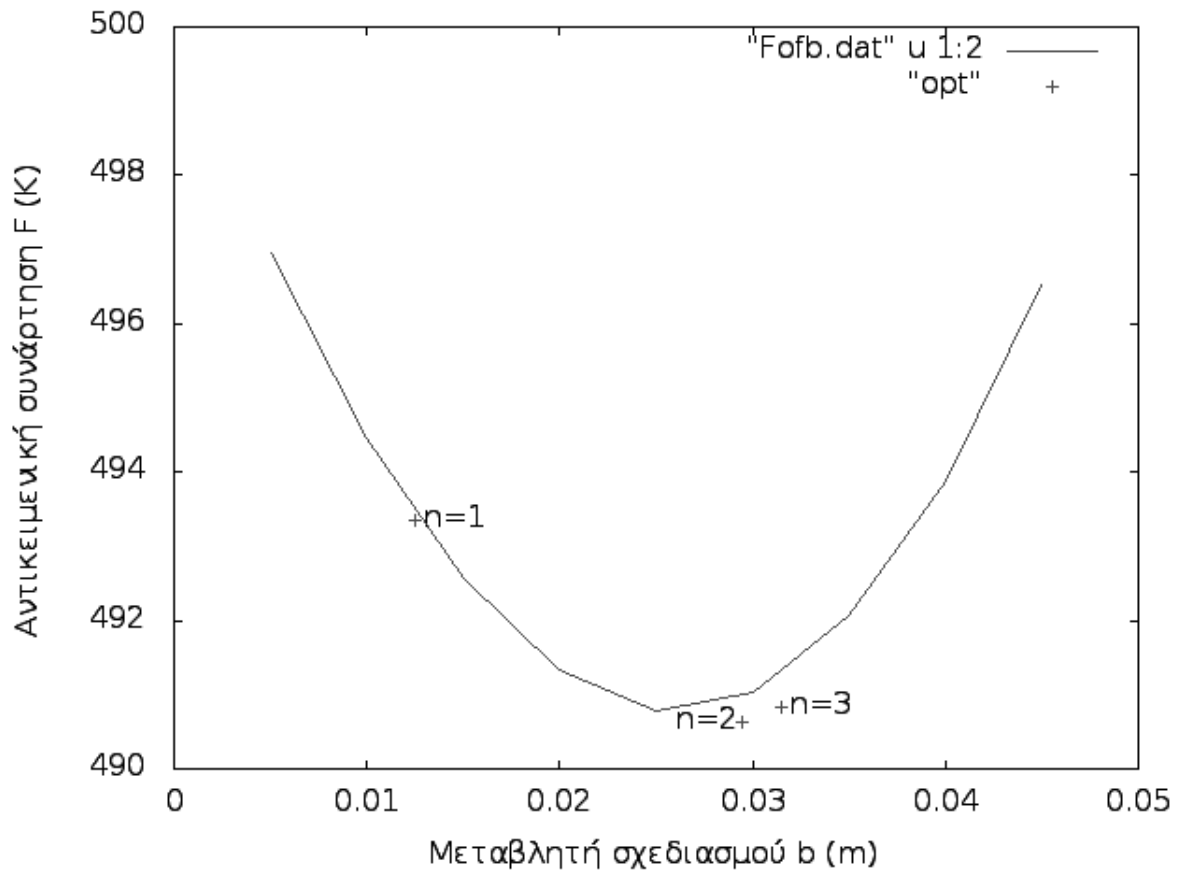
Σχήμα 5.8: Σύγκλιση της διαδικασίας της βελτιστοποίησης.

Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται αναλυτικά στον πίνακα 5.2. Παρατηρείται πως η διαδικασία της βελτιστοποίησης βελτίωσε την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης κατά $3K$. Η τιμή αυτή προφανώς θα αλλάζει ανάλογα με τη συνθήκη ταχύτητας που επιβάλλεται στην είσοδο της ροής S_{FI} και της σταθερής θερμοκρασίας που επιβάλλεται στο $S_{S,B}$.

Πίνακας 5.2: Βήματα βελτιστοποίησης.

