



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο  
Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών  
Τομέας Ρευστών  
Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών  
Μονάδα Παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής  
& Βελτιστοποίησης

Αεροδυναμική Βελτιστοποίηση Χρονικά μη-Μόνιμων  
ροών με τη Συνεχή Συζυγή Μέθοδο και Πρότυπα  
Μειωμένης Τάξης.

Διπλωματική Εργασία

**ΑΛΕΞΙΑΣ ΠΑΥΛΟΣ**

Επιβλέπων: Κυριάκος Χ. Γιαννάκογλου , Καθηγητής ΕΜΠ

Αθήνα, 2015





Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο  
Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών  
Τομέας Ρευστών  
Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών  
Μονάδα Παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής  
& Βελτιστοποίησης

## Αεροδυναμική Βελτιστοποίηση Χρονικά μη-Μόνιμων ροών με τη Συνεχή Συζυγή Μέθοδο και Πρότυπα Μειωμένης Τάξης.

Διπλωματική Εργασία

**ΑΛΕΞΙΑΣ ΠΑΥΛΟΣ**

Επιβλέπων: Κυριάκος Χ. Γιαννάκογλου, Καθηγητής ΕΜΠ

Αθήνα, 2015

### Περίληψη

Η παρούσα διπλωματική εργασία πραγματεύεται τη δημιουργία, εφαρμογή και αξιολόγηση ενός αποδοτικού τρόπου αεροδυναμικής βελτιστοποίησης, μέσω συνεχών συζυγών (continuous adjoint) τεχνικών, σε χρονικά μη-μόνιμες ροές. Συγκεκριμένα, εξετάζεται η χρήση μιας προσεγγιστικής μεθόδου βασισμένης σε Πρότυπα Μειωμένης Τάξης (Reduce Order Models), για την αποθήκευση των χρονικά μεταβαλλόμενων μεγεθών (ταχύτητα, πίεση, κλπ), που προκύπτουν από την επίλυση μιας μη-μόνιμης ροής. Η προσεγγιστική αποθήκευση των μεταβλητών γίνεται μέσω της μεθόδου της Κύριας Ορθογωνικής Ανάλυσης (POD) και είναι απαραίτητη για την επίλυση των συζυγών εξισώσεων, στις οποίες η προέλαση στο χρόνο γίνεται με αντίθετη κατεύθυνση.

Στην παρούσα εργασία, γίνεται σύγκριση των λύσεων που προκύπτουν με χρήση του POD, σε σχέση με μια ακριβή μέθοδο, όπως η μέθοδος Δυναμικής Κατανομής Σημείων Ελέγχου (Binomial Check-pointing), με βάση την ακρίβεια και το υπολογιστικό κόστος. Επίσης εφαρμόζεται η συνεχής συζυγής μέθοδος βελτιστοποίησης, σε συνδυασμό με τη μέθοδο POD, για τον έλεγχο μη-μόνιμων ροών με δέσμες έγχυσης/αναρρόφησης ρευστού, με σκοπό την ελαχιστοποίηση του συντελεστή αντίστασης. Η εφαρμογή γίνεται αρχικά σε ένα τετραγωνικό πρίσμα, στον ομόρροου του οποίου σχηματίζονται στρόβιλοι von Karman και, στη συνέχεια, σε μια μεμονωμένη αεροτομή στην οποία μεταβάλλεται η γωνία πρόσπτωσης της επίπειρον ροής συναρτήσει του χρόνου.





**National Technical University of Athens**  
**School of Mechanical Engineering**  
**Fluids Section**  
**Laboratory of Thermal Turbomachines**  
**Parallel CFD & Optimization Unit**

## **Continuous Adjoint-based Optimization in Unsteady Aerodynamics, using Reduced Order Models.**

Diploma Thesis

**ALEXIAS PAVLOS**

Supervisor: Kyriakos C. Giannakoglou, Professor NTUA  
Athens, 2015

### **Abstract**

This diploma thesis aims at creating, applying and evaluating an efficient way to cope with adjoint-based optimization methods in unsteady aerodynamic problems. An approximate method, based on Reduced Order Models (ROMs), for storing the time-varying results (velocity, pressure, etc), derived from an unsteady flow solver, is devised. The approximate storage of the flow variables is achieved through the Proper Orthogonal Decomposition (POD) method and this supports the numerical solution of the unsteady adjoint equations, marching backwards in time.

In this diploma thesis, the solutions obtained with the POD method are compared to those of an exact method, such as Binomial Check-pointing, in terms of accuracy and computational cost. The continuous adjoint method, alongside with the POD, are adapted to the optimization of flow control problems using pulsating jets, in order to minimize the drag coefficient. The first test case is related with the generation of von Karman vortices in the wake of a square prism, whereas the second one is about the flow control around an isolated airfoil with a time-varying infinite flow angle.

## Ευχαριστίες

Από την παρούσα θέση, θέλω να ευχαριστήσω τους ανθρώπους που συνέβαλλαν, στην ολοκλήρωση της διπλωματικής μου εργασίας, αλλά και στην ολοκλήρωση των προπτυχιακών σπουδών μου στο ΕΜΠ. Πρωτίστως, θέλω να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή μου, κ. Κυριάκο Γιαννάκογλου, για την ευκαιρία που μου έδωσε να ασχοληθώ με αυτό το πρωτότυπο, ενδιαφέρον και σύγχρονο θέμα. Επίσης, τον ευχαριστώ για το χρόνο που αφιέρωσε καθώς και για τις σημαντικές του συμβουλές και διορθώσεις. Επίσης, θέλω να ευχαριστήσω ιδιαίτερος τον υποψήφιο διδάκτορα Χρήστο Βεζύρη, για τη βοήθεια που μου παρείχε καθ' όλη τη διάρκεια εκπόνησης της διπλωματικής μου εργασίας καθώς και όλα τα μέλη της ερευνητικής ομάδας της Μονάδας Παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής & Βελτιστοποίησης, για την προθυμία τους να επιλύσουν οποιαδήποτε απορία. Επιπρόσθετα, θέλω να ευχαριστήσω την οικογένεια μου, για την στήριξη και την υπομονή που έδειξε σε όλα τα χρόνια της φοίτησής μου. Ενώ τέλος, θέλω να ευχαριστήσω όλους τους φίλους μου και κυρίως τους συμφοιτητές μου Η.Βασιλόπουλο και Σ.Κατσανούλη για την συμπαράστασή τους.

*Αυτά πού θα στα δώσει ο Αρταξέρξης,  
αυτά πού θα τα βρείς στη σατραπεία·  
και τι ζωή χωρίς αυτά θα κάμεις.  
Κ.Π. Καβάφης*





## Ακρωνύμια

ΕΜΠ	Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
ΕΘΣ	Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών
ΜΠΤΡ&Β	Μονάδα Παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής & Βελτιστοποίησης
ΥΡΔ	Υπολογιστική Ρευστοδυναμική

---

CFD	Computational Fluid Dynamics
NTUA	National Technical University of Athens
PCopt	Parallel CFD & Optimization Unit
ROM	Reduced Order Models
POD	Proper Orthogonal Decomposition
SVD	Singular Value Decomposition



# Περιεχόμενα

Περιεχόμενα	xī
<b>1 Εισαγωγή</b>	<b>1</b>
1.1 Μη-μόνιμες Ροές . . . . .	1
1.1.1 Στρόβιλοι von Karman . . . . .	2
1.2 Έλεγχος της ροής . . . . .	3
1.3 Στόχος και Δομή της Διπλωματικής Εργασίας . . . . .	6
<b>2 Η Συνεχής Συζυγής Μέθοδος για Μη-Μόνιμη Ασυμπίεστη ροή</b>	<b>9</b>
2.1 Οι εξισώσεις της ροής . . . . .	10
2.2 Αντικειμενική Συνάρτηση . . . . .	11
2.3 Συζυγείς Πεδιακές Εξισώσεις . . . . .	13
2.4 Συζυγείς Οριακές Συνθήκες . . . . .	16
2.5 Παράγωγοι Ευαισθησίας . . . . .	19
2.6 Επίλυση Εξισώσεων . . . . .	19
<b>3 Πρότυπα Μειωμένης Τάξης</b>	<b>23</b>
3.1 Η έννοια της Προβολής . . . . .	24
3.2 Κύρια Ορθογωνική Ανάλυση . . . . .	26
3.3 Ανάλυση Ιδιόμορφων Τιμών . . . . .	29
3.4 Επαυξητικό (Incremental) SVD . . . . .	32
<b>4 Αλγόριθμος Βελτιστοποίησης και Ανάπτυξη Υπολογιστικού Κώδικα στο OpenFOAM</b>	<b>35</b>

4.1	Το λογισμικό OpenFOAM . . . . .	35
4.2	Επίλυση της ροής . . . . .	36
4.3	Αλγόριθμος Βελτιστοποίησης . . . . .	38
<b>5</b>	<b>Ροή γύρω από Τετραγωνικό Πρίσμα</b>	<b>41</b>
5.1	Περιγραφή του προβλήματος . . . . .	41
5.2	Αποτελέσματα . . . . .	41
5.2.1	Έλεγχος της Ροής . . . . .	52
<b>6</b>	<b>Ροή γύρω από Μεμονωμένη Αεροτομή</b>	<b>59</b>
6.1	Περιγραφή του προβλήματος . . . . .	59
6.2	Αποτελέσματα . . . . .	61
6.2.1	Βελτιστοποίηση Μόνιμης Ροής . . . . .	62
6.2.2	Βελτιστοποίηση Μη-Μόνιμης Ροής . . . . .	71
<b>7</b>	<b>Ανακεφαλαίωση-Συμπεράσματα</b>	<b>83</b>
	<b>Βιβλιογραφία</b>	<b>85</b>

# Κεφάλαιο 1

## Εισαγωγή

### 1.1 Μη-μόνιμες Ροές

Ως μη-μόνιμη (Unsteady) ή μεταβατική (Transient), θεωρείται η ροή στην οποία τα χαρακτηριστικά μεγέθη της (πίεση, ταχύτητα, πυκνότητα, κλπ), σε μια συγκεκριμένη θέση, μεταβάλλονται ως συνάρτηση του χρόνου. Το αν μια ροή είναι μόνιμη ή μη-μόνιμη μπορεί να εξαρτάται από το πλαίσιο αναφοράς στο οποίο κανείς την εξετάζει. Για παράδειγμα μια στρωτή ροή γύρω από κύλινδρο μπορεί να θεωρηθεί μόνιμη σε ένα πλαίσιο αναφοράς κοντά και γύρω από τον κύλινδρο χωρίς να ληφθεί υπόψη ο ομόρρους. Με βάση τον ορισμό της μη-μονιμότητας, οι τυρβώδεις ροές, εξαιτίας των χρονικά μεταβαλλόμενων διαταραχών των ροϊκών μεγεθών τους θεωρούνται μη-μόνιμες, εντούτοις όμως οι τυρβώδεις ροές μπορούν να θεωρηθούν στατιστικά σταθερές ( statistically stationary) στο χρόνο. Ένα μέγεθος ορίζεται ως στατιστικά σταθερό όταν τα στατιστικά μεγέθη του (μέση τιμή, τυπική απόκλιση) παραμένουν αναλλοίωτα στο χρόνο.

Μη-μόνιμες ροές μπορούν να δημιουργηθούν είτε μεταβάλλοντας τις οριακές συνθήκες (π.χ αλλαγή της γωνίας πρόσπτωσης σε μια αεροτομή), είτε από την ίδια τη φυσική του φαινομένου (π.χ έκλυση στροβίλων von Karman), είτε και από την ύπαρξη κινουμένων ορίων (λ.χ μια παλλόμενη αεροτομή), όπου η μεταβολή της γεωμετρίας προκαλεί χρονική μη-μονιμότητα. Όταν μελετάται η ροή γύρω από ένα σώμα, η μη-μονιμότητα είναι συχνά συνδεδεμένη με την έκλυση στροβίλων στον

ομόρρου (wake) του σώματος (θεώρημα διατήρησης κυκλοφορίας Kelvin) [34] [35] [36].

### 1.1.1 Στρόβιλοι von Karman

Ο αριθμός Reynolds μιας ροής ορίζεται ως :

$$Re = \frac{U_0 x}{\nu} \quad (1.1)$$

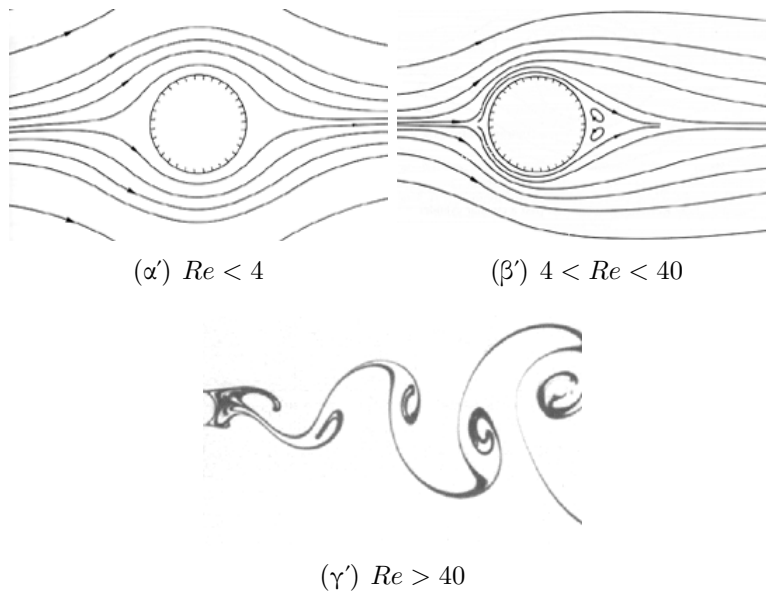
όπου  $U_0$  είναι το μέτρο της επ' άπειρον ταχύτητας,  $\nu$  η κινηματική συνεκτικότητα του ρευστού και  $x$  ένα χαρακτηριστικό μήκος (π.χ σε ροή γύρω από κύλινδρο,  $x$  είναι η διάμετρος του κυλίνδρου). Για συγκεκριμένους αριθμούς Reynolds σε ροές γύρω από σώματα εμφανίζεται το φαινόμενο της περιοδικής δημιουργίας εναλλασσόμενων στροβίλων στον ομόρρου. Οι στρόβιλοι αυτοί είναι ίδιας έντασης και αντίθετης φοράς με αποτέλεσμα να ασκούνται στο σώμα δυνάμεις σε αντίθετες κατευθύνσεις οδηγώντας το σε ταλάντωση.

