



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΡΕΥΣΤΩΝ
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΘΕΡΜΙΚΩΝ ΣΤΡΟΒΙΛΟΜΗΧΑΝΩΝ

Διπλωματική Εργασία :
ΠΡΟΔΙΑΘΕΣΗ ΧΑΜΗΛΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ MACH ΓΙΑ ΑΝΑΝΤΙ ΣΧΗΜΑΤΑ
ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ NAVIER-STOKES.
ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ ΚΑΙ ΠΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΣΕ ΠΤΕΡΥΓΩΣΕΙΣ
ΣΤΡΟΒΙΛΟΜΗΧΑΝΩΝ

της
Βαρβάρας Γ. Ασούτη

Επιβλέπων Καθηγητής
Κυριάκος Χ. Γιαννάκογλου

Ιούλιος 2004

Σκοπός της Εργασίας

Στη Διπλωματική αυτή Εργασία αναπτύχθηκε, προγραμματίστηκε και δοκιμάστηκε μια μέθοδος προδιάθεσης ή προσταθεροποίησης (preconditioning method) για την επίλυση των εξισώσεων Euler και Navier-Stokes σε χαμηλούς αριθμούς Mach (όπου η ροή πρακτικά συμπεριφέρεται ως ασυμπίεστη) με μεθόδους χρονοπροέλασης και διατύπωση πρωτευσών μεταβλητών. Σε σχέση με την κλασική διατύπωση, η προσταθεροποίηση εξασφαλίζει ταχύτερη σύγκλιση και, μάλιστα, με συντριπτική διαφορά όσο ελαττώνεται ο αριθμός Mach της ροής. Σε περιπτώσεις ιδιαίτερα χαμηλών αριθμών Mach, η προσταθεροποίηση επιτρέπει σύγκλιση ενώ ο κλασικός επιλύτης αποτυγχάνει να συγκλίνει. Η προσταθεροποίηση δρα στο υπερβολικό σύστημα των εξισώσεων ροής συγκεντρώνοντας τις ιδιοτιμές του και, με τον τρόπο αυτό, επιτυγχάνεται γρήγορη σύγκλιση.

Η εργασία αυτή έρχεται να επεκτείνει και σε ασυμπίεστες ροές το λογισμικό PUMA (Parallel Unstructured Multigrid Adapted-grid) του Εργαστηρίου Θερμικών Στροβιλομηχανών του ΕΜΠ. Αν και η εργασία επικεντρώνεται σε διδιάστατα δομημένα πλέγματα, η επέκτασή της σε τριδιάστατα ή μη-δομημένα πλέγματα είναι άμεση. Άμεση είναι και η χρήση όλων των άλλων χαρακτηριστικών του λογισμικού PUMA, όπως της πολυεπεξεργασίας, της επιτάχυνσης μέσω τεχνικών πολυπλέγματος ή της χρήσης προσαρμοζόμενου στη λύση πλέγματος.

Σημερινή κατάσταση

Οι σύγχρονες μέθοδοι της υπολογιστικής ρευστοδυναμικής (ΥΡΔ) μπορούν να υπολογίσουν ροές οποιουδήποτε αριθμού Mach. Ανάλογα όμως με το αν στοχεύουν σε συμπίεστες ή ασυμπίεστες ροές, προτείνονται όχι μόνο διαφορετικοί αλγόριθμοι επίλυσης αλλά και διαφορετικές διατυπώσεις. Συγκεκριμένα για τις συμπίεστες ροές έχουν επικρατήσει οι μέθοδοι χρονο-προέλασης (time-marching) με κεντρικές διαφορές και όρους τεχνητής συνεκτικότητας ή ανάντι διαφόριση. Για τις ασυμπίεστες ροές έχουν επικρατήσει η μέθοδος διόρθωσης πίεσης και αυτή της ψευδοσυμπίεστότητας.

Παρόλα, αυτά η χρήση και συντήρηση, από την ίδια ερευνητική ομάδα, δύο διαφορετικών επιλυτών των εξισώσεων ροής, ενός για πολύ χαμηλούς αριθμούς Mach κι ενός άλλου για τις συμπίεστες ροές (υψηλά υποηχητικές, διχητικές, υπερηχητικές) είναι ασύμφορη και κυρίως μη αποδοτική. Είναι λοιπόν αναγκαία η

υιοθέτηση μιας και μόνο μεθοδολογίας για όλες τις κατηγορίες. Προς αυτή την κατεύθυνση υπάρχουν δύο επιλογές. Η πρώτη είναι η επέκταση των αλγορίθμων που είναι σχεδιασμένοι για ασυμπίεστες ροές στις συμπιεστές ροές. Λ.χ, πρόσφατα, (Πολίτης 1998), επεκτάθηκε ένας αλγόριθμος επίλυσης ασυμπίεστων ροών με τη μέθοδο διόρθωσης πίεσης για διηχητικές ροές. Η δεύτερη επιλογή συνίσταται στη χρήση αλγορίθμων χρονοπροέλασης για συμπιεστές ροές τροποποιημένων έτσι ώστε να καλύπτουν όλες τις κατηγορίες ροών. Η δυσκολία στην επίλυση των συμπιεστών εξισώσεων ροής σε χαμηλούς αριθμούς Mach οφείλεται στη μεγάλη διαφορά της ταχύτητας των ακουστικών κυμάτων και των κυμάτων που οφείλονται στην ταχύτητα του ρευστού. Το πρόβλημα αντιμετωπίζεται με την προσταθεροποίηση των εξισώσεων (Turkel, 1987) που αποτελεί και το αντικείμενο της εργασίας αυτής.

Ως λογισμικό αφητηρίας χρησιμοποιείται ένας κώδικας του Εργαστηρίου Θερμικών Στροβιλομηχανών του ΕΜΠ (για δομημένα πλέγματα και ανάντι σχήματα επίλυσης) ο οποίος έχει πολύ γρήγορη σύγκλιση και δίνει αξιόπιστα αποτελέσματα σε συμπιεστές ροές, αλλά σε ροές χαμηλών αριθμών Mach η σύγκλισή του (όταν είναι εφικτή) καθυστερεί πάρα πολύ. Πρόκειται για μια έκδοση του λογισμικού PUMA. Χρησιμοποιεί κεντροκομβική αποθήκευση και τη μέθοδο των πεπερασμένων όγκων. Οι όροι μεταφοράς μοντελοποιούνται λύνοντας μονοδιάστατο πρόβλημα Riemann στις ακμές του πλέγματος, με σχήμα Roe και παρεμβολή μεταβλητών της ροής ώστε να εξασφαλισθεί ακρίβεια δεύτερης τάξης. Για του όρους διάχυσης χρησιμοποιούνται κεντρικές διαφορές, ο χρονικός όρος αναλύεται με σχήμα Euler (για χρονικά μόνιμα προβλήματα), ενώ η αριθμητική επίλυση γίνεται με τη μέθοδο Jacobi.