$b(m)$	$F(K)$	Παράγωγος ευαισθησίας
0.0125	493.3388	-381.946
0.0315	490.8254	39.20167
0.0295	490.6265	-5.518558

Χρησιμοποιώντας τα δεδομένα του διαγράμματος του 4.2 για τη σχεδίαση της καμπύλης $F(b)$ με παρεμβολή και τα δεδομένα του διαγράμματος 5.8 δημιουργήθηκε το διάγραμμα 5.9, όπου φαίνεται πως για $b = 0.0295$ η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης F ελαχιστοποιείται.



Σχήμα 5.9: Η συνεχής γραμμή αντιστοιχεί στην καμπύλη της αντικειμενικής συνάρτησης συναρτήσει της μεταβλητής σχεδιασμού b . Οι σταυροί αντιστοιχούν στους κύκλους της βελτιστοποίησης, όπου με $n = 1$ εννοείται ο πρώτος κύκλος βελτιστοποίησης κ.ο.κ.

Κεφάλαιο 6

Ανακεφαλαίωση - Συμπεράσματα

Η παρούσα διπλωματική εργασία είχε ως σκοπό την εφαρμογή της συνεχούς συζυγούς μεθόδου στο πρόβλημα συζευγμένης μεταφοράς θερμότητας για τη βελτιστοποίηση μορφής κατάλληλης διάταξης ροής-στερεού. Η ροή θεωρήθηκε ασυμπύεστη, στρωτή και διδιάστατη. Τα αποτελέσματα της βελτιστοποίησης έδειξαν πως η συνεχής συζυγής μέθοδος εντοπίζει την καλύτερη μορφή της διάταξης ροής-στερεού. Χρησιμοποιώντας τον κώδικα που αναπτύχθηκε για τη βελτιστοποίηση μορφής η αντικειμενική συνάρτηση βελτιώθηκε κατά 3*K*.

Ακόμα, στο κεφάλαιο 4 πραγματοποιήθηκε έλεγχος της αριθμητικής υλοποίησης των οριακών συνθηκών. Επίσης, τα αποτελέσματα για διαφορετικές τιμές της μεταβλητής σχεδιασμού έδειξαν πως το πρόβλημα εμφανίζει ένα τοπικό ελάχιστο, εντός της περιοχής μελέτης, το οποίο ταυτίζεται με το ολικό ελάχιστο.

Η προσωπική συμβολή στην παρούσα διπλωματική ήταν:

- Διαχείριση του πλέγματος με εργαλεία ανοιχτού λογισμικού OpenFOAM. Με αυτά υλοποιήθηκε η δημιουργία του πλέγματος και ο διαχωρισμός σε δύο περιοχές (ροής-στερεού).
- Χρήση κώδικα του ανοιχτού λογισμικού OpenFOAM για την επίλυση του ευθέως προβλήματος.
- Μαθηματική ανάπτυξη των παραγώγων ευαισθησίας με τη συνεχή συζυγή μέθοδο βάσει προηγούμενων εργασιών.
- Προγραμματισμός σε γλώσσα C++ (περιβάλλον OpenFOAM) για την επίλυση του συζυγούς προβλήματος και για τη βελτιστοποίηση μορφής.
- Προγραμματισμός σε γλώσσα C++ (περιβάλλον OpenFOAM) για μετεπεξεργασία αποτελεσμάτων και για τον έλεγχο των οριακών συνθηκών.

Ως μελλοντική εξέλιξη της παρούσας διπλωματικής εργασίας προτείνεται η πρόσθεση όρου πηγής στην εξίσωση μεταφοράς θερμότητας του στερεού. Η φυσική σημασία του όρου πηγής θα είναι η παραγωγή θερμότητας από την μπαταρία. Κατόπιν, η εύρεση κατάλληλης γεωμετρίας προς βελτιστοποίηση με συνάφεια σε πραγματικές εφαρμογές. Επίσης, ενδιαφέρον παρουσιάζει η βελτιστοποίηση δύο στόχων κατά την οποία η μία συνάρτηση στόχος εκφράζει τη μέση θερμοκρασία του στερεού και η άλλη την ομοιομορφία του πεδίου της θερμοκρασίας στο στερεό.

