



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών
Τομέας Ρευστών
Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών
Μονάδα Παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής
& Βελτιστοποίησης

Προγραμματισμός και Εφαρμογή της Μεθόδου των Ψευδο-Κυψελών (Ghost-Cell) για 2D Χρονικά Μόνιμες Ατριβείς Ροές Συμπιεστού Ρευστού

Διπλωματική Εργασία

Χατζηνικολάου Δανάη

Επιβλέπων: Κυριάκος Χ. Γιαννάκογλου , Καθηγητής ΕΜΠ

Αθήνα, 2017



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών
Τομέας Ρευστών
Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών
Μονάδα Παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής
& Βελτιστοποίησης

Προγραμματισμός και Εφαρμογή της Μεθόδου των Ψευδο-Κυψελών
(Ghost-Cell) για 2Δ Χρονικά Μόνιμες Ατριβείς Ροές Συμπίεστου
Ρευστού

Διπλωματική Εργασία

Χατζηνικολάου Δανάη

Επιβλέπων: Κυριάκος Χ. Γιαννάκογλου , Καθηγητής ΕΜΠ

Αθήνα, 2017

Περίληψη

Στη διπλωματική αυτή εργασία προγραμματίζεται ένας κώδικας επίλυσης μόνιμης ατριβούς ροής συμπίεστου ρευστού με τη μέθοδο των Ψευδο-κυψελών (Ghost-Cell Method). Ο αλγόριθμος βασίζεται σε ήδη υπάρχον λογισμικό επίλυσης ροών με τη μέθοδο των Τεμνομένων Κυψελών (Cut-Cell Method), η οποία είναι ουσιαστικά μια «ανταγωνιστική» εκδοχή της και βασίζεται στην ίδια τεχνική. Και οι δύο μέθοδοι ανήκουν στην κατηγορία των μεθόδων Μη-οριόδετων Πλεγμάτων ή αλλιώς των μεθόδων των Εμβαπτιζόμενων Μεταβλητών όπως προκύπτει από την απόδοση του αγγλικού όρου «Immersed Boundary Methods» και χειρίζονται καρτεσιανά πλέγματα. Στον κώδικα που αναπτύχθηκε δεν τροποποιήθηκε η διαδικασία της πλεγματοποίησης του υπολογιστικού χώρου αλλά μόνο η διαδικασία επιβολής των οριακών συνθηκών του προβλήματος, εκεί δηλαδή όπου εντοπίζονται και οι διαφορές των μεθόδων. Οι εξισώσεις ροής επιλύονται με τη μέθοδο των πεπερασμένων όγκων (Finite-Volume Approach).

Παρουσιάζονται και σχολιάζονται εφαρμογές του αλγορίθμου σε προβλήματα Αεροδυναμικής και Ρευστομηχανικής. Συγκεκριμένα, μελετήθηκε ροή γύρω από συμμετρική αεροτομή NACA0012 και ροή μέσα σε αγωγούς μίας και δύο εξόδων αντίστοιχα. Οι εφαρμογές πραγματοποιήθηκαν και με τις δύο μεθόδους και έγινε σύγκριση των αποτελεσμάτων για να πιστοποιηθεί η σωστή λειτουργία του λογισμικού που αναπτύχθηκε.



National Technical University of Athens
School of Mechanical Engineering
Fluids Section
Parallel CFD & Optimization Unit

Programming and Application of the Ghost-Cell Method for 2D Steady Inviscid Flows of Compressible Fluids

Diploma Thesis

Chatzinikolaou Danai

Supervisor: K. G. Giannakoglou, Professor NTUA

Athens, 2017

Abstract

The diploma thesis involves the programming of a 2D steady, inviscid flow solver for compressible fluids using the Ghost-Cell Method. The software is based on an existing solver using the Cut-Cell Method. Both methods belong to the general class of the Immersed Boundary Methods, which are using Cartesian grids to discretize the flow equations. The difference between them is the way they handle the cells in the vicinity of the solid boundary. To develop the software, the meshing procedure of the existing code was untouched and only the way of imposing the boundary conditions has changed. In order to solve the flow equations, the Finite-Volume Approach is used in each cell.

This thesis involves the application of the developed software in a number of flow problems. More specifically, the first case is the simulation of flow around the symmetric airfoil NACA0012 while the other two are simulations of internal aerodynamics inside ducts with one and two outlets respectively. Each application was simulated using both solvers in order to compare the results and assess the developed software.

Στους γονείς μου

Ευχαριστίες

Ξεκινώντας θα ήθελα να ευχαριστήσω τον υπεύθυνο καθηγητή μου κ. Κ. Χ. Γιαννάκογλου για τη σημαντική καθοδήγησή του όλο αυτό το διάστημα σε ό,τι αφορά τη διπλωματική μου εργασία. Επίσης θα ήθελα να τον ευχαριστήσω για όλες τις «μικρές», φαινομενικά ασήμαντες συμβουλές που κατά καιρούς μου έδωσε και βέβαια για την υποστήριξή του στα βήματά μου. Είναι μεγάλη μου χαρά που συνεργάστηκα μαζί του.

Συνεχίζοντας θέλω να ευχαριστήσω ιδιαίτερα τον υποψήφιο Διδάκτορα Κωνσταντίνο Σαμούχο, για την καθοδήγησή του και φυσικά για την αμέριστη προθυμία του να επιλύσει όποιες απορίες προέκυπταν κατά τη διάρκεια της εργασίας. Η συμβολή του στην παρούσα εργασία είναι καθοριστική.

Θα ήθελα επίσης να ευχαριστήσω όλα τα μέλη του ΜΠΥΡ&Β, ιδιαίτερα τον Βαγγέλη Παπουτσή, τη Βέρα Ασούτη και τον υποψήφιο Διδάκτορα Κωνσταντίνο Γκαραγκούνη που συνέβαλλαν στην ολοκλήρωση της διπλωματικής μου εργασίας και με καλωσόρισαν στην ομάδα τους για το διάστημα που βρέθηκα μαζί τους.

Τέλος θα ήταν παράλειψή μου να μην ευχαριστήσω τους γονείς μου για όλα αυτά τα χρόνια που είναι δίπλα μου και με στηρίζουν. Η διπλωματική μου εργασία είναι αφιερωμένη σε αυτούς σαν ένα ελάχιστο «ευχαριστώ» σε αυτά που μου έχουν προσφέρει.

Ακρωνύμια

| | |
|--------|---|
| ΕΜΠ | Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο |
| ΕΘΣ | Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών |
| ΜΠΥΡ&Β | Μονάδα Παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής & Βελτιστοποίησης |
| ΥΡΔ | Υπολογιστική Ρευστοδυναμική |
| CFD | Computational Fluid Dynamics |
| NTUA | National Technical University of Athens |
| PCopt | Parallel CFD & Optimization Unit |
| IB | Immersed Boundary |

Πίνακας Περιεχομένων

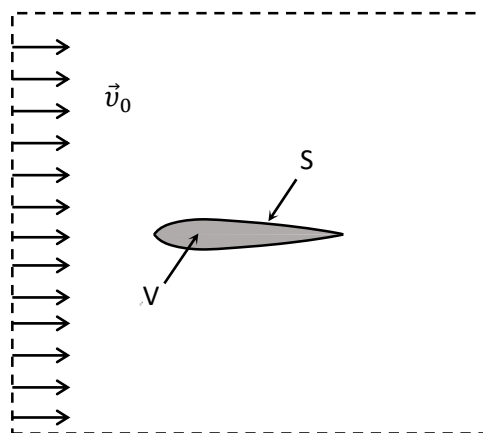
| | |
|---|----|
| Κεφάλαιο 1 | 11 |
| 1. Εισαγωγή | 11 |
| 1.1. Τα είδη των πλεγμάτων..... | 11 |
| 1.2. Μέθοδοι Μη-Οριόδετων Πλεγμάτων | 14 |
| 1.3. Στόχος και δομή της Διπλωματικής εργασίας..... | 18 |
| Κεφάλαιο 2 | 19 |
| 2. Διατύπωση 2D προβλήματος εξωτερικής αεροδυναμικής..... | 19 |
| 2.1. Εισαγωγή | 19 |
| 2.2. Πλεγματοποίηση του Υπολογιστικού Χωρίου..... | 19 |
| 2.3. Οι Εξισώσεις Ροής και η Διακριτοποίησή τους | 23 |
| 2.3.1. Εξισώσεις Ατριβούς Ροής, Συμπιεστού Ρευστού | 23 |
| 2.3.2. Αριθμητική Επίλυση Εξισώσεων | 24 |
| Ολοκλήρωση των εξισώσεων σε πεπερασμένους όγκους | 25 |
| Κεφάλαιο 3 | 35 |
| 3. Επιβολή Οριακών Συνθηκών | 35 |
| 3.1. Διακριτές «μέθοδοι μη-οριόδετων πλεγμάτων» | 35 |
| 3.2. Μέθοδος Τεμνομένων Κυψελών (Cut-Cells)..... | 36 |
| 3.3. Μέθοδος των Ψευδο-κυψελών (Ghost Cells) | 39 |
| 3.3.1. Απόσταση του Κέντρου των Κυψελών από το Στερεό Όριο | 41 |
| 3.3.2. Αντιγραφή και Αντιστροφή των Μεγεθών Ροής | 44 |
| Κεφάλαιο 4 | 48 |
| 4. Αλγόριθμος Επίλυσης..... | 48 |
| 4.1 Αλγόριθμος Επίλυσης με τη Μέθοδο των Τεμνομένων Κυψελών | 48 |
| 4.2 Αλγόριθμος Επίλυσης με τη Μέθοδο των Ψευδο-Κυψελών | 50 |
| Κεφάλαιο 5 | 51 |
| 5. Εφαρμογές του Αλγορίθμου και Σύγκριση των δύο Μεθόδων | 51 |
| 5.1 Ροή γύρω από Συμμετρική Αεροτομή NACA0012 | 51 |
| 5.2 Ροή σε καμπυλόγραμμο αγωγό | 60 |
| 5.3 Ροή σε αγωγό με δύο εξόδους..... | 67 |
| 5.4 Διηχητική ροή γύρω από αεροτομή..... | 71 |
| Κεφάλαιο 6 | 76 |
| 6. Ανακεφαλαίωση – Συμπεράσματα | 76 |
| Κεφάλαιο 7 | 79 |
| 7. Βιβλιογραφία..... | 79 |

Κεφάλαιο 1

1. Εισαγωγή

1.1. Τα είδη των πλεγμάτων

Ένα από τα βασικά προβλήματα Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής είναι η προσομοίωση της ροής ρευστού γύρω από στερεό σώμα. Στο Σχήμα 1.1 φαίνεται ενδεικτικά μια μεμονωμένη αεροτομή με περίμετρο S και επιφάνεια V εκτιθέμενη σε ροή ρευστού u_0 .



Σχήμα 1.1: Αεροτομή εκτιθέμενη σε ροή ρευστού.

Η επίλυση τέτοιων προβλημάτων γινόταν είτε με πειραματική προσομοίωση σε αεροδυναμική σήραγγα είτε με εύρεση της αναλυτικής λύσης ενός απλοποιημένου μοντέλου των εξισώσεων ροής [1]. Όμως η χρήση της αεροδυναμικής σήραγγας και η κατασκευή του μοντέλου ροής κοστίζουν αρκετά. Τα τελευταία 50 χρόνια η προσομοίωση των προβλημάτων γίνεται σε υπολογιστή και μάλιστα οι λύσεις που προκύπτουν είναι αρκετά αξιόπιστες. Σε κάποιες περιπτώσεις γίνεται επαλήθευση της λύσης χρησιμοποιώντας την αεροδυναμική σήραγγα, αλλά η εξέλιξη των υπολογιστικών μοντέλων είναι τόσο γρήγορη που σύντομα θα χρειάζεται πολύ λιγότερη πειραματική επαλήθευση των αποτελεσμάτων. Ιδιαίτερα μεγάλα βήματα έχουν γίνει σε όσα προβλήματα μπορούν να μοντελοποιηθούν με μερικές διαφορικές εξισώσεις[2]. Οι εξισώσεις αυτές επιλύονται αριθμητικά και δίνουν αποτελέσματα για τα μεγέθη ροής σε διακριτά σημεία σε όλη την επιφάνεια του υπολογιστικού χωρίου.

Πρώτο βήμα για την επίλυση των προβλημάτων αεροδυναμικής είναι η διακριτοποίηση του υπολογιστικού χώρου. Η επιφάνεια που καταλαμβάνει το

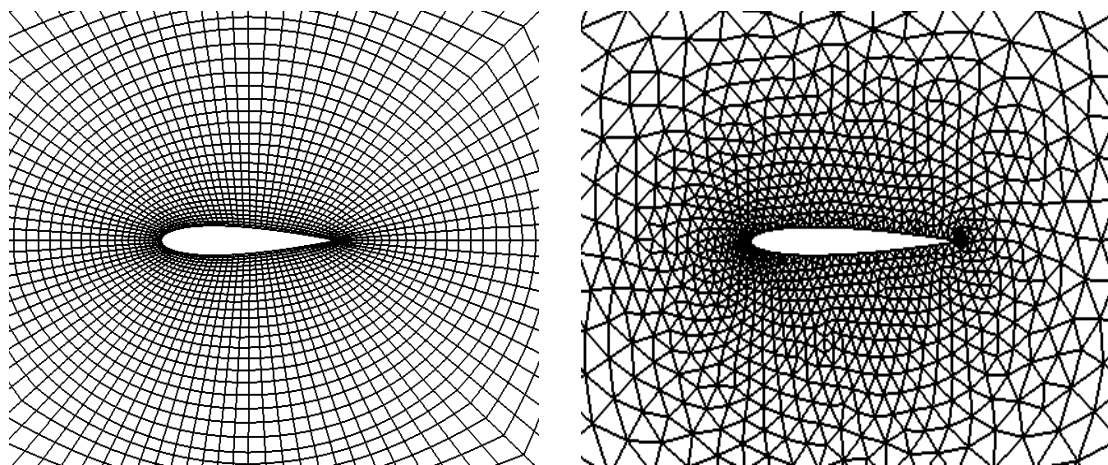
ρευστό διαιρείται σε μικρότερες κυψέλες και τα μεγέθη ροής υπολογίζονται σε μεμονωμένα σημεία, είτε στο κέντρο βάρους κάθε κυψέλης (κεντρο-κυψελική διατύπωση) είτε στις τέσσερις γωνίες της (κεντρο-κομβική διατύπωση) ανάλογα με τη μέθοδο επίλυσης. Η απαίτηση τιμών σε διακριτά σημεία του πεδίου επέτρεψε την αριθμητική επίλυση των εξισώσεων χωρίς να χρειάζονται αναλυτικές λύσεις.

Η διαδικασία δημιουργίας επιμέρους υπολογιστικών κυψελών ονομάζεται πλεγματοποίηση. Τα πλέγματα που δημιουργούνται έχουν διάφορες μορφές και χωρίζονται σε υποκατηγορίες. Ένα πλέγμα μπορεί να οριόδετο, δηλαδή οι κυψέλες του εφάπτονται στο στερεό όριο που περικλείει η ροή. Για τη γένεση ενός οριόδετου πλέγματος χρησιμοποιούνται αριθμητικές μέθοδοι. Οι συνηθέστερες είναι οι μέθοδοι που στηρίζονται στην επίλυση μερικών διαφορικών εξισώσεων ελλειπτικού τύπου, οι οποίες συνδυάζονται σύμφωνα με τις οριακές συνθήκες Dirichlet που καθορίζουν τη θέση των σημείων στο όριο[2]. Δύο οριόδετα πλέγματα φαίνονται στα Σχήματα 1.2(α)-(β) όπου η μορφή και η κατανομή των κυψελών τους εξαρτώνται από τη γεωμετρία του στερεού[3]. Κύριο χαρακτηριστικό των πλεγμάτων αυτών είναι ότι υπάρχουν κυψέλες που συνορεύουν άμεσα με τη γεωμετρία ακόμη και όταν το στερεό όριο έχει ακανόνιστη μορφή. Αυτό αποτελεί και το βασικό πλεονέκτημά τους καθώς μπορούν εύκολα να οριστούν σε κάθε οριακό κόμβο οι συνθήκες μη-εισχώρησης ρευστού (και μη-ολίσθησης σε συνεκτικές ροές) ή οποιοσδήποτε άλλες συνθήκες για τα υπόλοιπα μεγέθη ροής.

Αυτή η απόλυτη εξάρτησή τους από το σχήμα του στερεού που περιβάλλουν, αποτελεί και το κύριο μειονέκτημά τους. Τα οριόδετα πλέγματα δημιουργούνται με γνώμονα τη μορφή της γεωμετρίας και για περίπλοκες γεωμετρίες είναι δύσκολο να παραχθεί καλής ποιότητας πλέγμα. Το μειονέκτημα αυτό γίνεται κυρίως αντιληπτό σε περιπτώσεις που υπάρχουν κινούμενα στερεά μέσα στη ροή. Σε κάθε χρονικό βήμα, καθώς αλλάζει η γεωμετρία, απαιτείται να δημιουργείται εκ νέου το πλέγμα ώστε να εφάπτεται στο στερεό όριο, μια διαδικασία που είναι εξαιρετικά χρονοβόρα. Τέλος, για την επίλυση των εξισώσεων σε οριόδετα πλέγματα με τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών, χρειάζεται ο μετασχηματισμός τους σε ένα καμπυλόγραμμο σύστημα συντεταγμένων το οποίο ορίζουν οι πλεγματικές γραμμές[4].

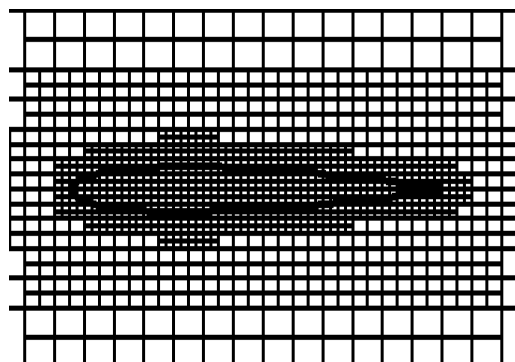
Τα προβλήματα αυτά των οριόδετων πλεγμάτων έρχονται να «διορθώσουν» τα μη-οριόδετα πλέγματα, τα οποία είναι πλήρως ανεξάρτητα από τη μορφή του στερεού[5]. Ένα τέτοιο πλέγμα λέγεται και καρτεσιανό και παρουσιάζεται στο Σχήμα 1.3(γ). Όπως φαίνεται, αποτελείται από κατακόρυφες και οριζόντιες ευθείες ανεξάρτητα από το στερεό που περικλείει και η κατασκευή τους είναι

αισθητά πιο εύκολη σε σχέση με τα οριόδετα πλέγματα. Μπορεί κανείς να πει ότι το στερεό είναι «βυθισμένο» μέσα στο πλέγμα ενώ το όριο του τέμνει τις κυψέλες κατά τυχαίο τρόπο. Σημαντικό είναι ότι οι εξισώσεις ροής δε χρειάζεται να μετασχηματιστούν σε άλλο σύστημα συντεταγμένων αλλά μπορούν να επιλυθούν απευθείας με τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών ή των πεπερασμένων όγκων στο καρτεσιανό σύστημα[6]. Φυσικά τα καρτεσιανά πλέγματα έχουν κι εκείνα μειονεκτήματα. Αυτό που καθιστά δύσκολη τη διαχείρισή τους είναι το γεγονός ότι δεν υπάρχουν κόμβοι κατανεμημένοι ομοιόμορφα γύρω από το όριο του στερεού. Η άμεση επιβολή των οριακών συνθηκών σε κόμβους είναι πλέον αδύνατη γι' αυτό χρειάζονται εναλλακτικοί τρόποι επιβολής τους. Συνήθως γίνεται προσθήκη κατάλληλων όρων στις εξισώσεις ροής για να προσομοιωθεί η επίδραση του στερεού στο ρευστό. Η διαδικασία όμως απαιτεί μεγάλη προσοχή διότι αν δεν γίνει σωστά μπορεί να επιφέρει σφάλματα στην επίλυση [7].



(α)

(β)



(γ)

Σχήμα 1.2: (α) Δομημένο, οριόδετο πλέγμα. (β) Μη-δομημένο, οριόδετο πλέγμα. (γ) Μη-οριόδετο, καρτεσιανό πλέγμα.

1.2. Μέθοδοι Μη-Οριόδετων Πλεγμάτων

Ο όρος «μέθοδοι μη-οριόδετων πλεγμάτων» (Immersed Boundary Methods) χρησιμοποιήθηκε για πρώτη φορά από τον C.Peskin το 1972, ο οποίος μελέτησε τη λειτουργία της καρδιάς και τη ροή του αίματος σε αυτή [4]. Στην πραγματικότητα ο όρος που χρησιμοποιείται στη βιβλιογραφία είναι "Immersed Boundary Methods", δηλαδή μέθοδοι «εμβαπτιζόμενων» μεταβλητών, αλλά πλέον αποδίδεται και ως «μέθοδοι μη-οριόδετων πλεγμάτων». Το ιδιαίτερο της μελέτης του C.Peskin είναι ότι για την προσομοίωση της ροής χρησιμοποιήθηκε εξ ολοκλήρου καρτεσιανό πλέγμα και για την επιρροή των τοιχωμάτων της καρδιάς στο αίμα προστέθηκαν διάφοροι όροι στις εξισώσεις ροής.

Από τότε μέχρι σήμερα έχουν γίνει πολλές παραλλαγές στον τρόπο που επιβάλλονται οι οριακές συνθήκες στις εξισώσεις. Έτσι ο όρος «μέθοδοι μη-οριόδετων πλεγμάτων» περιλαμβάνει όλες εκείνες τις μεθόδους που αναπτύχθηκαν ώστε να μπορέσουν να επιβληθούν οι οριακές συνθήκες ενός προβλήματος σε ένα μη-οριόδετο πλέγμα. Σκοπός τους είναι να προσομοιώσουν την επίδραση που έχει το στερεό όριο στο ρευστό μέσω ενός όρου «πηγής» ή μιας συνάρτησης δύναμης. Για να γίνει αυτό, υπάρχουν δύο βασικοί τρόποι οι οποίοι ορίζουν και τις δύο βασικές κατηγορίες, τις συνεχείς και τις διακριτές μεθόδους.

Πιο συγκεκριμένα, θεωρείται μόνιμη ατριβής ροή συμπιεστού ρευστού γύρω από στερεό σώμα. Οι εξισώσεις Navier-Stokes ισχύουν στη μορφή [8] :

$$\nabla \cdot \rho \vec{u} = 0 \quad (1.1)$$

$$\nabla \cdot \rho \vec{u} \vec{u} + \nabla p = 0$$

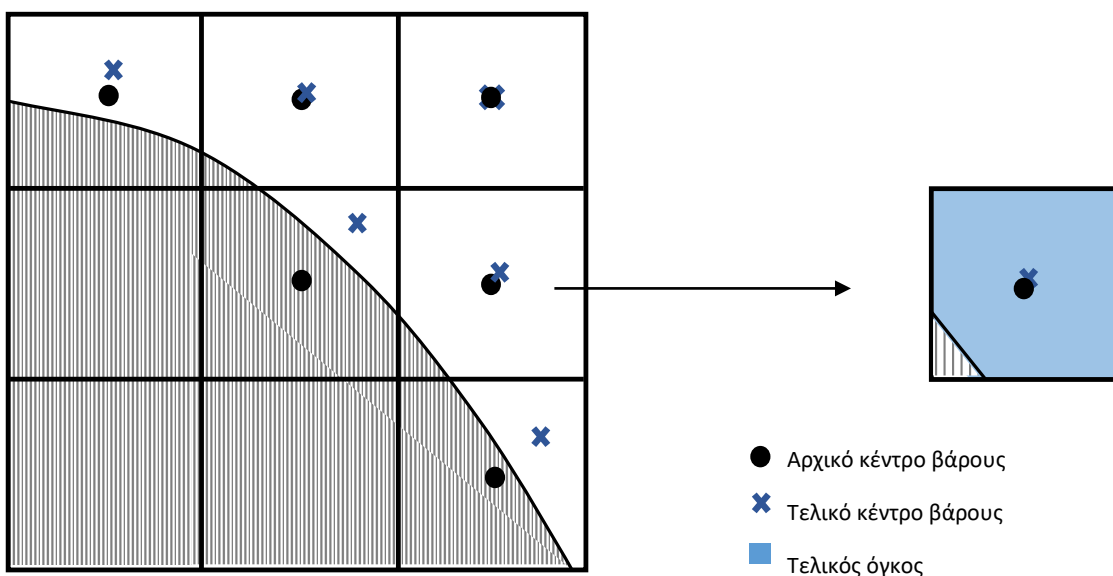
Στις συνεχείς μεθόδους, εισάγεται ένας όρος (\vec{f}) στις εξισώσεις ροής (1.1), ο οποίος αναπαριστά τη δύναμη που ασκεί το στερεό στο ρευστό. Η δύναμη αυτή έχει μεγάλο μέτρο κοντά, ενώ αποσβένεται μακριά από το στερεό όριο.

$$\nabla \cdot \rho \vec{u} \vec{u} + \nabla p = \vec{f} \quad (1.2)$$

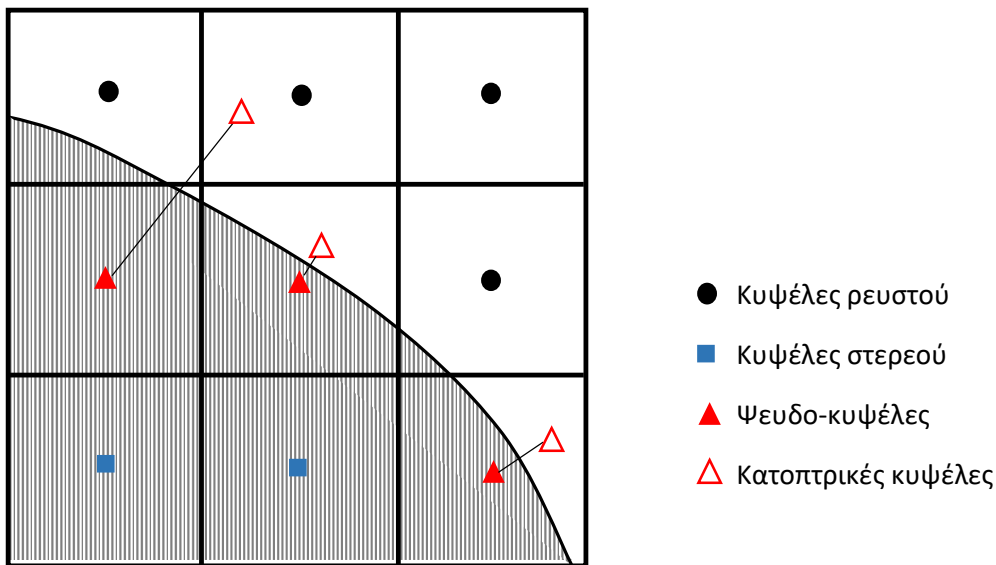
Οι εξισώσεις έπειτα διακριτοποιούνται και λύνονται στους κόμβους του πλέγματος. Οι συνεχείς μέθοδοι βρίσκουν ευρεία εφαρμογή στη βιολογία

όπου τα στερεά όρια των προβλημάτων είναι ελαστικά, όπως τα τοιχώματα της καρδιάς, και όχι άκαμπτα όπως μιας αεροτομής. Ένα από τα μειονεκτήματά τους όμως είναι ότι απαιτούν τιμές των μεγεθών της ροής ακόμα και για τις κυψέλες που ανήκουν στο στερεό, το οποίο είναι ασύμφορο διότι στην πραγματικότητα οι τιμές αυτές δεν αποτελούν μέρος της λύσης.