Η ανάλυση ξεκινά από τις εξισώσεις Navier-Stokes, οι οποίες, σε μητρική μορφή, δίνονται από την σχέση

$$\frac{\partial \vec{W}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{F}}{\partial x} + \frac{\partial \vec{G}}{\partial y} = 0 \quad \text{ή} \quad \frac{\partial \vec{W}}{\partial t} + A_x \frac{\partial \vec{W}}{\partial x} + A_y \frac{\partial \vec{W}}{\partial y} = 0$$

Οι τυρβώδεις ροές που μοντελοποιούνται στη εργασία αυτή χρησιμοποιούν το μοντέλο τύρβης μιας εξίσωσης των Spalart – Allmaras (1992), ένα δηλαδή από τα πολλά μοντέλα τύρβης του λογισμικού PUMA.

Προσταθεροποίηση των εξισώσεων ροής

Η εφαρμογή της προσταθεροποίησης, σε πρώτη φάση, χαρακτηρίζεται από τον πολλαπλασιασμό του χρονικού όρου των εξισώσεων με ένα μητρώο Γ^{-1} :

$$\Gamma^{-1} \frac{\partial \vec{W}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{F}}{\partial x} + \frac{\partial \vec{G}}{\partial y} = 0$$

Είναι φανερό ότι ο πολλαπλασιασμός αυτός δεν επηρεάζει την χρονικά μόνιμη λύση. Το προσταθεροποιημένο σύστημα γράφεται για τις συντηρητικές μεταβλητές $\vec{W} = [\rho \ \rho u \ \rho v \ E_t]^T$ ως

$$\frac{\partial \vec{W}}{\partial t} + \Gamma A_x \frac{\partial \vec{W}}{\partial x} + \Gamma A_y \frac{\partial \vec{W}}{\partial y} = 0$$

ενώ για τις μη-συντηρητικές μεταβλητές $\vec{V} = [\rho \ u \ v \ p]^T$ γράφεται ως

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \bar{\Gamma} \bar{A}_x \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + \bar{\Gamma} \bar{A}_y \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} = 0$$

Στο τελευταίο, είναι ευκολότερη η επίλυση του ιδιοπροβλήματος, το οποίο επίσης επηρεάζεται από την εισαγωγή της προσταθεροποίησης στο σύστημα. Η συσχέτιση των μητρώων $\Gamma, \bar{\Gamma}, A_x, A_y$ κλπ βασίζεται στις γνωστές σχέσεις μετασχηματισμού.

Το μητρώο προδιάθεσης επιλέγεται από τη βιβλιογραφία [Eriksson(1996)] και ορίζεται ως

$$\bar{\Gamma} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1-a}{c^2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}, \quad \text{όπου } a = \min(1, M^2)$$

Πρόκειται για ένα “σχεδόν” διαγώνιο μητρώο, το οποίο για υψηλούς αριθμούς Mach (κοντά στην μονάδα) εκφυλίζεται στο μοναδιαίο μητρώο.

Η παράμετρος a επιλέγεται έτσι ώστε οι νέες ιδιοτιμές του προσταθεροποιημένου συστήματος να είναι της ίδιας τάξης μεγέθους. Οι ιδιοτιμές του πίνακα \bar{A}_T (με $\bar{A}_T = \bar{\Gamma}\bar{A} = \bar{\Gamma}(\bar{A}_x n_x + \bar{A}_y n_y)$) των μη-συντηρητικών μεταβλητών, υπολογίζονται από την σχέση $\det|\lambda I - \bar{A}_T| = 0$, οπότε καταλήγουμε στις νέες ιδιοτιμές

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \bar{v} \cdot \bar{n}$$

$$\lambda_{3,4} = \frac{1}{2} \left\{ (1+a)\bar{v} \cdot \bar{n} \pm \sqrt{[(1-a)\bar{v} \cdot \bar{n}]^2 + 4ac^2 |\bar{n}|^2} \right\}$$

σε αντίθεση με τις ιδιοτιμές του αρχικού συστήματος που είναι οι :

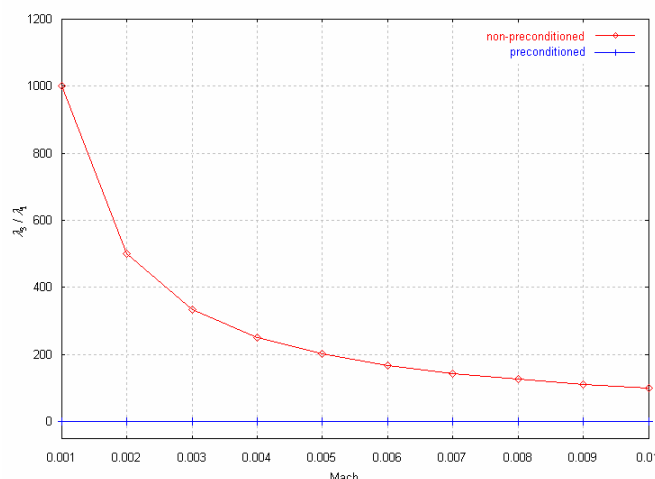
$$\lambda_1 = \lambda_2 = \bar{v} \cdot \bar{n}$$

$$\lambda_{3,4} = \bar{v} \cdot \bar{n} \pm c|\bar{n}|$$

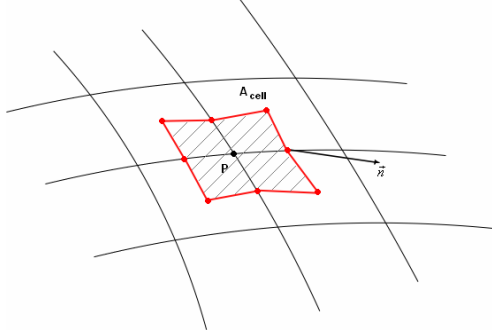
όπου το κάθετο διάνυσμα \bar{n} ορίζεται στα όρια της κάθε κυψέλης ελέγχου, κατά τη διακριτοποίηση των πεπερασμένων όγκων, όπως θα φανεί στη συνέχεια.