Κεφάλαιο 7

Παράρτημα: Επίλυση προβλήματος για δεδομένο ρεύμα θερμότητας

Στο παρόν κεφάλαιο παρουσιάζεται ένα ακόμα πρόβλημα συζευγμένης μεταφοράς θερμότητας. Ακόμα, παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της βελτιστοποίησης αυτού του προβλήματος και επεξηγείται η φυσική σημασία της λύσης.

7.1 Το πρόβλημα

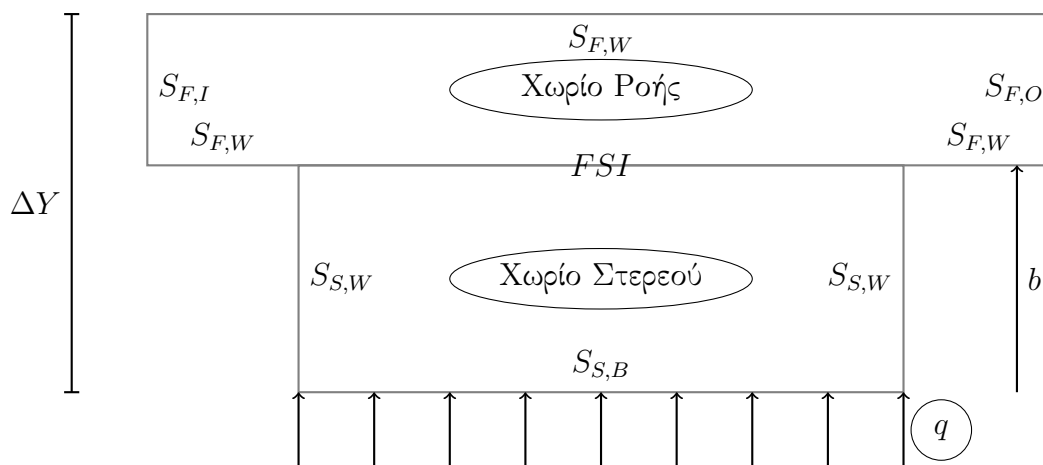
Το πρόβλημα το οποίο παρουσιάζεται σε αυτό το παράρτημα είναι μία παραλλαγή αυτού που αναλύθηκε στα κεφάλαια 3-5. Το καινούριο στοιχείο το οποίο εισάγεται είναι η αλλαγή της οριακής συνθήκης στο $S_{S,B}$ για τη θερμοκρασία από Dirichlet σε Neumann. Συγκεκριμένα, στο όριο $S_{S,B}$ επιβάλλεται η κάθετη παράγωγος της θερμοκρασίας να είναι σταθερή και ίση με $1000 \frac{K}{m}$, όπως φαίνεται στον πίνακα 7.1. Η τιμή αυτή της συνθήκης επιλέχθηκε ώστε το πεδίο της θερμοκρασίας να κινείται σε αντίστοιχες τιμές με αυτές του προβλήματος των κεφαλαίων 3-5, δηλαδή στην περιοχή των $300 - 500K$. Η επιβολή αυτής της συνθήκης είχε ως συνέπεια μία μικρή αλλαγή στην εξίσωση 3.107 η οποία χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό της παραγωγού ευαισθησίας και μία αλλαγή στην συζυγή οριακή συνθήκη της θερμοκρασίας στο $S_{S,B}$ από Dirichlet σε Neumann, όπως φαίνεται στον πίνακα 7.2. Προφανώς, η γεωμετρία παρέμεινε η ίδια όπως φαίνεται στο σχήμα 7.1. Για τη βελτιστοποίηση αυτού του προβλήματος (με τον ίδιο στόχο) γράφτηκε κώδικας στην ίδια λογική με τον κώδικα που περιγράφηκε στα προηγούμενα κεφάλαια.