Στις διακριτές μεθόδους, οι εξισώσεις ροής στη μορφή (1.1) πρώτα διακριτοποιούνται στους κόμβους και ύστερα προσαρμόζονται κοντά στο στερεό τοίχωμα ανάλογα με το πως αυτό επιδρά στη ροή. Δύο εκπρόσωποι της κατηγορίας αυτής είναι η **μέθοδος των τεμνομένων κυψελών** (Cut-Cell Method) και η **μέθοδος των ψευδο-κυψελών** (Ghost-Cell Method). Η βασική διαφορά τους έγκειται στον τρόπο χειρισμού των κυψελών που τέμνονται από τη γεωμετρία. Στην πρώτη μέθοδο, οι κυψέλες αυτές «κόβονται» και οι εξισώσεις ροής λύνονται μόνο στο τμήμα που ανήκει στο ρευστό. Στη δεύτερη μέθοδο, υπάρχει μια νέα σειρά κελιών που δεν θεωρείται ότι ανήκουν ούτε στο ρευστό, ούτε στο στερεό, παρ'όλα αυτά τα μεγέθη ροής εκεί υπολογίζονται με τέτοιο τρόπο ώστε να προσομοιώνονται οι οριακές συνθήκες του προβλήματος. Στο Σχήμα 1.3 παρουσιάζεται η διαφορά στον τρόπο χειρισμού των κυψελών ενώ στο κεφάλαιο (3) γίνεται εκτενής ανάλυση και των δύο μεθόδων.



(a)



(β)

Σχήμα 1.3: Διαχείριση κυψελών: (α) Μέθοδος Τεμνομένων Κυψελών (β) Μέθοδος Ψευδο-κυψελών.

Ένα ακόμα πλεονέκτημα των μη-οριόδετων πλεγμάτων είναι η απλότητα της κατασκευής τους. Σε μια πολύπλοκη 3D γεωμετρία, η διαδικασία γένεσης ενός οριόδετου πλέγματος μπορεί να γίνει χρονοβόρα και απαιτεί σίγουρα πολλές δοκιμές και επαναλήψεις για να δημιουργηθεί ένα πλέγμα καλής ποιότητας που θα οδηγήσει στην ακριβή λύση του προβλήματος. Ένα καρτεσιανό πλέγμα όμως είναι αρκετά εύκολο να σχεδιαστεί διότι αποτελείται μόνο από κατακόρυφες και οριζόντιες γραμμές. Φυσικά το σημείο που απαιτεί προσοχή είναι η πύκνωσή του κοντά στο όριο της γεωμετρίας, ιδιαίτερα σε κινούμενες γεωμετρίες για τις οποίες χρειάζεται να αλλάζει η πύκνωση σε κάθε χρονικό βήμα.

Το κύριο μειονέκτημα των μη-οριόδετων πλεγμάτων είναι βέβαια αυτή η αδυναμία επιβολής των οριακών συνθηκών άμεσα σε έναν κόμβο, όπως αναφέρθηκε και στην παράγραφο (1.1). Αν δεν οριστούν σωστά οι οριακές συνθήκες, μπορεί να υπάρξουν προβλήματα στην ακρίβεια της λύσης αλλά και στην ικανοποίηση των εξισώσεων διατήρησης. Ένα άλλο σημείο που απαιτεί προσοχή κατά τη δημιουργία καρτεσιανών πλεγμάτων είναι η τοποθέτηση της γεωμετρίας μέσα τις πλεγματικές γραμμές. Αν δε γίνει σωστά μπορεί η διαδικασία επίλυσης να μην συγκλίνει στη σωστή λύση ή ακόμα και να αποκλίνει. Τέλος, σε συνεκτικές ροές, όσο μεγαλύτερος είναι ο αριθμός

Reynolds, τόσο περισσότερες κυψέλες απαιτούνται (σε σχέση πάντα με τα οριόδετα πλέγματα) για να προσομοιωθούν και οι εσωτερικές δυνάμεις του ρευστού. Το τελευταίο αυτό πρόβλημα αντισταθμίζεται με το γεγονός ότι πολλές κυψέλες στα μη-οριόδετα πλέγματα δεν βρίσκονται μέσα στο ρευστό, και δεν καταλαμβάνουν θέσεις μνήμης αφού οι εξισώσεις ροής εκεί δεν επιλύονται [9] .

1.3. Στόχος και δομή της Διπλωματικής εργασίας

Στη ΜΠΥΡ&B του ΕΜΠ έχει αναπτυχθεί ένα λογισμικό επίλυσης μόνιμων ατριβών ροών με τη μέθοδο των τεμνομένων κυψελών [10]. Στόχος της διπλωματικής εργασίας είναι η τροποποίηση του λογισμικού ώστε η επίλυση της ροής να γίνεται με τη μέθοδο των ψευδο-κυψελών. Επόμενος στόχος είναι η σύγκριση των δύο μεθόδων ως προς την ποιότητα της λύσης που δίνουν μέσω διαφόρων εφαρμογών ρευστομηχανικής. Κατά την τροποποίηση του λογισμικού, σκόπιμα δεν έγιναν αλλαγές στη διαδικασία πλεγματοποίησης του υπολογιστικού χωρίου για να μπορεί αργότερα να επιλέγει ο χρήστης τη μέθοδο που επιθυμεί για την επίλυση ενός προβλήματος. Στην πραγματικότητα, στη μέθοδο των ψευδο-κυψελών δεν χρησιμοποιείται ένα μεγάλο μέρος του λογισμικού που αφορά τη γεωμετρική κατασκευή των τεμνομένων κυψελών, διότι δε χρειάζεται. Αυτό είναι που κάνει τη μέθοδο αυτή απλούστερη στον προγραμματισμό της. Το λογισμικό αναπτύσσεται σε γλώσσα C++.

Η δομή της εργασίας είναι η εξής:

- *Κεφάλαιο 1:* Θεωρητικό υπόβαθρο της εργασίας
- *Κεφάλαιο 2:* Ανάπτυξη των εξισώσεων ροής που διέπουν τα προβλήματα ρευστομηχανικής και περιγραφή της διαδικασίας επίλυσής τους.
- *Κεφάλαιο 3:* Ανάλυση του τρόπου εισαγωγής των οριακών συνθηκών στις εξισώσεις ροής και με τις δύο διακριτές μεθόδους μη-οριόδετων πλεγμάτων, με έμφαση στη μέθοδο των ψευδο-κυψελών.
- *Κεφάλαιο 4:* Συνοπτική παρουσίαση του αλγορίθμου που ακολουθεί το λογισμικό για την επίλυση της ροής.
- *Κεφάλαιο 5:* Εφαρμογές σε διάφορα προβλήματα ρευστομηχανικής και σύγκριση των δύο μεθόδων.
- *Κεφάλαιο 6:* Ανακεφαλαίωση – Συμπεράσματα.
- *Κεφάλαιο 7:* Παράθεση της βιβλιογραφίας που χρησιμοποιήθηκε.

Κεφάλαιο 2

2. Διατύπωση 2D προβλήματος εξωτερικής αεροδυναμικής

2.1. Εισαγωγή

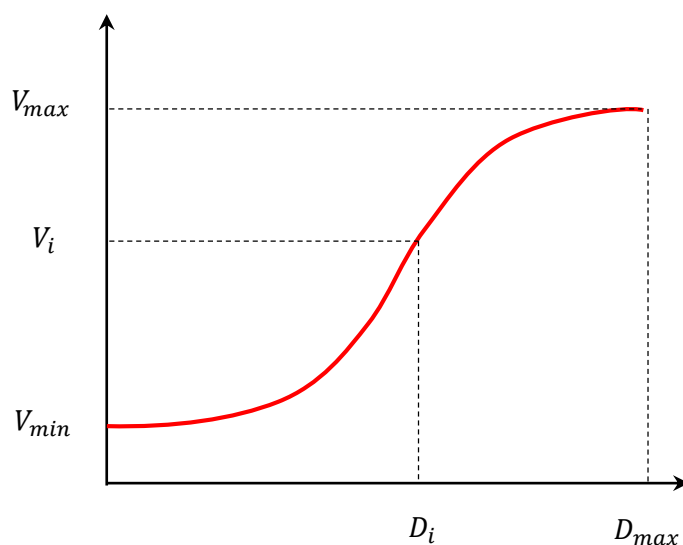
Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται οι εξισώσεις που διέπουν ένα 2D πρόβλημα μόνιμης, ατριβούς ροής Euler. Αναλύεται η διαδικασία πλεγματοποίησης του χωρίου ροής γύρω από δοσμένη γεωμετρία αλλά και η διακριτοποίηση των εξισώσεων πάνω σε αυτό το χωρίο. Στη συνέχεια, περιγράφεται η μέθοδος επίλυσης σύμφωνα με τον κώδικα που έχει ήδη αναπτυχθεί στη ΜΠΥΡ&Β [10]. Σημειώνεται ότι η πλεγματοποίηση και οι εξισώσεις ροής είναι κοινές για τις δύο μεθόδους και δεν έγιναν αλλαγές. Αυτό που αλλάζει είναι ο τρόπος επιβολής των οριακών συνθηκών, το οποίο περιγράφεται αναλυτικά σε επόμενο κεφάλαιο.

2.2. Πλεγματοποίηση του Υπολογιστικού Χωρίου

Ο χρήστης του λογισμικού καλείται αρχικά να δώσει την, προς μελέτη, γεωμετρία καθώς και κάποια στοιχεία για τη μορφή του πλέγματος που επιθυμεί. Το χωρίο που θα δημιουργηθεί το πλέγμα είναι, συνήθως, ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο για το οποίο καθορίζονται οι διαστάσεις του. Στη συνέχεια ο κώδικας ζητά τις μέγιστες και τις ελάχιστες διαστάσεις που μπορεί να έχει μια υπολογιστική κυψέλη καθώς και ένα κατώτατο επιτρεπτό όριο σε περίπτωση που μια κυψέλη χρειαστεί περαιτέρω τομή. Σημειώνεται ότι το τελικό πλέγμα είναι ανεξάρτητο από τη μέθοδο επίλυσης.

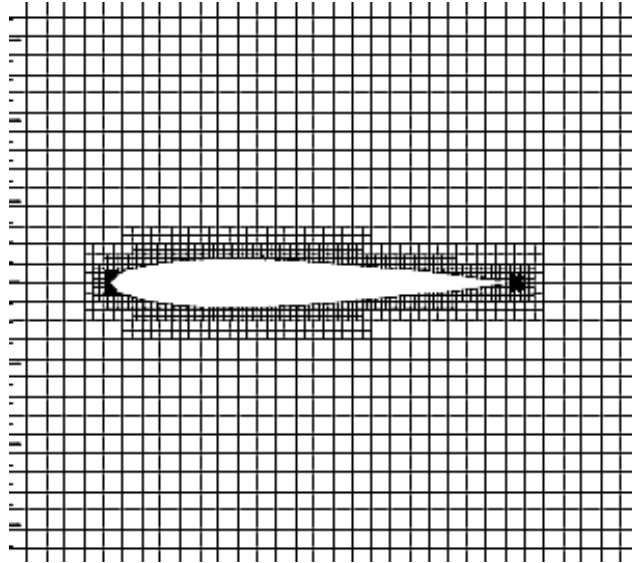
Η πλεγματοποίηση ξεκινά με την τομή του υπολογιστικού χωρίου σε τέσσερις ισεμβαδικές κυψέλες, οι οποίες έχουν κοινό σημείο το βαρύκεντρο του αρχικού χωρίου. Έπειτα καθεμιά από αυτές χωρίζεται σε τέσσερις μικρότερες [2] και η διαδικασία αυτή συνεχίζεται για όλες τις κυψέλες που δημιουργούνται μέχρι το εμβαδόν όλων να είναι μικρότερο από τον μέγιστο επιτρεπτό που έχει δώσει ο χρήστης. Σε δεύτερη φάση, αν έχει επιλεγεί, οι κυψέλες που κόβονται από τη γεωμετρία συνεχίζουν να τέμνονται μέχρι να φτάσουν τον ελάχιστο επιτρεπτό όγκο. Το πρώτο στάδιο της πλεγματοποίησης έχει τελειώσει και πλέον το υπολογιστικό χωρίο αποτελείται αποκλειστικά από κυψέλες μέγιστου και ελάχιστου εμβαδού. Φυσικά αυτό δεν είναι ένα καλής ποιότητας πλέγμα και χρειάζεται επιπλέον επεξεργασία. Το επόμενο στάδιο

είναι η δημιουργία μιας ομαλής πύκνωσης γύρω από το στερεό ώστε να μην υπάρχουν κυψέλες μέγιστου εμβαδού δίπλα σε κυψέλες ελάχιστου. Η πύκνωση γίνεται σύμφωνα με μία σιγμοειδή συνάρτηση (Σχήμα 2.1) η οποία καθορίζει το εμβαδό V_i που θα έχει κάθε κυψέλη ανάλογα με την απόστασή της D_i από το στερεό όριο. Οι κυψέλες μέσα σε μια ακτίνα D_{max} τέμνονται εκ νέου μέχρι να αποκτήσουν το κατάλληλο εμβαδό. Στο τέλος της διαδικασίας η μετάβαση από τις μεγαλύτερες στις μικρότερες κυψέλες γίνεται σταδιακά και όχι απότομα και πλέον το πλέγμα είναι ομαλό.



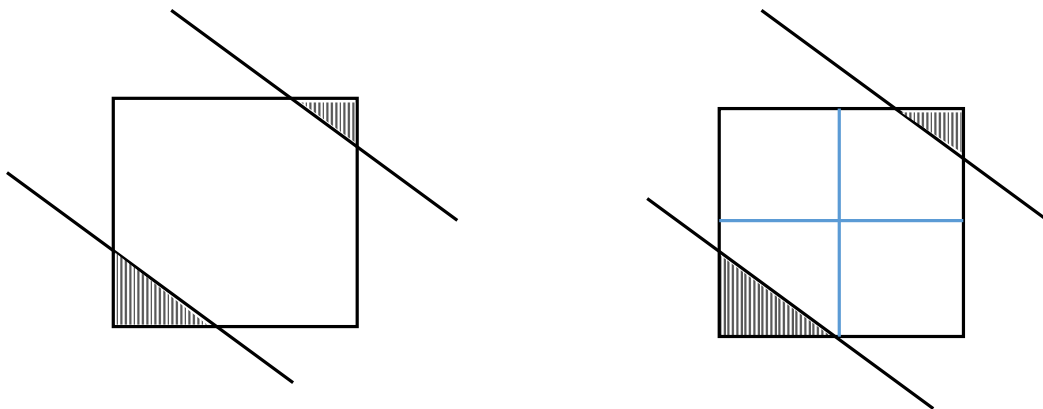
Σχήμα 2.1: Συνάρτηση του όγκου των κυψελών σε σχέση με την απόστασή τους από το στερεό όριο.

Η πύκνωση του πλέγματος δίνει τη δυνατότητα μεγαλύτερης ακρίβειας των αποτελεσμάτων κοντά στο στερεό όριο. Ένα παράδειγμα πλέγματος με πύκνωση φαίνεται στο Σχήμα 2.2:



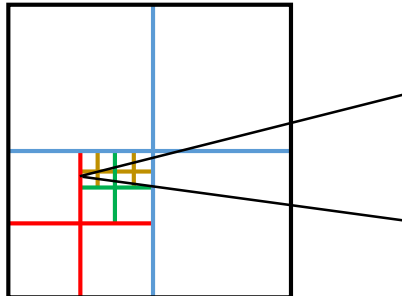
Σχήμα 2.2: Γένεση μη-οριόδετου πλέγματος γύρω από μία αεροτομή.

Δύο βασικοί περιορισμοί στο τελικό πλέγμα είναι, πρώτον, ότι δύο γειτονικές κυψέλες δε γίνεται να απέχουν περισσότερο από ένα επίπεδο πύκνωσης. Αυτό λύνεται με τη χρήση της σιγμοειδούς συνάρτησης όπως περιγράφηκε. Δεύτερος περιορισμός είναι ότι μία κυψέλη δεν επιτρέπεται να τέμνεται δύο φορές από τη γεωμετρία. Σε περίπτωση που συμβεί αυτό, ο κώδικας συνεχίζει να χωρίζει την «προβληματική» κυψέλη όσο του επιτρέπει το δοσμένο κατώτατο όριο επιφάνειας. Το πρόβλημα αυτό και η αντιμετώπισή του φαίνεται στο Σχήμα 2.3:



Σχήμα 2.3: Κάθε κυψέλη που τέμνεται δύο φορές από τη γεωμετρία, κόβεται εκ νέου μέχρι να διορθωθεί το πρόβλημα.

Ένα τελευταίο πρόβλημα που μπορεί να προκύψει είναι να τέμνεται μια κυψέλη δύο φορές από τη γεωμετρία στην ίδια πλευρά. Αυτό συμβαίνει κυρίως σε γεωμετρίες που έχουν οξείες γωνίες όπως είναι η ακμή εκφυγής μιας αεροτομής. Στην περίπτωση αυτή χρειάζονται ακόμα περισσότερες τομές των κυψελών όπως φαίνεται στο Σχήμα (2.4).



Σχήμα 2.4: Κυψέλη που τέμνεται δύο φορές από τη γεωμετρία στην ίδια πλευρά. Μετά από 3 επιπλέον τομές, το πρόβλημα δε διορθώνεται, διότι η κίτρινη κυψέλη κάτω αριστερά συνεχίζει να έχει πρόβλημα.

Σε μερικές περιπτώσεις ενδέχεται να μην μπορεί λυθεί το πρόβλημα διότι όλες οι κυψέλες έχουν φτάσει στο ελάχιστο επιτρεπτό εμβαδό και υπάρχει ακόμα κάποια που τέμνεται δύο φορές από το στερεό. Τότε ο αλγόριθμος σταματά και ο χρήστης καλείται να διορθώσει μόνος του το πρόβλημα, συνήθως με επανατοποθέτηση της γεωμετρίας σε διαφορετικό σημείο του πλέγματος. Εάν εντοπιστεί οποιοδήποτε άλλο πρόβλημα, όπως για παράδειγμα να μην υπάρχει κυψέλη που να ανήκει στο ρευστό τότε και πάλι ο κώδικας τερματίζει βγάζοντας το ανάλογο μήνυμα. Μόνο όταν διορθωθούν όλα τα προβλήματα μπορεί να ολοκληρωθεί σωστά η διαδικασία της πλεγματοποίησης και να ξεκινήσει η επίλυση.

2.3. Οι Εξισώσεις Ροής και η Διακριτοποίησή τους

2.3.1. Εξισώσεις Ατριβούς Ροής, Συμπιεστού Ρευστού

Σε ατριβή ροή συμπιεστού ρευστού ισχύουν οι τέσσερις εξισώσεις Euler [8]

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{f}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{f}_y}{\partial y} = 0 \quad (2.1)$$

Το διάνυσμα των συντηρητικών μεταβλητών \vec{U} και τα διανύσματα ατριβούς ροής \vec{f}_x, \vec{f}_y παίρνουν τις εξής τιμές για κάθε εξίσωση (συνέχειας, διατήρησης ορμής κατά x και y, διατήρησης ενέργειας):

$$\vec{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ E_t \end{bmatrix} \quad \vec{f}_x = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ u(E_t + p) \end{bmatrix} \quad \vec{f}_y = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ v(E_t + p) \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

Οι όροι που εμφανίζονται στις εξισώσεις συνδέονται με τις ακόλουθες εξισώσεις κάνοντας την παραδοχή ότι το ρευστό είναι τέλειο αέριο.

$$p = \rho R_g T \quad (2.3)$$

$$c^2 = \frac{\gamma p}{\rho} \quad (2.4)$$

$$h_t = \frac{c^2}{\gamma - 1} + \frac{1}{2}(u^2 + v^2) \quad (2.5)$$

$$E_t = \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{1}{2}\rho(u^2 + v^2) \quad (2.6)$$

όπου

R_g η σταθερά των τέλειων αερίων,

T η στατική θερμοκρασία,

T_t η ολική θερμοκρασία,

h_t η ολική ενθαλπία ($h_t = C_p \cdot T_t$),

c η ταχύτητα του ήχου και

E_t η ολική ενέργεια ανά μονάδα όγκου του ρευστού.

Με ρ συμβολίζεται η πυκνότητα του ρευστού, u και v είναι η κατά x και y συνιστώσες της ταχύτητας αντίστοιχα και p η πίεσή του. [11]

Σε τανυστική γραφή οι εξισώσεις γίνονται:

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + \frac{\partial f_{ik}}{\partial x_k} = 0 \quad (2.7)$$

με $i = 1,2,3,4$ εξισώσεις και $k = 1,2$ κατευθύνσεις. Κάθε επαναλαμβανόμενος δείκτης, όπως ο (k) , στον ίδιο όρο δηλώνει άθροιση.

Για χρονικά μόνιμες ροές, απλοποιείται ο πρώτος όρος και απομένει:

$$\frac{\partial f_{ik}}{\partial x_k} = 0 \quad (2.8)$$

2.3.2. Αριθμητική Επίλυση Εξισώσεων

Έστω \vec{U}^* η ακριβής λύση της ροής, η οποία και ικανοποιεί τις εξισώσεις (2.1)

$$\vec{R}(\vec{U}^*) = \vec{0} \quad (2.9)$$

και έστω \vec{U} η τρέχουσα λύση.

Η μέθοδος επίλυσης είναι επαναληπτική και, σε κάθε επανάληψη n , η λύση U διορθώνεται μέχρι να πλησιάσει επαρκώς την \vec{U}^* . Συνεπώς, η τρέχουσα λύση θα διαφέρει κάθε φορά από την ακριβή κατά $\Delta\vec{U}$.

$$\vec{U}^* = \vec{U} + \Delta\vec{U} \quad (2.10)$$

Από την (2.6) ισχύει

$$\vec{R}(\vec{U} + \Delta\vec{U}) = \vec{0} \quad (2.11)$$

Εφαρμόζοντας ανάπτυγμα Taylor γύρω από τη λύση \vec{U}^* προκύπτει

$$\vec{R}(\vec{U}) + \frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{U}} \Delta\vec{U} + O(\Delta\vec{U}^2) = \vec{0} \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{U}} \Delta\vec{U} = -\vec{R}(\vec{U})$$

Η αριθμητική επίλυση της εξίσωσης (2.12) γίνεται χρησιμοποιώντας τη δέλτα-διατύπωση [12], δηλαδή σε κάθε επανάληψη n υπολογίζεται η ποσότητα $\Delta\vec{U}^n$ και όχι η τρέχουσα λύση \vec{U}^n . Επειδή εν γένει η ποσότητα $\Delta\vec{U}^n$ είναι μικρός αριθμός ο οποίος με το πέρασ των επαναλήψεων τείνει στο μηδέν, η δέλτα-διατύπωση είναι συνήθως πιο ευσταθής.

Οι επαναλήψεις τελειώνουν όταν η διόρθωση είναι πλέον πολύ μικρή

$$|\Delta\vec{U}| < \varepsilon, \text{ όπου } \varepsilon \rightarrow 0 \quad (2.13)$$

που σημαίνει ότι η λύση είναι πολύ κοντά στην ακριβή.

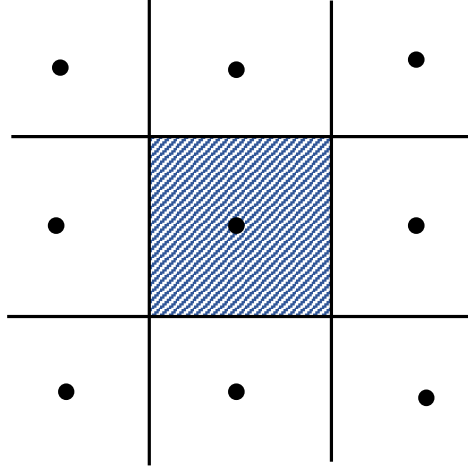
Ολοκλήρωση των εξισώσεων σε πεπερασμένους όγκους

Ο πρώτος όρος της εξίσωσης (2.9) δείχνει το υπόλοιπο των εξισώσεων ροής για τη λύση U , δηλαδή:

$$\vec{R} = \frac{\partial f_{i\kappa}}{\partial x_\kappa} = \vec{0} \quad (2.14)$$

Η επίλυση γίνεται με ολοκλήρωση σε πεπερασμένους όγκους με αποθήκευση των ποσοτήτων της ροής στα βαρύκεντρα των κυψελών (κεντροκυψελική / cell-centered διατύπωση). Αυτό σημαίνει ότι οι εξισώσεις (2.14) ολοκληρώνονται στον όγκο ελέγχου Ω , ο οποίος ταυτίζεται με την επιφάνεια κάθε κυψέλης, όπως φαίνεται στο Σχήμα(2.1):

$$\int_{\Omega} \frac{\partial f_{i\kappa}}{\partial x_{\kappa}} d\Omega = 0 \quad (2.15)$$



Σχήμα 2.1: Όγκος ολοκλήρωσης των εξισώσεων ροής.