Στο σχήμα που ακολουθεί τυπώνουμε το λόγο $\frac{\lambda_3}{\lambda_1}$, τόσο για το κλασικό όσο και για

το προσταθεροποιημένο σύστημα για μια περιοχή αριθμών Mach από 0,01 έως 0,001. Σ' αυτό το σχήμα φαίνεται πόσο πιο συγκεντρωμένες είναι οι ιδιοτιμές του προσταθεροποιημένου συστήματος από το κλασικό, αυτό που επιθυμούσαμε δηλαδή εισάγοντας την προσταθεροποίηση στο σύστημά μας.



Διακριτοποίηση των Εξισώσεων



Η διακριτοποίηση των εξισώσεων ροής (χωρίς προσταθεροποίηση) σε μια κυψέλη ελέγχου, που ορίζεται κεντροκομβικά όπως στο σκαρίφημα, δίνει

$$\iint_A \frac{\partial \vec{W}}{\partial t} dx dy + \iint_A \left(\frac{\partial \vec{F}}{\partial x} + \frac{\partial \vec{G}}{\partial y} \right) dx dy = 0$$

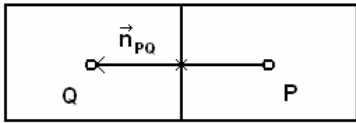
Με εφαρμογή του θεωρήματος Green-Gauss

το επιφανειακό ολοκλήρωμα μετατρέπεται σε επικαμπύλιο $\frac{A_{cell}}{\Delta t} \delta \vec{W}_P + \oint_{\partial A} \hat{H} \cdot dS = 0$,

όπου $\hat{H} = \vec{F} \cdot \hat{n}_x + \vec{G} \cdot \hat{n}_y$ και \hat{n}_x, \hat{n}_y οι συνιστώσες του μοναδιαίου διανύσματος $\vec{n} = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$

Η παραπάνω σχέση γράφεται ως άθροισμα των διανυσμάτων ροής στα όρια της κυψέλης ελέγχου $\frac{A_{cell}}{\Delta t} \delta \vec{W}_P + \sum_{cell\ sides} \vec{\Phi} = 0$, όπου το διάνυσμα ροής υπολογίζεται

επιλύοντας ένα πρόβλημα Riemann μεταξύ δύο γειτονικών κόμβων ενός πλέγματος. Δυνατές σχέσεις για το $\vec{\Phi}$ μεταξύ P και Q είναι :



$$\vec{\Phi}_{PQ} = \frac{1}{2} \left[H(\vec{W}_P, \vec{n}_{PQ}) + H(\vec{W}_Q, \vec{n}_{PQ}) \right] - \frac{1}{2} |A_{PQ}| (\vec{W}_P - \vec{W}_Q)$$

$$\vec{\Phi}_{PQ} = H(\vec{W}_Q, \vec{n}_{PQ}) + A_{PQ}^+ (\vec{W}_P - \vec{W}_Q)$$

$$\vec{\Phi}_{PQ} = H(\vec{W}_P, \vec{n}_{PQ}) - A_{PQ}^- (\vec{W}_P - \vec{W}_Q)$$

Ο αρχικός κώδικας του εργαστηρίου χρησιμοποιούσε τη δεύτερη σχέση για τον ορισμό των διανυσμάτων ροής. Σ' αυτό το σημείο έγινε μια σημαντική – απαραίτητη τροποποίηση ώστε τα διανύσματα ροής να υπολογίζονται πλέον από την πρώτη σχέση. Οι λόγοι που μας οδήγησαν σ' αυτή την αλλαγή σχετίζονται με τις μεθόδους προσταθεροποίησης που απαιτούν παραδοχές κατά τη μαθηματική τους ανάπτυξη. Κρίθηκε προτιμότερο, οι όποιες παραδοχές, να γίνουν στο αρχικό σχήμα υπολογισμού των διανυσμάτων ροής κι όχι σε κάποια από τα επόμενα, τα οποία ουσιαστικά προκύπτουν από το πρώτο.

Για το προσταθεροποιημένο σύστημα, η διακριτοποίηση των εξισώσεων ξεκινά από την $\frac{\partial \vec{W}}{\partial t} + \Gamma \left(\frac{\partial \vec{F}}{\partial x} + \frac{\partial \vec{G}}{\partial y} \right) = 0$. Κατά την ολοκλήρωση στην επιφάνεια ελέγχου

κάνουμε μία βασική παραδοχή διατηρώντας το μητρώο προσταθεροποίησης έξω από το ολοκλήρωμα, ώστε να είναι δυνατή η εφαρμογή του θεωρήματος Green-Gauss

$\iint_A \frac{\partial \vec{W}}{\partial t} dx dy + \Gamma \iint_A \left(\frac{\partial \vec{F}}{\partial x} + \frac{\partial \vec{G}}{\partial y} \right) dx dy = 0$. Τελικά καταλήγουμε σε σχέση της μορφής

$\frac{A_{cell}}{\Delta t} \delta \vec{W}_P + \Gamma_P \sum_{cell\ sides} \vec{\Phi} = 0$ όπου τα διανύσματα ροής είναι τα ίδια με αυτά του μη-

προσταθεροποιημένου συστήματος. Στη συνέχεια, τα διανύσματα ροής τροποποιούνται κατάλληλα ώστε γίνουν συμβατά με το προσταθεροποιημένο

σύστημα, Weiss & Smith (1995). Η τροποποίηση συνίσταται στον πολλαπλασιασμό με το μοναδιαίο μητρώο $\Gamma^{-1} \Gamma$ ως εξής : $\frac{A_{cell}}{\Delta t} \delta \vec{W}_P + \Gamma_P \sum_{cell\ sides} (\Gamma^{-1} \Gamma \vec{\Phi}) = 0$