Πιο συγκεκριμένα, στην περίπτωση ροής γύρω από κύλινδρο [32],

- Για  $Re < 4$  η ροή παραμένει προσκολλημένη.
- Για  $4 < Re < 40$  δημιουργούνται δύο περιοχές ανακυκλοφορίας πίσω από τον κύλινδρο οι οποίες ταλαντώνονται.
- Ενώ όταν ο  $Re$  ξεπεράσει το 40 οι περιοχές αυτές αποκολλώνται και δημιουργούν εναλλασσόμενους στροβίλους.
- Τέλος, για  $Re > 400$  λόγω εμφάνισης τύρβης οι στρόβιλοι καταστρέφονται.

Οι μορφές των πεδίων ροής για καθεμία περίπτωση φαίνονται στο σχήμα 1.1.

Το φαινόμενο της έκλυσης στροβίλων von Karman εμφανίζεται και σε μεγαλύτερες κλίμακες, όπως στον ομόρρου ψηλών κτιρίων, στους ωκεανούς γύρω από νησιά αλλά και στην ατμόσφαιρα. Στο σχήμα 1.2 φαίνεται ο σχηματισμός στροβίλων γύρω από δύο νησιά του Ειρηνικού [37]. Η συχνότητα με την οποία παράγονται οι στρόβιλοι είναι πολύ σημαντικό μέγεθος όσον αφορά τις κατασκευές, καθώς πρέπει να αποφευχθεί ταύτιση της συχνότητας παραγωγής στροβίλων με κάποια από τις κύριες ιδιοσυχνότητες της κατασκευής. Μια αδιάστατη μορφή της συχνότητας παραγωγής στροβίλων είναι ο



**Σχήμα 1.1:** Πεδία ροής γύρω από κύλινδρο για διάφορους αριθμούς Reynolds και σχηματισμός στροβίλων von Kármán [32].

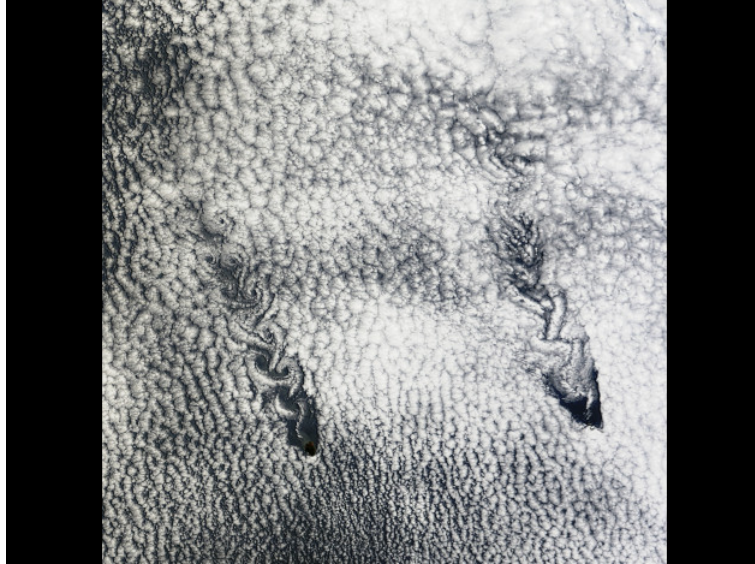
αριθμός Strouhal ο οποίος ορίζεται ως :

$$St = \frac{fL}{U_0} \quad (1.2)$$

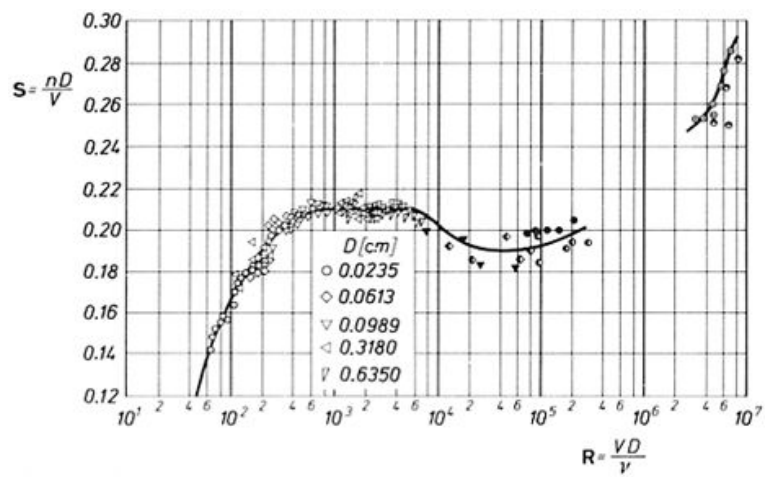
όπου  $f$  η συχνότητα έκλυσης δινών,  $L$  ένα χαρακτηριστικό μήκος και  $U_0$  η ταχύτητα της επί άπειρον ροής. Μέσω πειραμάτων έχει γίνει συσχέτιση του αριθμού Strouhal με τον αριθμό Reynolds, η οποία παρουσιάζεται στο σχήμα 1.3. Με βάση τα παραπάνω, είναι επιθυμητός ο έλεγχος της ροής γύρω από ένα σώμα, τόσο για την αποφυγή ταλαντώσεων, όσο και για την βελτίωση των αεροδυναμικών χαρακτηριστικών (π.χ μείωση του συντελεστή αντίστασης).

## 1.2 Έλεγχος της ροής

Ένας τρόπος με τον οποίο μπορεί να γίνει έλεγχος της ροής είναι με τη χρήση δεσμών έγχυσης και αναρρόφησης ρευστού (wall jets). Πιο συγκεκριμένα, οι δέσμες έγχυσης/αναρρόφησης ρευστού είναι ένας ενεργητικός τρόπος ελέγχου, με την έννοια ότι η ενέργεια που προσφέρεται στο ρευστό προέρχεται από εξωτερική πηγή. Η έγχυση και η αναρρόφηση επιτυγχάνεται με την τοποθέτηση σχισμών κατά μήκος

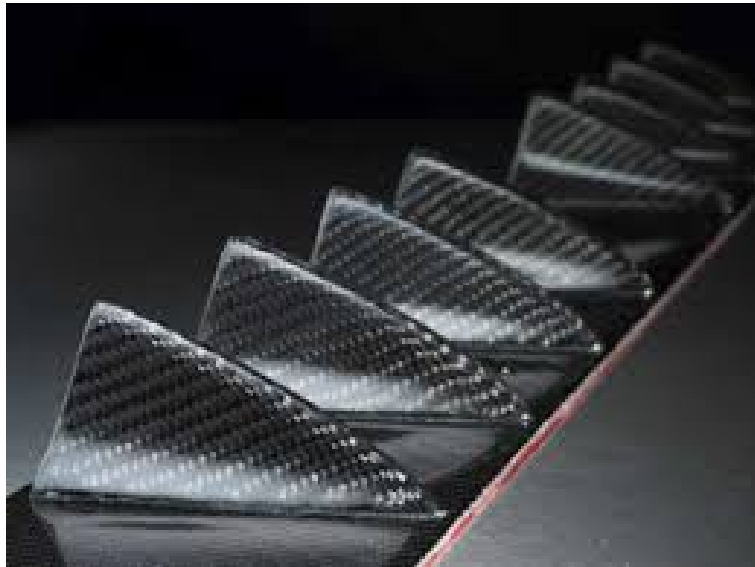


Σχήμα 1.2: Σχηματισμός στροβίλων von Karman γύρω από νησιά του Ειρηνικού [37].



Σχήμα 1.3: Συσχέτιση του αριθμού Strouhal με τον αριθμό Reynolds [32].





**Σχήμα 1.4:** Οι γεννήτριες στροβιλότητας (*vortex generators*) ως συστήματα παθητικού ελέγχου [38].

ενός σώματος που σκοπό έχουν τη βελτίωση της αεροδυναμικής του συμπεριφοράς. Μέσω της έγχυσης ρευστού προσδίδεται ενέργεια στο οριακό στρώμα αποτρέποντας την αποκόλληση και, ταυτόχρονα, μειώνεται ο συντελεστής αντίστασης. Ενώ, με κατάλληλο συνδυασμό έγχυσης και αναρρόφησης ρευστού, δημιουργούνται στρόβιλοι αντίθετης φοράς από αυτούς που δημιουργούνται στον ομόρροου και τους καταστρέφουν.

Στον αντίποδα του ενεργητικού ελέγχου, είναι ο παθητικός έλεγχος, ο οποίος επιτυγχάνεται με αλλαγές στη γεωμετρία του σώματος, οι οποίες μεταβάλλουν την κλίση της πίεσης ή οδηγούν τη ροή από στρωτή σε τυρβώδη. Τέτοιες διατάξεις παθητικού ελέγχου είναι οι γεννήτριες στροβιλότητας (*vortex generators*) [38], οι οποίες φαίνονται και στο σχήμα 1.4. Στην παρούσα διπλωματική εργασία, για τον έλεγχο της ροής και τη βελτιστοποίηση των αεροδυναμικών χαρακτηριστικών ενός σώματος, θα χρησιμοποιηθούν συστήματα ενεργητικού ελέγχου και, συγκεκριμένα, παλλόμενες δέσμες έγχυσης/αναρρόφησης ρευστού (*pulsating jets*).

## 1.3 Στόχος και Δομή της Διπλωματικής Εργασίας

Στόχος της παρούσας διπλωματικής εργασίας είναι η δημιουργία και η εφαρμογή, ενός αποδοτικού τρόπου αεροδυναμικής βελτιστοποίησης, μέσω συνεχών συζυγών (continuous adjoint) τεχνικών, σε χρονικά μη-μόνιμες ροές. Η συνεχής συζυγής μέθοδος (continuous adjoint method) είναι ένα μαθηματικό εργαλείο για τον υπολογισμό της κλίσης μιας αντικειμενικής συνάρτησης, ικανοποιώντας ταυτόχρονα τις εξισώσεις που διέπουν το πρόβλημα, που στη συγκεκριμένη περίπτωση είναι οι εξισώσεις Navier Stokes για μη-μόνιμη, ασυμπίεστη, στρωτή ροή. Τα τελευταία χρόνια, η Μονάδα Παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστομηχανικής & Βελτιστοποίησης του Εργαστηρίου Θερμικών Στροβιλομηχανών ασχολείται έντονα με την ανάπτυξη συζυγών μεθόδων, για τον υπολογισμό πρώτης ή και μεγαλύτερης τάξης παραγώγων αντικειμενικών συναρτήσεων, με πληθώρα εργασιών και δημοσιεύσεων ([8], [9], [10], [11], κ.α). Σε χρονικά μη-μόνιμες ροές, όπως θα δειχθεί και στο αντίστοιχο κεφάλαιο, για την επίλυση των συζυγών εξισώσεων, η προσέλαση στο χρόνο γίνεται με αντίθετη κατεύθυνση. Προέκυψε, έτσι, η ιδέα για τη χρησιμοποίηση μιας προσεγγιστικής μεθόδου, βασισμένης σε Πρότυπα Μειωμένης Τάξης (Reduce Order Models) [13], [19], [33], για την αποθήκευση των χρονικά μεταβαλλόμενων μεγεθών (ταχύτητα, πίεση, κλπ), που προκύπτουν από την επίλυση μιας μη-μόνιμης ροής και είναι απαραίτητα για την επίλυση των συζυγών εξισώσεων. Το μαθηματικό εργαλείο που χρησιμοποιείται για την προσεγγιστική αποθήκευση των ροϊκών μεγεθών, βασίζεται στη μέθοδο της Κύριας Ορθογωνικής Ανάλυσης (Proper Orthogonal Decomposition) και στην Ανάλυση Ιδιομορφων Τιμών (Singular Value Decomposition), [12], [13], [14], [15], [16], [17]. Η χρήση μιας μεθόδου προσεγγιστικής αποθήκευσης των χρονικά μεταβαλλόμενων μεταβλητών, αποσκοπεί στην αντιμετώπιση των προβλημάτων μνήμης και υπολογιστικού κόστους, που δημιουργούνται με την εφαρμογή των κλασικών μεθόδων για την επίλυση των συζυγών εξισώσεων σε μη-μόνιμες ροές, όπως η πλήρης αποθήκευση των ροϊκών μεταβλητών (full storage) και η μέθοδος Δυωνυμικής Κατανομής Σημείων Ελέγχου (Binomial Check-pointing) [20], [21], [22].

Συμπερασματικά, η παρούσα εργασία οργανώνεται στα εξής κεφάλαια:

- Στο κεφάλαιο 2 αναπτύσσεται η συνεχής συζυγής μέθοδος για μη-μόνιμη,

ασυμπίεστη, στρωτή ροή, διατυπώνοντας τις συζυγείς πεδιακές εξισώσεις, τις αντίστοιχες οριακές συνθήκες καθώς και τις παραγώγους ευαισθησίας.