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα Green-Gauss, το χωρικό ολοκλήρωμα (2.15), γίνεται επιφανειακό στην περίμετρο της κυψέλης

$$\int_S f_{i\kappa} n_{\kappa} ds = 0 \quad (2.16)$$

όπου n_{κ} είναι το κάθετο διάνυσμα σε κάθε πλευρά της κυψέλης ($\kappa = 1,2,3,4$)
Με την παραδοχή ότι το διάνυσμα ροής \vec{f} είναι σταθερό σε κάθε πλευρά γίνεται διακριτοποίηση του ολοκληρώματος

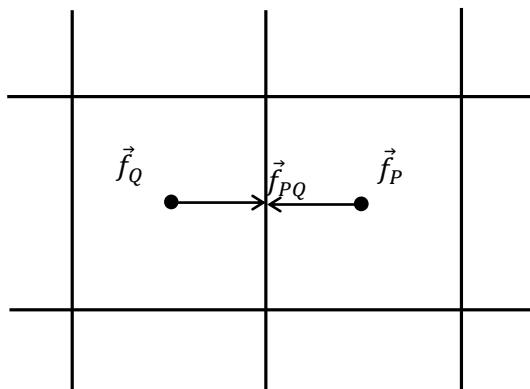
$$\int_S f_{i\kappa} n_{\kappa} ds = \sum_{j=1}^n f_{i\kappa}^j n_{\kappa}^j \Delta s^j \quad (2.17)$$

όπου n ο αριθμός των πλευρών που συνορεύουν με κυψέλη ρευστού.

Για τον υπολογισμό του \vec{f} σε κάθε πλευρά χρησιμοποιείται το σχήμα Roe [13]:

$$\vec{f}^{PQ_i} = \frac{1}{2} (\vec{f}^P + \vec{f}^{Q_i}) - \frac{1}{2} |\tilde{A}| (\vec{U}^{Q_i} - \vec{U}^P) \quad (2.18)$$

όπου \vec{f}^P είναι το διάνυσμα ατριβούς ροής της κυψέλης που μελετάται και \vec{f}^{Qi} της γειτονικής σε κάθε πλευρά, όπως φαίνεται και στο Σχήμα(2.2).



Σχήμα 2.2: Σχήμα Roe για τον υπολογισμό του διανύσματος ατριβούς ροής στην κοινή πλευρά των P,Q.

Στο σημείο αυτό σημειώνεται ότι οι εξισώσεις ροής (2.1) μπορούν να γραφτούν στη μορφή

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{f}_x}{\partial \vec{u}} \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} + \frac{\partial \vec{f}_y}{\partial \vec{u}} \frac{\partial \vec{u}}{\partial y} = 0 \quad (2.19)$$

όπου

$$A_x = \frac{\partial \vec{f}_x}{\partial \vec{u}} \quad \text{και} \quad A_y = \frac{\partial \vec{f}_y}{\partial \vec{u}} \quad (2.20)$$

Τα Ιακωβιανά μητρώα του συστήματος.

Ο υπολογισμός του μητρώου $|\tilde{A}|$ του σχήματος Roe υπολογίζεται κατ' αντιστοιχία με το Ιακωβιανό μητρώο $A = (A_x, A_y)$ χρησιμοποιώντας τις κατά Roe μέσες τιμές των πρωτεύουσών μεταβλητών και όχι τις πρωτεύουσες μεταβλητές αυτούσιες. Οι κατά Roe πρωτεύουσες μεταβλητές είναι οι εξής [14]:

$$\vec{U} = \begin{bmatrix} \tilde{\rho} \\ \tilde{u} \\ \tilde{v} \\ \tilde{p} \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

$$\text{όπου } \tilde{\rho} = \sqrt{(\rho_L \rho_R)} \text{ και } \tilde{U}_{2,3,4} = \frac{\sqrt{\rho^L} U_{2,3,4}^L + \sqrt{\rho^R} U_{2,3,4}^R}{\sqrt{\rho^L} + \sqrt{\rho^R}} \quad (2.22)$$

Από τη σχέση (2.16) φαίνεται ότι για κάθε πλευρά της κυψέλης χρειάζεται το γινόμενο $|A| \cdot \vec{n}$. Άρα χρησιμοποιώντας το Ιακωβιανό μητρώο A ορίζεται επιπλέον το \underline{A} :

$$\underline{A} = A \cdot \vec{n} = A_x \cdot n_x + A_y \cdot n_y \quad (2.21)$$

$$\rightarrow \underline{A} = \frac{\partial \vec{f}_x}{\partial \bar{U}} n_x + \frac{\partial \vec{f}_y}{\partial \bar{U}} n_y = \frac{\partial (\vec{f} \cdot \vec{n})}{\partial \bar{U}} \quad (2.22)$$

όπου \vec{n} είναι το κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα σε κάθε πλευρά της κυψέλης.

Από τη σχέση (2.2):

$$\vec{f} \cdot \vec{n} = \begin{bmatrix} \rho(\vec{u} \cdot \vec{n}) \\ \rho u(\vec{u} \cdot \vec{n}) + p n_x \\ \rho v(\vec{u} \cdot \vec{n}) + p n_y \\ (E + p)(\vec{u} \cdot \vec{n}) \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

Παραγωγίζοντας τώρα το μητρώο αυτό ως προς τις συντηρητικές μεταβλητές (2.2) προκύπτει τελικά η Ιακωβιανή [15]

$$\underline{A} = [\underline{A}(:,1) \quad \underline{A}(:,2) \quad \underline{A}(:,3) \quad \underline{A}(:,4)] \quad (2.24)$$

όπου

$$\underline{A}(:,1) = \begin{bmatrix} 0 \\ -u(\vec{u} \cdot \vec{n}) + \frac{\gamma-1}{2}(u^2 + v^2)n_x \\ -v(\vec{u} \cdot \vec{n}) + \frac{\gamma-1}{2}(u^2 + v^2)n_y \\ \left(-\frac{\gamma E}{\rho} + (\gamma-1)(u^2 + v^2)\right)(\vec{u} \cdot \vec{n}) \end{bmatrix}$$

$$\underline{A}(:,2) = \begin{bmatrix} n_x \\ \vec{u} \cdot \vec{n} - \gamma \cdot un_x \\ vn_x - (\gamma-1)un_y \\ \left(\frac{\gamma E}{\rho} - \frac{\gamma-1}{2}(u^2 + v^2)\right)n_x - (\gamma-1)u(\vec{u} \cdot \vec{n}) \end{bmatrix}$$

$$\underline{A}(:,3) = \begin{bmatrix} n_y \\ un_y - (\gamma-1)vn_x \\ \vec{u} \cdot \vec{n} + (2-\gamma)vn_y \\ \left(\frac{\gamma E}{\rho} - \frac{\gamma-1}{2}(u^2 + v^2)\right)n_y - (\gamma-1)v(\vec{u} \cdot \vec{n}) \end{bmatrix}$$

$$\underline{A}(:,4) = \begin{bmatrix} 0 \\ (\gamma-1)n_x \\ (\gamma-1)n_y \\ \gamma(\vec{u} \cdot \vec{n}) \end{bmatrix}$$

Το μητρώο \underline{A} μπορεί να γραφτεί στη μορφή $\underline{A} = P\Lambda P^{-1}$ με τον πίνακα Λ να περιέχει τις ιδιοτιμές και τους P και P^{-1} τα αριστερά και δεξιά ιδιοδιανύσματα του \underline{A} αντίστοιχα.

Ο πίνακας Λ θα είναι:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \vec{u} \cdot \vec{n} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \vec{u} \cdot \vec{n} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \vec{u} \cdot \vec{n} + c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vec{u} \cdot \vec{n} - c \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

Τα δεξιά ιδιοδιανύσματα \vec{r} πρέπει να ικανοποιούν την εξίσωση:

$(\underline{A} + \lambda_k I)r_k = \vec{0}$ και τα αριστερά \vec{l} την $(\underline{A} - \lambda_k I)l = \vec{0}$, όπου I είναι ένας 4x4 μοναδιαίος πίνακας. Τελικά τα ιδιοδιανύσματα είναι:

$$\vec{r} = [\vec{r}_1 \quad \vec{r}_2 \quad \vec{r}_3 \quad \vec{r}_4] \quad (2.26)$$

$$l \rightarrow = \begin{bmatrix} \vec{l}_1 \\ \vec{l}_2 \\ \vec{l}_3 \\ \vec{l}_4 \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

όπου

$$\vec{r}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ u \\ v \\ \frac{1}{2}(u^2 + v^2) \end{bmatrix} \quad \vec{r}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ n_y \\ -n_x \\ n_y - n_x v \end{bmatrix}$$

$$\vec{r}_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{c} \\ \frac{u}{c} + n_x \\ \frac{u}{c} + n_y \\ \frac{1}{2c}(u^2 + v^2) + \frac{c}{\gamma-1} + \vec{u} \cdot \vec{n} \end{bmatrix} \quad \vec{r}_4 = \begin{bmatrix} \frac{1}{c} \\ \frac{u}{c} - n_x \\ \frac{u}{c} - n_y \\ \frac{1}{2c}(u^2 + v^2) + \frac{c}{\gamma-1} - \vec{u} \cdot \vec{n} \end{bmatrix}$$

$$\vec{l}_1 = \left[1 - \frac{(\gamma-1)(u^2 + v^2)}{2c^2} \quad \frac{(\gamma-1)u}{c^2} \quad \frac{(\gamma-1)v}{c^2} \quad -\frac{(\gamma-1)}{c^2} \right]$$

$$\vec{l}_2 = [n_x v - n_y u \quad n_y \quad -n_x \quad 0]$$

$$\vec{l}_3 = \left[-\frac{\vec{u} \cdot \vec{n}}{2} + \frac{(\gamma-1)(u^2 + v^2)}{4c} \quad \frac{n_x}{2} - \frac{(\gamma-1)u}{2c} \quad \frac{n_y}{2} - \frac{(\gamma-1)v}{2c} \quad \frac{\gamma-1}{2c} \right]$$

$$\vec{l}_4 =$$

$$\left[\frac{\vec{u} \cdot \vec{n}}{2} + \frac{(\gamma - 1)(u^2 + v^2)}{4c} \quad -\frac{n_x}{2} - \frac{(\gamma - 1)u}{2c} \quad -\frac{n_y}{2} - \frac{(\gamma - 1)v}{2c} \quad \frac{\gamma - 1}{2c} \right]$$

Έχουμε $P = [\vec{r}_1 \quad \vec{r}_2 \quad \vec{r}_3 \quad \vec{r}_4]$ και ο $P^{-1} = \begin{bmatrix} \vec{l}_1 \\ \vec{l}_2 \\ \vec{l}_3 \\ \vec{l}_4 \end{bmatrix}$ (2.28)

Τέλος για να υπολογιστεί το Ιακωβιανό μητρώο $|\underline{A}|$ χρειάζονται τα μητρώα $\underline{A}^+ = P\Lambda^+P^{-1}$ και $\underline{A}^- = P\Lambda^-P^{-1}$, όπου το Λ^+ και το Λ^- περιέχουν τις θετικές και αρνητικές ιδιοτιμές του \underline{A} αντίστοιχα. Το $|\underline{A}|$ ορίζεται ως:

$$|\underline{A}| = \underline{A}^+ - \underline{A}^- \quad (2.29)$$

Τα μητρώα U^P και U^Q της σχέσης (2.15) υπολογίζονται ανάλογα με την τάξη ακρίβειας που έχει διαλέξει ο χρήστης. Για πρώτης τάξης ακρίβεια, το μητρώο U αντιγράφεται από το κέντρο βάρους της κυψέλης, σε κάθε πλευρά (i).

$$U_i = U_{BC} \quad (2.32)$$

Για δεύτερης τάξης ακρίβεια, χρησιμοποιείται ο τύπος του Taylor:

$$U_i = U_{BC} + \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_P \Delta x_i + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)_P \Delta y_i \quad (2.33)$$

$$\text{όπου } \Delta x_i = x_{Qi} - x_P \text{ και } \Delta y_i = y_{Qi} - y_P \quad (2.34)$$

Οι χωρικές παράγωγοι $\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}$ στο σημείο P υπολογίζονται χρησιμοποιώντας τις τιμές U_Q όλων των γειτόνων του P. Από τη σχέση Taylor προκύπτει για κάθε γείτονα Q:

$$\vec{U}_Q = \vec{U}_P + \frac{\partial \vec{U}_P}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial \vec{U}_P}{\partial y} \Delta y \quad (2.35)$$

$$\text{όπου } \Delta x = x_Q - x_P \text{ και } \Delta y = y_Q - y_P$$

Θέτοντας $\Delta U = U_Q - U_P$ η σχέση γίνεται

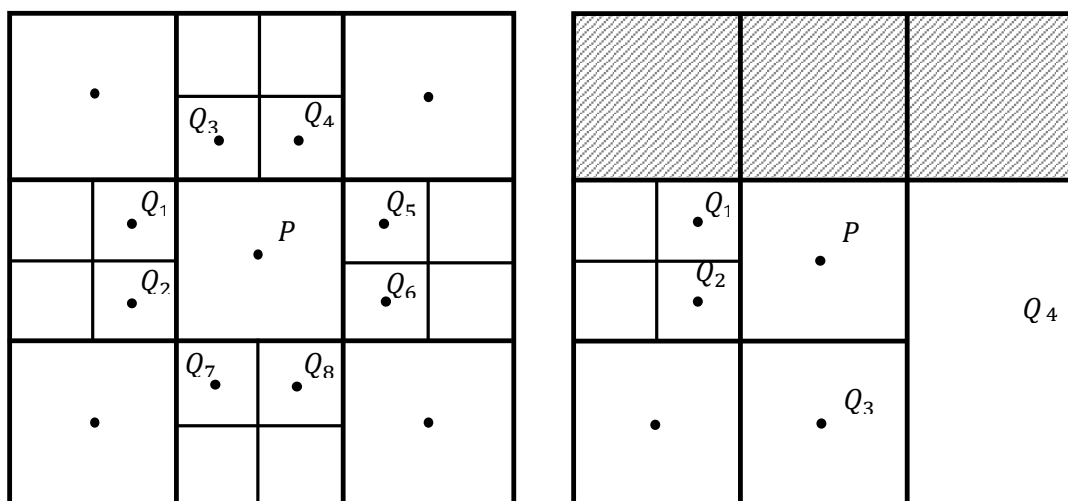
$$\frac{\partial \bar{U}_P}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial \bar{U}_P}{\partial y} \Delta y - \Delta \bar{U} = 0 \quad (2.36)$$

Ο υπολογισμός των χωρικών παραγώγων γίνεται με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων [16]. Η προς ελαχιστοποίηση, ποσότητα E είναι:

$$E_i = \sum_{i=1}^{nb} \left(\frac{\partial \bar{U}_P}{\partial x} \Delta x_i + \frac{\partial \bar{U}_P}{\partial y} \Delta y_i - \Delta \bar{U}_i \right)^2 \quad (2.37)$$

όπου nb είναι το πλήθος των γειτονικών κυψελών του P .

Ο αριθμός αυτός στο 2Δ χώρο κυμαίνεται από δύο έως οκτώ ανάλογα με το μέγεθος και τη θέση της κυψέλης P στο πλέγμα. Ο αριθμός γειτόνων δεν πρέπει να ξεπερνά το οκτώ διότι όπως αναφέρθηκε στην παράγραφο (2.2) οι κυψέλες δεν επιτρέπεται να απέχουν περισσότερο από ένα επίπεδο πύκνωσης. Στο Σχήμα (2.3) φαίνονται δύο χαρακτηριστικές περιπτώσεις.



(α)

(β)

Σχήμα 2.3: (α) Κυψέλη με 8 γείτονες. (β) Κυψέλη με 4 γείτονες.

Για την ελαχιστοποίηση του E_i πρέπει να ισχύουν οι δύο σχέσεις για τις μερικές παραγώγους του:

$$\frac{\partial E}{\partial \left(\frac{\partial \bar{U}_P}{\partial x}\right)} = \sum_{i=1}^{nb} 2 \cdot \left(\frac{\partial \bar{U}_P}{\partial x} \Delta x_i + \frac{\partial \bar{U}_P}{\partial y} \Delta y_i - \Delta \bar{U}_i \right) \Delta x_i = 0 \quad (2.38)$$

$$\frac{\partial E}{\partial \left(\frac{\partial \bar{U}_P}{\partial y}\right)} = \sum_{i=1}^{nb} 2 \cdot \left(\frac{\partial \bar{U}_P}{\partial x} \Delta x_i + \frac{\partial \bar{U}_P}{\partial y} \Delta y_i - \Delta \bar{U}_i \right) \Delta y_i = 0 \quad (2.39)$$

Οι σχέσεις ξαναγράφονται:

$$\frac{\partial \bar{U}_P}{\partial x} \Delta x_i \Delta x_i + \frac{\partial \bar{U}_P}{\partial y} \Delta x_i \Delta y_i = \Delta x_i \Delta \bar{U}_i \quad (2.40)$$

$$\frac{\partial \bar{U}_P}{\partial x} \Delta x_i \Delta y_i + \frac{\partial \bar{U}_P}{\partial y} \Delta y_i \Delta y_i = \Delta y_i \Delta \bar{U}_i \quad (2.41)$$

όπου ο επαναλαμβανόμενος δείκτης i δηλώνει άθροιση. Και σε μητρική, γραφή το σύστημα γίνεται:

$$\begin{bmatrix} \sum_1^{nb} \Delta x_i \Delta x_i & \sum_1^{nb} \Delta x_i \Delta y_i \\ \sum_1^{nb} \Delta x_i \Delta y_i & \sum_1^{nb} \Delta y_i \Delta y_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{U}_P}{\partial x} \\ \frac{\partial \bar{U}_P}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_1^{nb} \Delta x_i \Delta \bar{U}_i \\ \sum_1^{nb} \Delta y_i \Delta \bar{U}_i \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

Το (2.42) είναι ένα σύστημα 2x2 και από την επίλυσή του προκύπτουν οι χωρικές παράγωγοι $\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}$

Από τη σχέση (2.15) υπολογίζεται το μητρώο $\overrightarrow{f_{PQ}}$ και ο μόνος όρος που μένει να υπολογιστεί στη σχέση (2.9) (δέλτα-διατύπωση) είναι ο $\frac{\partial R}{\partial U}$.

Από τις σχέσεις (2.9- 2.14 – 2.15) προκύπτει:

$$R_P = \sum_{i=1}^{nb} \left[\frac{1}{2} \cdot (f_{PQ}^P + f_{PQ}^{Qi}) - \frac{1}{2} \cdot |\tilde{A}|_{PQ} (U^{Qi} - U^P) \right] n^{Qi} \Delta S^{Qi} \quad (2.43)$$

Ο όρος $\frac{\partial R}{\partial U}$ για το κελί P αποτελείται από το μητρώο

$$D_p = \frac{\partial R_P}{\partial U_P} \quad (2.44)$$

και τα

$$OD_{PQ} = \frac{\partial R_P}{\partial U_Q} \quad (2.45)$$

από όλους τους γείτονές του. Μετά από πράξεις αποδεικνύεται ότι:

$$\frac{\partial R_P}{\partial U_P} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^{nb} (A + |\tilde{A}|) n^{Qi} \Delta S^{Qi} \quad (2.46)$$

$$\frac{\partial R_P}{\partial U_{Qi}} = \frac{1}{2} (A - |\tilde{A}|) n^{Qi} \Delta S^{Qi} \quad (2.47)$$

Για όλα τα υπόλοιπα $\frac{\partial R_P}{\partial U_W} = 0$, με W όλες οι κυψέλες εκτός της P και των γειτόνων του. Τελικά, για (n) κυψέλες προκύπτει ένα σύστημα της μορφής:

$$\begin{bmatrix} D_1 & \cdots & OD_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ OD_{n1} & \cdots & D_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta U_1 \\ \vdots \\ \Delta U_n \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_n \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

Ο χρήστης μπορεί να επιλέξει αν και αυτό το σύστημα θα λυθεί με τη μέθοδο Jacobi ή Gauss-Seidel.

Τελικά, η διόρθωση που προκύπτει είναι:

$$\Delta U_P = -D^{-1} (R + \sum_{i=1}^{nb} (OD_{Qi} \cdot \Delta U_{Qi})) \quad (2.49)$$

Η τρέχουσα λύση ανανεώνεται σύμφωνα με τη σχέση (2.7) μέχρι η διόρθωση ΔU να είναι μηδενική.

Κεφάλαιο 3

3. Επιβολή Οριακών Συνθηκών

Για την επίλυση της ροής απαιτούνται δύο ειδών οριακές συνθήκες. Αρχικά χρειάζεται να προσομοιωθεί η επίδραση του στερεού ορίου στη ροή, το οποίο περιγράφεται εκτενώς στο παρόν κεφάλαιο. Για να ξεκινήσει όμως η επίλυση, χρειάζεται να οριστούν και κάποιες συνθήκες στα επ' άπειρο όρια του πλέγματος. Με τον όρο επ' άπειρο όρια εννοούνται οι πλευρές του πλέγματος που είναι αρκετά μακριά από τη γεωμετρία και θεωρείται ότι δεν επηρεάζουν τη ροή γύρω από αυτή. Για να οριστούν οι οριακές συνθήκες εκεί, δημιουργούνται κυψέλες έξω από το υπολογιστικό χωρίο οι οποίες έχουν τις τιμές των μεταβλητών που ορίζει ο χρήστης. Οι τιμές αυτές είναι αμετάβλητες και οι εξισώσεις ροής δεν επιλύονται εκεί, παρόλα αυτά βοηθούν στον υπολογισμό της ροής στις οριακές κυψέλες.

3.1. Διακριτές «μέθοδοι μη-οριόδετων πλεγμάτων»

Η ροή που μελετάται είναι ατριβής άρα η μόνη οριακή συνθήκη του προβλήματος είναι η συνθήκη μη-εισχώρησης [1] :

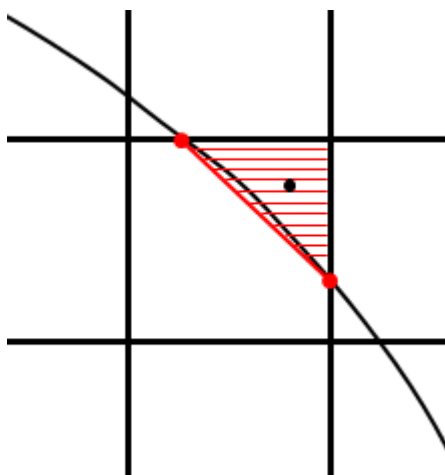
$$\vec{u} \cdot \vec{n} = \vec{0} \quad (3.1)$$

Όπως περιγράφηκε στο κεφάλαιο 1 η επιβολή των οριακών συνθηκών σε ένα μη-οριόδετο πλέγμα δεν είναι απλή διαδικασία και απαιτεί μεγάλη προσοχή, διαφορετικά μπορεί να επιφέρει σημαντικά σφάλματα στη λύση του προβλήματος. Η εργασία αυτή ασχολείται με τις διακριτές μεθόδους μη-οριόδετων πλεγμάτων και, συγκεκριμένα, με τη μέθοδο των ψευδο-κυψελών (Ghost Cells), ενώ γίνεται σε κάποια σημεία σύγκριση με τη μέθοδο των τεμνομένων κυψελών (Cut Cells). Οι εξισώσεις ροής έχουν ήδη διακριτοποιηθεί και τώρα μένει να προσομοιωθεί η επίδραση του στερεού στη ροή. Η διαφορά των δύο μεθόδων έγκειται στον τρόπο διαχείρισης των κυψελών του πλέγματος που τέμνονται από τη γεωμετρία και, συνεπώς, στους όρους που εισάγονται στις εξισώσεις.

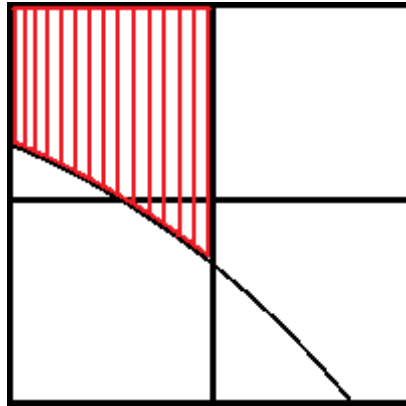
3.2. Μέθοδος Τεμνομένων Κυψελών (Cut-Cells)

Ο κώδικας που υπήρχε στη ΜΠΥΡ&Β του ΕΜΠ κατά την έναρξη της εργασίας αυτής χρησιμοποιεί τη μέθοδο των τεμνομένων κυψελών [17] . Η διαδικασία επίλυσης της ροής είναι η εξής:

Στο πρώτο στάδιο γίνεται η πλεγματοποίηση του υπολογιστικού χωρίου, όπως περιγράφηκε στην παράγραφο (2.2). Οι κυψέλες τώρα που τέμνονται από το στερεό όριο χωρίζονται σε δύο τμήματα. Αρχικά άγεται ένα ευθύγραμμο τμήμα μεταξύ των δύο σημείων τομής τους με τη γεωμετρία. Αυτό δημιουργεί δύο νέες κυψέλες διαφορετικού κέντρου βάρους και όγκου, εκ των οποίων η μια ανήκει στο ρευστό και η άλλη στο στερεό. Οι εξισώσεις ροής επιλύονται μόνο στο τμήμα που ανήκει στο ρευστό και τα μεγέθη της ροής αποθηκεύονται στο βαρύκεντρό του. Η διαδικασία που ακολουθείται παρουσιάζεται στο Σχήμα (3.1). Σε περίπτωση που δημιουργηθεί μια κυψέλη πολύ μικρή δίπλα σε μία μεγάλη κρίνεται απαραίτητο αυτές οι δύο να συγχωνευτούν, για λόγους ευστάθειας του προβλήματος [18] . Η συγχώνευση δύο κυψελών φαίνεται στο Σχήμα (3.2).