Για το προσταθεροποιημένο σύστημα οι κομβικές τιμές $H(\vec{W}_Q, \vec{n}_{PQ})$, $H(\vec{W}_P, \vec{n}_{PQ})$ παραμένουν ως έχουν, ενώ ο τελευταίος όρος του δεξιού μέλους ξαναγράφεται ως εξής : $|A_{PQ}| \Delta W_{PQ} = |\Gamma_{PQ}^{-1} \Gamma_{PQ} A_{PQ}| \Delta W_{PQ} \approx \Gamma_{PQ}^{-1} |\Gamma_{PQ} A_{PQ}| \Delta W_{PQ} \approx \Gamma_{PQ}^{-1} |A_{\Gamma(PQ)}| \Delta W_{PQ}$

Οπότε το νέο διάνυσμα ροής θα είναι :

$$\Phi_{PQ} = \frac{1}{2} [H(\vec{W}_P, \vec{n}_{PQ}) + H(\vec{W}_Q, \vec{n}_{PQ})] - \frac{1}{2} \Gamma_{PQ}^{-1} |A_{\Gamma(PQ)}| (\vec{W}_P - \vec{W}_Q)$$

Τελικά η πεπλεγμένη έκφραση των ολοκληρωμένων εξισώσεων τις σχέσης είναι:

$$\frac{A_{cell}}{\Delta t} \delta \vec{W}_P - \Gamma_P \sum_{cell\ sides} \vec{\Phi}_{PQ}^{n+1} = 0 \quad \text{ή}$$

$$\left[\frac{A_{cell}}{\Delta t} - \frac{1}{2} \Gamma_P \sum_{cell\ sides} (A_P - \Gamma_{PQ}^{-1} |A_{\Gamma(PQ)}|) \right] \delta \vec{W}_P - \frac{1}{2} \Gamma_P \sum_{cell\ sides} \left[(A_Q - \Gamma_{PQ}^{-1} |A_{\Gamma(PQ)}|) \delta \vec{W}_Q \right] = \Gamma_P \sum_{cell\ sides} \vec{\Phi}_{PQ}^n$$

Τελευταία ενέργεια, είναι η προσαρμογή του χρονικού βήματος το οποίο πρέπει να αλλαχθεί καθώς οι νέες, μειωμένες ιδιοτιμές επιτρέπουν την επιβολή ενός σημαντικά μεγαλύτερου χρονικού βήματος. Έτσι, σε κάθε κόμβο υπολογίζεται το τοπικό βήμα, εφαρμόζοντας τοπικά ένα κριτήριο ευστάθειας (κριτήριο CFL).

Υπενθυμίζεται ότι το χρονικό βήμα του αρχικού συστήματος είναι : $\Delta t = \frac{CFL \cdot \Delta x}{|\vec{v}| + c}$

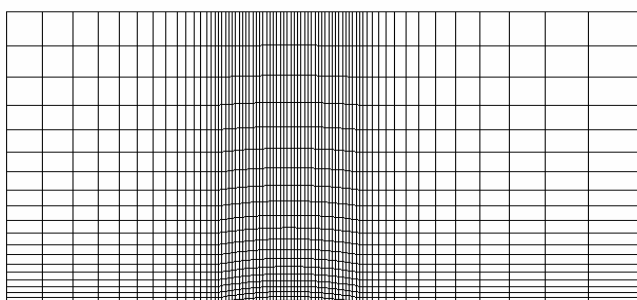
ενώ το νέο χρονικό βήμα δίνεται από τη σχέση :

$$\Delta t = \frac{CFL \cdot \Delta x}{\frac{1}{2} (1+a) |\vec{v}| + \sqrt{\frac{1}{4} (1-a)^2 |\vec{v}|^2 + ac^2 |\vec{n}|}}$$

Οι οριακές συνθήκες τροποποιούνται αντίστοιχα και η επίλυση του συστήματος γίνεται με τη σημειακά πεπλεγμένη μέθοδο Jacobi.

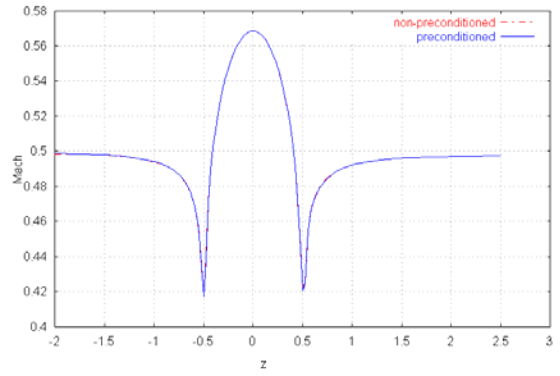
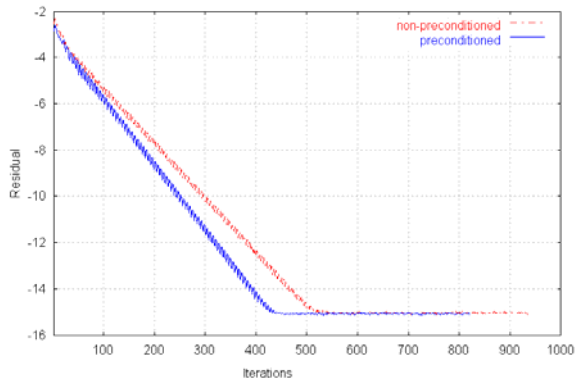
Εφαρμογές

Οι μέθοδος εφαρμόστηκε σε διδιάστατα αγωγούς και σε πτερυγώσεις στροβιλομηχανών. Η πρώτη περίπτωση που μελετήθηκε είναι αυτή της ροής σε έναν αγωγό με διαμόρφωση στο κάτω τοίχωμα. Η ροή μελετήθηκε για μηδενική γωνία εισόδου της ροής και $M_{2,is} = 0.5, 0.1, 0.03$. Στα σχήματα που ακολουθούν φαίνονται τα συγκριτικά διαγράμματα σύγκλισης καθώς και η κατανομή της πίεσης στο κάτω τοίχωμα του αγωγού. Όσο μειώνεται ο $M_{2,is}$ η επίδραση της προδιάθεσης γίνεται όλο και πιο αισθητή από το σύστημα, ενώ οι διαταραχές πίεσης που εμφανίζονται στα σημεία αρχής και τέλους της διαμόρφωσης, κατά την επίλυση του μη-προσταθεροποιημένου συστήματος, ομαλοποιούνται στην περίπτωση επίλυσης του προσταθεροποιημένου συστήματος.