- Στο κεφάλαιο 3 γίνεται μια γενική εισαγωγή στα Πρότυπα Μειωμένης Τάξης και θεμελιώνεται μαθηματικά η Κύρια Ορθογωνική Ανάλυση, ενώ επίσης αναπτύσσεται ο υπολογιστικός αλγόριθμος της επαυξητικής Ανάλυσης Ιδιόμορφων Τιμών.
- Στο κεφάλαιο 4 παρουσιάζεται το opensource λογισμικό υπολογιστικής ρευστοδυναμικής OpenFOAM, πάνω στο οποίο γράφτηκαν όλοι οι υπολογιστικοί κώδικες που χρησιμοποιούνται. Επίσης, παρουσιάζεται ο αλγόριθμος με βάση τον οποίο επιλύεται η ροή, καθώς και ο τελικός αλγόριθμος βελτιστοποίησης, ο οποίος συνδυάζει τη συνεχή συζυγή μέθοδο και την Κύρια Ορθογωνική Ανάλυση.
- Στο κεφάλαιο 5 επιλύεται η ροή γύρω από τετραγωνικό πρίσμα, στον ομόρρου του οποίου δημιουργούνται στρόβιλοι von Karman και παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της βελτιστοποίησης.
- Στο κεφάλαιο 6 επιλύεται η ροή γύρω από μεμονωμένη αεροτομή, στην οποία αλλάζει χρονικά η γωνία πρόσπτωσης της επί άπειρον ροής και παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της βελτιστοποίησης.
- Τέλος, στο κεφάλαιο 7 γίνεται μια ανασκόπηση της όλης εργασίας, καταγράφοντας κάποια σημαντικά συμπεράσματα που προέκυψαν από αυτή.



## Κεφάλαιο 2

# Η Συνεχής Συζυγής Μέθοδος για Μη-Μόνιμη Ασυμπίεστη ροή

Ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης στοχεύει στην ελαχιστοποίηση ή στη μεγιστοποίηση μιας αντικειμενικής συνάρτησης (objective function), ως προς κάποιες μεταβλητές σχεδιασμού. Οι μέθοδοι βελτιστοποίησης μπορούν να χωριστούν σε δύο κατηγορίες, στις αιτιοκρατικές μεθόδους βελτιστοποίησης, οι οποίες απαιτούν τον υπολογισμό των πρώτων (συχνά και δεύτερων) παραγώγων της αντικειμενικής συνάρτησης και τις στοχαστικές μεθόδους οι οποίες δεν απαιτούν οποιαδήποτε άλλη πληροφορία πέραν της τιμής της αντικειμενική συνάρτησης. Η συνεχής συζυγής μέθοδος είναι ένα μαθηματικό εργαλείο υπολογισμού της κλίσης της αντικειμενικής συνάρτησης, ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού, εξασφαλίζοντας ταυτόχρονα την ικανοποίηση των εξισώσεων που διέπουν το πρόβλημα λ.χ τις εξισώσεις Navier Stokes. Στη συνέχεια, η τιμή της παραγώγου που υπολογίστηκε, μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε μια διαδικασία απότομης καθόδου (steepest descent) για την ελαχιστοποίηση της αντικειμενικής συνάρτησης.

$$b_i^{new} = b_i^{old} - \eta \frac{\partial F}{\partial b_i} \quad (2.1)$$

όπου  $b_i$  είναι οι μεταβλητές σχεδιασμού,  $F$  είναι η αντικειμενική συνάρτηση και  $\eta$  ένα βαθμωτό μέγεθος που ρυθμίζει το βήμα της καθόδου.

Πέραν της απότομης καθόδου, υπάρχουν και άλλες μέθοδοι βελτιστοποίησης βασισμένες στην κλίση της αντικειμενικής συνάρτησης καθώς και στον υπολογισμό

του Εσσιανού πίνακα, όπως οι Μέθοδοι Newton, η μέθοδος των Συζυγών Κλίσεων (Conjugate Gradient), κλπ. [2]

## 2.1 Οι εξισώσεις της ροής

Οι εξισώσεις που θα χρησιμοποιηθούν είναι οι Navier Stokes εξισώσεις για μη-μόνιμη στρωτή ροή ασυμπύεστου ρευστού. Συγκεκριμένα, η εξίσωση διατήρησης μάζας και οι εξισώσεις ορμής γράφονται

$$R^p = -\frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0 \quad (2.2\alpha')$$

$$R_i^v = \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \nu \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right] + \frac{\partial p}{\partial x_i} = 0 \quad i = 1, 2, (3) \quad (2.2\beta')$$

όπου  $v_i$  η ταχύτητα σε κάθε κατεύθυνση στο καρτεσιανό σύστημα,  $p$  η στατική πίεση διαιρεμένη με την πυκνότητα  $\rho$  και  $\nu$  η κινηματική συνεκτικότητα του ρευστού.<sup>1</sup> Το διάνυσμα μεταβλητών του πρωτεύοντος (primal) πεδίου  $\mathbf{U}$  περιλαμβάνει τις ταχύτητες  $u_i$  και την πίεση  $p$ , δηλαδή  $\mathbf{U} = [v_i, p]$ .

Όπως προλέχθηκε, για τη βελτιστοποίηση θα χρησιμοποιηθούν παλλόμενες δέσμες έγχυσης/αναρρόφησης, των οποίων οι καρτεσιανές συνιστώσες των ταχυτήτων θα μπορούσαν να δίνονται από μια αρμονική συνάρτηση ημιτόνου όπως :

$$u_\lambda^m = (A^m \sin(2\pi f^m(t - f_0^m)) - A^m)\eta_\lambda \quad \lambda = 1, 2, (3) \quad (2.3)$$

όπου  $m$  είναι ο αύξων αριθμός κάθε δέσμη,  $A^m$  το πλάτος,  $f^m$  η συχνότητα και  $f_0^m$  η φάση έγχυσης ή αναρρόφησης για κάθε δέσμη. Θεωρείται ότι όλες οι δέσμες είναι ευθυγραμμισμένες με το κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα  $\eta_\lambda$  πάνω στο τοίχωμα και με κατεύθυνση έξωθεν αυτού. Έτσι, η περίπτωση θετικού  $A^m$  αντιστοιχεί σε έγχυση, ενώ αρνητικό  $A^m$  αντιστοιχεί σε αναρρόφηση. Επίσης οι συχνότητες και οι φάσεις κάθε δέσμης είναι σταθερές και ίσες με  $f_0^m = 0$  και  $f^m = \frac{U_\infty}{L}$ , όπου  $U_\infty$  η ταχύτητα της επί άπειρον ροής και  $L$  ένα χαρακτηριστικό μήκος. Έπομένως, οι μοναδικές μεταβλητές σχεδιασμού είναι τα πλάτη  $A^m$ . [12]

<sup>1</sup>Ο διπλός επαναλαμβανόμενος δείκτης υποδηλώνει άθροιση (Σύμβαση Einstein).

Για να είναι το πρωτεύον σύστημα εξισώσεων πλήρες και να μπορεί να επιλυθεί υπολογιστικά, πρέπει να ορισθούν οι οριακές συνθήκες που διέπουν το πρόβλημα. Όταν γίνεται αναφορά σε Dirichlet συνθήκη σημαίνει ότι η τιμή ενός μεγέθους είναι καθορισμένη. Ενώ Neumann συνθήκη ότι η τιμή της παραγώγου είναι καθορισμένη. Για παράδειγμα, μια μηδενική Neumann οριακή συνθήκη για την πίεση, σημαίνει ότι η τιμή της κάθετης παραγώγου της πίεσης είναι μηδέν, δηλαδή  $\frac{\partial p}{\partial n} = 0$ . Με βάση τα παραπάνω ορίζουμε :

- Στην είσοδο, Dirichlet συνθήκη για την ταχύτητα και μηδενική Neumann συνθήκη για την πίεση.
- Στην έξοδο, μηδενική Neumann συνθήκη για την ταχύτητα και μηδενική Dirichlet συνθήκη για την πίεση.
- Στα τοιχώματα, μηδενική Neumann συνθήκη για την πίεση ενώ για την ταχύτητα ισχύει η συνθήκη μη-ολίσθησης εκτός από τα σημεία που είναι τοποθετημένες οι δέσμες, για τις οποίες θα ισχύει Dirichlet συνθήκη, δηλαδή η τιμή της χρονικά μεταβαλλόμενης ταχύτητας είναι καθορισμένη με βάση την εξίσωση 2.3.

## 2.2 Αντικειμενική Συνάρτηση

Στα προβλήματα εξωτερικής αεροδυναμικής, η αντικειμενική συνάρτηση είναι ένα βαθμωτό, στις περισσότερες περιπτώσεις, μέγεθος και συνήθως αναφέρεται σε μεγέθη όπως η αντίσταση και η άνωση σε ένα αεροδυναμικό σώμα. Αν υπάρχουν περισσότερες από μια αντικειμενικές συναρτήσεις για βελτιστοποίηση (Multi-Objective Optimization), οι οποίες να είναι κυρτές, μπορεί το πρόβλημα να μετατραπεί σε ένα πρόβλημα ενός στόχου (Single-Objective), μέσω της συνένωσής τους σε μία αντικειμενική συνάρτηση προσθέτοντας ένα συντελεστή βάρους σε καθεμιά. Στην παρούσα εργασία, όπως και στο [12], θα χρησιμοποιηθεί μια αντικειμενική συνάρτηση για την ελαχιστοποίηση του συντελεστή αντίστασης, συγκεκριμένα θα είναι

$$F = \frac{1}{2T} \int_T D^2(t) dt \quad (2.4)$$

όπου  $T$  είναι μια κατάλληλα επιλεγμένη χρονική περίοδος, η οποία μπορεί να προκύψει και από την ίδια τη φυσική του φαινομένου (π.χ η περίοδος έκλυσης στροβίλων Von Karman). Ενώ ο όρος  $D(t)$  είναι η χρονικά μεταβαλλόμενη δύναμη αντίστασης, η

οποία δίνεται από τον τύπο

$$D(t) = \int_{S_w} \left[ pn_i - \nu \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) n_j - |v_j n_j| v_i \right] r_i dS \quad (2.5)$$

όπου  $S_w$  είναι η στερεή επιφάνεια που ορίζεται από τη γεωμετρία του σώματος. Στη σχέση 2.5 η δύναμη αντίστασης εξαρτάται από τρεις όρους: τον όρο της αντίστασης λόγω πίεσης, την αντίσταση λόγω συνεκτικότητας και την αντίσταση που δημιουργείται εξαιτίας της ορμής των jets.

Ορίζοντας ως  $u_i$  το συζυγές πεδίο της ταχύτητας και ως  $q$  τη συζυγή πίεση, σχηματίζουμε την επαυξημένη αντικειμενική συνάρτηση

$$F_{aug} = F + \int_T \int_{\Omega} u_i R_i^v d\Omega dt + \int_T \int_{\Omega} q R^p d\Omega dt \quad (2.6)$$

όπου  $\Omega$  το υπολογιστικό χωρίο. Προφανώς από τη στιγμή που οι εξισώσεις 2.2 της ροής επαληθεύονται, θα ισχύει ότι  $F = F_{aug}$

Συμβολίζοντας τις μεταβλητές σχεδιασμού με  $b_n$ , δηλαδή είναι  $b_n = A^m$ , εφαρμόζεται το θεώρημα του Leibniz για τη διαφορίση της εξίσωσης 2.6.

$$\begin{aligned} \frac{\delta F_{aug}}{\delta b_n} &= \frac{\delta F}{\delta b_n} + \frac{\delta}{\delta b_n} \int_T \int_{\Omega} u_i R_i^v d\Omega dt + \frac{\delta}{\delta b_n} \int_T \int_{\Omega} q R^p d\Omega dt \\ &= \frac{\delta F}{\delta b_n} + \int_T \int_{\Omega} u_i \frac{\partial R_i^v}{\partial b_n} d\Omega dt + \int_T \int_{\Omega} q \frac{\partial R^p}{\partial b_n} d\Omega dt \\ &\quad + \int_T \int_S (u_i R_i^v + q R^p) n_k \frac{\delta x_k}{\delta b_n} dS dt \end{aligned} \quad (2.7)$$

Η διαφορά του  $\frac{\delta}{\delta b_n}$  με το  $\frac{\partial}{\partial b_n}$  έγκειται στο γεγονός ότι για ένα ροϊκό μέγεθος  $\Phi$ , το  $\frac{\delta \Phi}{\delta b_n}$  εκφράζει την ολική μεταβολή του  $\Phi$  ως προς τη μεταβλητή  $b_n$ . Ενώ αντίθετα, το  $\frac{\partial \Phi}{\partial b_n}$  εκφράζει την άμεση εξάρτηση του  $\Phi$  ως προς τη μεταβλητή  $b_n$ , χωρίς να λαμβάνονται υπόψη αλλαγές στη γεωμετρία του υπολογιστικού χωρίου ή χρονικές μεταβολές. Γενικά, η συσχέτιση ολικών και μερικών παραγώγων δίνεται από τη σχέση

$$\frac{\delta \Phi}{\delta b_n} = \frac{\partial \Phi}{\partial b_n} + \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_n} + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \frac{\delta t}{\delta b_n} \quad (2.8)$$



Στη συγκεκριμένη περίπτωση, καθώς δεν υπάρχουν μεταβολές στην επιφάνεια-όριο  $S$  του υπολογιστικού χωρίου, ο όρος  $\frac{\delta x_k}{\delta b_n}$  είναι μηδέν. Επίσης, όπως προλέχθηκε, οι μεταβλητές σχεδιασμού είναι τα πλάτη  $A_n$  της εξίσωσης 2.3, τα οποία είναι χρονικά αμετάβλητα, επομένως και ο όρος  $\frac{\delta t}{\delta b_n}$  είναι μηδέν. Έτσι η εξίσωση 2.7 γράφεται

$$\frac{\delta F_{aug}}{\delta b_n} = \frac{\delta F}{\delta b_n} + \int_T \int_{\Omega} u_i \frac{\partial R_i^v}{\partial b_n} d\Omega dt + \int_T \int_{\Omega} q \frac{\partial R^p}{\partial b_n} d\Omega dt \quad (2.9)$$

μιας και

$$\frac{\delta \Phi}{\delta b_n} = \frac{\partial \Phi}{\partial b_n} \quad (2.10)$$