Σχήμα 3.1: Η κυψέλες στο στερεό όριο τέμνονται και οι εξισώσεις ροής επιλύονται μόνο στο ρευστό τμήμα.



Σχήμα 3.2: Συγχώνευση δύο γειτονικών κυψελών ρευστού.

Το τελικό πλέγμα αποτελείται από κυψέλες που έχουν σχήμα τετραγώνου, τριγώνου ή τραπεζίου.

Για την κυψέλη P η οποία τέμνεται από τη γεωμετρία, γίνεται προεκβολή των τιμών των συντηρητικών μεταβλητών από το βαρύκεντρο στο σημείο (B) του στερεού ορίου όπως φαίνεται στο Σχήμα (3.3). Αρχικά, αντιγράφεται το διάνυσμα U στο μέσο (B) του ευθύγραμμου τμήματος που ορίζει το στερεό όριο.

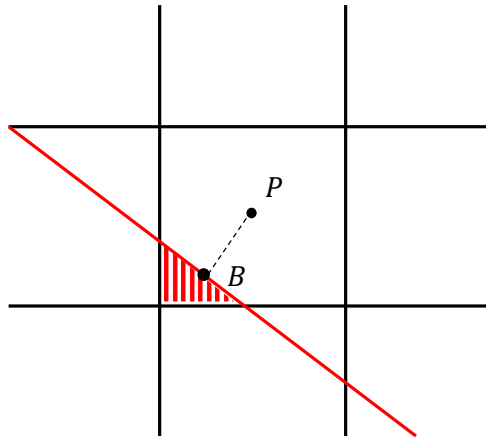
$$U_B = U_{wall} = U_P \quad (3.2)$$

Για να ικανοποιείται η οριακή συνθήκη μη-εισχώρησης πρέπει η ταχύτητα στο σημείο (B) να έχει μόνο εφαπτομενική συνιστώσα. Έτσι από την ταχύτητά του, που είναι αυτή του σημείου P, αφαιρείται η κάθετη συνιστώσα για να προκύψει η τελική ταχύτητα:

$$\vec{U}_{wall} = \vec{U}_P - (\vec{U}_P \cdot \vec{n})\vec{n} \quad (3.3)$$

Το σημείο (B) θεωρείται ένας επιπλέον γείτονας της κυψέλης, με ταχύτητα U_{wall} και συνυπολογίζεται στους όρους του υπολοίπου των εξισώσεων ροής R (σχέση 2.38) και στο διαγώνιο μητρώο $Diag$ (σχέση 2.39).

Με τον τρόπο αυτό, η κάθετη συνιστώσα της ταχύτητας της ροής εξαλείφεται καθώς αυτή πλησιάζει το στερεό όριο.

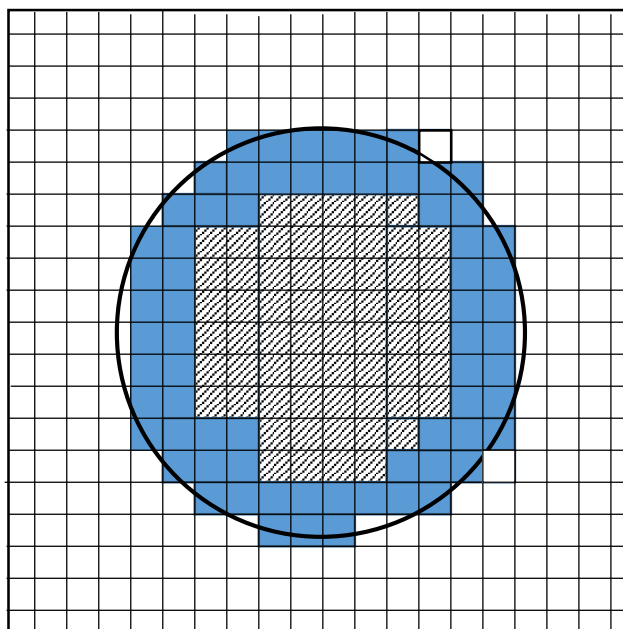


Σχήμα 3.3: Στο σημείο B γίνεται προεκβολή των τιμών των συντηρητικών μεταβλητών.

3.3. Μέθοδος των Ψευδο-κυψελών (Ghost Cells)

Στην παράγραφο αυτή παρουσιάζεται η διαδικασία και οι εξισώσεις που χρησιμοποιήθηκαν για τη μετατροπή του υπάρχοντα κώδικα, ώστε να επιλύει ροές με τη μέθοδο των ψευδο-κυψελών. Στη μέθοδο αυτή, όσες κυψέλες ανήκουν στο στερεό και απέχουν μέχρι μια συγκεκριμένη απόσταση από το όριο αποτελούν μια νέα κατηγορία, τις ψευδο-κυψέλες [19]. Συγκεκριμένα στο λογισμικό που αναπτύχθηκε, οι ψευδο-κυψέλες εκτείνονται σε απόσταση $D = 3 \cdot \Delta x$ από το στερεό, όπου Δx είναι το μήκος μιας κυψέλης.

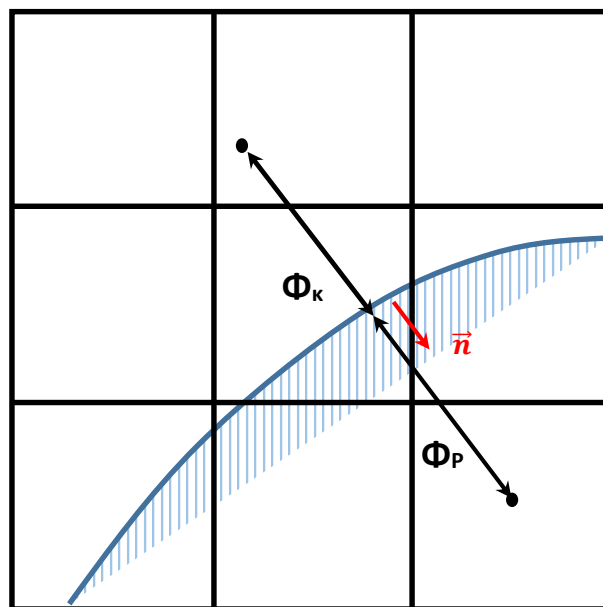
Η βασική ιδέα της μεθόδου είναι να υπολογιστούν κατάλληλα τα μεγέθη ροής στις κυψέλες αυτές μέσω ενός μετασχηματισμού, χωρίς να πρέπει να επιλύονται οι εξισώσεις ροής [20]. Δημιουργείται έτσι ένας «δακτύλιος» εσωτερικά του στερεού από κυψέλες που έχουν κατάλληλες τιμές των μεγεθών ροής ώστε να προσομοιώνεται η επίδραση του ορίου. Συγκεκριμένα σκοπός είναι να επιβληθεί η οριακή συνθήκη μη-εισχώρησης. Στο Σχήμα (3.4) παρουσιάζονται οι ψευδο-κυψέλες μέσα σε έναν κύλινδρο σε ένα πολύ αραιό πλέγμα για ευκολότερη κατανόηση. Με μπλε χρώμα φαίνονται οι ψευδο-κυψέλες ενώ οι γραμμοσκιασμένες είναι οι κυψέλες που ανήκουν κατ'εξοχιν στο στερεό. Οι υπόλοιπες (λευκές) κυψέλες ανήκουν στο ρευστό.



Σχήμα 3.4: Η ζώνη των ψευδο-κυψελών σε ένα πολύ αραιό πλέγμα γύρω από κυκλικό δίσκο.

Κάθε γεωμετρία που μελετάται δίνεται από το χρήστη ως ένα σύνολο σημείων σε σειρά, τα οποία ο κώδικας ενώνει με ευθύγραμμα τμήματα και παράγει το

επιθυμητό αποτέλεσμα. Από το βαρύκεντρο κάθε ψευδο-κυψέλης υπολογίζεται η απόστασή της (Φ) από τη γεωμετρία, δηλαδή από το κοντινότερο «ευθύγραμμο τμήμα». Σκοπός της μεθόδου είναι να βρεθούν για κάθε ψευδο-κυψέλη P τα μεγέθη ροής ενός συμμετρικού σημείου K ως προς το στερεό όριο ($\Phi_K = \Phi_P$), το οποίο να ανήκει στο ρευστό, να αντιγραφούν στο P και στη συνέχεια να τροποποιηθούν κατάλληλα ώστε ο μέσος όρος της κάθετης συνιστώσας της ταχύτητας των δύο σημείων να προκύπτει μηδενικός. Το σημείο K δε χρειάζεται να βρεθεί με ακρίβεια, αρκεί να υπολογιστεί η κατεύθυνση \vec{n} κατά την οποία πρέπει να γίνει αυτή η αντιγραφή. Για ευκολότερη κατανόηση παρατίθεται το Σχήμα (3.4).



Σχήμα 3.4: Για κάθε ψευδο-κυψέλη βρίσκεται ένα συμμετρικό σημείο ως προς το όριο και αντιγράφονται τα μεγέθη ροής.

3.3.1. Απόσταση του Κέντρου των Κυψελών από το Στερεό Όριο

Πρώτο στάδιο λοιπόν είναι ο υπολογισμός της απόστασης Φ των ψευδο-κυψελών από τη γεωμετρία. Όπως αναφέρθηκε στην προηγούμενη παράγραφο, κάθε γεωμετρία αποτελείται από επιμέρους ευθύγραμμα τμήματα.

Ένας ακριβής τρόπος θα ήταν να υπολογιστεί η απόσταση κάθε κόμβου του πλέγματος από κάθε ξεχωριστό ευθύγραμμο τμήμα και να αποθηκευτεί η μικρότερη τιμή. Επειδή όμως ένα πλέγμα μπορεί να αποτελείται από 50.000 κυψέλες και μια γεωμετρία από 500 ευθύγραμμο τμήματα, είναι φανερό ότι ο ακριβής υπολογισμός της απόστασης κοστίζει σε υπολογιστικό χρόνο. Για το λόγο αυτό μετρήθηκε αρχικά μόνο η απόσταση των κυψελών που τέμνονται από τη γεωμετρία με ακρίβεια, δηλαδή με υπολογισμό της απόστασης από κάθε ευθύγραμμο τμήμα και αποθήκευση της μικρότερης τιμής. Αποθηκεύτηκε επίσης και η ταυτότητα του πλησιέστερου πολυγώνου. Για όλες τις υπόλοιπες κυψέλες μετρήθηκε η απόσταση μόνο από τα πλησιέστερα ευθύγραμμο τμήματα των γειτόνων τους και αποθηκεύτηκε η ελάχιστη τιμή. Το σφάλμα αυτής της προσέγγισης είναι αμελητέο. Στον πίνακα 3.1 φαίνεται ενδεικτικά η διαφορά της πραγματικής απόστασης (D_{real}) μερικών κυψελών από το στερεό όριο σε σχέση με την υπολογισμένη από τον κώδικα απόσταση (D_{calc}). Τα αποτελέσματα είναι από εφαρμογή του κώδικα σε αεροτομή πλέγματος 10000 κυψελών. Όπως φαίνεται οι μέγιστες διαφορές είναι της τάξης του 10^{-4} .

| D_{real}/D_{calc} | |
|---------------------|-------------|
| 0 | 5.18151e-06 |
| 2.22401e-07 | 0.000130496 |
| 7.16748e-06 | 0.000105142 |
| 5.04311e-06 | 1.78552e-05 |
| 1.21984e-05 | 0.000175012 |
| 7.83173e-05 | 2.89836e-05 |

Πίνακας 3.1: Διαφορές πραγματικής τιμής της απόστασης από την υπολογισμένη μέσω του κώδικα.

Χρησιμοποιώντας την απόσταση Φ που υπολογίστηκε, προσδιορίζεται το μοναδιαίο διάνυσμα στην κατεύθυνση που ορίζεται από το βαρύκεντρο κάθε κυψέλης προς το πλησιέστερο ευθύγραμμο τμήμα της.

Το διάνυσμα αυτό αποδεικνύεται ότι είναι το

$$\vec{n} = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) \quad (3.4)$$

όπου Φ η απόσταση από τη γεωμετρία. Η κατεύθυνση του είναι από το ρευστό προς το στερεό.

Οι παράγωγοι $\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \frac{\partial \Phi}{\partial y}$ υπολογίζονται με τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων [16] όπως ακριβώς και οι μεταβολές $\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}$ στην παράγραφο (2.3.2). Συγκεκριμένα, από το ανάπτυγμα Taylor προκύπτει για κάθε γείτονα Q_i της κυψέλης P ότι:

$$\Phi_{Q_i} = \Phi_P + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \Delta y \quad (3.5)$$

Η ποσότητα προς ελαχιστοποίηση είναι η:

$$E = \sum_{i=1}^{nb} (-\Delta \Phi_i + A \cdot \Delta x_i + B \cdot \Delta y_i)^2 \quad (3.6)$$

όπου $\Delta \Phi_i = \Phi_{Q_i} - \Phi_P$ η διαφορά της απόστασης της κυψέλης P από εκείνη του γείτονα Q_i

$A = \frac{\partial \Phi}{\partial x}$, $B = \frac{\partial \Phi}{\partial y}$ οι ζητούμενες μεταβολές

και nb ο αριθμός των γειτονικών κυψελών Q .

Η ελάχιστη τιμή του E προκύπτει για τα A και B που μηδενίζουν τις αντίστοιχες παραγώγους:

$$\frac{\partial E}{\partial A} = 0 \quad , \quad \frac{\partial E}{\partial B} = 0 \quad (3.7)$$

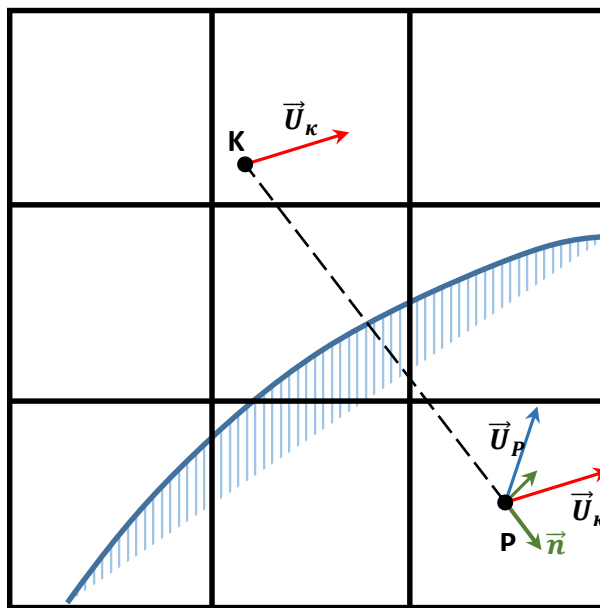
Μετά από πράξεις προκύπτει το τελικό σύστημα προς επίλυση:

$$\begin{bmatrix} \sum_1^{nb} \Delta x_i \Delta x_i & \sum_1^{nb} \Delta x_i \Delta y_i \\ \sum_1^{nb} \Delta x_i \Delta y_i & \sum_1^{nb} \Delta y_i \Delta y_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{\Phi}_P}{\partial x} \\ \frac{\partial \bar{\Phi}_P}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_1^{nb} \Delta x_i \Delta \bar{\Phi}_i \\ \sum_1^{nb} \Delta y_i \Delta \bar{\Phi}_i \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

Το σύστημα (3.8) είναι ένα 2x2 σύστημα και η επίλυσή του δίνει το μοναδιαίο διάνυσμα \vec{n} (Σχέση 3.4) στην κατεύθυνση κατά την οποία θα αντιγραφούν τα μεγέθη ροής.

3.3.2. Αντιγραφή και Αντιστροφή των Μεγεθών Ροής

Το συμμετρικό σημείο K κάθε κυψέλης P που ανήκει στο στερεό βρίσκεται στην κατεύθυνση που ορίζει το μοναδιαίο διάνυσμα \vec{n} και σε ίση απόσταση από το όριο, όπως παρουσιάστηκε στο Σχήμα (3.4). Αφού αντιγραφούν τα μεγέθη ροής κατά την κατεύθυνση \vec{n} στο βαρύκεντρο της κυψέλης, αντιστρέφεται η ταχύτητα της ροής [21]. Όπως φαίνεται στο Σχήμα (3.5) αυτό θα έχει ως αποτέλεσμα να υπάρχουν δύο σημεία εκατέρωθεν του στερεού ορίου με ταχύτητες ίσου μέτρου και αντίθετης φοράς της κάθετης συνιστώσας τους. Έτσι, στο όριο θα «εξουδετερώνεται» η κάθετη συνιστώσα και θα επιβάλλεται η οριακή συνθήκη μη-εισχώρησης.



Σχήμα 3.5: Η ταχύτητα του K αντιγράφεται στο P (κόκκινο διάνυσμα) και αντιστρέφεται (μπλε διάνυσμα).

Η ροή αντιγράφεται στις ψευδο-κυψέλες κατά την κατεύθυνση \vec{n} άρα:

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial \vec{n}} = 0 \quad (3.9)$$

$$\rightarrow \frac{\partial U_i}{\partial x_\kappa} \cdot n_\kappa = 0 \quad (3.10)$$

Στην εξίσωση προστίθεται και ένας ψευδο-χρονικός όρος $\frac{\partial U_i}{\partial \tau}$ και η τελική εξίσωση που λύνεται σε κάθε ψευδο-κυψέλη είναι

$$\frac{\partial U_i}{\partial \tau} + \frac{\partial U_i}{\partial x_\kappa} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x_\kappa} = 0 \quad (3.11)$$

Η διακριτοποίηση του ψευδο-χρονικού όρου γίνεται χρησιμοποιώντας πεπερασμένες διαφορές [22] :

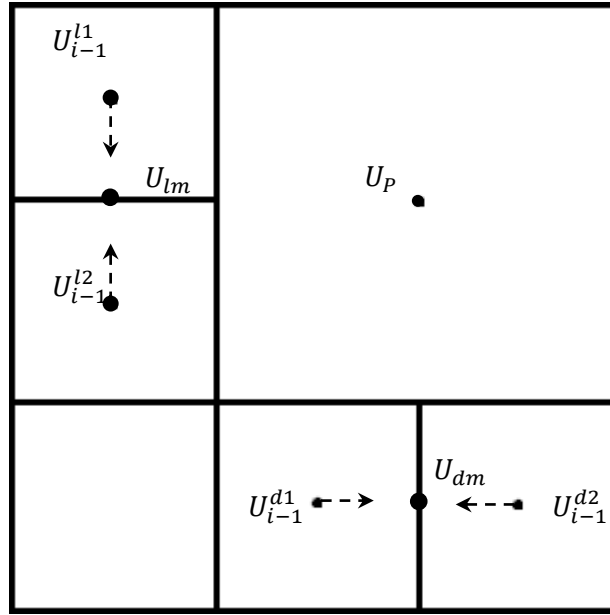
$$\frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\Delta \tau} + \frac{\partial U_i}{\partial x_\kappa} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x_\kappa} = 0 \quad (3.12)$$

όπου n η ψευδο-χρονική επανάληψη.

Οι χωρικές μεταβολές των συντηρητικών μεταβλητών $\frac{\partial U_i}{\partial x_\kappa}$ υπολογίζονται επίσης με πεπερασμένες διαφορές. Η εξίσωση (3.12) είναι υπερβολικού τύπου και πρέπει να ληφθεί υπόψιν η κατεύθυνση μετάδοσης της πληροφορίας, η οποία καθορίζεται για κάθε κυψέλη από το κάθετο διάνυσμα \vec{n} (σχέση (3.4)). Έτσι το σχήμα των διαφορών που χρησιμοποιείται εξαρτάται από το κάθετο διάνυσμα \vec{n} . Για $n_i < 0$ η παράγωγος $\frac{\partial U_i}{\partial x_i}$ διακριτοποιείται με εμπρός διαφορές ενώ για $n_i > 0$ η παράγωγος $\frac{\partial U_i}{\partial x_i}$ διακριτοποιείται με πίσω διαφορές, πχ για $n_x < 0$ και $n_y > 0$ προκύπτει

$$\frac{\partial U_i}{\partial x} = \frac{U_{i+1} - U_i}{\Delta x} \quad \text{και} \quad \frac{\partial U_i}{\partial y} = \frac{U_i - U_{i-1}}{\Delta y} \quad (3.13)$$

Για όσες κυψέλες i συνορεύουν με ένα γείτονα κατά την κατεύθυνση x_κ , η διαφορά $U_i - U_{i-1}$ υπολογίζεται άμεσα από τα μεγέθη ροής στους δύο κόμβους. Για τις κυψέλες που συνορεύουν με δύο γείτονες υπολογίζεται πρώτα η ημιδιαφορά των τιμών των γειτόνων U_m και μετά αφαιρείται από τα U_i , όπως φαίνεται στο Σχήμα (3.6).



Σχήμα 3.6: Όταν υπάρχουν δύο γείτονες σε μια πλευρά, υπολογίζεται πρώτα η ημιδιαφορά των τιμών τους U_m .

Με την επίλυση της εξίσωσης (3.12) ανανεώνεται η τιμή των μεγεθών ροής των ψευδο-κυψελών από U_i^n σε U_i^{n+1} .

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \Delta\tau \cdot \frac{\partial U_i^n}{\partial x_\kappa} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x_\kappa} \quad (3.14)$$

Στην πραγματικότητα ο ρόλος αυτής της εξίσωσης είναι να αντιγράψει την ταχύτητα ροής στις κυψέλες εσωτερικά του στερεού και στη συνέχεια να διορθωθεί η κατεύθυνση της ταχύτητας ροής κοντά στο όριο. Αποδεικνύεται μετά από αριθμητικά πειράματα ότι αυτή η διόρθωση της κατεύθυνσης είναι ικανοποιητική ακόμα και χωρίς να γίνει ακριβής αντιγραφή των μεγεθών ροής. Συνεπώς δεν είναι απαραίτητη η σύγκλιση η της εξίσωσης (3.14) μέχρι τέλους, δηλαδή

$$\frac{\partial U_i}{\partial \tau} = 0, \quad (3.15)$$

αλλά απαιτούνται περίπου 40 ψευδο-χρονικές επαναλήψεις.

Το ψευδο-χρονικό βήμα επιλέχθηκε να είναι:

$$\Delta\tau = \min\left(\frac{\Delta x}{n_x}, \frac{\Delta y}{n_y}\right) \quad (3.16)$$

Αφού γίνει η αντιγραφή των μεγεθών ροής στις ψευδο-κυψέλες και βρεθεί η ταχύτητα \vec{u} εντός της γεωμετρίας, αντιστρέφεται κατά την εφαπτόμενη ως προς το στερεό κατεύθυνση σύμφωνα με τη σχέση:

$$\vec{u}_r = \vec{u} - 2(\vec{u} \cdot \vec{n}) \cdot \vec{n} \quad (3.18)$$

Στο σημείο αυτό έχει οριστεί μια ταχύτητα στα στερεά κελιά που βρίσκονται κοντά στο όριο. Η διαφορά σε σχέση με τη μέθοδο των τεμνομένων κυψελών είναι ότι όταν επιλύονται οι εξισώσεις ροής, λαμβάνονται υπόψη ως γείτονες και οι ψευδο-κυψέλες οι οποίες πλέον έχουν τιμές για τα μεγέθη ροής.

Κεφάλαιο 4

4. Αλγόριθμος Επίλυσης

Στο κεφάλαιο (2) περιγράφηκαν οι εξισώσεις ροής ενώ στο (3) οι όροι που επιβάλλουν τις οριακές συνθήκες. Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζεται ο αλγόριθμος που ακολουθείται για την επίλυση ενός προβλήματος συνδυάζοντας τις εξισώσεις ροής και τις οριακές συνθήκες. Ενώ στην παρούσα εργασία αναπτύχθηκε η μέθοδος των ψευδο-κυψελών, για πληρότητα αναλύεται και η μέθοδος των τεμνομένων κυψελών που αναπτύχθηκε στο ΜΠΥΡ&Β του ΕΜΠ [10] και, σε επόμενο κεφάλαιο, γίνεται σύγκριση των αποτελεσμάτων των δύο μεθόδων.

4.1 Αλγόριθμος Επίλυσης με τη Μέθοδο των Τεμνομένων Κυψελών

Αφού γίνει πλεγματοποίηση του υπολογιστικού χωρίου ορίζονται οι αρχικές τιμές των συντηρητικών μεταβλητών σε κάθε κόμβο. Οι τιμές αυτές δίνονται από το χρήστη και, στη συνέχεια, υπολογίζεται ένας συντελεστής CFL ο οποίος καθορίζει πόσο μεγάλα ή μικρά θα είναι τα βήματα προς τη λύση. Στην αρχή της επίλυσης το βήμα είναι μικρό και στη συνέχεια όσο προσεγγίζεται η λύση γίνεται μεγαλύτερο. Οι εξισώσεις ροής επιλύονται επαναληπτικά και διορθώνεται κάθε φορά η τρέχουσα λύση. Ο χρήστης επιλέγει επίσης το μέγιστο αριθμό επαναλήψεων που μπορούν να γίνουν για να λυθεί το πρόβλημα καθώς και την ανώτερη επιτρεπτή τιμή που μπορεί να έχει το υπόλοιπο R των εξισώσεων ροής. Όταν ένα από τα δύο αυτά κριτήρια ικανοποιηθεί τότε ο αλγόριθμος σταματά. Τα βήματα που ακολουθούνται μετά τη δημιουργία του πλέγματος είναι τα εξής:

1. Τομή των κυψελών που «κόβονται» από τη γεωμετρία και δημιουργία νέου όγκου κυψελών που ανήκουν στο ρευστό.
2. Αρχικοποίηση του διανύσματος \vec{U} για κάθε κόμβο.
3. Έναρξη της επαναληπτικής διαδικασίας.
4. Υπολογισμός των $\vec{R}_p, D_p^{-1}, OD_{pq}$ για κάθε κυψέλη που ανήκει στο ρευστό, από τις σχέσεις (2.38) – (2.40).
5. Επίλυση του συστήματος (2.43) με μέθοδο Jacobi ή Gauss-Seidel.