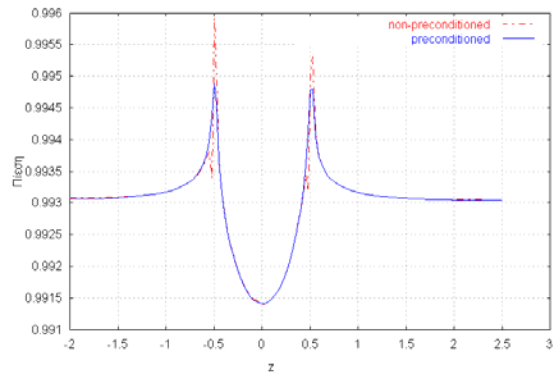
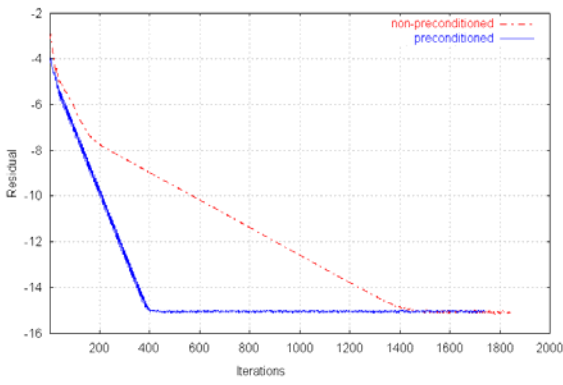


Διδιάστατο δομημένο πλέγμα (72x41), Ατριβής ροή
Γωνία εισόδου της ροής 0°
Μελέτη ροής για $M_{2,is} = 0.5, 0.1, 0.03$

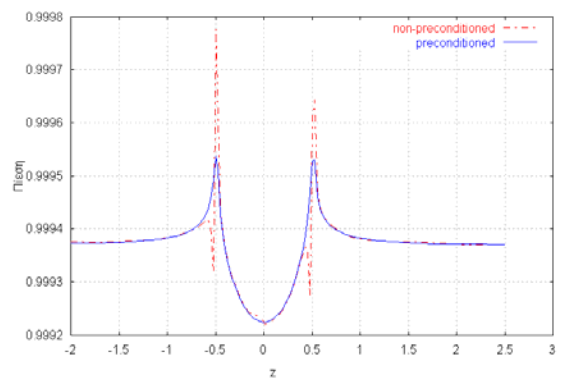
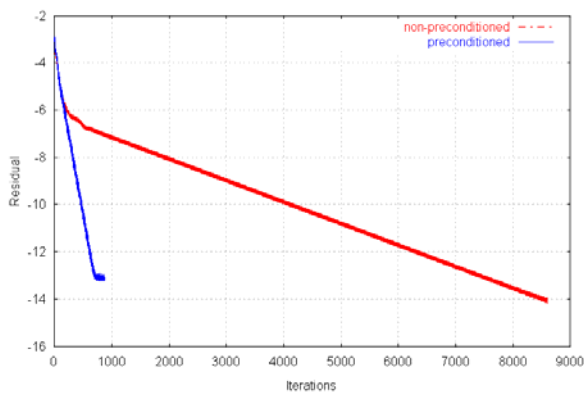
$M_{2,is} = 0.5$



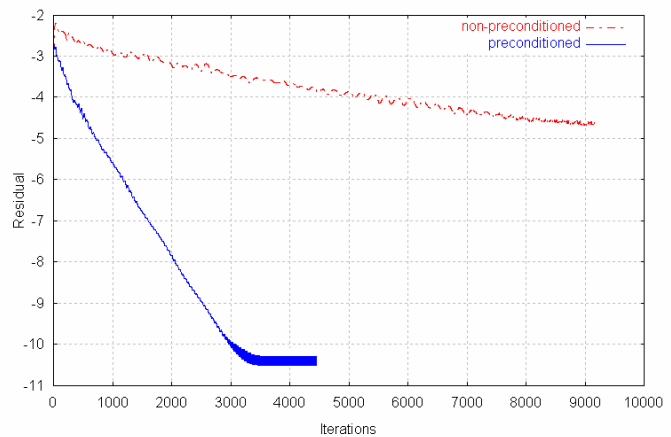
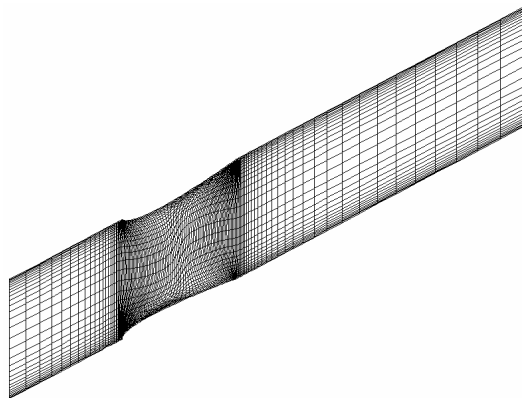
$M_{2,is} = 0.1$