Η ολική παράγωγος της αντικειμενικής συνάρτησης υπολογίζεται συνδυάζοντας τις σχέσεις 2.5 και 2.4 και παραγωγίζοντας ως προς  $b_n$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\delta F}{\delta b_n} = & \frac{1}{T} \int_T D \int_{S_w} \left( -\nu \left[ \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial v_i}{\partial b_n} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial v_j}{\partial b_n} \right) \right] n_j \right. \\ & \left. + \frac{\partial v_i}{\partial b_n} |v_j n_j| + \frac{v_j n_j}{|v_j n_j|} \frac{\partial v_j}{\partial b_n} n_j v_i + \frac{\partial p}{\partial b_n} n_i \right) r_i dS dt \end{aligned} \quad (2.11)$$

## 2.3 Συζυγείς Πεδιακές Εξισώσεις

Για να προκύψουν οι συζυγείς πεδιακές εξισώσεις, θα αναλυθούν οι όροι της επαυξημένης αντικειμενικής συνάρτησης 2.9 κάνοντας χρήση του θεωρήματος Green-Gauss. Με βάση αυτό, για μία παραγωγίσιμη διανυσματική συνάρτηση  $\mathbf{F}$ , ορισμένη σε έναν όγκο ελέγχου  $\Omega$  ο οποίος περικλείεται από μια επιφάνεια  $S$  ισχύει

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{F} d\Omega = \oint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS$$

ή, γραμμένο σε τανυστική μορφή,

$$\int_{\Omega} \frac{\partial F_i}{\partial x_i} d\Omega = \oint_S F_i n_i dS$$

Γράφοντας αναλυτικά το δεύτερο μέλος της σχέσης 2.9, εισάγοντας πλέον την ολική μεταβολή  $\delta$  και αγνοώντας, προς το παρόν, χωρίς βλάβη της γενικότητας και για

καλύτερη εποπτεία, τον όρο  $\delta b_n$  του παρονομαστή, προκύπτει

$$\int_T \int_\Omega \delta (u_i R_i^v) d\Omega dt = \int_T \int_\Omega u_i \delta \left( \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \nu \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right] + \frac{\partial p}{\partial x_i} \right) d\Omega dt \quad (2.12)$$

Για καλύτερη εποπτεία, κάθε όρος της εξίσωσης γράφεται ξεχωριστά και εφαρμόζεται το θεώρημα Green-Gauss. Επομένως :

Ο χρονικό όρος:

$$\int_\Omega \int_T u_i \frac{\partial \delta v_i}{\partial t} dt d\Omega = \int_\Omega [u_i \delta v_i]_T d\Omega - \int_\Omega \int_T \frac{\partial u_i}{\partial t} \delta v_i dt d\Omega \quad (2.13)$$

Ο όρος μεταφοράς:

$$\begin{aligned} \int_\Omega \int_T u_i \delta \left( v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) d\Omega dt &= \int_T \int_S u_i v_j n_j \delta v_i dS dt + \int_T \int_S u_i v_i n_j \delta v_j dS dt \\ &- \int_T \int_\Omega \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} v_i \delta v_j + u_i v_i \frac{\partial \delta v_j}{\partial x_j} \right) d\Omega dt - \int_T \int_\Omega \left( v_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \delta v_i + \frac{\partial v_j}{\partial x_j} u_i \delta v_i \right) d\Omega dt \\ &= \int_T \int_S u_i v_j n_j \delta v_i dS dt - \int_T \int_\Omega \left( v_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \delta v_i - u_j \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \delta v_i + \underbrace{u_i \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \delta v_i}_{= 0 \text{ eq 2.2a}} \right) d\Omega dt \end{aligned} \quad (2.14)$$

Οι όροι συνεκτικότητας:

$$\begin{aligned} - \int_T \int_\Omega \nu u_i \frac{\partial^2 \delta v_i}{\partial x_j^2} d\Omega dt &= - \int_T \int_S \nu u_i \frac{\partial \delta v_i}{\partial x_j} n_j dS dt + \int_T \int_\Omega \nu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\delta v_i}{\partial x_j} d\Omega dt \\ &= - \int_T \int_S \nu u_i \frac{\partial \delta v_i}{\partial x_j} n_j dS dt + \int_T \int_S \nu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \delta v_i n_j dS dt - \int_T \int_\Omega \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} \delta v_i d\Omega dt \end{aligned} \quad (2.15\alpha')$$

$$\begin{aligned} - \int_T \int_\Omega \nu u_i \frac{\partial^2 \delta v_j}{\partial x_i \partial x_j} d\Omega dt &= - \int_T \int_S \nu u_i \frac{\partial \delta v_j}{\partial x_i} n_j dS dt + \int_T \int_\Omega \nu \frac{\partial \delta v_j}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} d\Omega dt \\ &= - \int_T \int_S \nu u_i \frac{\partial \delta v_j}{\partial x_i} n_j dS dt + \int_T \int_S \nu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \delta v_j n_i dS dt - \int_T \int_\Omega \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i \partial x_j} \delta v_j d\Omega dt \end{aligned} \quad (2.15\beta')$$

Ο όρος της πίεσης:

$$\int_T \int_\Omega u_i \frac{\partial \delta p}{\partial x_i} d\Omega dt = \int_T \int_S u_i \delta p n_i dS dt - \int_T \int_\Omega \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \delta p d\Omega dt \quad (2.16)$$

Ο τρίτος όρος του δεξιού μέλους της εξίσωσης 2.9 γράφεται

$$-\int_T \int_\Omega q \frac{\partial \delta u_j}{\partial x_j} d\Omega dt = -\int_T \int_S q \delta v_j n_j dS dt + \int_T \int_\Omega \frac{\partial q}{\partial x_j} \delta v_j d\Omega dt \quad (2.17)$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις 2.13 έως 2.17 στο τύπο της επαυξημένης αντικειμενικής συνάρτησης προκύπτει

$$\begin{aligned} \delta F_{aug} = & \delta F - \int_T \int_\Omega \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \delta p d\Omega dt \\ & + \int_T \int_\Omega \left[ -\frac{\partial u_i}{\partial t} - v_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + u_j \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial q}{\partial x_i} \right] \delta v_i d\Omega dt \\ & + \int_T \int_S \left( -q n_i + u_i v_j n_j + \nu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j \right) \delta v_i dS dt \\ & + \int_T \int_S u_i n_i \delta p dS dt + \int_T \int_S -\nu u_i \left( \frac{\partial \delta v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \delta v_j}{\partial x_i} \right) n_j dS dt \\ & + \int_\Omega [u_i \delta v_i]_T d\Omega \end{aligned} \quad (2.18)$$

όπου η επιφάνεια  $S$  είναι τα επ' άπειρον όρια του υπολογιστικού χωρίου  $S_\infty$  μαζί με την επιφάνεια του σώματος  $S_w$ , ισχύει δηλαδή  $S = S_\infty \cup S_w$ . Οι συζυγείς πεδιακές εξισώσεις προκύπτουν από την εξίσωση 2.18, μηδενίζοντας τους όρους των χωρικών ολοκληρωμάτων που περιέχουν τις ολικές μεταβολές ( $\delta$ ), των μεταβλητών του πρωτεύοντος συστήματος εξισώσεων 2.2, και είναι οι εξής:

$$R^q = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2.19\alpha')$$

$$R_i^u = -\frac{\partial u_i}{\partial t} - v_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + u_j \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial q}{\partial x_i} = 0 \quad (2.19\beta')$$

## 2.4 Συζυγείς Οριακές Συνθήκες

Ικανοποιώντας τις συζυγείς πεδιακές εξισώσεις, η επαυξημένη αντικειμενική συνάρτηση γίνεται :

$$\begin{aligned} \delta F_{aug} = & \delta F + \int_T \int_S \left( -qn_i + u_i v_j n_j + \nu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j \right) \delta v_i dS dt \\ & + \int_T \int_S u_i n_i \delta p dS dt + \int_T \int_S -\nu u_i \left( \frac{\partial \delta v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \delta v_j}{\partial x_i} \right) n_j dS dt \\ & + \int_{\Omega} [u_i \delta v_i]_T d\Omega \end{aligned} \quad (2.20)$$

Αντικαθιστώντας και τη σχέση της ολικής μεταβολής της αντικειμενικής συνάρτησης  $\delta F$  (εξ. 2.11) συνεπάγεται ότι

$$\begin{aligned} \delta F_{aug} = & \int_T \int_S \left( -qn_i + u_i v_j n_j + \nu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j \right) \delta v_i dS dt \\ & + \int_T \int_S u_i n_i \delta p dS dt + \int_T \int_S -\nu u_i \left( \frac{\partial \delta v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \delta v_j}{\partial x_i} \right) n_j dS dt \\ & + \frac{1}{T} \int_T D \int_{S_w} \left( -\nu \left[ \frac{\partial \delta v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \delta v_j}{\partial x_i} \right] n_j + \delta v_i |v_j n_j| + \frac{v_j n_j}{|v_j n_j|} n_j v_i \delta v_j + n_i \delta p \right) r_i dS dt \\ & + \int_{\Omega} [u_i \delta v_i]_T d\Omega \end{aligned} \quad (2.21)$$

Οι οριακές συνθήκες της συζυγούς εξίσωσης θα προκύψουν μηδενίζοντας τους όρους επιφανειακών ολοκληρωμάτων που περιέχουν ολικές μεταβολές πρωτευουσών μεταβλητών.

### Συζυγείς οριακές συνθήκες στα όρια εισόδου ( $S_i$ )

Στα όρια εισόδου της ροής είχε οριστεί Dirichlet συνθήκη για την ταχύτητα και μηδενική Neumann συνθήκη για την πίεση, η ταχύτητα επομένως παραμένει σταθερή άρα  $\delta v_i = 0$ . Οι όροι που παραμένουν στη εξίσωση 2.21 και πρέπει να απαλειφθούν

είναι

$$\begin{aligned} & \int_T \int_{S_i} \left( -\nu u_i \left( \frac{\partial \delta v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \delta v_j}{\partial x_i} \right) n_j + u_i n_i \delta p \right) dS dt = 0 \\ \implies & \int_t \int_{S_i} u_i n_i \delta p dS dt + \int_t \int_{S_i} -\nu u_i n_j \left( \frac{\partial \delta v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \delta v_j}{\partial x_i} \right) dS dt = 0 \end{aligned} \quad (2.22)$$

Από τον πρώτο όρο της εξίσωσης 2.22, προκύπτει ότι

$$u_i n_i = 0 \quad (2.23)$$

Ο δεύτερος όρος της εξίσωσης 2.22, αναλύεται σε δύο όρους με βάση τη σχέση  $u_i = u_n n_i + u_t t$ , όπου  $n_i$  είναι το κάθετο διάνυσμα και  $t$  το εφαπτομενικό, στο όριο εισόδου. Προκύπτει λοιπόν,

$$\underbrace{\int_t \int_{S_i} -\nu u_n n_i n_j \left( \frac{\partial \delta v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \delta v_j}{\partial x_i} \right) dS dt}_{T_1} + \underbrace{\int_t \int_{S_i} -\nu u_t t n_j \left( \frac{\partial \delta v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \delta v_j}{\partial x_i} \right) dS dt}_{T_2} = 0 \quad (2.24)$$

Ο όρος  $T_1$  αναλύεται περαιτέρω ως εξής,

$$\begin{aligned} T_1 &= \int_t \int_{S_i} -\nu u_n n_i n_j \left( \frac{\partial \delta v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \delta v_j}{\partial x_i} \right) dS dt \\ &= \int_t \int_{S_i} -\nu u_n 2 \frac{\partial \delta v_i}{\partial x_j} n_i n_j dS dt \\ &= \int_t \int_{S_i} -\nu u_n 2 \delta \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} n_i n_j \right) dS dt \\ &= \int_t \int_{S_i} -\nu u_n 2 \delta \frac{\partial v_n}{\partial n} dS dt \end{aligned} \quad (2.25)$$

Αν θεωρηθεί ότι η ροή στα όρια εισόδου είναι ομοιόμορφη και αδιατάρακτη, τότε  $\frac{\partial v_n}{\partial n} = 0$ , και, επομένως, ο όρος  $T_1$  είναι μηδενικός. Όμοια αποδεικνύεται ότι  $T_2 = 0$ . Επομένως, η οριακή συνθήκη για τη συζυγή ταχύτητα δίνεται από τη σχέση 2.23.

### Συζυγείς οριακές συνθήκες στα όρια εξόδου ( $S_o$ )

Στα όρια εξόδου είχε οριστεί Neumann συνθήκη για την ταχύτητα και Dirichlet συνθήκη για την πίεση, επομένως  $\delta p = 0$ . Αν θεωρήσουμε ομοιόμορφη ταχύτητα στα

όρια εξόδου, οι όροι που προκύπτουν από την εξίσωση 2.21 είναι

$$\begin{aligned} \int_t \int_{S_o} \left( -qn_i + u_i v_j n_j + \nu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j \right) \delta v_i dS dt = 0 \\ \implies -qn_i + u_i v_n + \nu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j = 0 \end{aligned} \quad (2.26)$$

Αναλύοντας όπως και πριν την συζυγή ταχύτητα σε δύο συνιστώσες, μια κάθετη  $u_n$ , και μια εφαπτομενική  $u_t$ , προκύπτουν οι εξής οριακές συνθήκες:

$$u_n v_n + 2\nu \frac{\partial u_n}{\partial n} = q \quad (2.27)$$

$$u_t v_n + \nu \left( \frac{\partial u_t}{\partial n} + \frac{\partial u_n}{\partial t} \right) = 0 \quad (2.28)$$

Η συνθήκη που δίνεται από τη σχέση 2.27, ονομάζεται Robin οριακή συνθήκη και συναντάται κυρίως σε προβλήματα μεταφοράς θερμότητας.