6. Υπολογισμός της διόρθωσης των συντηρητικών μεταβλητών $\Delta \vec{U}$ από τη σχέση (2.44).
7. Ανανέωση της τιμής των \vec{U} σύμφωνα με τη σχέση (2.7).
8. Ο υπολογισμός του υπολοίπου των τεσσάρων εξισώσεων ροής \vec{R} γίνεται χρησιμοποιώντας τις τιμές \vec{R}_P κάθε κυψέλης P σύμφωνα με τη σχέση:

$$||R_{RMS}||_i = \sqrt{\frac{1}{n} \cdot \sum_{P=1}^n R_{Pi}^2} \quad i = 1, \dots, 4$$

9. Έλεγχος αν η τιμή αυτή είναι μέσα στα αποδεκτά όρια που έχει δώσει ο χρήστης $R_{RMS} < acceptable_Residual$ και αν οι επαναλήψεις έχουν ξεπεράσει τις επιτρεπόμενες. Αν δεν ικανοποιείται κανένα από αυτά τα κριτήρια, ο αλγόριθμος επιστρέφει στο βήμα 2.
10. Αποθήκευση της τελευταίας λύσης.
11. Τερματισμός του αλγορίθμου.

4.2 Αλγόριθμος Επίλυσης με τη Μέθοδο των Ψευδο-Κυψελών

Η πλεγματοποίηση του χωρίου γίνεται όπως περιγράφηκε στην παράγραφο (2.2). Η επιλογή των αρχικών τιμών των συντηρητικών μεταβλητών, ο μέγιστος αριθμός επαναλήψεων και το ανώτερο επιτρεπτό όριο του υπολοίπου των εξισώσεων γίνεται από το χρήστη όπως παρουσιάστηκε στην παράγραφο (4.1).

Η διαδικασία επίλυσης γίνεται επαναληπτικά με τα εξής βήματα:

1. Αρχικοποίηση του διανύσματος \vec{U} για κάθε κόμβο του πλέγματος.
2. Υπολογισμός των μεγεθών ροής στις ψευδο-κυψέλες από τη σχέση (3.18).
3. Έναρξη της επαναληπτικής διαδικασίας.
4. Υπολογισμός των $\vec{R}_P, D_P^{-1}, OD_{PQ}$ για κάθε κυψέλη που ανήκει στο ρευστό (όχι για τις ψευδο-κυψέλες) από τις σχέσεις (2.38)-(2.40).
5. Επίλυση του συστήματος (2.34) με μέθοδο Jacobi ή Gauss-Seidel.
6. Υπολογισμός της διόρθωσης των συντηρητικών μεταβλητών $\Delta\vec{U}$ από τη σχέση (2.44).
7. Ανανέωση της τιμής των \vec{U} σύμφωνα με τη σχέση (2.7).
8. Ανανέωση των μεγεθών ροής στις ψευδο-κυψέλες από τη σχέση (3.18).
9. Ο υπολογισμός του υπολοίπου των τεσσάρων εξισώσεων ροής \vec{R} γίνεται χρησιμοποιώντας τις τιμές \vec{R}_P κάθε κυψέλης P σύμφωνα με τη σχέση:

$$||R_{RMS}||_i = \sqrt{\frac{1}{n} \cdot \sum_{P=1}^n R_{Pi}^2} \quad i = 1, \dots, 4$$

10. Έλεγχος αν η τιμή αυτή είναι μέσα στα αποδεκτά όρια που έχει δώσει ο χρήστης $R_{RMS} < acceptable_Residual$ και αν οι επαναλήψεις έχουν ξεπεράσει τις επιτρεπόμενες. Αν δεν ικανοποιείται κανένα από αυτά τα κριτήρια, ο αλγόριθμος επιστρέφει στο βήμα 3.
11. Τερματισμός του αλγορίθμου.

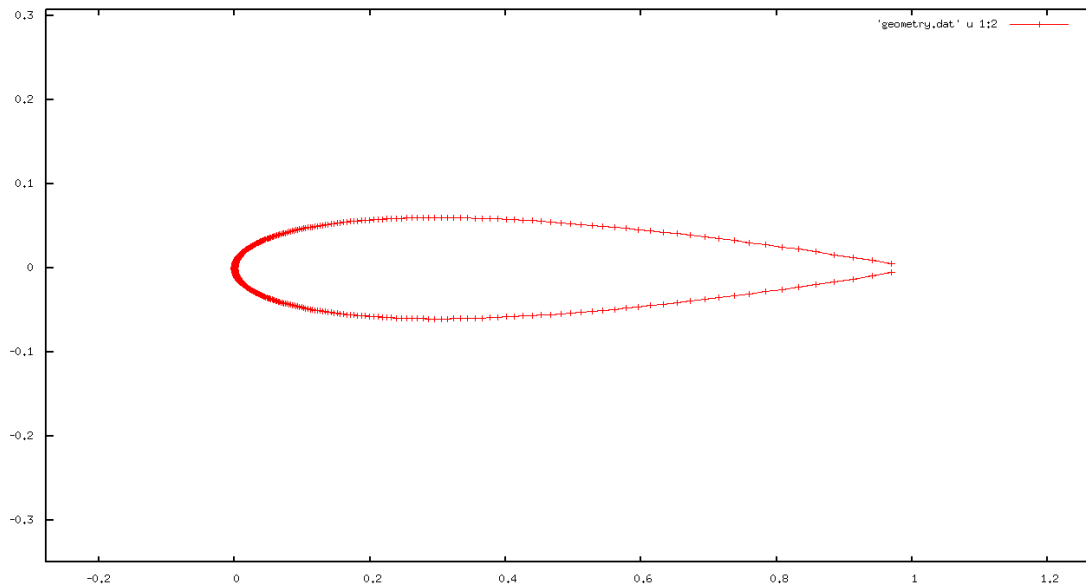
Κεφάλαιο 5

5. Εφαρμογές του Αλγορίθμου και Σύγκριση των δύο Μεθόδων

Ο κώδικας που αναπτύχθηκε αφορά συμπιεστό ρευστό και ατριβή ροή και εφαρμόστηκε σε διάφορες 2D γεωμετρίες. Ακολουθεί σύγκριση των αποτελεσμάτων με εκείνα που προέκυψαν από τη μέθοδο των τεμνομένων κυψελών για να πιστοποιηθεί η εγκυρότητα των αποτελεσμάτων.

5.1 Ροή γύρω από Συμμετρική Αεροτομή NACA0012

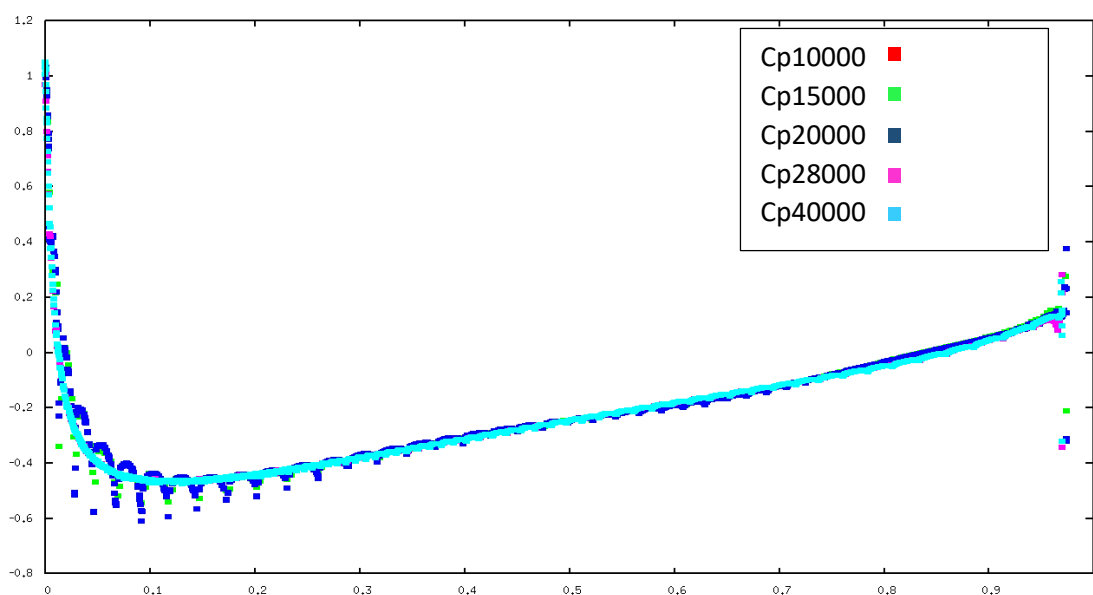
Η πρώτη εφαρμογή έγινε σε μια συμμετρική αεροτομή NACA0012 χορδής $c = 1m$. Τα τέσσερα αυτά ψηφία δείχνουν ότι έχει 0% κυρτότητα και μέγιστο πάχος 12% σε σχέση με το μήκος της. Για την προσομοίωση της αεροτομής χρησιμοποιήθηκαν 1000 σημεία κατά μήκος του ορίου της. Τα σημεία αυτά είναι πυκνότερα κοντά στην ακμή προσβολής για να προσδοθεί η κατάλληλη καμπύλη στην αεροτομή, όπως φαίνεται και στο Σχήμα 5.1:



Σχήμα 5.1: Αεροτομή NACA0012 αποτελούμενη από 1000 σημεία με πυκνωση στην ακμή προσβολής.

Στο κεφάλαιο (2) αναφέρθηκε ότι η γεωμετρία εισάγεται στον κώδικα μέσω μιας σειράς σημείων, τα οποία τελικά ενώνονται με ευθύγραμμα τμήματα. Αν λοιπόν αυτά δε γίνουν αρκετά πυκνά στην ακμή προσβολής της αεροτομής, υπάρχει κίνδυνος να γίνει πολύ «αιχμηρή» και το πρόβλημα που θα λυθεί τελικά να μην είναι το επιθυμητό. Αφού περιγραφεί η γεωμετρία, ορίζονται οι μεταβλητές της επ' άπειρο ροής στις τέσσερις πλευρές του πλέγματος. Η αεροτομή εκτίθεται σε ροή αέρα πυκνότητας $\rho = 1,2 \frac{kg}{m^3}$ και ταχύτητας $v_0 = 150 \frac{m}{s}$. Η ροή στην είσοδο του χωρίου είναι αξονική.

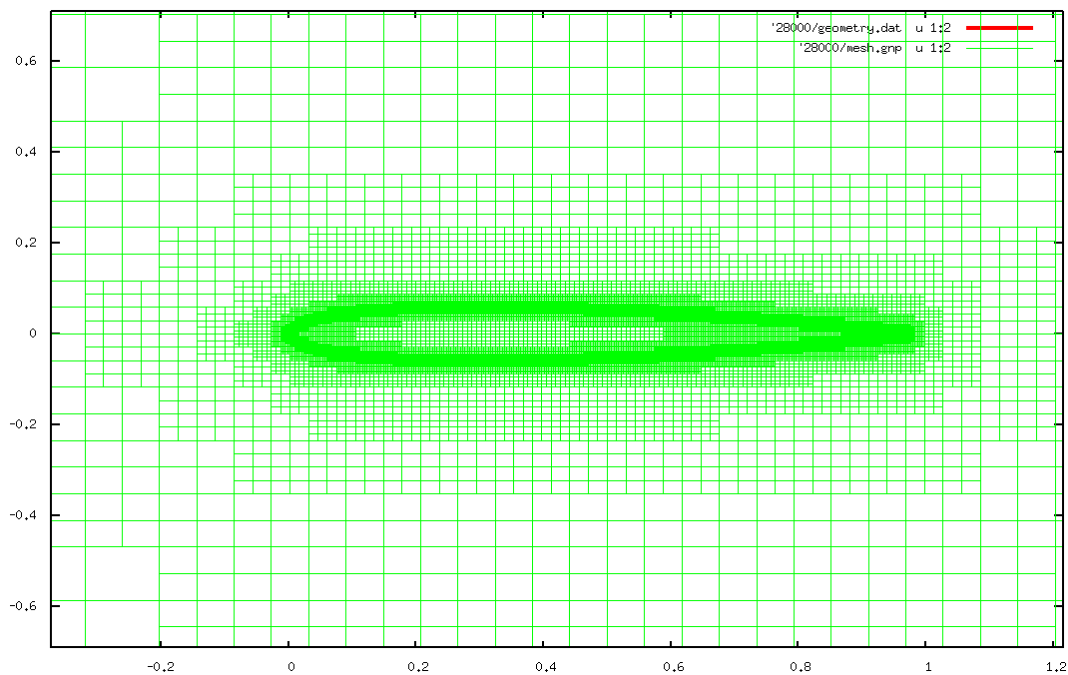
Για την επίλυση της ροής χρησιμοποιήθηκαν πλέγματα διαφόρων μεγεθών. Αρχικά εφαρμόστηκε ο κώδικας των τεμνομένων κυψελών για να βρεθεί το μέγεθος του πλέγματος πέρα από το οποίο η λύση γίνεται ανεξάρτητη του αριθμού των κυψελών. Συγκεκριμένα έγιναν τρεξίματα για πλέγματα που έχουν περίπου 10000, 15000, 20000, 28000 και 40000 κυψέλες. Όλες οι τιμές που χρειάζονται για την κατασκευή του πλέγματος είναι αδιαστατοποιημένες ως προς το μήκος c της χορδής της αεροτομής. Τα πλέγματα έχουν διαστάσεις 15×15 και μέγιστο όγκο κυψελών $V_{max} = 0.5$. Οι τιμές αυτές διατηρήθηκαν σταθερές και μεταβάλλοντας την τιμή του ελάχιστου όγκου κυψέλης V_{min} δημιουργήθηκαν τα επιμέρους πλέγματα. Για 10000 κυψέλες ορίστηκε $V_{min} = 0.00005$ και για τα υπόλοιπα πλέγματα $V_{min} = 0.00003$, $V_{min} = 0.00001$, $V_{min} = 0.000005$, $V_{min} = 0.000003$ αντίστοιχα. Στο Σχήμα (5.2) παρουσιάζονται οι συντελεστές πίεσης C_p που προέκυψαν από την επίλυση σε κάθε πλέγμα.



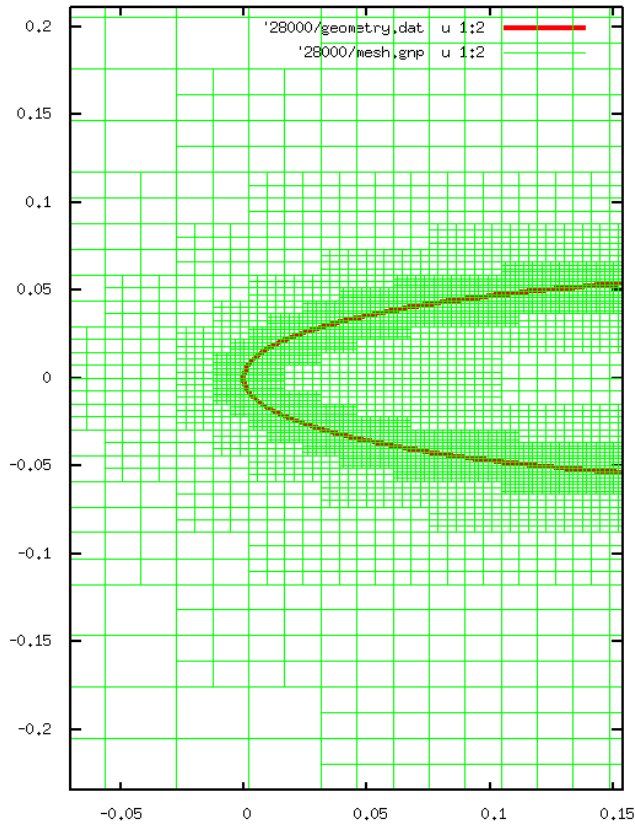
Σχήμα 5.2: Συντελεστές πίεσης αεροτομής με τη μέθοδο των τεμνομένων κυψελών για αυξανόμενο μέγεθος πλέγματος.

Όπως φαίνεται, η λύση για πλέγματα κάτω από 28000 κυψέλες δεν είναι αποδεκτή, ενώ για μεγαλύτερα πλέγματα η λύση φαίνεται να μην αλλάζει. Ένα σημαντικό συμπέρασμα από τα αποτελέσματα αυτά είναι ότι οι κώδικες που χειρίζονται καρτεσιανά πλέγματα θέλουν εν γένει πυκνότερα πλέγματα, σε σχέση με τους κώδικες οριόδετων πλεγμάτων, για να γίνει σωστά η επίλυση της ροής.

Στο σημείο αυτό, θεωρείται ότι η λύση για πλέγματα 28000 κυψελών και πάνω είναι ανεξάρτητη του μεγέθους του πλέγματος. Η λύση αυτή θα είναι η λύση αναφοράς για να συγκριθεί με τη λύση της μεθόδου των ψευδο-κυψελών. Το πλέγμα των 28000 κυψελών έχει 9 επίπεδα πύκνωσης σε ακτίνα $R = 7$ γύρω από την αεροτομή και φαίνεται στα Σχήματα (5.3)-(5.4).

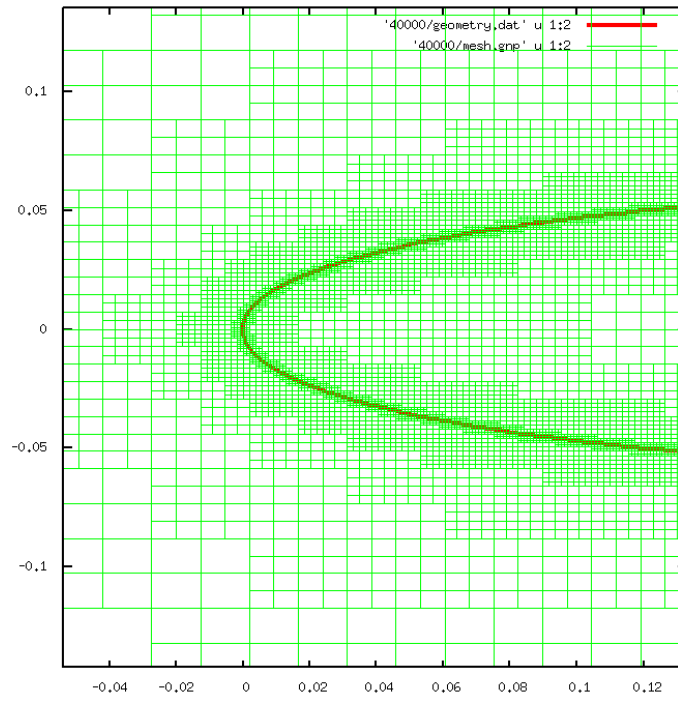


Σχήμα 5.3: Πλέγμα 28000 κυψελών σε αεροτομή.

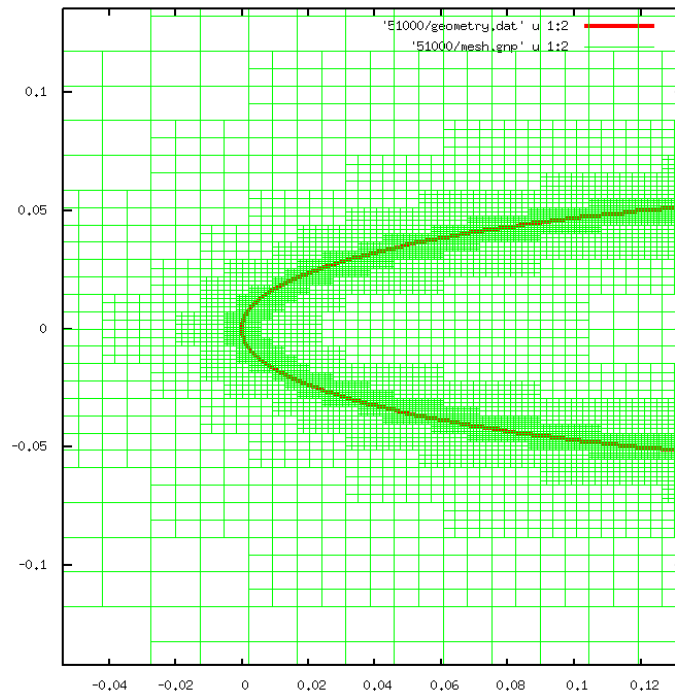


Σχήμα 5.4: Πλέγμα 28000 σε αεροτομή. Μεγέθυνση στην ακμή προσβολής.

Επόμενος στόχος είναι η εύρεση του κατάλληλου μεγέθους πλέγματος που χρειάζεται ο κώδικας των ψευδο-κυψελών για να προσεγγίσει την ίδια λύση. Και πάλι διατηρήθηκε σταθερή η διάσταση του πλέγματος, ο μέγιστος όγκος V_{max} και η ακτίνα πύκνωσης. Στις δοκιμές που έγιναν χρησιμοποιήθηκαν, εκτός από το πλέγμα των 28000 κυψελών και πλέγματα 40000 και 50000 κυψελών, ελάχιστου εμβαδού $V_{min} = 3 \cdot 10^{-6}$ και $V_{min} = 2 \cdot 10^{-6}$ τα οποία παρατίθενται στα Σχήματα (5.5) – (5.6). Τα επίπεδα πύκνωσής τους είναι 10 και 11 αντίστοιχα.



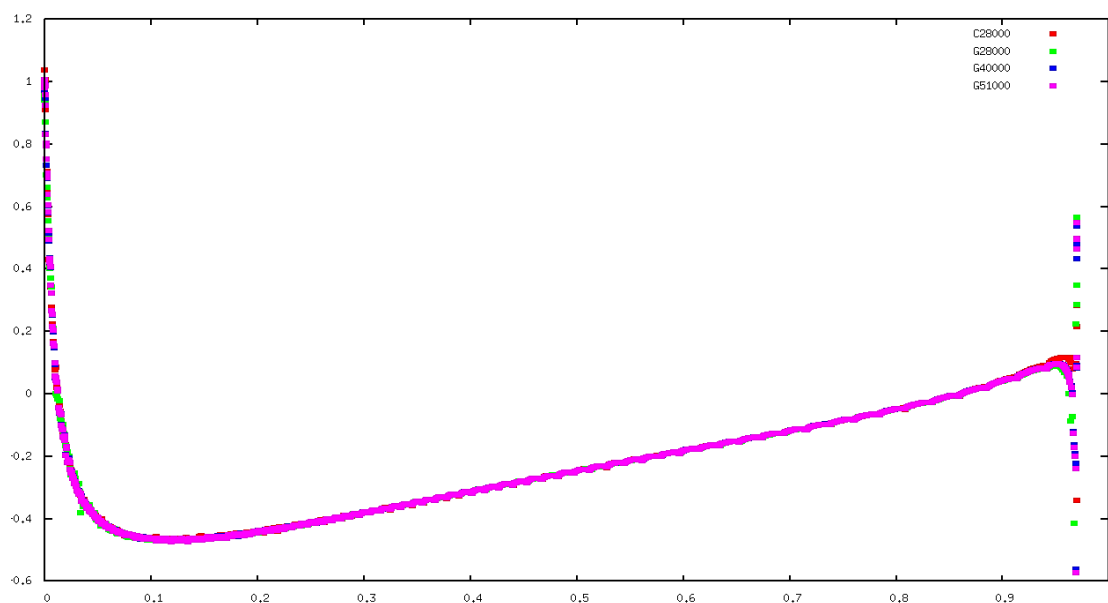
Σχήμα 5.5: Πλέγμα 40000 κυψελών γύρω από αεροτομή.



Σχήμα 5.6: Πλέγμα 50000 κυψελών γύρω από αεροτομή.

Στο Σχήμα (5.7) φαίνεται πάλι ο συντελεστής πίεσης. Με κόκκινα σημεία παρατίθεται η λύση αναφοράς ενώ με πράσινα, μπλε και μωβ οι λύσεις που έδωσαν οι τρεις εφαρμογές του κώδικα των ψευδο-κυψελών.

Παρατηρείται ότι για πλέγμα 28000 κυψελών η λύση είναι πολύ κοντά στην επιθυμητή. Όσο αυξάνεται το μέγεθός του, η λύση τείνει περισσότερο σε αυτή της μεθόδου των τεμνομένων κυψελών.

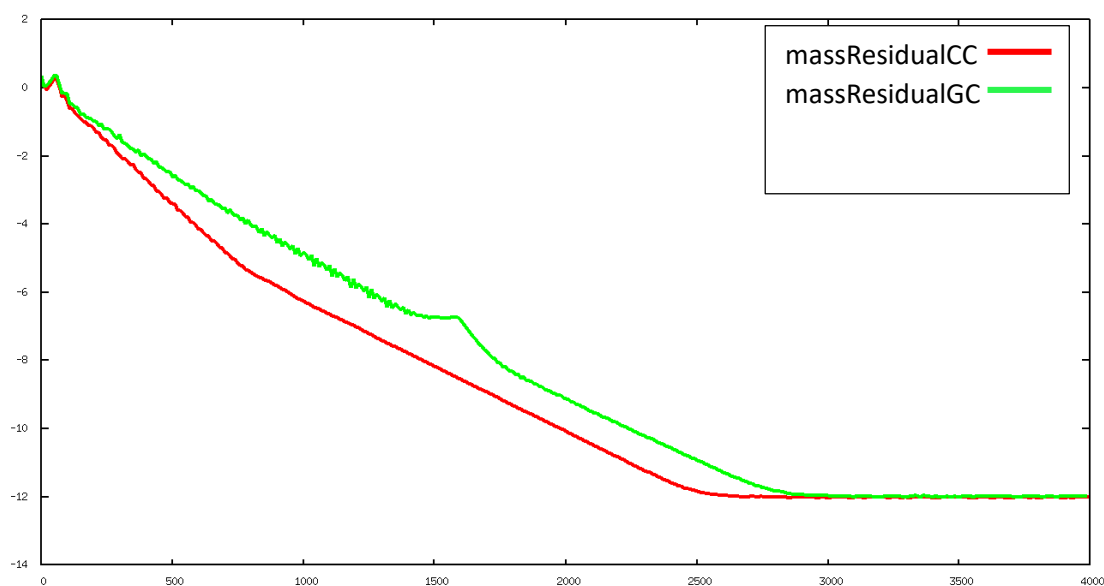


Σχήμα 5.7: Σύγκριση τιμών συντελεστή πίεσης της μεθόδου των τεμνομένων κυψελών και των ψευδο-κυψελών.