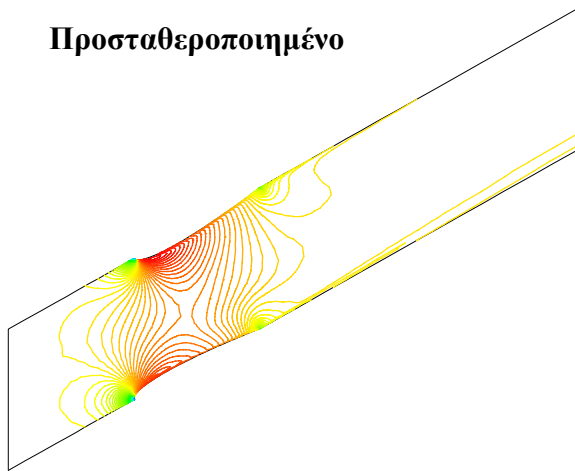
$M_{2,is} = 0.03$



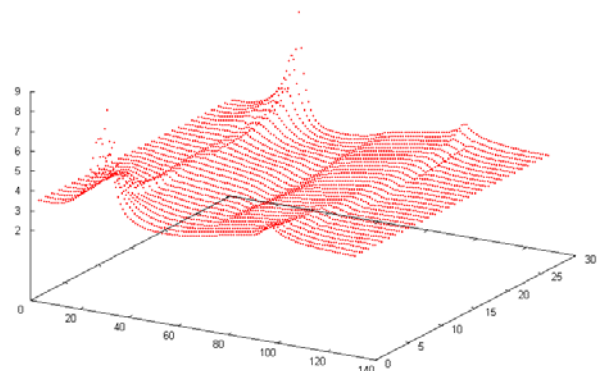
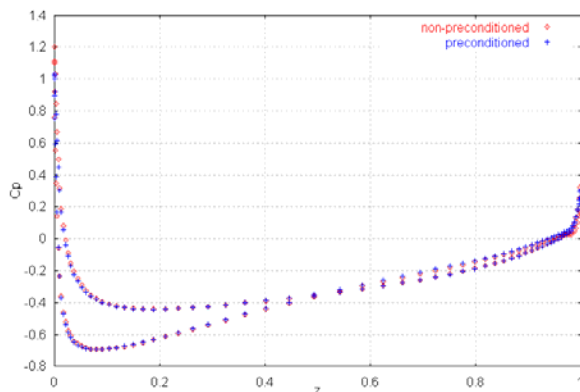
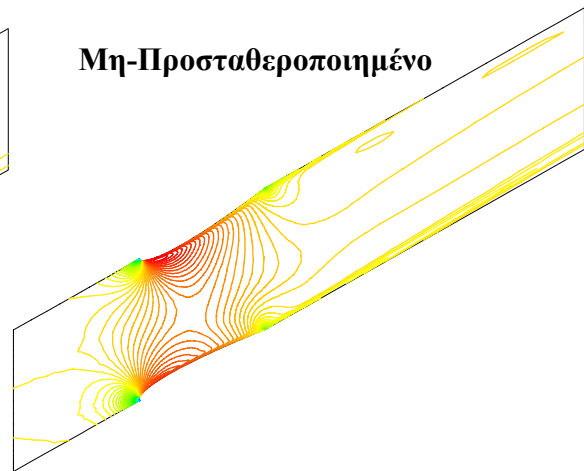
Επόμενη περίπτωση που μελετήθηκε αφορά την ροή σε περύγωση συμπιεστή με αεροτομές μορφής NACA 12, γωνία κλίσης 30° και μοναδιαία στερεότητα. Πρόκειται για μια περίπτωση που αρχικά μελετήθηκε από τον Rosenfeld (1984). Για γωνία εισόδου 0° (ή γωνία ροής 30°) και $M_{2,is}=0.3$ βλέπουμε ότι το προσταθεροποιημένο σύστημα συγκλίνει ταχύτερα από το μη-προσταθεροποιημένο. Οι λύσεις των δύο συστημάτων είναι όμοιες πράγμα που επιβεβαιώνεται κι από την κατανομή του συντελεστή πίεσης στο περύγιο. Στην τελευταία εικόνα φαίνεται η κατανομή του λόγου των ιδιοτιμών του μη-προσταθεροποιημένου συστήματος προς αυτές του προσταθεροποιημένου. Είναι φανερή η επίδραση της προσταθεροποίησης και το πόσο πιο συγκεντρωμένες είναι οι ιδιοτιμές (έως και 9 φορές μικρότερες από τις αντίστοιχες του μη-προσταθεροποιημένου συστήματος).



Προσταθεροποιημένο

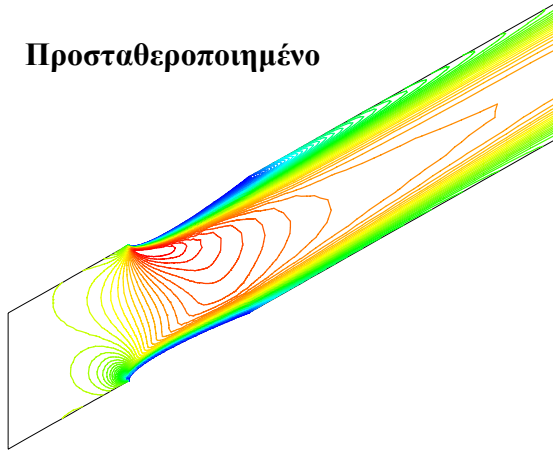


Μη-Προσταθεροποιημένο

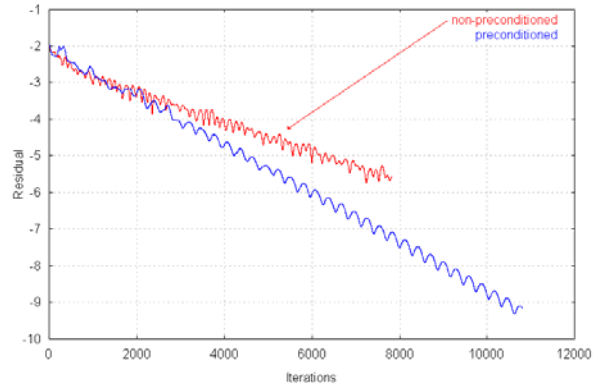
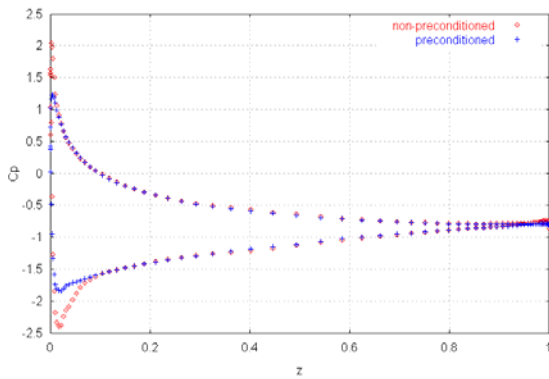
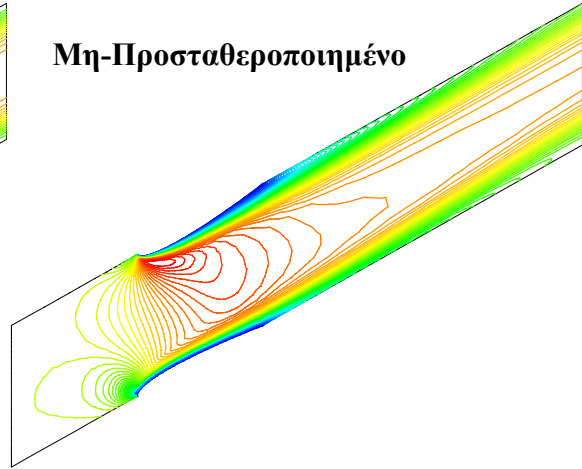


Επίσης, για την ίδια περύγωση, μελετήθηκε η στρωτή ροή με $Re = 2000$, για γωνία εισόδου 20° και $M_{2,is}=0.2$. Ακολουθούν σχετικά σχήματα, όπου και πάλι φαίνεται καθαρά η υπεροχή του προσταθεροποιημένου επιλύτη ως προς το ρυθμό σύγκλισης.