Πίνακας 7.1: Οριακές συνθήκες ευθέος προβλήματος

Όριο	$p \left(\frac{kg}{ms^2} \right)$	$v_i \left(\frac{m}{s} \right)$	$T (K)$
$S_{F,I}$	zero Neumann	1	300
$S_{F,O}$	0	zero Neumann	zero Neumann
$S_{F,W}$	zero Neumann	0	zero Neumann
$S_{S,W}$	-	-	zero Neumann
$S_{S,B}$	-	-	fixedGradient 1000

Πίνακας 7.2: Οριακές συνθήκες συζυγούς προβλήματος

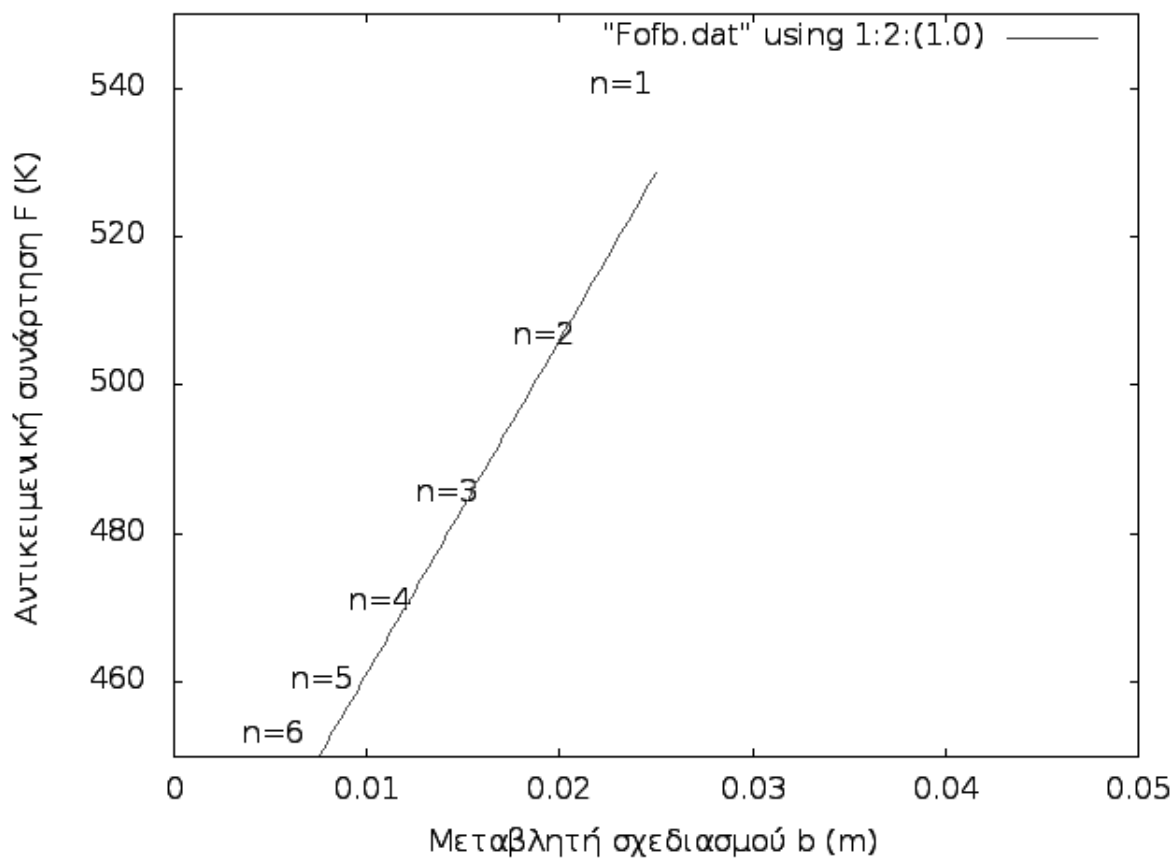
Όριο	$q \left(\frac{sK}{m^3} \right)$	$u_i \left(\frac{s^2K}{kgm} \right)$	$T_a \left(\frac{s^3K}{kgm^2} \right)$
$S_{F,I}$	zero Neumann	0	0
$S_{F,O}$	0	zero Neumann	zero Neumann
$S_{F,W}$	zero Neumann	0	zero Neumann
$S_{S,W}$	-	-	zero Neumann
$S_{S,B}$	-	-	zero Neumann



Σχήμα 7.1: Διάταξη προς βελτιστοποίηση, όπου φαίνεται το ρεύμα θερμότητας στο $S_{S,B}$.