Από τα Σχήματα προκύπτει ένα πολύ ενδιαφέρον συμπέρασμα. Η λύση και με τις δύο μεθόδους, ακόμα και για πλέγμα 28000 κυψελών είναι πολύ κοντά. Αυτό σημαίνει πως η μέθοδος των ψευδο-κυψελών υπερτερεί σε αυτό το σημείο διότι ο προγραμματισμός της είναι ευκολότερος και λιγότερο περίπλοκος. Άρα με την πιο «απλή» μέθοδο η λύση είναι αρκετά ικανοποιητική. Φυσικά το συμπέρασμα αυτό δε μπορεί να γενικευτεί διότι η γεωμετρία και η ροή είναι αρκετά απλές και χρειάζεται να γίνουν περαιτέρω εφαρμογές.

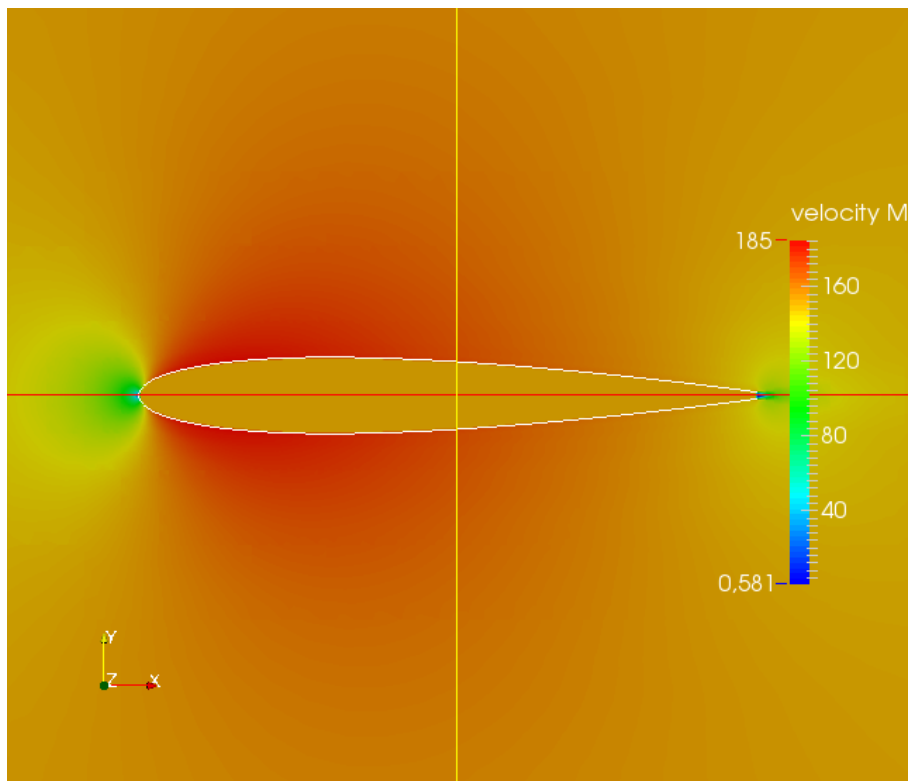
Ένα ακόμα συμπέρασμα που προκύπτει φαίνεται από την πορεία σύγκλισης των δύο μεθόδων. Στο Σχήμα (5.8) παρουσιάζεται ενδεικτικά το υπόλοιπο της εξίσωσης της συνέχειας με κόκκινο χρώμα για τη μέθοδο των τεμνομένων κυψελών και με πράσινο για τη μέθοδο των ψευδο-κυψελών για το ίδιο μέγεθος πλέγματος. Παρατηρείται ότι η μέθοδος των ψευδο-κυψελών αργεί

λίγο περισσότερο να συγκλίνει και μάλιστα στις πρώτες επαναλήψεις ταλαντώνεται πιο έντονα. Αυτό συμβαίνει διότι οι δύο εξισώσεις που λύνονται, η μία στη ροή και η άλλη στις ψευδο-κυψέλες χρειάζονται χρόνο για να ισορροπήσουν. Αυτό γίνεται σε αντίθεση με τη μέθοδο των τεμνομένων κυψελών που οι οριακές συνθήκες επιβάλλονται πιο «αυστηρά» στο ρευστό. Παρ' όλα αυτά η λύση της ροής φαίνεται πως δεν επηρεάζεται διότι και οι δύο μέθοδοι επιτυγχάνουν ίδια ακρίβεια λύσης.

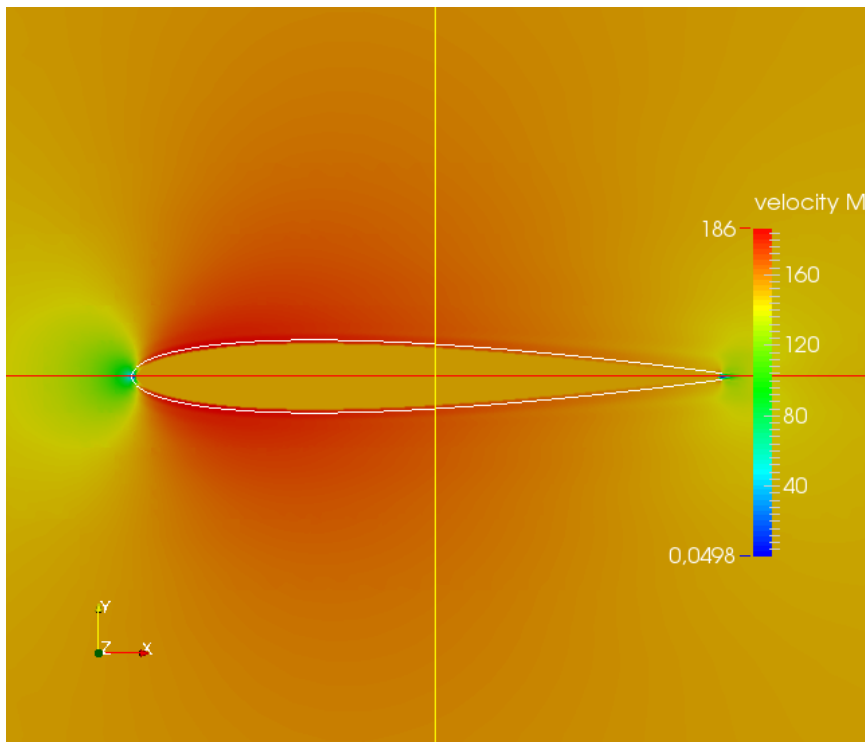


Σχήμα 5.8: Πορεία σύγκλισης της εξίσωσης συνέχειας με τη μέθοδο των τεμνομένων κυψελών (κόκκινη γραμμή) και τη μέθοδο των ψευδο-κυψελών (πράσινη γραμμή).

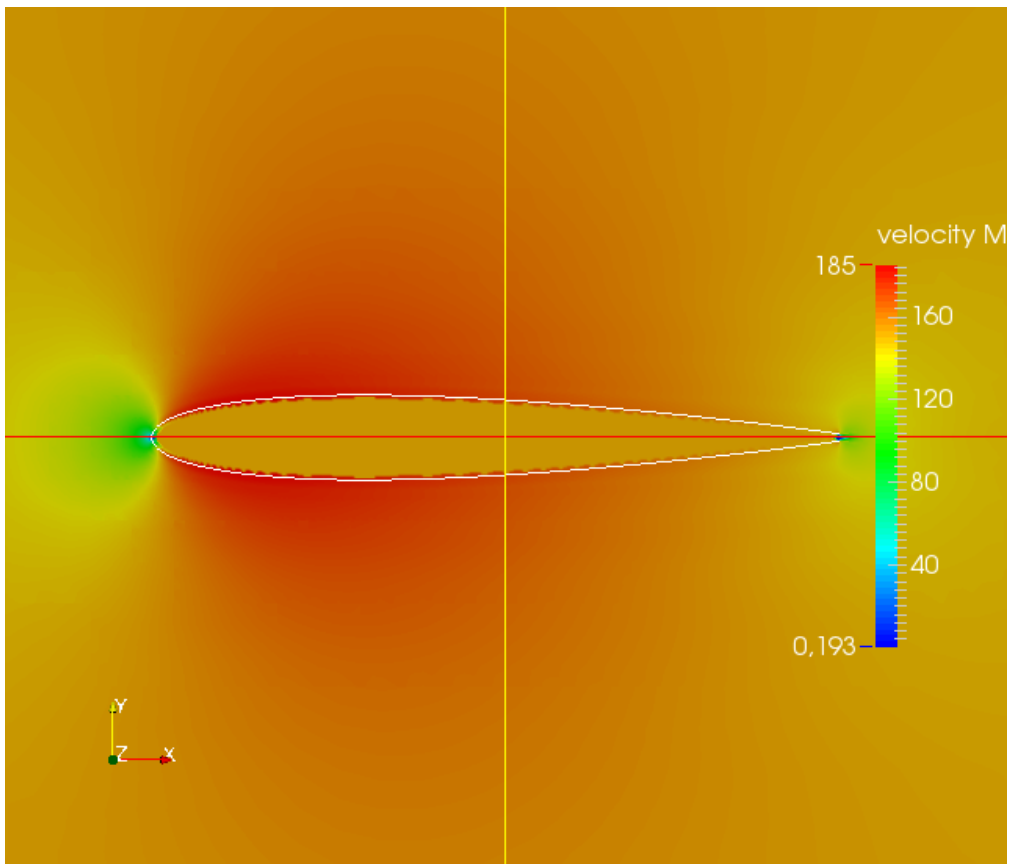
Στα Σχήματα (5.9) – (5.11) παρουσιάζεται το πεδίο ταχύτητας γύρω από την αεροτομή και με τις δύο μεθόδους και μάλιστα για διαφορετικά πλέγματα της μεθόδου των ψευδο-κυψελών. Μπορεί κανείς να παρατηρήσει ότι, στη μέθοδο αυτή, υπάρχουν υπολογισμένες τιμές ταχύτητας και σε μία περιοχή εσωτερικά της αεροτομής. Η περιοχή αυτή είναι οι ψευδο-κυψέλες που βοηθούν στην επιβολή της οριακής συνθήκης μη-εισχώρησης όπως περιγράφηκε στο κεφάλαιο (3) και δεν αποτελούν μέρος της λύσης.



Σχήμα 5.9: Πεδίο ταχύτητας γύρω από αεροτομή με τη μέθοδο των τεμνομένων κυψελών για πλέγμα 28000 κυψελών.



Σχήμα 5.10: Πεδίο ταχύτητας γύρω από αεροτομή με τη μέθοδο των ψευδο-κυψελών για πλέγμα 28000 κυψελών.



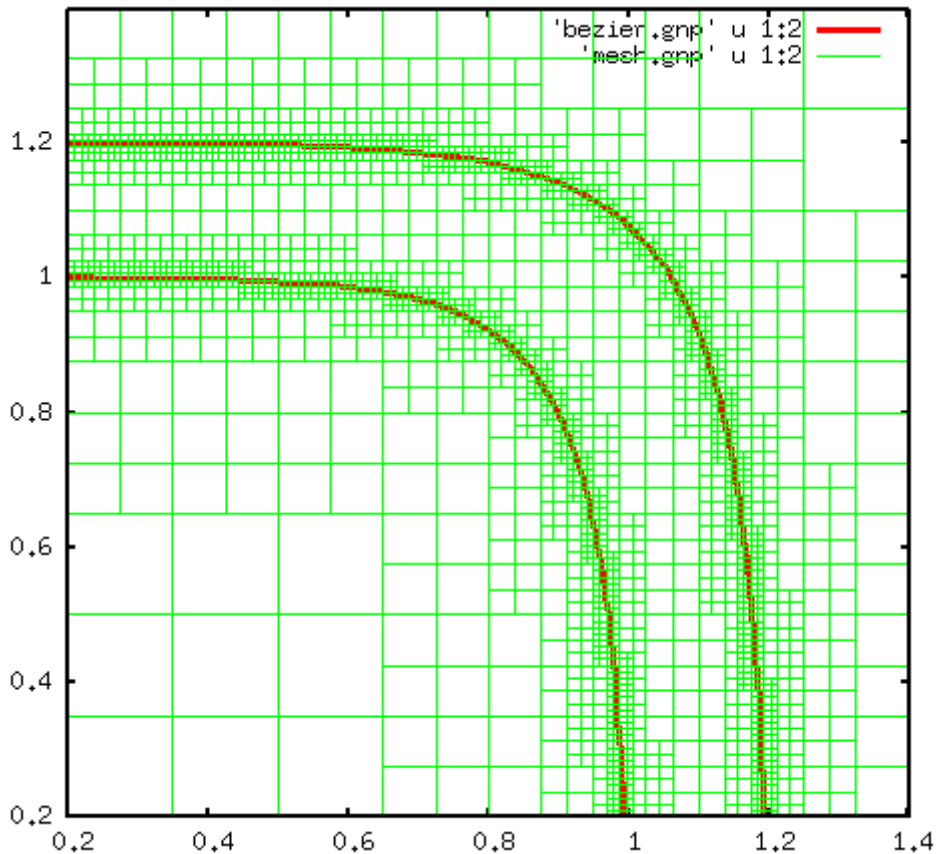
Σχήμα 5.11: Πεδίο ταχύτητας γύρω από αεροτομή με τη μέθοδο των ψευδο-κυψελών για πλέγμα 40000 κυψελών.

5.2 Ροή σε καμπυλόγραμμο αγωγό

Η δεύτερη εφαρμογή του κώδικα έγινε σε καμπυλόγραμμο αγωγό γωνίας 90° . Ο αγωγός έχει πλάτος $D = 0.2m$ και προσομοιώθηκε χρησιμοποιώντας καμπύλες *Bézier*. Από 6 σημεία ελέγχου προέκυψαν 200 σημεία της καμπύλης *Bézier*.

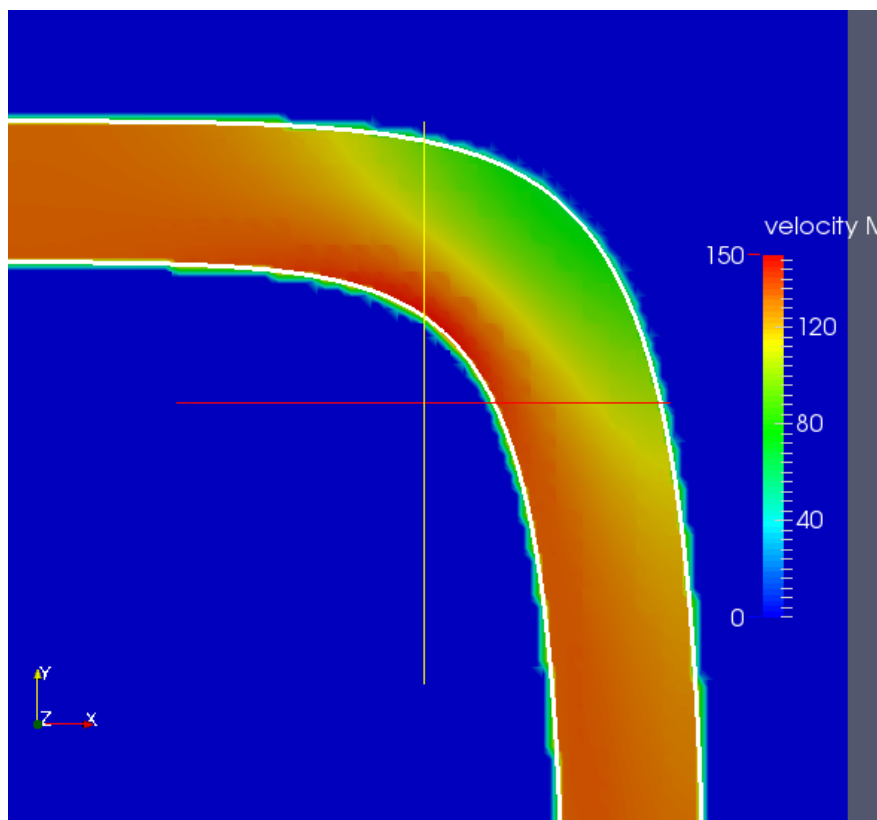
Ο αγωγός διαρρέεται από αέρα ολικής πίεσης $p_t = 10^5 Pa$ και ολικής θερμοκρασίας $T_t = 293 K$ με μηδενική γωνία ροής στην είσοδο. Η πίεση που επιβάλλεται στην έξοδο του αγωγού είναι $p_s = 0.89 \cdot 10^5 Pa$. Όπως και στη ροή γύρω από αεροτομή, η επίλυση έγινε και με τους δύο κώδικες για σύγκριση των αποτελεσμάτων.

Το πρώτο πλέγμα που χρησιμοποιήθηκε αποτελείται περίπου από 2500 κυψέλες και έχει διαστάσεις 1.2×1.2 . Κάθε κυψέλη έχει μέγιστο επιτρεπτό εμβαδό $V_{max} = 0.1m$ και ελάχιστο $V_{min} = 10^{-4}m$. Το πλέγμα πυκνώνει σε απόσταση $D_{max} = 1m$ από το κέντρο του και αποτελείται συνολικά από 4 επίπεδα πυκνώσης. Στο Σχήμα (5.12) φαίνεται ο αγωγός μαζί με το τελικό πλέγμα των 2500 κυψελών.



Σχήμα 5.12: Πλέγμα γύρω από καμπυλόγραμμο αγωγό γωνίας 90° .

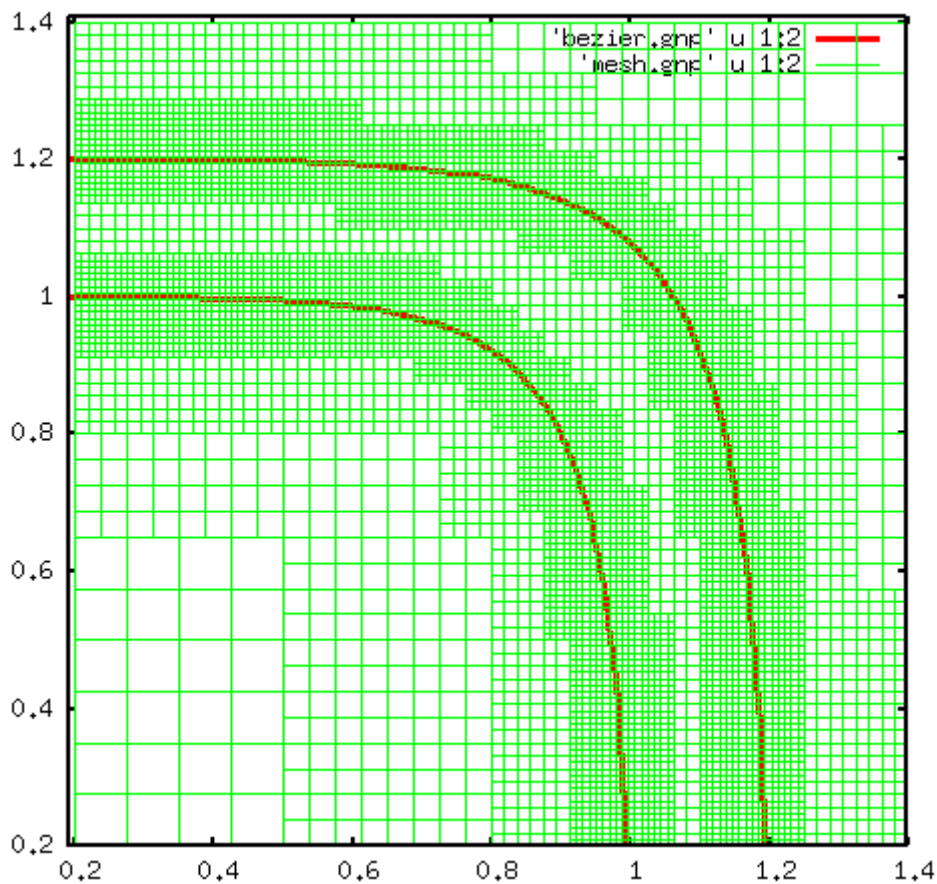
Η επίλυση της ροής με τη μέθοδο των τεμνομένων κυψελών έγινε για 4000 επαναλήψεις και τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στο Σχήμα (5.13). Για να διαπιστωθεί κατά πόσο η λύση είναι ανεξάρτητη του πλέγματος, έγιναν επιλύσεις και με μεγαλύτερα πλέγματα, συγκεκριμένα 8000 και 9000 περίπου κυψελών. Το μέγεθος που συγκρίνεται και στις τρεις επιλύσεις είναι η διαφορά παροχής μάζας στη είσοδο και την έξοδο του αγωγού. Η διαφορά αυτή είναι μια ποσοτικοποίηση της διάχυσης που συμβαίνει στη ροή προς το στερεό. Οι απώλειες για το πλέγμα των 2500 κυψελών είναι $\Delta\dot{m}_{2500} = -0.034\%$ που σημαίνει ότι η λύση δεν είναι ακόμα ανεξάρτητη του πλέγματος.



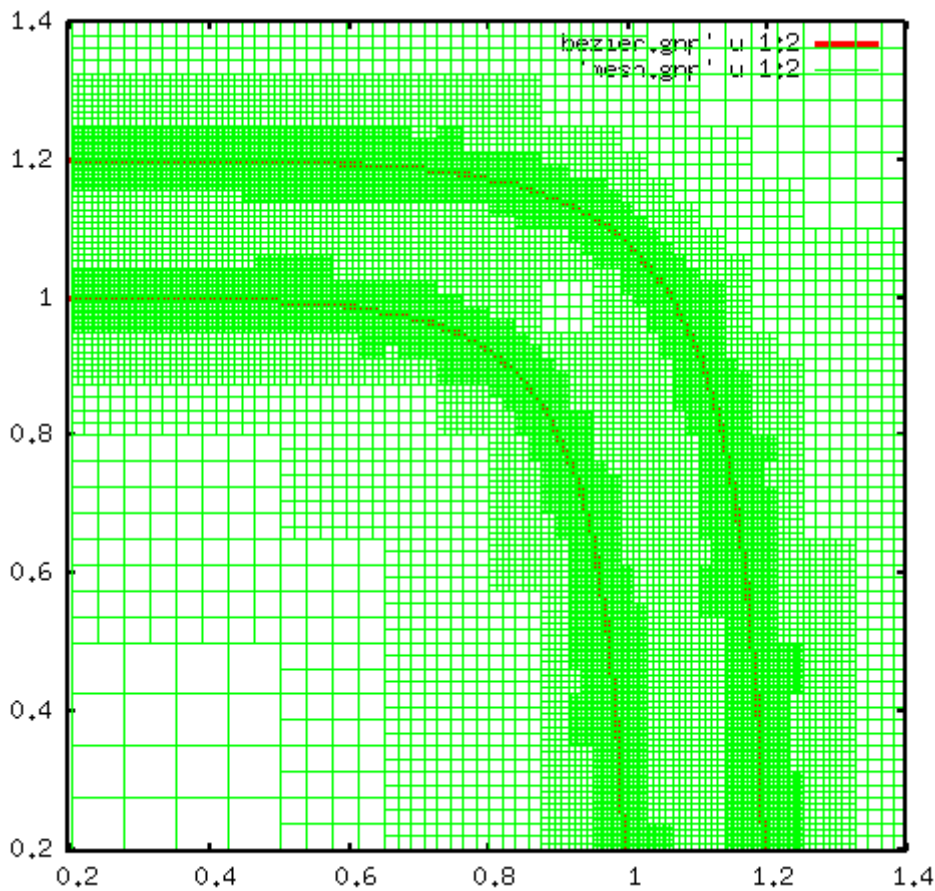
Σχήμα 5.13: Πεδίο ταχύτητας ροής μέσα σε αγωγό. Επίλυση με τη μέθοδο των τεμνομένων κυψελών για πλέγμα ~2500 κυψελών.

Για την κατασκευή των υπόλοιπων πλεγμάτων διατηρήθηκε σταθερό το εμβαδό των κυψελών και μεταβλήθηκε σταδιακά η ακτίνα στην οποία πυκνώνει το πλέγμα (D_{max}).

Το αμέσως μεγαλύτερο πλέγμα αποτελείται περίπου από 8000 κυψέλες με ακτίνα πυκνωσης $D_{max} = 3$ και όπως φαίνεται και στο Σχήμα (5.14) έχει και αυτό 4 επίπεδα πυκνωσης. Γενικά μεταβάλλοντας την ακτίνα D_{max} αλλάζει το πλήθος των κυψελών που έχουν ένα συγκεκριμένο εμβαδό και όχι τα επίπεδα πυκνωσης. Συγκρίνοντας τα πλέγματα στα Σχήματα (5.12) και (5.14) μπορεί κανείς να πει ότι το δεύτερο είναι πιο «απλωμένο» σε σχέση με το πρώτο. Το τελευταίο πλέγμα που δοκιμάστηκε έχει 20000 κυψέλες, με μέγιστο και ελάχιστο εμβαδό $V_{min} = 3 \cdot 10^{-5} m$ και $V_{max} = 0.1 m$ αντίστοιχα, και ακτίνα πυκνωσης $D_{max} = 4$. Το πλέγμα παρουσιάζεται στο Σχήμα (5.15). Πλέον όλες οι κυψέλες που βρίσκονται μέσα στο ρευστό έχουν το ελάχιστο επιτρεπτό εμβαδό και δεν υπάρχουν καθόλου κυψέλες με το μέγιστο εμβαδό, όπως πριν.



Σχήμα 5.14: Πλέγμα ~8000 κυψελών γύρω από καμπυλόγραμμο αγωγό.