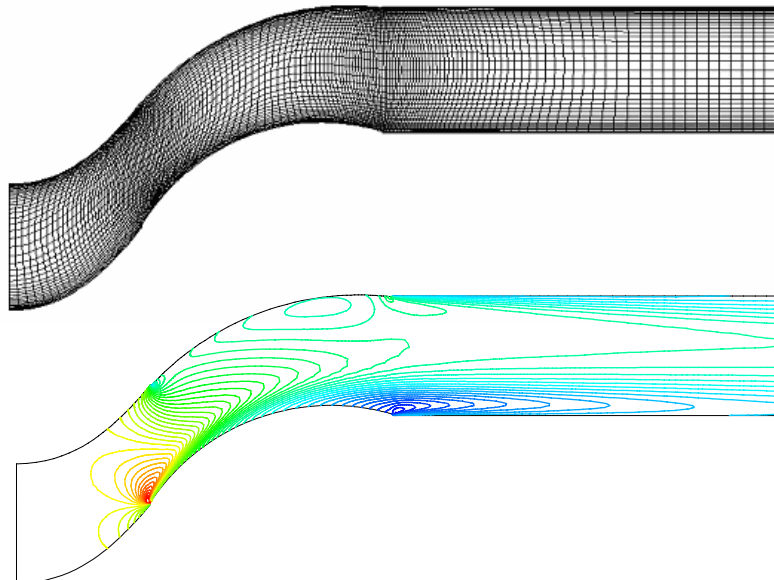
Προσταθεροποιημένο

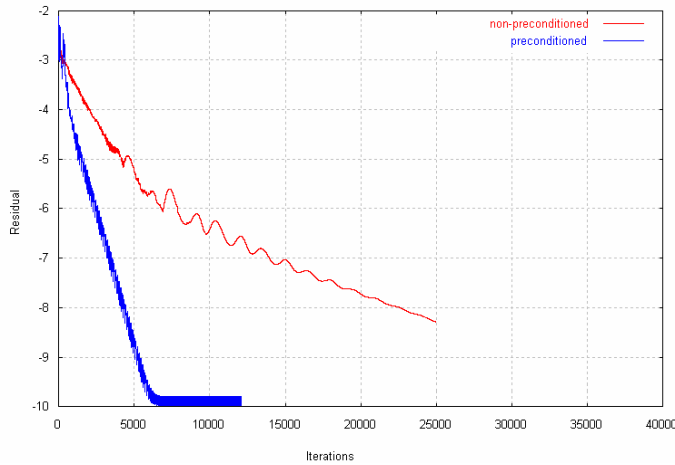


Μη-Προσταθεροποιημένο



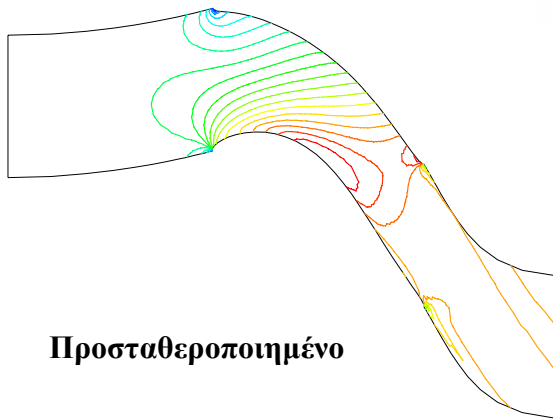
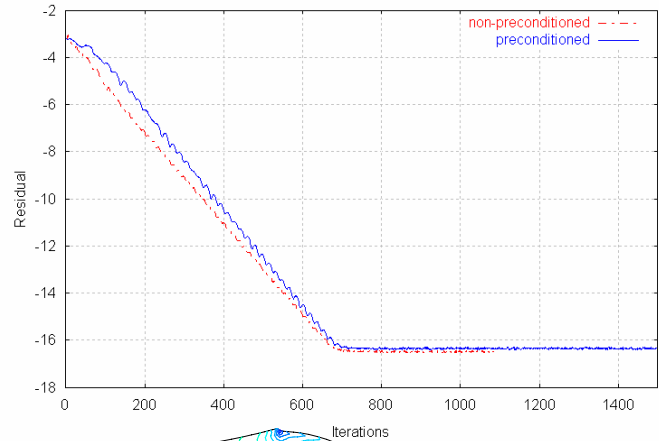
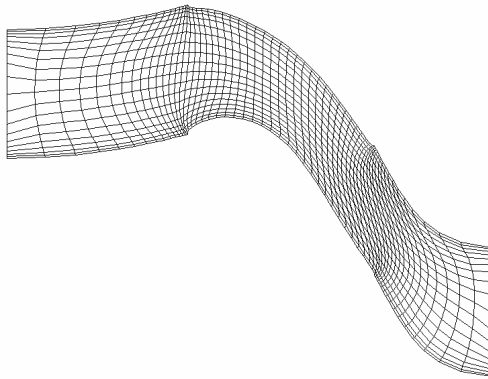
Ως περίπτωση τυρβώδους ροής μελετήθηκε η ροή σε περύγωση αξονικού συμπίεστη με γωνία εισόδου της ροής 58° , $M_{2,is} = 0.2$ και $Re = 10000$, με χρήση του μοντέλου τύρβης των Spalart-Allmaras. Πρόκειται για την περύγωση που αρχικά μελετήθηκε από τον Zierke (1987).