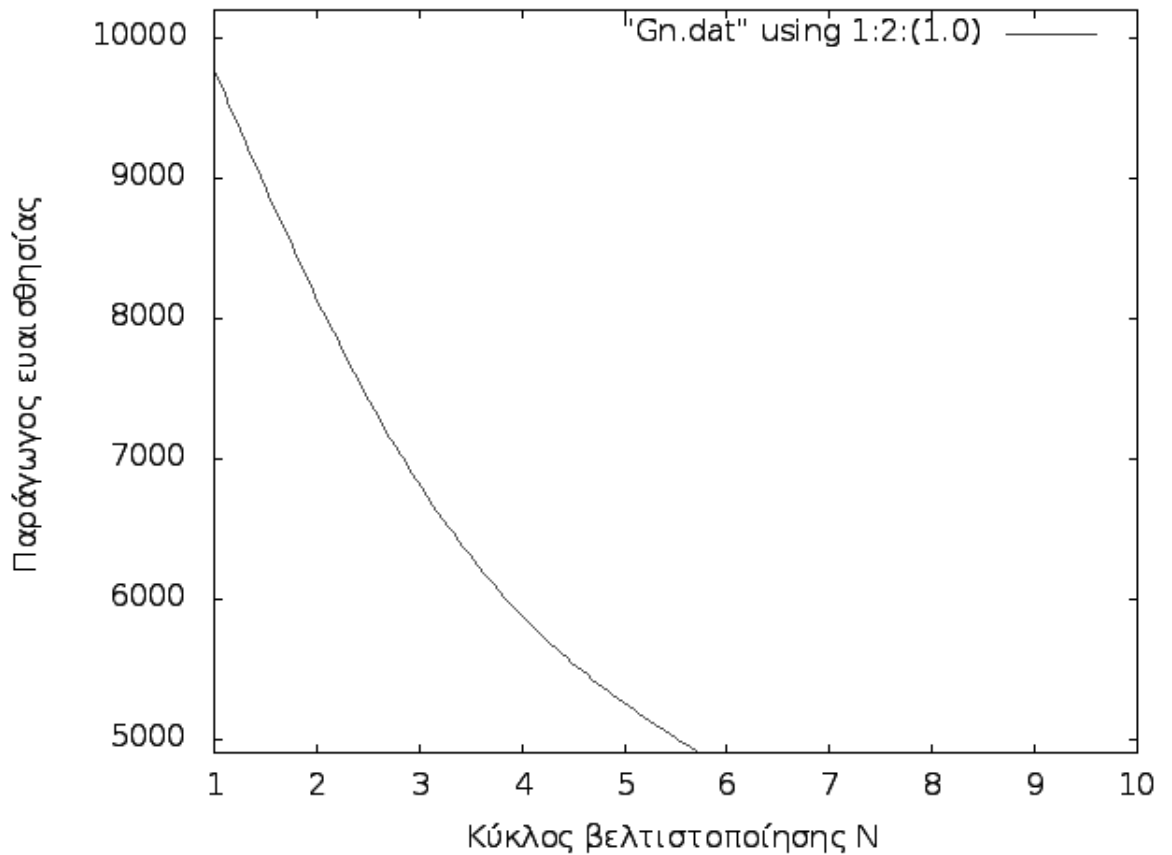
7.2 Αποτελέσματα

Χρησιμοποιώντας τον κώδικα που δημιουργήθηκε για τη βελτιστοποίηση του προβλήματος εκτελέστηκαν επαναλήψεις. Το διάγραμμα 7.2 δημιουργήθηκε από τα αποτελέσματα αυτών των επαναλήψεων με τη βοήθεια παρεμβολών. Έτσι, γίνεται σαφές πως η αντικειμενική συνάρτηση μικραίνει όσο μικραίνει και η τιμή της μεταβλητής σχεδιασμού.