### Οριακές συνθήκες στο στερεό τοίχωμα ( $S_w$ )

Στο τοίχωμα η ταχύτητα έχει παντού Dirichlet οριακή συνθήκη: είτε μηδενική στα τμήματα που υπάρχει στερεό, είτε κάποια πεπερασμένη τιμή η οποία δίνεται από τη σχέση 2.3, στα σημεία που υπάρχουν δέσμες. Επομένως, στην επιφάνεια  $S_w$ , στα σημεία που δεν υπάρχουν δέσμες, ισχύει  $\delta v_i = 0$  και η εξίσωση 2.21 γίνεται:

$$\int_T \int_{S_w} u_i n_i \delta p dS dt + \frac{1}{T} \int_T D \int_{S_w} n_i \delta p r_i dS dt = 0 \quad (2.29)$$

όπου συνεπάγεται ότι

$$u_i = \frac{-D(t)}{T} r_i \quad (2.30)$$

με το  $D(t)$  να δίνεται από τη σχέση 2.5.

Τέλος, από τον όρο του χωρικού ολοκληρώματος  $\int_{\Omega} [u_i \delta v_i]_T d\Omega$  προκύπτει ότι την αρχική χρονική στιγμή του συζυγούς προβλήματος, δηλαδή την  $t = T$ , σε όλο το υπολογιστικό χωρίο η συζυγής ταχύτητα είναι  $u_i = 0|_{t=T}$ .

## 2.5 Παράγωγοι Ευαισθησίας

Λαμβάνοντας υπόψη την οριακή συνθήκη 2.30 που προέκυψε στο τοίχωμα, μπορεί να γραφτεί ότι

$$D(t) = -\frac{u_i T}{r_i}$$

Γράφοντας τους όρους της επαυξημένης συνάρτησης που έχουν απομείνει και συμμετέχουν στις παραγώγους ευαισθησίας, παραγωγίζοντας ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού και αντικαθιστώντας την ποσότητα  $D(t)$  όπως αναλύθηκε, η σχέση 2.21 καταλήγει :

$$\begin{aligned} \frac{\delta F}{\delta b_m} = \int_T \int_{S_w} \left[ -qn_i + u_i v_j n_j + \nu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j \right. \\ \left. - u_i |v_j n_j| + \frac{v_j n_j}{|v_j n_j|} n_i v_j u_j \right] \frac{\delta v_i}{\delta b_m} dS dt \end{aligned} \quad (2.31)$$

όπου το  $S_w$ , πλέον, αφορά μόνο τις θέσεις των δεσμών έγχυσης/αναρρόφησης. Από τη σχέση 2.3 προκύπτει ότι  $\frac{\delta v_i}{\delta b_m} = \frac{\delta v_i}{\delta A^m} = \sin(2\pi f^m(t - f_0^m)) - 1)n_i$  επομένως η τελική έκφραση για τις παραγώγους ευαισθησίας είναι :

$$\begin{aligned} \frac{\delta F}{\delta b_m} = \int_T \int_{S_w} \left[ -qn_i + u_i v_j n_j + \nu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j \right. \\ \left. - u_i |v_j n_j| + \frac{v_j n_j}{|v_j n_j|} n_i v_j u_j \right] \sin(2\pi f^m(t - f_0^m)) - 1) dS dt \end{aligned} \quad (2.32)$$

## 2.6 Επίλυση Εξισώσεων

Οι εξισώσεις του πρωτεύοντος πεδίου ροής με αυτές του συζυγούς είναι κατά πολύ όμοιες. Πέραν από την εμφάνιση ενός επιπλέον γραμμικού όρου  $-u_j \frac{\partial v_j}{\partial x_i}$  στη συζυγή εξίσωση, οι υπόλοιποι όροι της βρίσκονται σε αντιστοιχία με αυτούς του πρωτεύοντος. Αν, για παράδειγμα, για την επίλυση του πρωτεύοντος χρησιμοποιηθεί ένας αλγόριθμος PISO, με τον ίδιο αλγόριθμο, κάνοντας τις απαραίτητες προσθήκες, θα λυθεί και το συζυγές πρόβλημα. Η κύρια διαφορά είναι ότι για την επίλυση της συζυγούς εξίσωσης,

η προέλαση του χρόνου γίνεται με ανάποδη φορά. Αυτό είναι αποτέλεσμα του όρου  $\int_{\Omega} [u_i \delta v_i]_T d\Omega$ , αν θεωρήσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας αρχική στιγμή την  $t = 0$ , μπορεί να γραφτεί ως  $\int_{\Omega} [u_i \delta v_i]_T - [u_i \delta v_i]_0 d\Omega$ . Όμως για,  $t = 0$ , η ταχύτητα  $v_i$  είναι ορισμένη άρα  $\delta v_i|_0 = 0$ , επομένως συνεπάγεται  $u_i|_T = 0$ .

Από τη στιγμή που στη συζυγή εξίσωση υπάρχουν όροι από το πρωτεύον σύστημα εξισώσεων και η επίλυση γίνεται με αντίθετη προέλαση στο χρόνο, τα δύο συστήματα εξισώσεων δεν μπορούν να επιλυθούν με ταυτόχρονη προέλαση στο χρόνο. Αυτό καθιστά απαραίτητη την αποθήκευση όλων των μεταβλητών του πρωτεύοντος πεδίου σε όλη τη χρονική περίοδο επίλυσης του. Αυτή η πλήρης αποθήκευση όμως (Full storage) δεν είναι πάντα εφικτή εξαιτίας του μεγάλου όγκου δεδομένων που συνεπάγεται η επίλυση μιας μη-μόνιμης ροής, ιδιαίτερα όταν γίνεται χρήση μικρού χρονικού βήματος. Η πιο συνηθισμένη τεχνική αντιμετώπισης αυτού του προβλήματος είναι η μέθοδος Σημείων Ελέγχου (check-pointing), [20], [21], [22], πρόκειται ουσιαστικά για μια υποκατάσταση, της μνήμης αποθήκευσης που απαιτείται, με υπολογιστικό κόστος/χρόνο.

Πιο αναλυτικά επιλέγονται  $n$  χρονικές στιγμές  $t_1, t_2, \dots, t_n$ , οι οποίες ακολουθούν μια συγκεκριμένη κατανομή (π.χ διωνυμική), και σε αυτές γίνεται η αποθήκευση των ροϊκών πεδίων, που προκύπτουν από την επίλυση του πρωτεύοντος προβλήματος. Οι χρονικές στιγμές αυτές, ονομάζονται σημεία ελέγχου. Στη συνέχεια αν κάποιο πεδίο ροής, το οποίο απαιτείται για την επίλυση του συζυγούς προβλήματος, δεν έχει αποθηκευτεί, υπολογίζεται ξανά, ξεκινώντας από την αντίστοιχη χρονική στιγμή του κοντινότερου σημείου ελέγχου. Η μέθοδος στην οποία τα σημεία ελέγχου ακολουθούν διωνυμική κατανομή, είναι γνωστή με το όνομα Binomial Check-Pointing [20] και αποτελεί τη βέλτιστη κατανομή η οποία ελαχιστοποιεί το υπολογιστικό κόστος.

Η παραπάνω μέθοδος, παρότι λύνει μερικά το πρόβλημα της αποθήκευσης, δεν μειώνει όσο θα ήταν επιθυμητό το υπολογιστικό κόστος, καθώς επαναλαμβάνεται η επίλυση του ίδιου πρωτεύοντος πεδίου πολλές φορές. Προέκυψε έτσι η ιδέα της προσεγγιστικής αποθήκευσης των πρωτευόντων πεδίων ροής σε πίνακες μικρότερης διάστασης από τους οποίους μπορούν να ανακτηθούν οι απαραίτητες, για την επίλυση του συζυγούς συστήματος εξισώσεων, μεταβλητές. Θυσιάζοντας έτσι ένα πολύ μικρό ποσοστό από την ακρίβεια της λύσης, προκύπτει πολύ μεγαλύτερο κέρδος σε υπολογιστικό χρόνο και



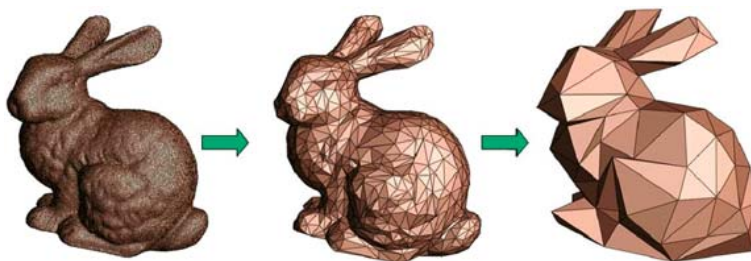
σε απαιτούμενη μνήμη. Η μέθοδος αυτή αναφέρεται με τον όρο Πρότυπα Μειωμένης Τάξης (Reduced Order Models) και θα αναλυθεί στη συνέχεια.



## Κεφάλαιο 3

### Πρότυπα Μειωμένης Τάξης

Αρχικά, η έννοια των Προτύπων Μειωμένης Τάξης ή Reduce Order Models (ROM) χρησιμοποιήθηκε στα συστήματα αυτομάτου ελέγχου, με σκοπό τη μείωση της πολυπλοκότητας τους, διατηρώντας ταυτόχρονα με ακρίβεια την αρχική δυναμική συμπεριφορά του συστήματος,[23]. Στη συνέχεια, η μέθοδος αυτή, υιοθετήθηκε και από άλλους κλάδους, όπως η ΥΠΔ, οδηγώντας στην εύρεση διαφόρων νέων τεχνικών για τη μείωση της πολυπλοκότητας, του αποθηκευτικού χώρου κ.τ.λ, [24]. Σε μια γενικότερη έννοια, τα ROM είναι μια προσπάθεια αποτύπωσης των πιο βασικών χαρακτηριστικών και διατήρησης μόνο των σημαντικών ιδιοτήτων ενός συστήματος. Στο σχήμα 3.1, φαίνεται με έναν πιο κατανοητό τρόπο, το σκεπτικό των Προτύπων Μειωμένης Τάξης. Παρατηρείται ότι πολλές φορές χρειάζεται πολύ μικρότερη ποσότητα πληροφορίας για να περιγραφεί ένα σύστημα με ικανοποιητική ακρίβεια.



**Σχήμα 3.1:** Ένας γραφικός τρόπος απεικόνισης των Προτύπων Μειωμένης Τάξης.  
[13]

Παρόλο που η ιδέα της προσέγγισης συναρτήσεων είχε αρχίσει από πολύ νωρίς, όπως αυτή του Fourier για την προσέγγιση συνάρτησης μέσω αρμονικών (1807), οι βασικές μέθοδοι πάνω στα Πρότυπα Μειωμένης Τάξης αναπτύχθηκαν τη δεκαετία 1980-1990, [25]. Για να γίνει αυτή η ιδέα κατανοητή, σε ένα πιο μαθηματικοποιημένο υπόβαθρο, θεωρείται ένα δυναμικό σύστημα, το οποίο αποτελείται από συνήθεις διαφορικές εξισώσεις, και είναι γραμμένο σε μια μορφή εισόδου-εξόδου, όπως ένα σύστημα αυτομάτου ελέγχου. Με βάση το [13] έχουμε :

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= f(x, u) \\ y &= g(x, u)\end{aligned}$$

όπου  $u$  η είσοδος του συστήματος,  $y$  η έξοδος και  $x$  το διάνυσμα μεταβλητών κατάστασης. Η πολυπλοκότητα του συστήματος θα μπορούσε να χαρακτηριστεί από τη διάσταση  $n$  του διανύσματος  $x$ . Με βάση αυτό, το ROM έγκειται στη δημιουργία ενός νέου συστήματος, με ίδια είσοδο και έξοδο, ως εξής :

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{x}}{dt} &= \hat{f}(\hat{x}, u) \\ y &= \hat{g}(\hat{x}, u)\end{aligned}\tag{3.1}$$

όπου πλέον το  $\hat{x}$  είναι το διάνυσμα μεταβλητών κατάστασης διάστασης  $k$ , με  $k \ll n$ . Για να θεωρηθεί μια τέτοιου είδους προσέγγιση καλή, πρέπει το σφάλμα προσέγγισης (με βάση κάποιο κριτήριο) να είναι μικρό, το προσεγγιστικό σύστημα να περιλαμβάνει όσο το δυνατόν περισσότερες ιδιότητες υπάρχουν στο αρχικό σύστημα και η διαδικασία κατασκευής του προσεγγιστικού μοντέλου να έχει μικρό υπολογιστικό κόστος.

### 3.1 Η έννοια της Προβολής

Η βασική ιδιότητα πάνω στην οποία στηρίζονται οι μέθοδοι Προτύπων Μειωμένης Τάξης είναι αυτή της προβολής (Projection). Η έννοια της Προβολής περιλαμβάνει την απεικόνιση ενός διανύσματος κατάστασης ενός χώρου  $\mathbb{R}^n$  σε έναν υποχώρο (subspace)  $\mathbb{R}^k$ , όπου  $k < n$ .

Ένας πίνακας  $\mathbf{\Pi} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  θεωρείται πίνακας προβολής αν ισχύει

$$\mathbf{\Pi}^2 = \mathbf{\Pi}$$

Αυτό σημαίνει ότι όσες φορές και να εφαρμοστεί η προβολή  $\mathbf{\Pi}$  σε ένα μέγεθος, θα έχει την ίδια επίδραση με το να εφαρμοζόταν μόνο μία φορά. Η ιδιότητα αυτή ονομάζεται ταυτοδυναμία (Idempotence) και ο πίνακας  $\mathbf{\Pi}$  ταυτοδύναμος [26]. Ένα

απλό παράδειγμα ενός τέτοιου πίνακα είναι ο  $\mathbf{\Pi} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  ο οποίος απεικονίζει

ένα οποιοδήποτε σημείο του τριδιάστατου χώρου  $(x, y, z)$  στο επίπεδο  $(xy)$ . Μια τέτοιου είδους προβολή ονομάζεται ορθογωνική, με την έννοια ότι η διανυσματική βάση της προβολής (το επίπεδο  $xy$ ) και ο πυρήνας (Kernel) της προβολής (ο άξονας  $z$ ), είναι ορθογώνιοι διανυσματικοί υπο-χώροι.