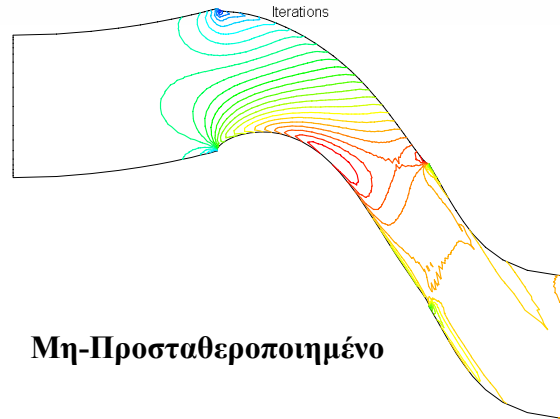


Στα σχήματα που παρουσιάζονται βλέπουμε την κατανομή του αριθμού Mach του προσταθεροποιημένου συστήματος καθώς και το συγκριτικό διάγραμμα σύγκλισης όπου μετά από 25000 επαναλήψεις το μη-προσταθεροποιημένο σύστημα των εξισώσεων δεν έχει συγκλίνει ακόμα σε αντίθεση με το προσταθεροποιημένο σύστημα.

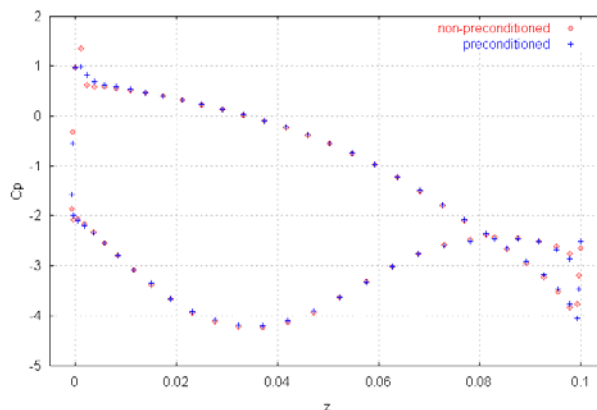
Τελευταία περίπτωση που μελετήθηκε αφορά την ατριβή ροή σε μια περύγωση στροβίλου. Συγκεκριμένα για γωνία εισόδου $19,3^\circ$ και $M_{2,is}=0.5$ τα δύο συστήματα έχουν ταυτόχρονη σύγκλιση και όμοιες λύσεις, όπως φαίνεται και στα σχήματα που ακολουθούν.



Προσταθεροποιημένο



Μη-Προσταθεροποιημένο



Συμπεράσματα

Σ' αυτήν τη Διπλωματική Εργασία παρουσιάστηκε μία μέθοδος προδιάθεσης για την επίλυση ροών σε χαμηλούς αριθμούς Mach. Με αφετηρία έναν κώδικα συμπιεστών ροών του ΕΘΣ, μετά από την απαραίτητη προεργασία και το κυριότερο, αρκετές προγραμματιστικές παρεμβάσεις, δημιουργήθηκε ένας κώδικας ικανός να ανταποκριθεί σε κάθε κατηγορία ροής (συμπιεστή και ασυμπιεστή) με την ίδια ακρίβεια και το βασικότερο, όσον αφορά στις ασυμπιεστές ροές, με συντριπτικά μικρότερο υπολογιστικό κόστος και, συχνά, ευστάθεια που δεν συναντάται στις κλασικές διατυπώσεις των μεθόδων χρονο-προέλασης.

Παρά το γεγονός, ότι η μελέτη έγινε σε διδιάστατα, δομημένα πλέγματα, η επέκταση της μεθόδου σε τριδιάστατες ροές και μη δομημένα πλέγματα είναι άμεση καθώς η επίλυση των εξισώσεων, (άσχετα με το αν αναφερόμαστε σε διδιάστατες ή τριδιάστατες ροές, δομημένα ή μη δομημένα πλέγματα) γίνεται στις ακμές του πλέγματος με προσεγγιστικούς επιλύτες Riemann. Επίσης είναι προφανές ότι ένας κώδικας με μεθόδους προδιάθεσης μπορεί να γίνει εύκολα παράλληλος, αν ο βασικός-αρχικός κώδικας είναι σχεδιασμένος για παράλληλη επεξεργασία.

Τέλος, ενδιαφέρουσα επέκταση, αλλά ταυτόχρονα και μεγάλη πρόκληση, είναι η διερεύνηση άλλων μητρώων προσταθεροποίησης και η σύγκριση αποτελεσμάτων μεταξύ προσταθεροποιημένων συστημάτων, για διαφορετικά μητρώα προδιάθεσης. Αυτή η σύγκριση απαιτεί επιπλέον “προετοιμασία στο χαρτί” και προγραμματισμό που όμως μπορούν πλέον να ενταχθούν άμεσα στην αλγοριθμική δομή – κώδικα που είναι το αποτέλεσμα της εργασίας αυτής.

Βιβλιογραφικές αναφορές

- [1] Eriksson Lars-Erik, “A preconditioned Navier-Stokes Solver for Low Mach Number Flows”, Computational Fluid Dynamics, 1996.
- [2] Rosenfeld M. and Wolfshtein M. , “Numerical Calculation of Laminar Two-Dimensional Straight Cascade Flow”, Computers & Fluids, Vol. 12, pp. 293-310, 1984.
- [3] Spalart P. R. and Allmaras S. R., “A One-Equation Turbulence Model For Aerodynamic Flows”, AIAA, Paper 92-0439, 1992.
- [4] Turkel E., “Preconditioned Methods for Solving the Incompressible and Low Speed Compressible Equations”, Journal of Computation Physics, Vol. 72, No. 2, pp. 277-298, 1987.
- [5] Weiss J.M., Smith W.A., “Preconditioned Applied to Variable and Constant Density Flows”, AIAA, Vol. 33, No.11, Paper 94-2209, 1995.
- [6] Zierke C.W. and Deutsch S., “The Measurement of Boundary Layers on a Compressor Blade in Cascade. Part I : A Unique Experimental Facility”, ASME, 1987.
- [7] Πολίτης Σ. Ευάγγελος, “Ανάπτυξη Μεθόδου Επίλυσης των Εξισώσεων Navier-Stokes για την Ανάλυση της Ροής σε Πτερυγώσεις Στροβιλομηχανών με ή χωρίς Ακτινικό Διάκενο”, Διδακτορική διατριβή, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών, Αθήνα 1998