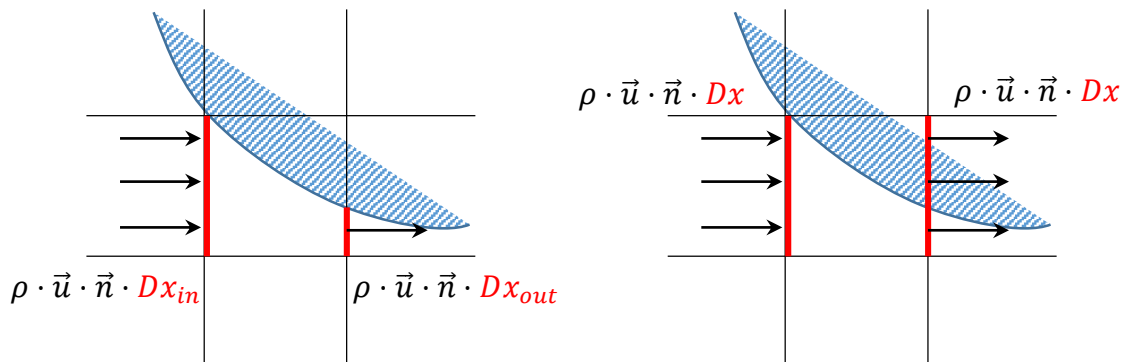


Σχήμα 5.15: Πλέγμα ~20000 κυψελών γύρω από καμπυλόγραμμο αγωγό.

Οι απώλειες μάζας μετά από την επίλυση είναι και στα δύο πλέγματα ίδια και ίση με $e_{m_{cc}} = 0.034\%$ που σημαίνει ότι η λύση για το πλέγμα των 8000 κυψελών είναι ανεξάρτητη. Αυτή είναι και η λύση αναφοράς με την οποία συγκρίνονται τα αποτελέσματα της μεθόδου των ψευδο-κυψελών. Η λύση του ανεξάρτητου πλέγματος παρουσιάζεται στο Σχήμα (5.16).

Στη συνέχεια έγινε επίλυση για το ίδιο πλέγμα και με τη μέθοδο των ψευδο-κυψελών. Οι απώλειες που προέκυψαν είναι $e_{m_{cc}} = 4.26\%$. Η αύξηση των απωλειών ήταν αναμενόμενη και δείχνει τη διαφορά των δύο μεθόδων. Στη μέθοδο των τεμνομένων κυψελών, οι υπολογιστικές κυψέλες τέμνονται και η ολοκλήρωση των εξισώσεων ροής κοντά στο στερεό όριο γίνεται μόνο στο τμήμα που ανήκει στο ρευστό. Αντίθετα, στη μέθοδο των ψευδο-κυψελών, η ολοκλήρωση γίνεται στον αρχικό όγκο των κυψελών και αυτό έχει ως αποτέλεσμα να μην ικανοποιείται απόλυτα η συντηρητική ιδιότητα των εξισώσεων. Στο Σχήμα (5.17) φαίνεται ποιοτικά αυτή η διαφορά. Χάριν

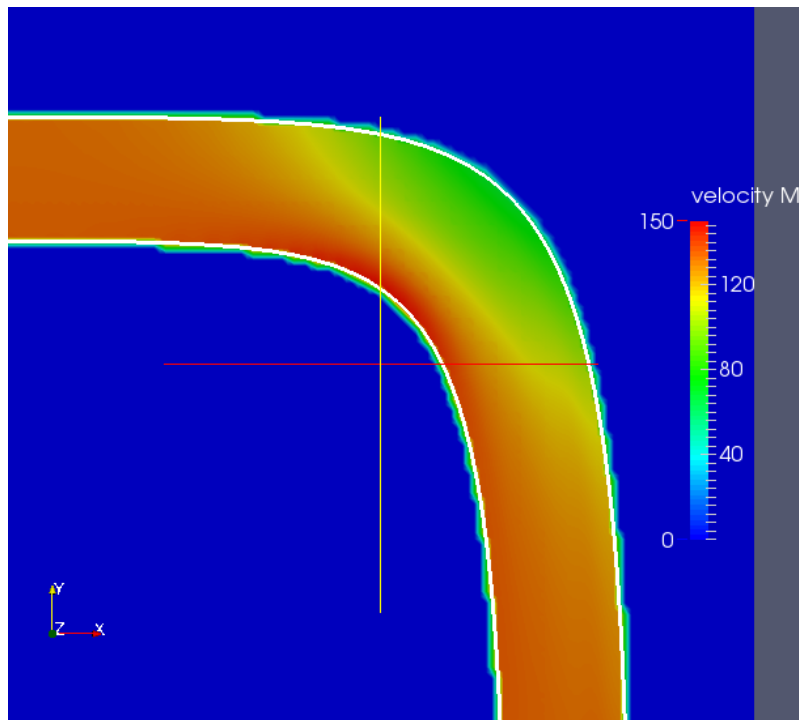
απλότητας το διάνυσμα της ταχύτητας σχεδιάστηκε οριζόντιο, ενώ στην πραγματικότητα έχει διεύθυνση παράλληλη στην εφαπτομενική διεύθυνση του ορίου.



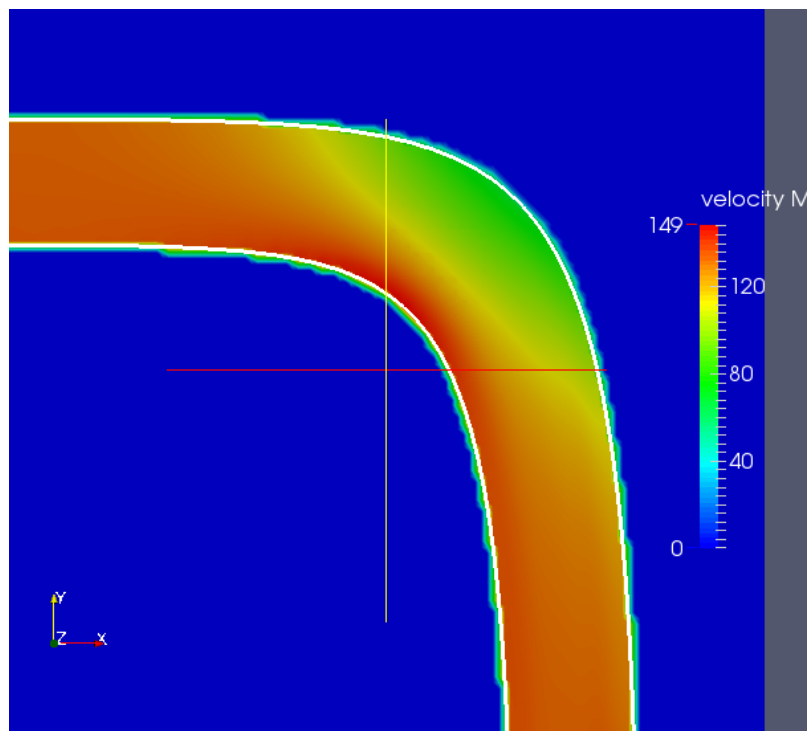
Σχήμα 5.17: Απώλεια μάζας στη μέθοδο των ψευδο-κυψελών λόγω ολοκλήρωσης των εξισώσεων και σε τμήμα που ανήκει στο στερεό.

Το πρόβλημα αυτό δε μπορεί να αντιμετωπιστεί 100% και σίγουρα η μέθοδος των τεμνομένων κυψελών έχει πάντα μικρότερες απώλειες και συγκεκριμένα η τιμή τους τείνει στο μηδέν.

Στα Σχήματα (5.18)-(5.19) φαίνεται η ροή μετά από την επίλυση με τη μέθοδο των ψευδο-κυψελών και στα δύο πλέγματα. Οι απώλειες μάζας για το μεγαλύτερο πλέγμα είναι $e_{\dot{m}_{9000}} = 4.34\%$.



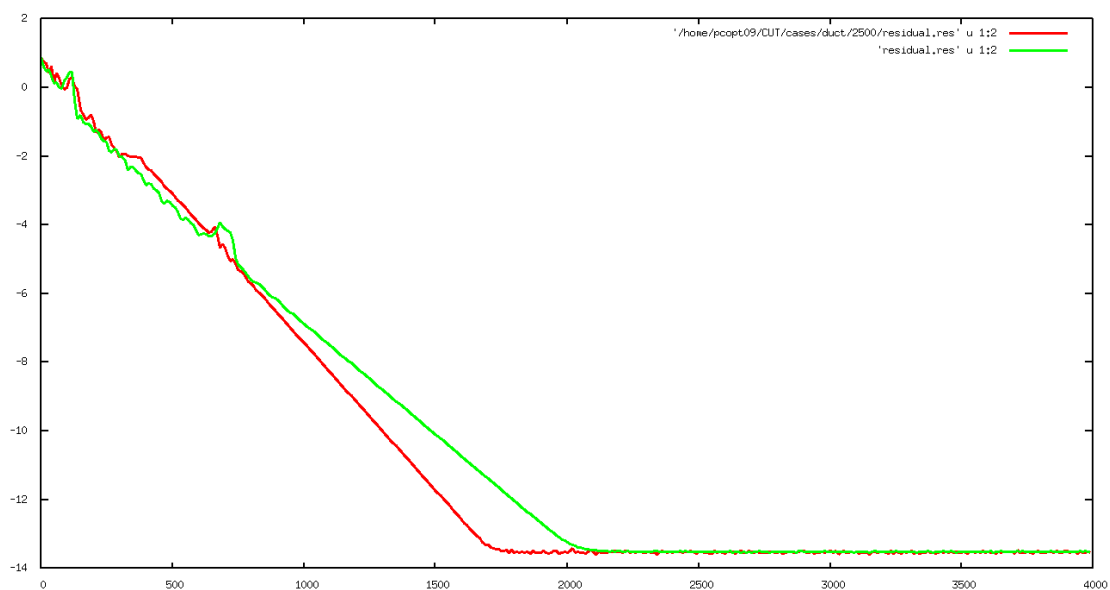
Σχήμα 5.18: Πεδίο ταχύτητας ροής σε καμπυλόγραμμο αγωγό. Επίλυση με τη μέθοδο των ψευδο-κυψελών σε πλέγμα ~8000 κυψελών.



Σχήμα 5.19: Πεδίο ταχύτητας ροής σε καμπυλόγραμμο αγωγό. Επίλυση με τη μέθοδο των ψευδο-κυψελών σε πλέγμα ~9000 κυψελών.

Για περαιτέρω διερεύνηση της επιρροής που έχει το μέγεθος του πλέγματος στις απώλειες της ροής, έγιναν δύο επιπλέον τρεξίματα. Το πρώτο πλέγμα που χρησιμοποιήθηκε αποτελείται από 15000 κυψέλες και το δεύτερο από 20000. Οι απώλειες που προέκυψαν είναι $e_{m_{15000}} = 2.53\%$ και $e_{m_{20000}} = 2.49\%$ αντίστοιχα. Παρατηρείται έντονα ότι η συντηρητική ιδιότητα των εξισώσεων δεν αποκαθίσταται πλήρως όσο μεγάλο κι αν είναι το υπολογιστικό πλέγμα, γεγονός που αποτελεί μειονέκτημα της μεθόδου των ψευδο-κυψελών.

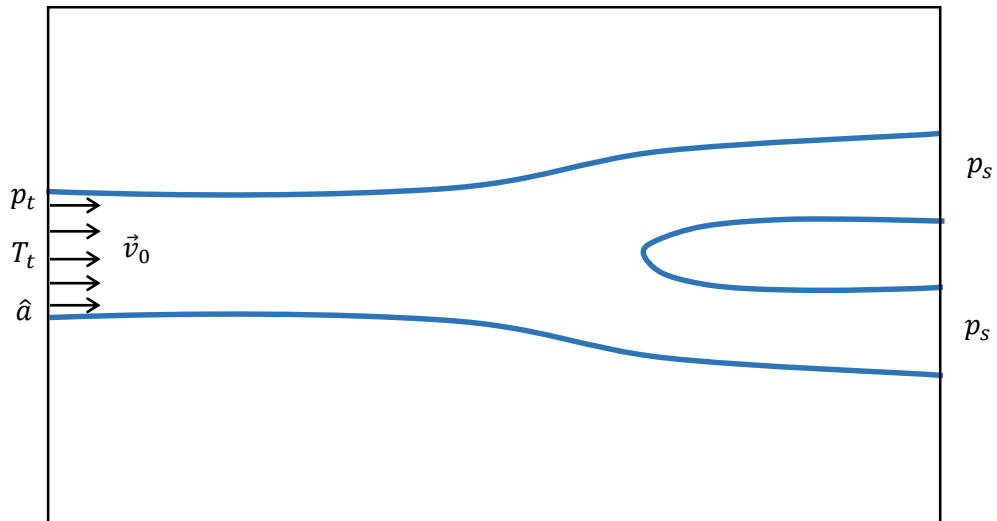
Στο Σχήμα (5.20) παρουσιάζεται ενδεικτικά το υπόλοιπο της εξίσωσης συνέχειας για τη λύση αναφοράς και τη λύση της μεθόδου των ψευδο-κυψελών. Παρατηρείται ότι και με τις δύο μεθόδους επιτυγχάνεται η ίδια ακρίβεια στη λύση. Συγκεκριμένα το υπόλοιπο φτάνει τιμές της τάξης του 10^{-13} . Αναφέρεται ότι το υπόλοιπο των εξισώσεων ορμής είναι της τάξης του 10^{-11} και της ενέργειας της τάξης του 10^{-9} . Η μέθοδος των τεμνομένων κυψελών φαίνεται ότι συγκλίνει πιο γρήγορα. Η παρατήρηση αυτή ήταν αναμενόμενη αφού η μέθοδος των ψευδο-κυψελών χρειάζεται περισσότερο χρόνο για να ισορροπήσουν οι εξισώσεις που λύνονται στο στερεό με αυτές που λύνονται στο ρευστό.



Σχήμα 5.19: Υπόλοιπο εξίσωσης συνέχειας με τη μέθοδο των τεμνομένων κυψελών (κόκκινη καμπύλη) και των ψευδο-κυψελών (πράσινη καμπύλη).

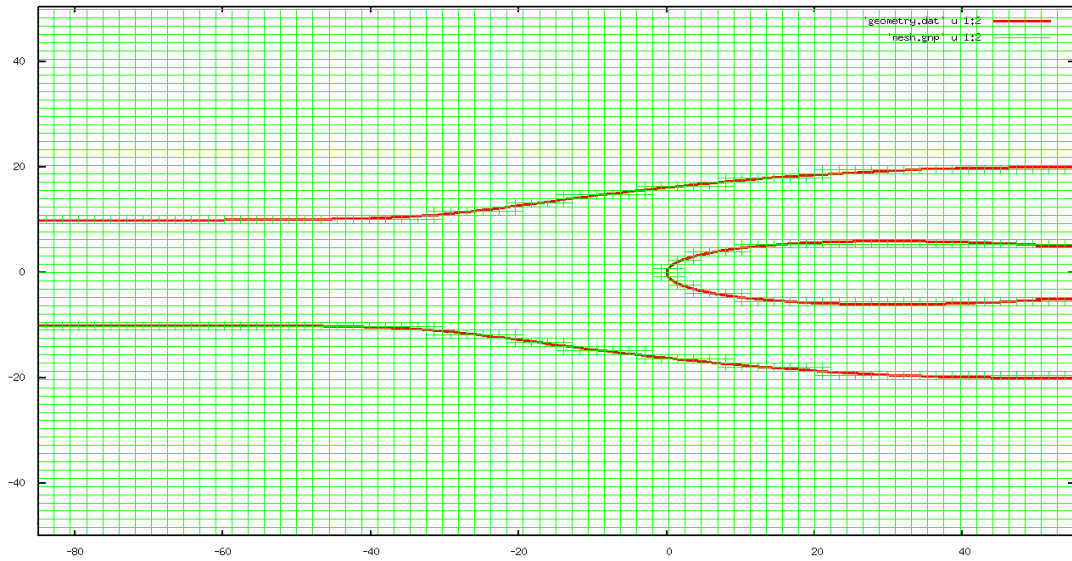
5.3 Ροή σε αγωγό με δύο εξόδους

Η επόμενη εφαρμογή του κώδικα έγινε σε έναν αγωγό με δύο εξόδους, όπως φαίνεται στο Σχήμα (5.20).

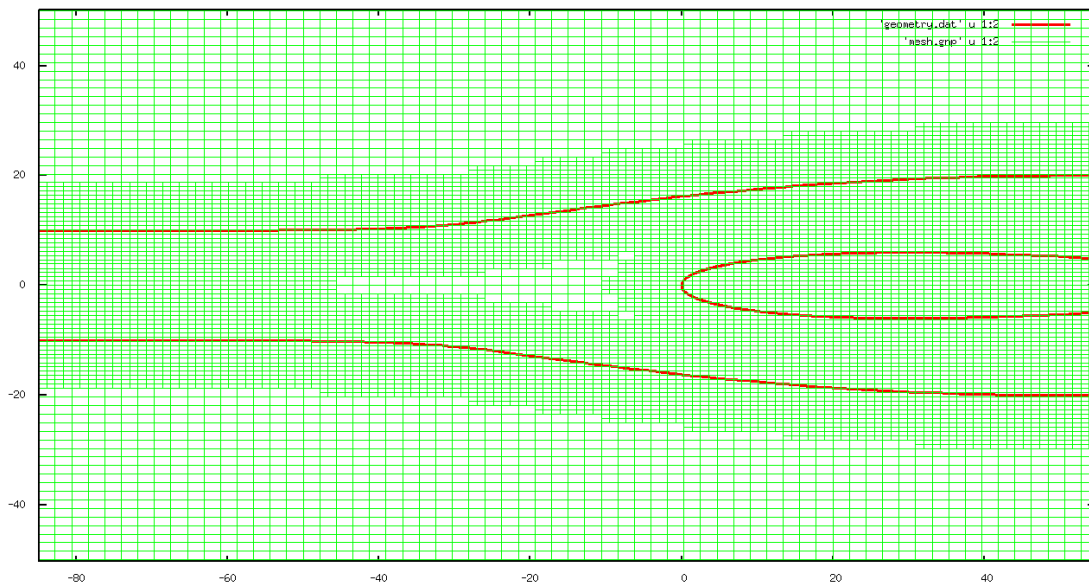


Σχήμα 5.20: Ροή σε οριζόντιο αγωγό με δύο εξόδους λόγω επιβολής διαφοράς πίεσης στα άκρα του.

Για τον καθορισμό της ροής ορίζεται ολική πίεση στην είσοδο $p_t = 10^5 Pa$ και ολική θερμοκρασία $T_t = 293 K$ με μηδενική γωνία ροής $\hat{\alpha} = 0^\circ$. Στις δύο εξόδους του αγωγού επιβάλλεται στατική πίεση $p_s = 0.88 Pa$. Για την επίλυση της ροής χρησιμοποιούνται και πάλι διαφόρων μεγεθών πλέγματα. Στο Σχήμα (5.21) φαίνεται ο αγωγός μαζί με πλέγμα περίπου 5000 κυψελών. Ο αγωγός έχει μήκος $L = 140m$ και πλάτος εισόδου $D = 20m$. Οι κυψέλες του πλέγματος έχουν μέγιστο εμβαδό $V_{max} = 2.5m$ και ελάχιστο $V_{min} = 1$ και η ακτίνα πυκνώσης είναι $D_{max} = 1$. Στο δεύτερο Σχήμα (5.21) φαίνεται ο αγωγός σε ένα πυκνότερο πλέγμα με μεγαλύτερη ακτίνα πυκνώσης $D_{max} = 30$.

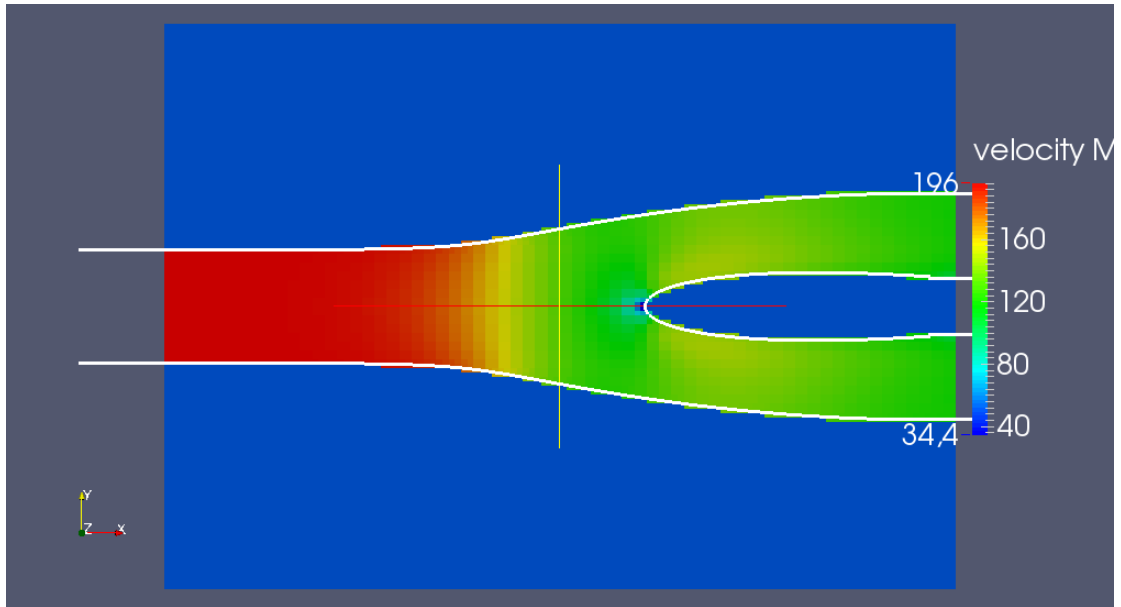


Σχήμα 5.21: Αγωγός με δύο εξόδους σε πλέγμα ~5000 κυψελών.



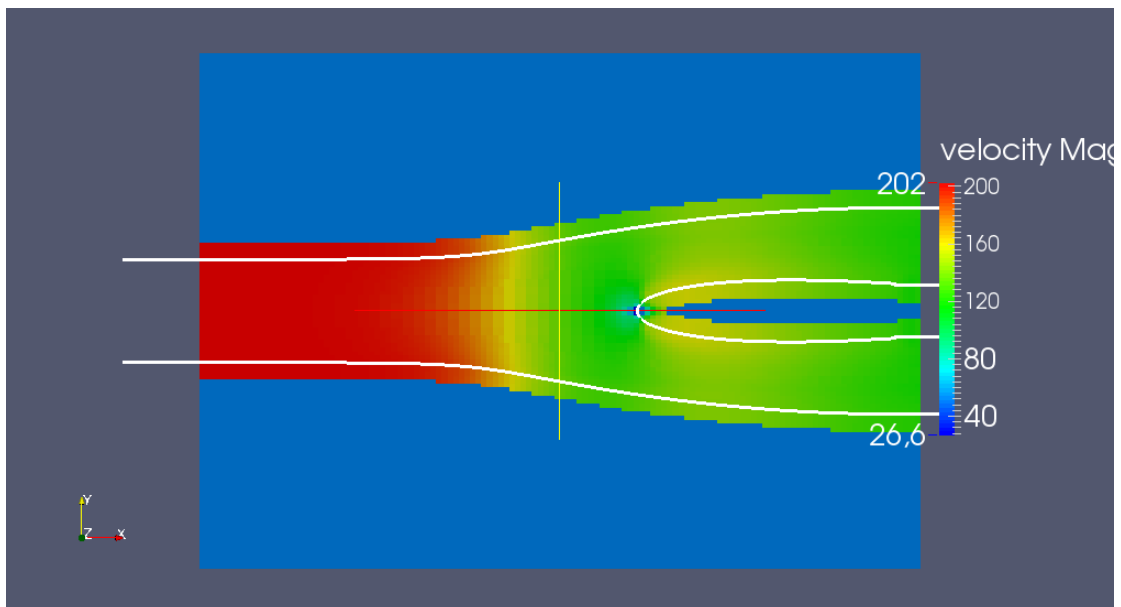
Σχήμα 5.22: Αγωγός με δύο εξόδους σε πλέγμα ~10000 κυψελών.

Η επίλυση στο πρώτο πλέγμα με τη μέθοδο των τεμνομένων κυψελών έχει απώλειες $e_{\dot{m}_{5000}} = 0.091\%$ ενώ στο δεύτερο $e_{\dot{m}_{10000}} = 0.018\%$. Στη συνέχεια έγινε επίλυση για πλέγμα ~20000 κυψελών και οι απώλειες που προέκυψαν είναι επίσης $e_{\dot{m}_{20000}} = 0.018\%$. Αυτό σημαίνει ότι η λύση για το πλέγμα των 10000 κυψελών είναι ανεξάρτητη του πλέγματος και θα είναι η λύση αναφοράς για σύγκριση με τη μέθοδο των ψευδο-κυψελών. Στο Σχήμα (5.23) φαίνεται το πεδίο ταχύτητας της ανεξάρτητης λύσης.



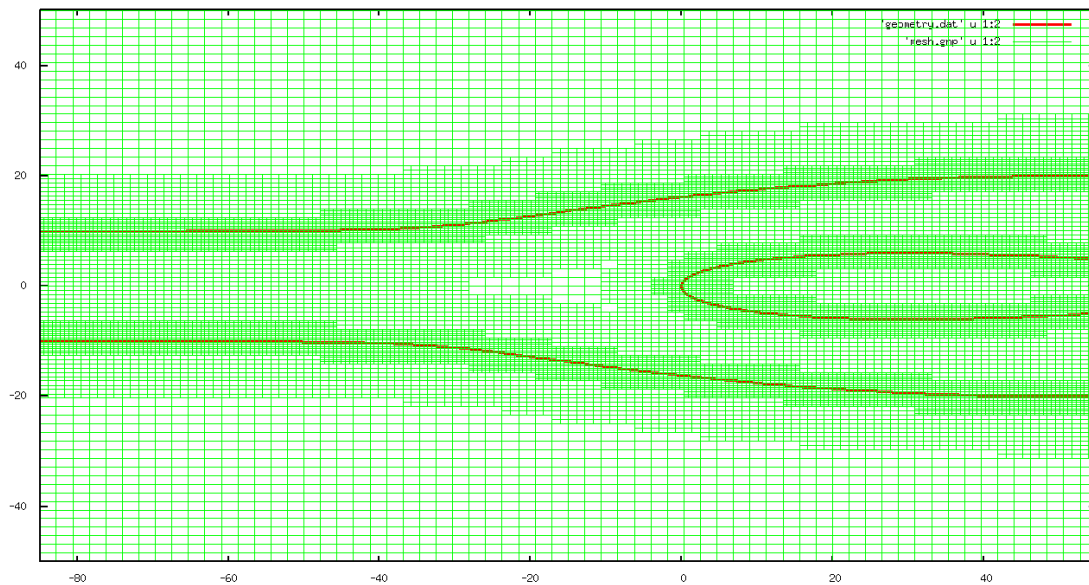
Σχήμα 5.23: Πεδίο ταχύτητας μέσα σε αγωγό δύο εξόδων. Επίλυση με τη μέθοδο των τεμνομένων κυψελών για πλέγμα ~10000 κυψελών.