Όπως προαναφέρθηκε, όλες οι υπάρχουσες ROM μέθοδοι, στηρίζονται στη χρήση πινάκων προβολής. Στο προηγούμενο απλοποιημένο δυναμικό σύστημα, όπου  $\hat{\mathbf{x}} = [\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_k]^T$ , αναζητείται μια βάση  $\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k] \in \mathbb{R}^{n \times k}$  έτσι ώστε να ισχύει, [33],

$$\mathbf{x}(t) \approx \mathbf{V} \hat{\mathbf{x}}(t)$$

Δηλαδή, μέσω ενός διανύσματος κατάστασης μικρότερης διάστασης, να μπορεί να προσεγγισθεί το αρχικό διάνυσμα με την επιθυμητή ακρίβεια. Αντικαθιστώντας την απεικόνιση στις εξισώσεις, προκύπτει ότι

$$\frac{d}{dt} \mathbf{V} \hat{\mathbf{x}}(t) = f(\mathbf{V} \hat{\mathbf{x}}(t), \mathbf{u}(t)) + r(t) \quad (3.2\alpha')$$

$$\hat{y} = g(\mathbf{V} \hat{\mathbf{x}}(t), \mathbf{u}(t)) \quad (3.2\beta')$$

Το σφάλμα  $r(t)$  προέκυψε από το γεγονός ότι το γινόμενο  $\mathbf{V} \hat{\mathbf{x}}(t)$  δεν αποτελεί την ακριβή λύση του δυναμικού συστήματος. Αφού έχει θεωρηθεί ότι το  $\mathbf{V}$  είναι ανεξάρτητο του χρόνου οι εξισώσεις 3.2 μπορούν να γραφτούν ως

$$\mathbf{V} \frac{d}{dt} \hat{\mathbf{x}}(t) = f(\mathbf{V} \hat{\mathbf{x}}(t), \mathbf{u}(t)) + r(t) \quad (3.3\alpha')$$

$$\hat{y} = g(\mathbf{V} \hat{\mathbf{x}}(t), \mathbf{u}(t)) \quad (3.3\beta')$$

Για να γίνει η προσέγγιση του διανύσματος κατάστασης, με τον ακριβέστερο δυνατό τρόπο, πρέπει το σφάλμα  $r(t)$  να μηδενιστεί. Επομένως πρέπει να βρεθεί ένας κατάλληλος υποχώρος  $W$ , ο οποίος ορίζεται από μια βάση  $\mathbf{W} \in \mathbb{R}^{n \times k}$ , έτσι ώστε η προβολή της διανυσματικής βάσης πάνω στο διάνυσμα κατάστασης του σφάλματος να

δίνει τον μηδενικό υπο-χώρο. Με λίγα λόγια να ισχύει

$$\mathbf{W}^T \mathbf{r}(t) = \mathbf{0}$$

Πολλαπλασιάζοντας αριστερά και τα δύο μέλη της εξίσωσης 3.3α' με  $\mathbf{W}^T$ , προκύπτει η λεγόμενη Petrov-Galerkin προβολή των δυναμικών εξισώσεων

$$\mathbf{W}^T \mathbf{V} \frac{d}{dt} \hat{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{W}^T f(\mathbf{V} \hat{\mathbf{x}}(t), \mathbf{u}(t)) + \mathbf{0} \quad (3.4)$$

Αν ο πίνακας  $\mathbf{W}^T \mathbf{V}$  αντιστρέφεται, οι εξισώσεις γίνονται

$$\frac{d}{dt} \hat{\mathbf{x}}(t) = (\mathbf{W}^T \mathbf{V})^{-1} \mathbf{W}^T f(\mathbf{V} \hat{\mathbf{x}}(t), \mathbf{u}(t)) \quad (3.5\alpha')$$

$$\hat{\mathbf{y}} = g(\mathbf{V} \hat{\mathbf{x}}(t), \mathbf{u}(t)) \quad (3.5\beta')$$

Στην περίπτωση που ισχύει  $\mathbf{W} = \mathbf{V}$ , η προβολή ονομάζεται Galerkin, και αν θεωρηθεί ότι ο  $\mathbf{V}$  είναι ορθογώνιος πίνακας, δηλαδή  $\mathbf{V}^T \mathbf{V} = \mathbf{I}$ , το σύστημα καταλήγει να είναι

$$\frac{d}{dt} \hat{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{V}^T f(\mathbf{V} \hat{\mathbf{x}}(t), \mathbf{u}(t)) \quad (3.6\alpha')$$

$$\hat{\mathbf{y}} = g(\mathbf{V} \hat{\mathbf{x}}(t), \mathbf{u}(t)) \quad (3.6\beta')$$

Επομένως, προέκυψε με τη διαδικασία αυτή, ένα σύστημα μειωμένης τάξης, όπως αυτό της εξίσωσης 3.1. Με βάση τα παραπάνω, τα Πρότυπα Μειωμένης Τάξης στοχεύουν στην εύρεση των κατάλληλων πινάκων προβολής  $\mathbf{V}$  και  $\mathbf{W}$ , με βάση τους οποίους θα προκύψει το προσεγγιστικό σύστημα. Κάποια ROM υπολογίζουν διαφορετικά τον πίνακα  $\mathbf{V}$  από τον  $\mathbf{W}$  (Petrov-Galerkin), ενώ κάποια άλλα, όπως η Κύρια Ορθογωνική Ανάλυση που θα αναλυθεί παρακάτω, θεωρεί ότι  $\mathbf{V} = \mathbf{W}$  (Galerkin Projection). Όποια διαδικασία και να ακολουθηθεί, όλα τα ROM στοχεύουν στην, όσο το δυνατόν, καλύτερη προσέγγιση του αρχικού συστήματος.

## 3.2 Κύρια Ορθογωνική Ανάλυση

Η Κύρια Ορθογωνική Ανάλυση ή Proper Orthogonal Decomposition (POD) είναι ένα Πρότυπο Μειωμένης Τάξης το οποίο παράγει μια βέλτιστη ορθοκανονική βάση,

σε μία έννοια ελαχίστων τετραγώνων, για ένα συγκεκριμένο σετ δεδομένων [14], είτε αυτά είναι πειραματικές μετρήσεις, είτε υπολογιστικά αποτελέσματα. Το POD είναι γνωστό και με άλλα ονόματα, ανάλογα τον επιστημονικό τομέα που χρησιμοποιείται. Στη στατιστική αναφέρεται ως Karhunen-Loève decomposition [27], στη μετεωρολογία ως Ανάλυση σε Κύριες Συνιστώσες (Principal Component Analysis) [28], ενώ αναφέρεται, επίσης, και ως Ανάλυση Ιδιόμορφων Τιμών (Singular Value Decomposition) [29].

### Μαθηματική θεμελίωση του POD

Σύμφωνα με το [13], θεωρείται ένα σύνολο δεδομένων  $Y = [y_1(t), y_2(t), \dots, y_m(t)]$  όπου τα  $y_i(t)$  είναι διανύσματα ενός χωρίου  $V = \mathbb{R}^n$  με το  $t \in [0, T]$ . Με βάση τη διαδικασία που ορίστηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο, αναζητείται μία προβολή  $\Pi_d$  από το χώρο  $V = \mathbb{R}^n$  στον υπο-χώρο  $V_d = \mathbb{R}^d$  η οποία να ελαχιστοποιεί τη νόρμα

$$\|Y - \Pi_d Y\|^2 := \sum_{i=1}^m \int_0^T \|y_i(t) - \Pi_d y_i(t)\|^2 dt \quad (3.7)$$

Η επίλυση τέτοιων προβλημάτων γίνεται με τη βοήθεια ενός πίνακα συσχέτισης  $K \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , ο οποίος ορίζεται ως

$$K = \sum_{i=1}^m \int_0^T y_i(t) y_i(t)^T dt \quad (3.8)$$

όπου ο  $K$  είναι ένας θετικά ημι-ορισμένος συμμετρικός πίνακας, με μη-αρνητικές πραγματικές ιδιοτιμές  $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0$ . Στη συνέχεια, για τον πίνακα  $K$ , διατυπώνεται η εξίσωση του ιδιοπροβλήματος, η οποία αν συμβολίσουμε με  $u_j$  τα ιδιοδιανύσματα γράφεται

$$K u_j = \lambda_j u_j \quad j = 1, \dots, n \quad (3.9)$$

Από τον τρόπο που ορίστηκε ο πίνακας  $K$ , αποδεικνύεται [14] ότι τα πρώτα  $d$  ιδιοδιανύσματα  $u_j$  μπορούν να ληφθούν ως την επιθυμητή διανυσματική βάση του

υπο-χώρου  $V_d$ . Αποδεικνύεται [19] με βάση όσα ορίστηκαν παραπάνω ότι

$$\min_{V_d} \|Y - \Pi_d Y\| = \sum_{j=n-d+1}^d \lambda_j \quad (3.10)$$

και η βέλτιστη ορθογωνική προβολή είναι

$$\Pi_d = \sum_{j=1}^d u_j u_j^T \quad (3.11)$$

Όπως φαίνεται και από τη σχέση 3.10, η ελάχιστη τιμή της νόρμας εξαρτάται από το πλήθος  $d$  των ιδιοδιανυσμάτων που θα χρησιμοποιηθούν για την προσέγγιση. Δημιουργείται έτσι το ερώτημα, ποιος είναι ο κατάλληλος αριθμός ιδιοδιανυσμάτων ώστε να έχουμε μια ικανοποιητική προσέγγιση του αρχικού συνόλου δεδομένων. Ένας τρόπος επιλογής είναι μέσω ενός κριτηρίου ελάχιστης απαιτούμενης πληροφορίας. Το ποσοστό της πληροφορίας που περιλαμβάνει η νέα διανυσματική βάση ως προς την αρχική, μπορεί να οριστεί ως

$$P(d) = \frac{\sum_{j=1}^d \lambda_j}{\sum_{j=1}^n \lambda_j} \quad (3.12)$$

Έτσι μέσω αυτού, μπορεί να υπολογιστεί ο απαραίτητος αριθμός ιδιοδιανυσμάτων που να δίνουν ικανοποιητικό ποσοστό πληροφορίας (π.χ  $P(d) > 99,5\%$ ). Θα ήταν βολικό λοιπόν οι ιδιοτιμές του πίνακα  $K$  να μικραίνουν απότομα ώστε να προκύψει ένα σύστημα αρκετά μικρότερης τάξης από το αρχικό. Έχει παρατηρηθεί ότι σε προβλήματα ΥΡΔ και μεταφοράς θερμότητας οι ιδιοτιμές ακολουθούν μια εκθετική κατανομή και, με τον τρόπο αυτόν, εύκολα διαχωρίζονται οι μεγάλες τιμές ιδιοδιανυσμάτων, οι οποίες παρέχουν μεγάλο ποσό πληροφορίας, από αυτές που έχουν μικρή τιμή και άρα μικρό ποσό πληροφορίας αντίστοιχα. Ο παραπάνω διαχωρισμός οδηγεί στη δημιουργία βάσεων μικρής διάστασης με πολύ μεγάλο  $P(d)$ .

Σε προβλήματα με πολλούς βαθμούς ελευθερίας, όπως λ.χ περίπλοκες ροές που απαιτούν πυκνά υπολογιστικά πλέγματα, οι διαστάσεις του πίνακα συσχέτισης  $K$  γίνονται πολύ μεγάλες. Αυτό οδηγεί στην επίλυση ενός προβλήματος ιδιοτιμών ενός τεράστιου μητρώου διαστάσεων  $n \times n$  με το  $n$  να παίρνει τιμές της τάξης  $10^7 - 10^{10}$ . Για την αντιμετώπιση του προβλήματος αυτού ο Sirovich [15] πρότεινε τη μέθοδο των



στιγμιότυπων (method of snapshots). Σε αυτήν, αντί για την εύρεση των ιδιοτιμών του αρχικού μητρώου  $K \in n \times n$ , δημιουργείται ένα άλλο μητρώο διάστασης  $m \times m$  το οποίο περιέχει τα διανύσματα  $m$  διακεκριμένων χρονικών στιγμών. Στη μέθοδο του ο Sirovich όρισε το χρονικό βήμα αποθήκευσης ενός νέου στιγμιότυπου να είναι τόσο μεγάλο ώστε τα στιγμιότυπα να μην συσχετίζονται μεταξύ τους (γραμμικώς ανεξάρτητα). Αν οριστεί ένας πίνακας  $Y = [y(t_1), \dots, y(t_m)]$  ο οποίος έχει στήλες τα στιγμιότυπα των διανυσμάτων κατάστασης, αντί να επιλυθεί το πρόβλημα ιδιοτιμών για τον πίνακα

$$K = YY^T = \sum_{i=1}^m y(t_i)y(t_i)^T \quad (3.13)$$

αυτό επιλύεται για τον πίνακα  $Y^TY \in \mathbb{R}^{m \times m}$ . Επομένως, το πρόβλημα των ιδιοτιμών έχει ως εξής

$$Y^TY v_j = \lambda_j v_j \quad (3.14)$$

Αποδεικνύεται, [15], ότι οι ιδιοτιμές και στις δύο περιπτώσεις είναι ίδιες και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα συσχέτισης  $K$  δίνονται από τον τύπο

$$u_j = \frac{1}{\sqrt{\lambda_j}} Y v_j \quad j = 1, \dots, m \quad (3.15)$$

### 3.3 Ανάλυση Ιδιόμορφων Τιμών

Όπως θα δειχθεί και στη συνέχεια, υπάρχει ισχυρή συσχέτιση και αντιστοιχία ανάμεσα στην Κύρια Ορθογωνική Ανάλυση και στην Ανάλυση Ιδιόμορφων Τιμών (Singular Value Decomposition). Έστω ένα πρόβλημα ΥΡΔ, σχηματίζεται ένας πίνακας στιγμιότυπων  $A$  ο οποίος έχει σε κάθε στήλη τις τιμές ενός ροϊκού μεγέθους για κάθε κελί ή για κάθε κόμβο του υπολογιστικού πλέγματος, ανάλογα αν η διατύπωση είναι κεντροκυβελική ή κεντροκομβική. Πιο συγκεκριμένα, έστω ότι ο πίνακας  $A$  περιλαμβάνει τις τιμές της ταχύτητας του ρευστού στην κατεύθυνση  $x(u_i)$ ,