Σχήμα 7.2: Οι τιμές της αντικειμενικής συνάρτησης συναρτήσει της μεταβλητής σχεδιασμού b . Με $n = 1$ συμβολίζεται ο πρώτος κύκλος της βελτιστοποίησης κ.ο.κ.

Όμως, όπως φαίνεται στο διάγραμμα 7.3 η διαδικασία της βελτιστοποίησης δεν έχει συγκλίνει μετά από 6 κύκλους αφού η παράγωγος ευαισθησίας δεν έχει μηδενιστεί. Αυτό συμβαίνει διότι το βέλτιστο σημείο βρίσκεται στο $b = 0$, όπου η παράγωγος ευαισθησίας μηδενίζεται.



Σχήμα 7.3: Οι τιμές της παραγώγου ευαισθησίας συναρτήσει των κύκλων βελτιστοποίησης N . Σημειώνεται πως στον τελευταίο κύκλο βελτιστοποίησης η παράγωγος ευαισθησίας δεν έχει μηδενιστεί ακόμα.

Αν $b = 0$ τότε σύμφωνα με το σχήμα 7.1 το μέγεθος του χωρίου του στερεού μηδενίζεται και το μέγεθος του χωρίου της ροής μηδενίζονται. Συνεπώς, η λύση είναι άστοχη.

Το εισερχόμενο από το $S_{S,B}$ ρεύμα θερμότητας στο χωρίο του στερεού είναι ίσο με το εξερχόμενο ρεύμα θερμότητας από τη διεπιφάνεια FSI . Επίσης, σύμφωνα με την εξίσωση 4.1 όσο μειώνεται η μεταβλητή σχεδιασμού b τόσο αυξάνεται η παροχή του ρευστού. Συνδυάζοντας αυτά τα δύο δεδομένα προκύπτει πως η θερμοκρασία της διεπιφάνειας FSI μειώνεται όσο μειώνεται η μεταβλητή σχεδιασμού b . Εφόσον το ρεύμα θερμότητας έχει κατεύθυνση από το στερεό προς τη ροή είναι αναμενόμενο η θερμοκρασία στο χωρίο του στερεού να ανεβαίνει με κατεύθυνση από τη ροή προς το στερεό. Συνεπώς, η θερμοκρασία της διεπιφάνειας FSI επηρεάζει ολόκληρο το πεδίο της θερμοκρασίας

στο χωρίο του στερεού. Για το λόγο αυτό, ελαχιστοποίηση της θερμοκρασίας της διεπιφάνειας FSI συνεπάγεται ελαχιστοποίηση της μέσης θερμοκρασίας του στερεού. Άρα, για $b = 0$ που ελαχιστοποιείται η θερμοκρασία της διεπιφάνειας FSI ελαχιστοποιείται και η αντικειμενική συνάρτηση δηλαδή η μέση θερμοκρασία του στερεού.

Βιβλιογραφία

- [1] Κ. Χ. Γιαννάκογλου: Μέθοδοι Βελτιστοποίησης στην Αεροδυναμική, Αθήνα 2006.
- [2] E.M. Papoutsis-Kiachagias, K.C. Giannakoglou: Continuous Adjoint Methods for Turbulent Flows, Applied to Shape and Topology Optimization: Industrial Applications, Archives of Computational Methods in Engineering, to appear, 2015.
- [3] E.M. Papoutsis-Kiachagias, E.A. Kontoleonos, A.S. Zymaris, D.I. Papadimitriou, K.C. Giannakoglou: Constrained topology optimization for laminar and turbulent flows, including heat transfer, EUROGEN 2011, Evolutionary and Deterministic Methods for Design, Optimization and Control, Capua, Italy, September 2011.
- [4] Ε. Μ. Παπουτσή-Κιαχαγιάς: Συζυγείς Μέθοδοι για Τυρβώδεις Ροές, με Εφαρμογή στη Βελτιστοποίηση Μορφής ή Τοπολογίας και στο Στιβαρό Σχεδιασμό. Διδακτορική διατριβή, Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών ΕΜΠ, Αθήνα 2013.
- [5] Δ. Παπαδημητρίου: Συζυγείς(Adjoint) διατυπώσεις για την ανάλυση - σχεδίαση πτερυγώσεων στροβιλομηχανών και τη βέλτιστη προσαρμογή πλέγματος με a posteriori εκτίμηση σφάλματος. Διδακτορική διατριβή, Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών ΕΜΠ, 2006.
- [6] S. V. Patankar: Numerical heat transfer and fluid flow - Washington, DC, Hemisphere Publishing Corp., 1980. 210 p., 1980 - adsabs.harvard.edu
- [7] D. I. Papadimitriou, K. C. Giannakoglou: A continuous adjoint method with objective function derivatives based on boundary integrals for inviscid and viscous flows. Computers and Fluids, Vol. 36, pp. 325 - 341, 2007.