Χρησιμοποιώντας το ίδιο πλέγμα στη μέθοδο των ψευδο-κυψελών προέκυψαν απώλειες $e_{\dot{m}_{GC}} = 2.34\%$. Το πεδίο ροής φαίνεται στο Σχήμα (5.24).



Σχήμα 5.24: Πεδίο ταχύτητας μέσα σε αγωγό δύο εξόδων. Επίλυση με τη μέθοδο των ψευδο-κυψελών για πλέγμα ~10000 κυψελών.

Συγκρίνοντας τα Σχήματα (5.23)-(5.24) είναι φανερό ότι το δεύτερο έχει γίνει μετά από επίλυση με τη μέθοδο των ψευδο-κυψελών. Τα μεγέθη ροής έχουν υπολογισμένες τιμές σε ένα τμήμα μέσα στο στερεό, τις ψευδο-κυψέλες. Και πάλι οι απώλειες αυτής της μεθόδου είναι μεγαλύτερες και γι' αυτό γίνεται διερεύνηση κατά πόσο μπορούν να μειωθούν αυξάνοντας το μέγεθος του πλέγματος. Αλλάζοντας την ακτίνα πύκνωσης δημιουργείται ένα νέο πλέγμα ~20000 κυψελών που φαίνεται στο Σχήμα (5.25).

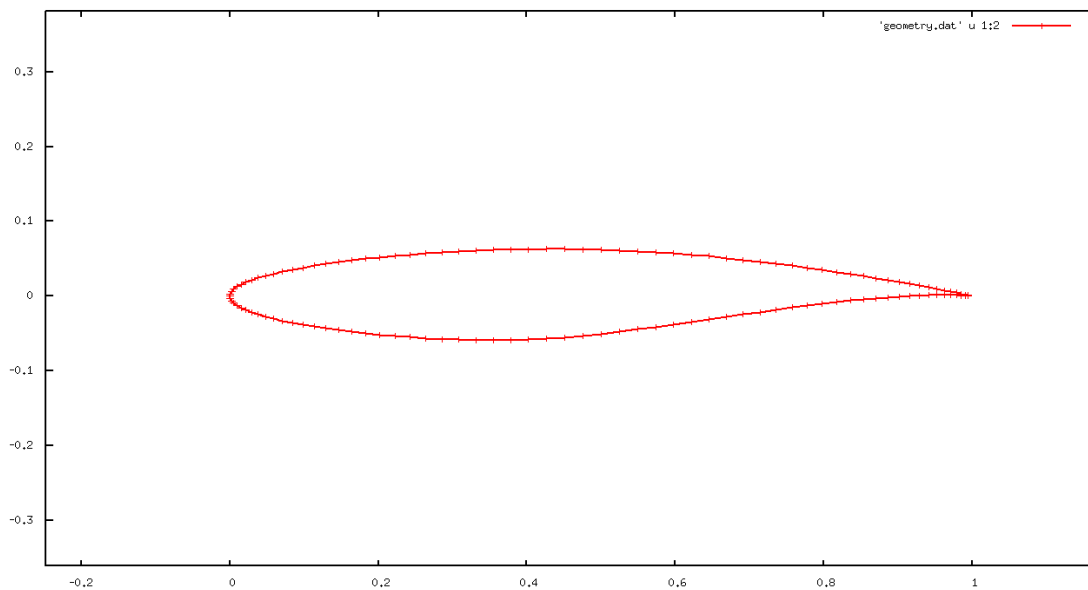


Σχήμα 5.25: Αγωγός με δύο εξόδους σε πλέγμα ~20000 κυψελών.

Οι απώλειες στο συγκεκριμένο πλέγμα είναι $e_{\dot{m}_{20000}} = 2.23\%$. Παρατηρείται ότι και πάλι αυξάνοντας το μέγεθος του πλέγματος οι απώλειες μάζας μειώνονται.

5.4 Διηχητική ροή γύρω από αεροτομή

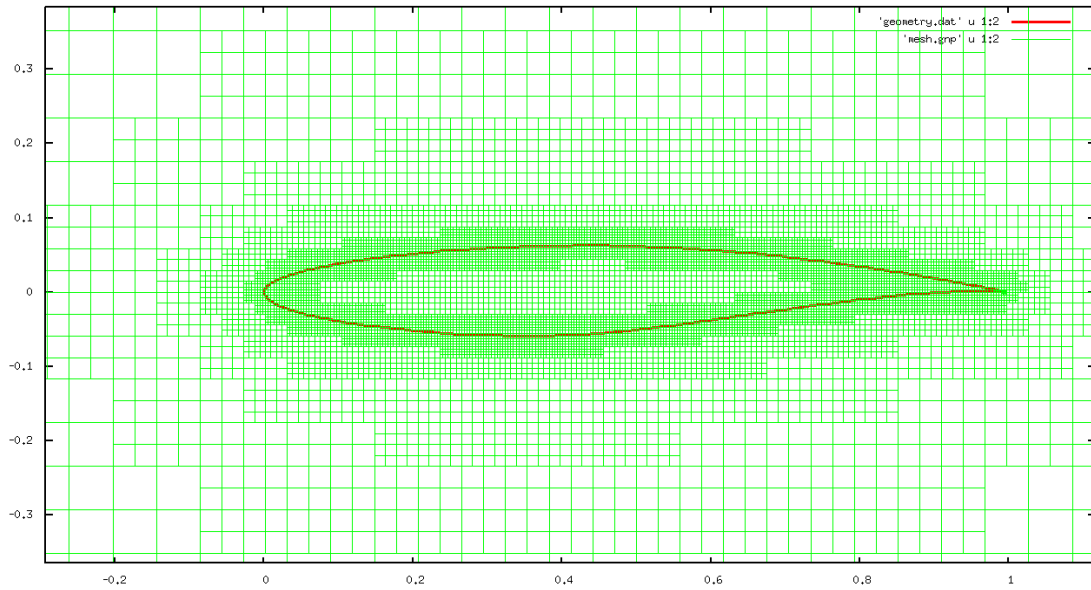
Η τελευταία εφαρμογή έγινε στην αεροτομή RAE2822 [23] , η οποία για $Mach = 0.7$ εμφανίζει κύμα κρούσης και, συνεπώς, ασυνέχεια στα μεγέθη ροής. Η αεροτομή προσομοιώθηκε χρησιμοποιώντας 125 σημεία κατά μήκος της, όπως φαίνεται στο Σχήμα (5.26).



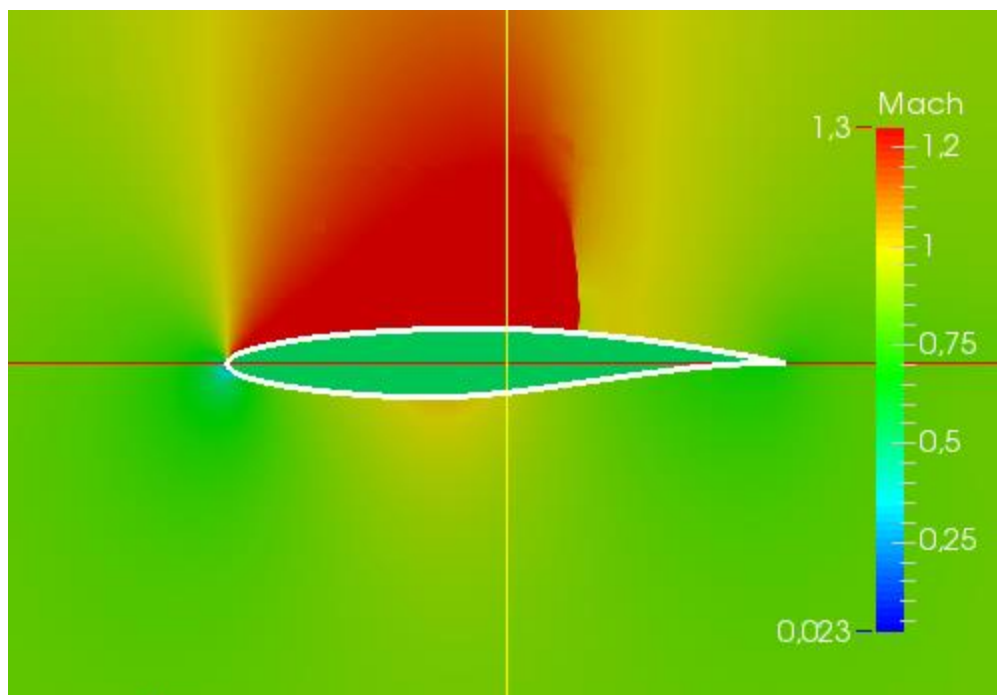
Σχήμα 5.26: Αεροτομή RAE2822 ορισμένη με 125 σημεία.

Αφού καθοριστεί η γεωμετρία, πρέπει να οριστούν οι μεταβλητές της επ' άπειρο ροής στις τέσσερις πλευρές του πλέγματος. Με σκοπό τη μελέτη της συμπεριφοράς του κώδικα σε σημεία ασυνέχειας, η αεροτομή εκτίθεται σε αέρα πυκνότητας $\rho = 1,2 \frac{kg}{m^3}$ και ταχύτητας $v_0 = 250 \frac{m}{s}$. Ο αριθμός Mach της ροής είναι $M = 0,7$ και η γωνία της ροής είναι $\hat{\alpha} = 2.31^\circ$.

Αρχικά η επίλυση έγινε σε πλέγμα ~ 14000 κυψελών με τη μέθοδο των τεμνομένων κυψελών. Η αεροτομή μαζί με το πλέγμα φαίνονται στο Σχήμα (5.27). Το πεδίο τιμών Mach του πεδίου παρουσιάζεται στο Σχήμα (5.28).

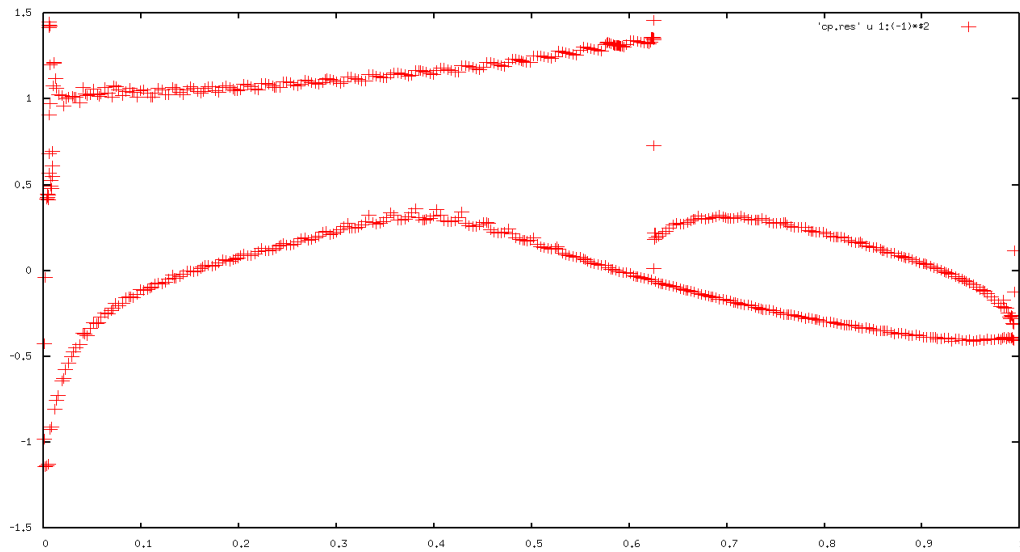


Σχήμα 5.27: Πλέγμα ~14000 κυψελών γύρω από αεροτομή RAE2822.



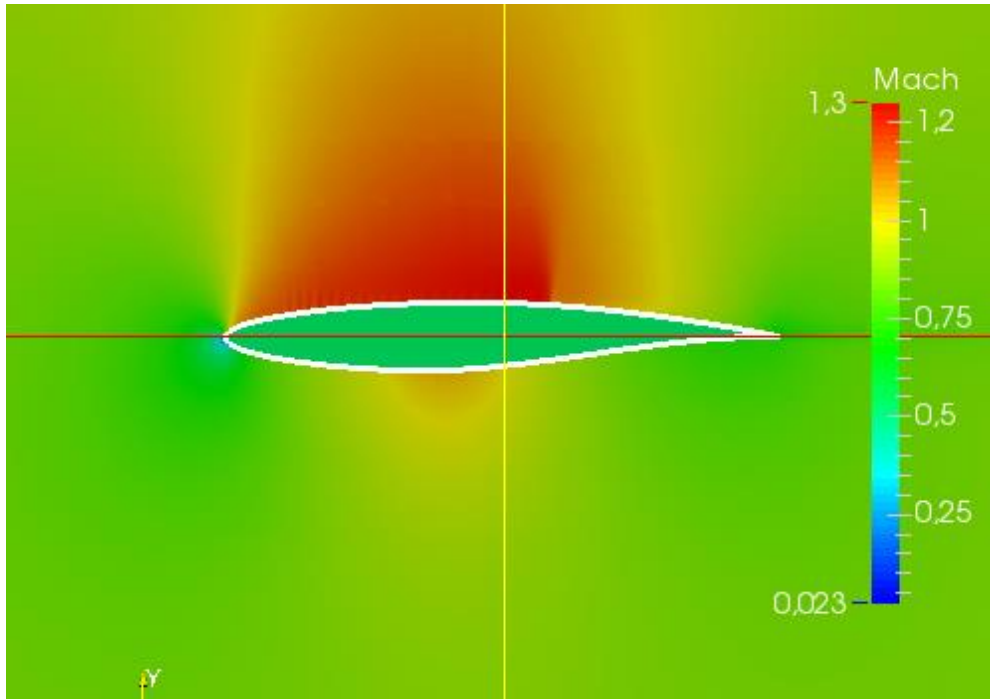
Σχήμα 5.28: Πεδίο τιμών αριθμού Mach γύρω από αεροτομή με κύμα κρούσης με τη μέθοδο των τεμνομένων κυψελών.

Η καμπύλη του συντελεστή πίεσης της αεροτομής φαίνεται στο Σχήμα (5.29).



Σχήμα 5.29: Συντελεστής C_p αεροτομής RAE2822 μετά από επίλυση με τη μέθοδο των τεμνόμενων κυψελών.

Η ίδια γεωμετρία με το ίδιο πλέγμα επιλύεται και με τη μέθοδο των ψευδο-κυψελών για να μελετηθεί η συμπεριφορά του κώδικα. Το πεδίο τιμών του αριθμού Mach φαίνεται στο Σχήμα (5.30) και ο συντελεστής πίεσης της αεροτομής στο Σχήμα (5.31).



Σχήμα 5.30: Πεδίο τιμών αριθμού Mach γύρω από αεροτομή με κύμα κρούσης με τη μέθοδο των ψευδο-κυψελών.

Το πεδίο ροής δεν έχει τις αναμενόμενες τιμές και είναι φανερό ότι ο κώδικας αδυνατεί να προσεγγίσει με ακρίβεια το κύμα κρούσης. Παρατηρείται γενικά μια διάχυση των μεγεθών ροής στην περιοχή του κύματος. Το φαινόμενο αυτό πιθανόν οφείλεται στη διακριτοποίηση της εξίσωσης που λύνεται στις ψευδο-κυψέλες (3.14):

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \Delta\tau \cdot \frac{\partial U_i^n}{\partial x_\kappa} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x_\kappa}$$

Η διακριτοποίηση του όρου $\left(\frac{\partial U_i^n}{\partial x_\kappa}\right)$ γίνεται με σχήμα πεπερασμένων διαφορών όπως περιγράφηκε στο κεφάλαιο (3). Αυτό σημαίνει ότι, πρακτικά, για την εύρεση του διανύσματος ροής \vec{U} σε μια κυψέλη (x_i, y_i) χρειάζονται οι τιμές μιας γειτονικής κυψέλης (x_{i+1}, y_{i+1}) . Στην περίπτωση που η γειτονική κυψέλη βρίσκεται μετά το κύμα κρούσης δεν είναι σωστό να χρησιμοποιούνται οι τιμές της επειδή δεν υπάρχει συνέχεια. Με τον τρόπο αυτό μεταφέρεται πληροφορία από το τμήμα μετά το κύμα κρούσης στο τμήμα πριν από αυτό και παρατηρείται διάχυση των μεγεθών ροής.

Κεφάλαιο 6

6. Ανακεφαλαίωση – Συμπεράσματα

Ανακεφαλαιώνοντας, στη διπλωματική εργασία αναπτύχθηκε ένα λογισμικό επίλυσης ροής 2D μόνιμων ατριβών ροών συμπιεστού ρευστού με τη μέθοδο των ψευδο-κυψελών (Ghost-Cells) σε γλώσσα C++. Ο κώδικας βασίζεται σε ήδη υπάρχον λογισμικό επίλυσης ροών με τη μέθοδο των τεμνομένων κυψελών (Cut-Cells) και χειρίζεται καρτεσιανά πλέγματα. Πρόκειται για δύο ανταγωνιστικές μεθόδους που στόχο έχουν να επιβάλλουν τις οριακές συνθήκες του εκάστοτε προβλήματος στη ροή. Αρχικά έγινε περιγραφή του τρόπου πλεγματοποίησης του υπολογιστικού χωρίου. Στη συνέχεια κατασκευάστηκαν οι εξισώσεις ροής και παρουσιάστηκε ο τρόπος επίλυσής τους. Έπειτα έγινε λεπτομερής ανάλυση της μεθόδου των ψευδο-κυψελών για την επιβολή των οριακών συνθηκών του εκάστοτε προβλήματος.

Στο τέλος της διπλωματικής εργασίας έγιναν διάφορες εφαρμογές του κώδικα για την πιστοποίηση της ορθής λειτουργίας του. Όλες οι εφαρμογές προσομοιώθηκαν και με τον προϋπάρχοντα κώδικα της ΜΠΥΡ&Β που επιλύει ροές με τη μέθοδο των τεμνομένων κυψελών για σύγκριση των αποτελεσμάτων. Η πρώτη εφαρμογή είναι η μελέτη της ροής γύρω από συμμετρική αεροτομή NACA0012. Κατόπιν μελετάται η ροή μέσα σε καμπυλόγραμμο αγωγό γωνίας 90° και σε οριζόντιο αγωγό με δύο εξόδους. Τέλος γίνεται μια επιπλέον εφαρμογή σε διηχητική ροή γύρω από αεροτομή.

Τα συμπεράσματα που προέκυψαν είναι:

- Η μέθοδος των ψευδο-κυψελών είναι πολύ πιο εύκολη στον προγραμματισμό της σε σχέση με τη μέθοδο των τεμνομένων κυψελών, διότι δεν χρειάζεται ο υπολογισμός των γεωμετρικών μεγεθών των «κομμένων» κυψελών. Γενικά η διαχείρισή τους είναι πιο εύκολη, ιδιαίτερα σε περίπλοκες γεωμετρίες.
- Η υπολογιστική μνήμη που χρειάζεται η μέθοδος των ψευδο-κυψελών είναι μικρότερη. Ο όγκος των πληροφοριών που πρέπει να αποθηκεύσει για τις ψευδο-κυψέλες είναι μικρότερος σε σχέση με τα μεγέθη που χρειάζονται αποθήκευση για τις οριακές κυψέλες στη μέθοδο των τεμνομένων κυψελών.

- Σε υποηχητικές ροές ($M < 1$) η μέθοδος των ψευδο-κυψελών είναι αρκετά αποδοτική και η λύση της ροής πλησιάζει πολύ τη λύση της μεθόδου των τεμνομένων κυψελών χωρίς να χρειάζονται μεγάλα πλέγματα.
- Σε διηχητικές ροές η μέθοδος των ψευδο-κυψελών δεν μπορεί να προσεγγίσει με ακρίβεια το κύμα κρούσης για το ίδιο πλέγμα που το προσεγγίζει η μέθοδος των τεμνομένων κυψελών.
- Σε προβλήματα εσωτερικής αεροδυναμικής φαίνεται υπάρχει διάχυση των μεγεθών ροής, λόγω του τρόπου επιβολής των οριακών συνθηκών. Η διάχυση φυσικά δεν είναι μεγάλη και μάλιστα με πύκνωση του πλέγματος οι απώλειες μειώνονται σημαντικά, αλλά ποτέ δεν φτάνουν την τιμή της μεθόδου των τεμνομένων κυψελών.
- Η σύγκλιση της μεθόδου των ψευδο-κυψελών είναι συνήθως πιο αργή σε σχέση με των τεμνομένων κυψελών και παρουσιάζει ταλαντώσεις στην αρχή διότι οι εξισώσεις ροής χρειάζονται χρόνο για να ισορροπήσουν με την εξίσωση που επιλύεται στις ψευδο-κυψέλες. Παρόλα αυτά και με τις δύο μεθόδους επιτυγχάνεται η ίδια ακρίβεια στη λύση.

Ολοκληρώνοντας την εργασία θα ήταν καλό να γίνουν μερικές προτάσεις για επέκταση του λογισμικού που αναπτύχθηκε. Στη φάση αυτή μπήκαν οι βάσεις για την ανάπτυξη ενός νέου λογισμικού επίλυσης ροών και σαφώς υπάρχουν περιθώρια βελτίωσης. Σε πρώτο στάδιο θα μπορούσε να μελετηθεί εκτενέστερα η συμπεριφορά του κώδικα σε διηχητικές και υπερηχητικές ροές. Επίσης μπορούν να γίνουν εφαρμογές σε στροβιλομηχανές, σε προβλήματα με περιοδικότητα. Συνεχίζοντας θα ήταν χρήσιμο να τροποποιηθεί ώστε να μπορεί να επιλύει και μη-μόνιμες ροές. Τέλος θα είχε ενδιαφέρον να γίνει επέκταση ώστε να διαχειρίζεται 3-Διάστατες γεωμετρίες.

Κεφάλαιο 7

7. Βιβλιογραφία

- [1] Γ. Μπεργελές, *Υπολογιστική Ρευστομηχανική*. Συμείων.
- [2] Κ. Γιαννάκογλου, *Συνεκτικές ροές στις στροβιλομηχανές*. Ε.Μ.Π, 2004.
- [3] Andre Bakker, “Meshing Applied Computational Fluid Dynamics,” *Presentation*, 2006. [Online]. Available: <http://www.bakker.org/dartmouth06/engs150/07-mesh.pdf>. [Accessed: 01-Jan-2006].
- [4] C. S. Peskin, “Flow patterns around heart valves: a digital computer method for solving the equations of motion.,” Albert Einstein College of Medicine. University Microfilms, 1972.
- [5] S. Carrillo, “Cartesian Grid Generation,” Technical University of Delft.
- [6] G. Iaccarino, “The Immersed Boundary Method Mechanical Engineering Department Institute for Computational Mathematical Engineering,” no. January, 2016.
- [7] “Making sense of CFD grid types.” [Online]. Available: <http://www.innovative-cfd.com/cfd-grid.html>.
- [8] Σ. Τσαγγάρης, *Μηχανική των Ρευστών*. Συμείων, 2005.
- [9] H. Bandringa, “An immersed boundary method for incompressible flows using volume of body function,” *Int. J. Numer. Methods Fluids*, vol. 50, no. 6, pp. 733–750, 2006.
- [10] K. Samouchos, S. Katsanoulis, and K. Giannakoglou, “Unsteady Adjoint to the Cut-Cell Method using Mesh Adaptation on GPU’s,” in *ECCOMAS Congress*, 2016.
- [11] J. Hunter, “An introduction to the incompressible Euler Equations,” *Notes, Univ. California, Davis*, pp. 1–25, 2006.
- [12] H. Keller, *Computational fluid dynamics*, no. 1. American Mathematical Society, 1976.
- [13] C. F. Dynamics and T. Euler, “Solving the Euler Equations,” 2011.
- [14] L. Roe, P, “Approximate Riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes,” *J. Comput. Phys.*, pp. 357–372, 1981.
- [15] A. Rohde, “Eigenvalues and eigenvectors of the Euler equations in general geometries,” in *15th AIAA Computational Fluid Dynamics*

- Conference*, 2001, no. 1, pp. 1–6.
- [16] T. Krarup, “The method of least squares collocation,” *Stud. Geophys. Geod.*, vol. 14, no. 2, pp. 107–109, 1970.
- [17] M. Berger, “Progress Towards a Cartesian Cut-Cell Method for Viscous Compressible Flow,” in *50th AIAA Aerospace Sciences Meeting Including the New Horizons Forum and Aerospace Exposition*, 2012, pp. 1–17.
- [18] M. W. Johnson, “A novel Cartesian CFD cut cell approach,” *Comput. Fluids*, vol. 79, pp. 105–119, 2013.
- [19] D. Pan and T. Shen, “A Ghost Cell Method for the Computation of Incompressible Flows with Immersed Bodies,” in *International Conference on FLUID MECHANICS and AERODYNAMICS (FMA’08)*, 2008, no. 1, pp. 78–83.
- [20] S. Majumdar, G. Iaccarino, and P. Durbin, “RANS solver with adaptive structured boundary non-conforming grids,” *Annu. Res. Briefs 2001, Cent. Turbul. Res.*
- [21] Y.-H. Tseng, “On the development of a ghost-cell immersed boundary method and its application to large eddy simulation and geophysical fluid dynamics,” Stanford University.
- [22] Κ. Γιαννάκογλου, *Αριθμητική Ανάλυση*. Ε.Μ.Π, 2003.
- [23] P. Cook, “Aerofoil RAE 2822: Pressure Distributions and Boundary Layer and Wake Measurements,” AGARD AR-138, 1979.