για ένα πλέγμα  $n$  κελιών και για  $m$  χρονικές στιγμές. Τότε

$$A = \begin{matrix} & & & m \\ & & & \\ & & & \\ & & & \\ n & \left( \begin{matrix} u_1(t_1) & \dots & u_1(t_m) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_n(t_1) & \dots & u_n(t_m) \end{matrix} \right) \end{matrix}$$

Υπολογίζεται το SVD του πίνακα  $A$  ως, [14],

$$A = U\Sigma V^T \quad (3.16)$$

όπου οι  $U$  και  $V$  είναι ορθογώνιοι πίνακες ( $U^T U = I, V^T V = I$ ), με τον  $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$  και τον  $V \in \mathbb{R}^{m \times m}$ . Ο πίνακας  $\Sigma \in \mathbb{R}^{n \times m}$  είναι ένας πίνακας που έχει μη-μηδενικές τιμές μόνο στη διαγώνιο του για τις οποίες ισχύει  $\Sigma_{ii} = \sigma_i$  με  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_{\min(n,m)} \geq 0$ . Οι ποσότητες  $\sigma_i$  ονομάζονται ιδιόμορφες τιμές (singular values) του πίνακα  $A$  και είναι μοναδικές, ενώ η τάξη του πίνακα  $A$  ορίζεται από το σύνολο των μη-μηδενικών ιδιόμορφων τιμών που έχει. Οι ιδιόμορφες τιμές, είναι τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα της μεθόδου POD, με την έννοια ότι μεγάλες ιδιόμορφες τιμές εμπεριέχουν μεγάλη ποσότητα πληροφορίας του αρχικού πίνακα  $A$ .

Έστω  $r = \min(n, m)$  τότε για ένα  $k < r$  μπορεί να προκύψει μια βέλτιστη προσέγγιση του αρχικού πίνακα  $A$  θέτοντας τις  $r - k$  τελευταίες ιδιόμορφες τιμές του πίνακα  $\Sigma$  ίσες με το μηδέν ( $\sigma_{k+1} = \sigma_{k+2} = \dots = \sigma_r = 0$ ). Προκύπτει λοιπόν ότι

$$A \approx A_k = U\Sigma_k V^T \quad (3.17)$$

Πρακτικά, από τη στιγμή που ο πίνακας  $\Sigma$  έχει μόνο  $k$  μη-μηδενικά διαγώνια στοιχεία, χρειάζεται να αποθηκευτούν μόνο οι πρώτες  $k$  στήλες του πίνακα  $U$  και οι πρώτες  $k$  γραμμές του πίνακα  $V$ . Επομένως, θα μπορούσε να γραφτεί ότι

$$A_k(n \times m) = \underbrace{\begin{pmatrix} U \end{pmatrix}}_{n \times k} \underbrace{\begin{pmatrix} \sigma_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \sigma_k \end{pmatrix}}_{k \times k} \underbrace{\begin{pmatrix} V^T \end{pmatrix}}_{k \times m} \quad (3.18)$$

Υπενθυμίζεται ότι, το  $n$  παριστά τον αριθμό των κελιών του υπολογιστικού πλέγματος, ενώ το  $m$ , τον αριθμό των χρονικών στιγμών αποθήκευσης. Η προσέγγιση του πίνακα  $A$  είναι βέλτιστη υπό την έννοια ότι δεν υπάρχει άλλος πίνακας  $A_k$  τάξης  $k$  που να προσεγγίζει τον  $A$  στη λογική της ελάχιστης νόρμας που είχε οριστεί στο κεφάλαιο 3.2. Για φανερί η σύνδεση του SVD με την ανάλυση ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων που έγινε στο προηγούμενο κεφάλαιο αρχικά πολλαπλασιάζεται η εξίσωση 3.16 από αριστερά με  $A^T$ . Λαμβάνοντας υπόψη ότι  $U^{-1} = U^T$  και ότι  $\Sigma^T = \Sigma$  προκύπτει

$$\begin{aligned} A^T A &= (U \Sigma V^T)^T U \Sigma V^T = V \Sigma U^T U \Sigma V^T = V \Sigma \Sigma V^T \\ &\Rightarrow A^T A V = V \Sigma \Sigma \end{aligned}$$

ή σε διακριτή μορφή

$$A^T A v_i = v_i \sigma_i^2 \quad (3.19)$$

Το πρόβλημα λοιπόν καταλήγει στην ίδια σχέση που καταλήγει και το πρόβλημα ιδιοτιμών στη μέθοδο των στιγμιοτύπων του Sirovich. Τα τετράγωνα των ιδιομορφών τιμών είναι οι ιδιοτιμές του  $A^T A$  ( $\lambda_i = \sigma_i^2$ ) και ο πίνακας  $V$  είναι ο πίνακας των ιδιοδιανυσμάτων. Όμοια μπορεί να αποδειχθεί για τον πίνακα  $AA^T$  ότι οι ιδιοτιμές του είναι πάλι τα τετράγωνα των ιδιομορφών τιμών ενώ ο  $U$  είναι ο πίνακας ιδιοδιανυσμάτων,

$$AA^T u_i = u_i \sigma_i^2 \quad (3.20)$$

Τέλος, αποδεικνύεται ότι αν ο  $A$  είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος οι ιδιοτιμές του είναι και οι ιδιομορφές τιμές του.

Το πρόβλημα που τίθεται πάλι όπως και στο POD είναι η εύρεση της κατάλληλης τάξης του πίνακα  $A_k$  ώστε να αποτελεί ικανοποιητική προσέγγιση του πίνακα  $A$ . Ή, διαφορετικά, πόσες ιδιομορφές τιμές χρειάζεται κανείς να κρατήσει. Σε αντιστοιχία με το POD, μπορεί να οριστεί ένα κλάσμα που αντιπροσωπεύει το ποσοστό της πληροφορίας που μεταφέρεται από τον πίνακα  $A$  στον πίνακα  $A_k$ . Ορίζεται ως Περιεχόμενο Ολικής Ενέργειας ή Total Energy Content (TEC)

$$\begin{aligned} TEC &= \frac{\sum_{i=1}^k \sigma_i^2}{\sum_{i=1}^m \sigma_i^2} \\ \text{ή } TEC &= \frac{\sum_{i=1}^k \lambda_i}{\sum_{i=1}^m \lambda_i} \end{aligned} \quad (3.21)$$

### 3.4 Επαυξητικό (Incremental) SVD

Όπως φάνηκε, με τη χρήση του SVD, μπορεί να κατασκευαστεί μια πολύ καλή προσέγγιση του αρχικού πίνακα  $A$ , αποθηκεύοντας πίνακες πολύ μικρότερων διαστάσεων. Εντούτοις, δε λύνεται το πρόβλημα της αποθήκευσης του πίνακα  $A$ , καθώς για να εκτελεστεί η διαδικασία του SVD πρέπει να έχει κατασκευασθεί ολόκληρος ο πίνακας στιγμιοτύπων. Μια λύση στο πρόβλημα αυτό, είναι η συνεχής ανανέωση των πινάκων  $U$ ,  $\Sigma$ ,  $V$  που προκύπτουν από το SVD ενός αρχικού πίνακα, με μικρό αριθμό νέων στιγμιοτύπων. Η διαδικασία αυτή ονομάζεται Επαυξητική Ανάλυση Ιδιόμορφων Τιμών (Incremental Singular Value Decomposition) και θα αναλυθεί παρακάτω [17], [18].

Με βάση το [12], ορίζεται αρχικά η επιθυμητή τάξη του πίνακα  $A$ , έστω  $k$ . Δημιουργείται έτσι ο αρχικός πίνακας  $A_0 \in \mathbb{R}^{n \times k}$ , ο οποίος περιλαμβάνει  $k$  στιγμιότυπα ενός ροϊκού μεγέθους. Εκτελείται η διαδικασία του SVD στον πίνακα  $A_0$  και προκύπτουν οι πίνακες  $U_0$ ,  $\Sigma_0$  και  $V_0$ . Όταν, κατά την επίλυση της ροής είναι διαθέσιμο ένα νέο στιγμιότυπο, ο πίνακας  $A$  θα επαυξηθεί κατά μία στήλη, καθώς οι στήλες του πίνακα  $A$  αντιπροσωπεύουν τον αριθμό των στιγμιοτύπων  $m$ , ενώ οι γραμμές αντιπροσωπεύουν τον αριθμό των υπολογιστικών κελιών  $n$ . Επομένως, ο πίνακας  $A$  με την προσθήκη του νέου στιγμιότυπου, θα αποκτήσει διάσταση  $n \times (m+1)$ . Όμως, στην περίπτωση του επαυξητικού SVD, ο πίνακας  $A$  δεν αποθηκεύεται, επομένως πρέπει να επαυξηθούν κατάλληλα οι πίνακες  $U$ ,  $\Sigma$  και  $V^T$ . Έστω  $\vec{\omega} \in \mathbb{R}^n$  ένα νέο στιγμιότυπο, το οποίο περιλαμβάνει κάποιο ροϊκό μέγεθος, τότε υπολογίζονται τα μεγέθη

$$\vec{p}' = U^T \vec{\omega} \quad \vec{g}' = U \vec{p}' \quad \vec{r}' = \vec{\omega} - \vec{g}' \quad (3.22)$$

Εισάγοντας το διάνυσμα  $\vec{\omega}$  στο προηγούμενο SVD οι πίνακες γίνονται

$$[U \Sigma V^T \quad \vec{\omega}] = \begin{bmatrix} U & \frac{\vec{r}'}{\|\vec{r}'\|} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma & \vec{p}' \\ 0 & \|\vec{r}'\| \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^T \quad (3.23)$$

Με τον τρόπο αυτό, οι πίνακες  $U$ ,  $\Sigma$  και  $V^T$  έχουν γίνει διάστασης  $n \times (k+1)$ ,  $(k+1) \times (k+1)$  και  $(k+1) \times (m+1)$  αντίστοιχα. Μπορεί έτσι να παραχθεί ο επαυξημένος πίνακας  $A$  διάστασης  $n \times (m+1)$ . Για να διατηρηθεί όμως η πρότυπη μορφή πινάκων του SVD, δηλαδή ο πίνακας  $\Sigma$  να είναι διαγώνιος με πλήθος ιδιόμορφων τιμών  $k$  εφαρμόζεται ένα

νέο SVD για τον επαυξημένο πίνακα  $\Sigma$  ως εξής

$$\begin{bmatrix} \Sigma & \vec{p}' \\ 0 & \|\vec{r}'\| \end{bmatrix} = U' \Sigma' V'^T \quad (3.24)$$

και, έτσι, οι τελικοί ανανεωμένοι πίνακες που προκύπτουν είναι

$$U_{n \times k}^{new} = \begin{bmatrix} U & \frac{\vec{r}'}{\|\vec{r}'\|} \end{bmatrix} U' \quad \Sigma_{k \times k}^{new} = \Sigma' \quad V_{m \times k}^{new} = \begin{bmatrix} V & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} V' \quad (3.25)$$

Όπως φάνηκε, με τη διαδικασία αυτή είναι εφικτό να δημιουργηθούν οι πίνακες  $U$ ,  $V$ ,  $\Sigma$  του μητρώου  $A$  χωρίς να χρειαστεί να αποθηκευτεί. Το κόστος γι' αυτήν την εξοικονόμηση αποθηκευτικού χώρου είναι η ανάγκη εκτέλεσης ενός SVD για κάθε στιγμιότυπο που προστίθεται. Το SVD εκτελείται κάθε φορά σε ένα πίνακα διάστασης  $(k+1) \times (k+1)$ , επομένως η επιλογή ενός μεγάλου  $k$  πρόκειται να αυξήσει σημαντικά το υπολογιστικό κόστος. Στη συνέχεια, στα κεφάλαια 5 και 6, εξετάζονται κάποιες ιδέες και τεχνικές, για τη μείωση του κόστους αυτού χωρίς να επηρεαστεί η ακρίβεια της λύσης.



## Κεφάλαιο 4

# Αλγόριθμος Βελτιστοποίησης και Ανάπτυξη Υπολογιστικού Κώδικα στο OpenFOAM

Στα προηγούμενα κεφάλαια, αναπτύχθηκαν οι μέθοδοι και τα υπολογιστικά εργαλεία, τόσο για τον υπολογισμό των παραγώγων ευαισθησίας μέσω της Συνεχούς Συζυγούς Μεθόδου, όσο και για την προσεγγιστική αποθήκευση των ροϊκών μεγεθών σε κάθε χρονική στιγμή, μέσω της Ανάλυσης Ιδιόμορφων Τιμών. Στο παρόν κεφάλαιο, θα αναλυθεί ο τρόπος με τον οποίο τα υπολογιστικά εργαλεία χρησιμοποιούνται και συνδέονται μεταξύ τους, ώστε να δημιουργηθεί ο αλγόριθμος της βελτιστοποίησης.