- [8] D. I. Papadimitriou, K. C. Giannakoglou: Total pressure losses minimization in turbomachinery cascades, using a new continuous adjoint formulation. *Journal of Power and Energy (Special Issue on Turbomachinery)*, Vol. 221, pp. 865 - 872, 2007.
- [9] Α. Ζυμάρης: Συζυγείς μέθοδοι για το σχεδιασμό μορφών με βέλτιστη αεροδυναμική συμπεριφορά σε στρωτές και τυρβώδεις ροές. Διδακτορική διατριβή, Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, ΕΜΠ, Αθήνα 2010.
- [10] Α. S. Zymaris, D. I. Papadimitriou, K. C. Giannakoglou: Continuous adjoint approach to the spalart allmaras turbulence model, for incompressible flows. *Computers and Fluids*, Vol.38, pp. 1528 - 1538, 2009.
- [11] Α. S. Zymaris, D. I. Papadimitriou, K. C. Giannakoglou: Adjoint wall functions: A new concept for use in aerodynamic shape optimization. *Journal of Computational Physics* Vol. 229(13), pp. 5228 - 5245, July, 2010.
- [12] Othmer, C.: A continuous adjoint formulation for the computation of topological and surface sensitivities of ducted flows. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 58(8): 861-877, 2008.
- [13] Γ. Κ. Καρούζας: Αυτοματοποιημένη Μέθοδος Βελτιστοποίησης Πτερυγώσεων Στροβιλομηχανών με χρήση Συζυγών Μεθόδων και Διαχείριση Περιορισμών. Διπλωματική Εργασία. ΕΜΠ, Αθήνα 2011.
- [14] Π. Γ. Κουλλαπής: Η συνεχής συζυγής μέθοδος για τον έλεγχο ροής με δέσμες ρευστού - Εφαρμογή σε τρισδιάστατη περιστρεφόμενη πτερύγωση συμπιεστή. Διπλωματική Εργασία. ΕΜΠ, Αθήνα 2013.
- [15] Γ. Θ. Δημητρακόπουλος: Η συνεχής συζυγής μέθοδος για το βέλτιστο έλεγχο ροής με δέσμες ρευστού - Εφαρμογές εσωτερικής και εξωτερικής αεροδυναμικής. Διπλωματική Εργασία. ΕΜΠ, Αθήνα 2012.
- [16] Σ. Τσαγγάρης: Μηχανική των Ρευστών. Αθήνα 2005.
- [17] Ξ. Κακάτσιος: Αρχές Μεταφοράς Θερμότητας και Μάζης. Αθήνα 2006.
- [18] OpenFOAM: official web site <http://www.openfoam.com> .
- [19] OpenFOAM Programmer's Guide: <http://foam.sourceforge.net/docs/Guides-a4/ProgrammersGuide.pdf>
- [20] OpenFOAM User's Guide: <http://www.openfoam.org/docs/user/>

- [21] Luikov, A. V., Perelman, T. L., Levitin, R. S., and Gdalevich, L. B., Heat transfer from a plate in a compressible gas flow, *Int. J. Heat Mass Transfer* 13: 1261-1270, 1971
- [22] Perelman, T. L., On conjugated problems of heat transfer, *Int. J. Heat Mass Transfer* 3: 293-303, 1961
- [23] Αμερικανικό Υπουργείο Ενέργειας <http://www.fueleconomy.gov/>