### 4.1 Το λογισμικό OpenFOAM

Όλοι οι υπολογισμοί, οι επιλύσεις της ροής και οι αλγόριθμοι συντάχθηκαν και εκτελέστηκαν με τη βοήθεια του λογισμικού OpenFOAM [39]. Το OpenFOAM (Open Field Operation and Manipulation) είναι ένα Open Source λογισμικό ΥΡΔ το οποίο αναπτύσσεται από την OpenCFD Ltd της ESI group και διανέμεται από το OpenFOAM Foundation. Είναι δομημένο προγραμματιστικά στη γλώσσα C++ και το γεγονός ότι είναι Open δίνει τη δυνατότητα, η υπάρχουσα λειτουργικότητα του

λογισμικού να μπορεί να επεκταθεί στις εκάστοτε ανάγκες. Συγκεκριμένα, αποτελείται από C++ βιβλιοθήκες, οι οποίες χρησιμοποιούνται για τη δημιουργία εκτελέσιμων αρχείων και κατ' επέκταση εφαρμογών. Οι εφαρμογές μπορεί να είναι είτε επιλύτες ροής για ένα πρόβλημα Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής, είτε χρηστικά εργαλεία για τον χειρισμό δεδομένων, όπως για παράδειγμα ο αλγόριθμος της Ανάλυσης Ιδιόμορφων Τιμών. Επίσης, διαθέτει εργαλεία για την κατασκευή κεντροκυφελικών δομημένων υπολογιστικών πλεγμάτων όπως το BlockMesh και το snappyHexMesh. Όσον αφορά τους επιλύτες ροής (flow solvers), το OpenFOAM διαθέτει διάφορους επιλύτες, ανάλογα με τις ιδιότητες του ρευστού και τα χαρακτηριστικά της ροής (συνεκτικότητα, τύρβη, συμπίεστικότητα, κτλ) και πολλοί από αυτούς είναι βασισμένοι σε αλγόριθμους όπως ο SIMPLE, ο PISO, ο PIMPLE κ.α.

## 4.2 Επίλυση της ροής

Στην παρούσα διπλωματική εργασία, οι ροές που μελετώνται είναι διδιάστατες, μη-μόνιμες, ασυμπίεστες και στρωτές (laminar), επομένως για την επίλυση τους θα χρησιμοποιηθεί ένας αλγόριθμος PISO [31]. Ο αλγόριθμος PISO (Pressure implicit with splitting of operator) ανήκει στην κατηγορία αλγορίθμων πρόβλεψης-διόρθωσης, με την έννοια ότι, αρχικά γίνεται μια πρόβλεψη για την ταχύτητα της ροής και, στη συνέχεια, διορθώνονται οι ταχύτητες και οι πιέσεις, μέσω των εξισώσεων ορμής και συνέχειας. Για την κατανόηση του αλγορίθμου PISO θα θεωρηθεί, χωρίς βλάβη της γενικότητας, μια μονοδιάστατη μη-συνεκτική ροή η οποία περιγράφεται από τις εξισώσεις Euler,

$$\nabla u = 0 \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(uu) = -\frac{\partial p}{\partial x} \quad (4.2)$$

Η διαδικασία που ακολουθεί ο αλγόριθμος είναι η εξής

- Αρχικά ο μη-γραμμικός όρος μεταφοράς στην εξίσωση της ορμής 4.2 γραμμικοποιείται ως  $\nabla uu = \nabla u^n u^*$  όπου ο όρος  $u^n$  αντιστοιχεί στην ταχύτητα την προηγούμενη χρονική στιγμή, ενώ ο όρος  $u^*$  αντιστοιχεί στην ταχύτητα πρόβλεψης της παρούσας χρονικής στιγμής.



- Διακριτοποιώντας την εξίσωση της ορμής προκύπτει

$$\left[ \frac{1}{\Delta t} + \left( \frac{u_{i+\frac{1}{2}}^n - u_{i-\frac{1}{2}}^n}{2\Delta x} \right) \right] u_i^* + \frac{u_{i+\frac{1}{2}}^n}{2\Delta x} u_{i+1}^* - \frac{u_{i-\frac{1}{2}}^n}{2\Delta x} u_{i-1}^* = \frac{u_i^n}{\Delta t} - \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right) \Big|_i^n \quad (4.3)$$

- Γράφεται η διακριτοποιημένη εξίσωση της ορμής σε διανυσματική μορφή

$$\mathbf{C}\mathbf{u}^* = \mathbf{r} - \nabla \mathbf{p}^n \quad (4.4)$$

όπου ο πίνακας  $\mathbf{C}$  είναι ένα πίνακας συντελεστών και το  $\mathbf{r}$  παριστά το διάνυσμα των όρων πηγής. Είναι σημαντικό να σημειωθεί ότι, στην περίπτωση κατά την οποία η εξίσωση ορμής περιλάμβανε συνεκτικούς όρους, αυτοί θα τροποποιούσαν τον πίνακα  $\mathbf{C}$  χωρίς να αλλάξει η γενική μορφή της εξίσωσης 4.4. Αναλύοντας τον πίνακα  $\mathbf{C}$ , σε ένα διαγώνιο πίνακα  $\mathbf{A}$  και σε ένα μη-διαγώνιο  $\mathbf{H}$ , δηλαδή  $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{H}'$ , η εξίσωση 4.4 γράφεται

$$\mathbf{A}\mathbf{u}^* + \mathbf{H}'\mathbf{u}^* = \mathbf{r} - \nabla \mathbf{p}^n \quad (4.5)$$

Η εξίσωση αυτή επιλύεται για την ταχύτητα πρόβλεψης  $u^*$ .

- Στη συνέχεια, η εξίσωση της ορμής ξαναγράφεται στη μορφή

$$\left[ \frac{1}{\Delta t} + \left( \frac{u_{i+\frac{1}{2}}^n - u_{i-\frac{1}{2}}^n}{2\Delta x} \right) \right] u_i^{**} + \frac{u_{i+\frac{1}{2}}^n}{2\Delta x} u_{i+1}^* - \frac{u_{i-\frac{1}{2}}^n}{2\Delta x} u_{i-1}^* = \frac{u_i^n}{\Delta t} - \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right) \Big|_i^n \quad (4.6)$$

όπου,  $u^{**}$  η διορθωμένη ταχύτητα και  $p^*$  η διορθωμένη πίεση. Αντίστοιχα με πριν, η εξίσωση 4.6 γράφεται σε διανυσματική μορφή

$$\mathbf{A}\mathbf{u}^{**} + \mathbf{H}'\mathbf{u}^* = \mathbf{r} - \nabla \mathbf{p}^n \quad (4.7)$$

Εισάγοντας τον πίνακα  $\mathbf{H} = \mathbf{r} - \mathbf{H}'\mathbf{u}^*$  και αντιστρέφοντας τον πίνακα  $\mathbf{A}$  η εξίσωση 4.7 γίνεται

$$\mathbf{u}^{**} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{H} - \mathbf{A}^{-1}\nabla \mathbf{p}^n \quad (4.8)$$

- Με βάση την εξίσωση της συνέχειας, θα ισχύει  $\nabla \cdot \mathbf{u}^{**} = 0$ , επομένως προκύπτει

μια εξίσωση Poisson για τη διορθωμένη πίεση,

$$\nabla^2(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{p}^*) = \nabla \cdot (\mathbf{A}^{-1}\mathbf{H}) \quad (4.9)$$

Με την επίλυση της εξίσωσης για τη διορθωμένη πίεση, μπορεί πλέον να λυθεί και η εξίσωση 4.8 για τη διορθωμένη ταχύτητα  $u^{**}$ .

Όπως φαίνεται η κύρια παραδοχή στην οποία βασίζεται ο PISO είναι ότι η εξίσωση της ορμής μπορεί να 'παγώσει' για μία σειρά από διορθώσεις για την πίεση. Η παραδοχή αυτή στηρίζεται στο ότι η εξάρτηση του  $u$  με το  $u$  στο μη-γραμμικό όρο, δεν είναι τόσο ισχυρή όσο η εξάρτηση του  $u$  με το  $p$ , κάτι το οποίο ισχύει μόνο για μικρά χρονικά βήματα υπολογισμού. Το πόσο μικρό ή μεγάλο είναι ένα χρονικό βήμα δεν είναι κάτι απόλυτο, αλλά εξαρτάται από τη διάσταση των κελιών του πλέγματος και την ταχύτητα. Ένας αδιάστατος αριθμός που συσχετίζει το χρονικό βήμα  $\Delta t$  με τη διάσταση των κελιών  $\Delta x$  και την ταχύτητα  $u$  είναι ο αριθμός Courant ο οποίος ορίζεται ως :

$$C = \Delta t \frac{u_i}{\Delta x_i} \quad (4.10)$$

Γενικά, σε ροές είναι επιθυμητός ο αριθμός Courant να είναι  $C < 1$ .

### 4.3 Αλγόριθμος Βελτιστοποίησης

Τα βήματα και η διαδικασία που ακολουθείται για τη βελτιστοποίηση και τον έλεγχο της ροής έχει ως εξής :

- Υπενθυμίζεται, ότι οι μεταβλητές σχεδιασμού του προβλήματος, είναι τα πλάτη της ταχύτητας των δεσμών έγχυσης/αναρρόφησης. Για τον πρώτο κύκλο βελτιστοποίησης οι μεταβλητές αυτές αρχικοποιούνται στην τιμή μηδέν. Δηλαδή οι δέσμες δεν εγχύουν ούτε αναρροφούν ποσότητα ρευστού.
- Αρχικά γίνεται η επίλυση της μη-μόνιμης, ασυμπέστης, στρωτής ροή με βάση τον αλγόριθμο PISO που αναπτύχθηκε παραπάνω. Στο λογισμικό του OpenFOAM, χρησιμοποιείται ο αλγόριθμος PISO μέσω του επιλύτη pisoFoam για στρωτή ροή.
- Κατά τη διάρκεια της επίλυσης και σε κάθε χρονικό βήμα εκτελείται ο αλγόριθμος της Επαυξητικής Ανάλυσης Ιδιόμορφων Τιμών (Incremental SVD), με παράμετρο την επιθυμητή τάξη του προσεγγιστικού πίνακα στιγμιοτύπων.

Αποθηκεύονται οι πίνακες  $U$ ,  $\Sigma$ ,  $V$  που προκύπτουν, και υπολογίζεται η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης, όπως αυτή ορίστηκε στο Κεφάλαιο 2.

- Όταν ολοκληρωθεί η επίλυση του πρωτεύοντος πεδίου, ξεκινάει η επίλυση του συζυγούς πεδίου με αντίθετη χρονική προέλαση, με βάση τις εξισώσεις 2.19. Τα μεγέθη του πρωτεύοντος προβλήματος που είναι απαραίτητα για την επίλυση των συζυγών εξισώσεων, ανακτώνται προσεγγιστικά από τους πίνακες  $U$ ,  $\Sigma$  και  $V$ .
- Υπολογίζεται η συνεισφορά κάθε χρονικού βήματος στην τελική παράγωγο ευαισθησίας.
- Με το τέλος της επίλυσης της συζυγούς εξίσωσης, ολοκληρώνονται οι συνεισφορές στην επιθυμητή χρονική περίοδο  $T$  και υπολογίζονται οι τελικές παράγωγοι ευαισθησίας.
- Τέλος, με χρήση της μεθόδου απότομης καθόδου (Steepest Descent), ανανεώνονται οι τιμές των μεταβλητών σχεδιασμού και η διαδικασία επαναλαμβάνεται μέχρις ότου η αντικειμενική συνάρτηση να πληροί κάποιο κριτήριο σύγκλισης.



# Κεφάλαιο 5

## Ροή γύρω από Τετραγωνικό

## Πρίσμα

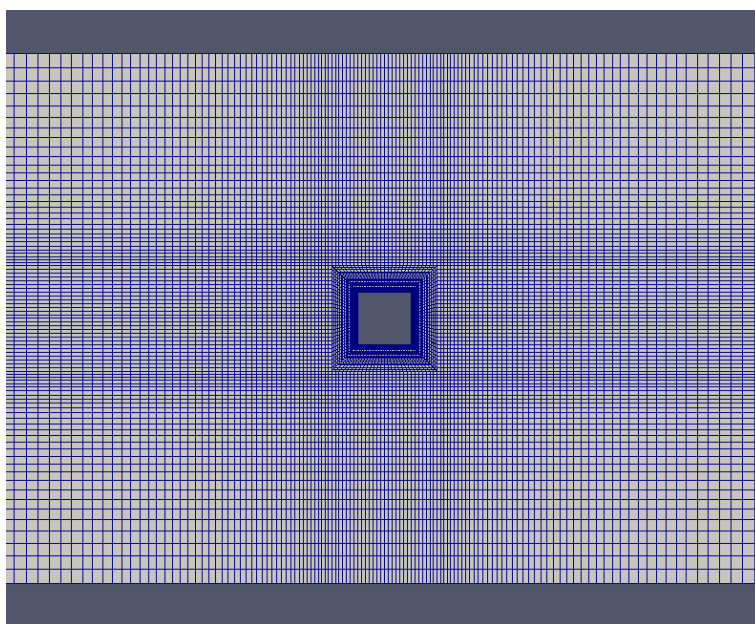
Για την εφαρμογή της συνεχούς συζυγούς μεθόδου βελτιστοποίησης αλλά και των Προτύπων Μειωμένης Τάξης μέσω του επαυξητικού SVD, θα εξεταστεί η ροή γύρω από ένα τετραγωνικό πρίσμα.

### 5.1 Περιγραφή του προβλήματος

Θεωρείται ένα τετραγωνικό πρίσμα απείρου μήκους με πλευρά τετραγώνου  $d=1cm$ . Μπορεί να θεωρηθεί ότι η ροή είναι συμμετρική ως προς τη διάσταση του βάθους επομένως το πρόβλημα που θα επιλυθεί είναι διδιάστατο. Μέσω της εφαρμογής blockMesh του OpenFOAM κατασκευάζεται το υπολογιστικό πλέγμα το οποίο αποτελείται από 18.000 τετραπλευρικά υπολογιστικά κελιά (cells) και φαίνεται στο σχήμα 5.1.

### 5.2 Αποτελέσματα

Από τη στιγμή που το ενδιαφέρον βρίσκεται στον έλεγχο μη-μόνιμων ροών, ο έλεγχος θα εφαρμοστεί αρχικά στον έλεγχο των στροβίλων von Karman. Οι



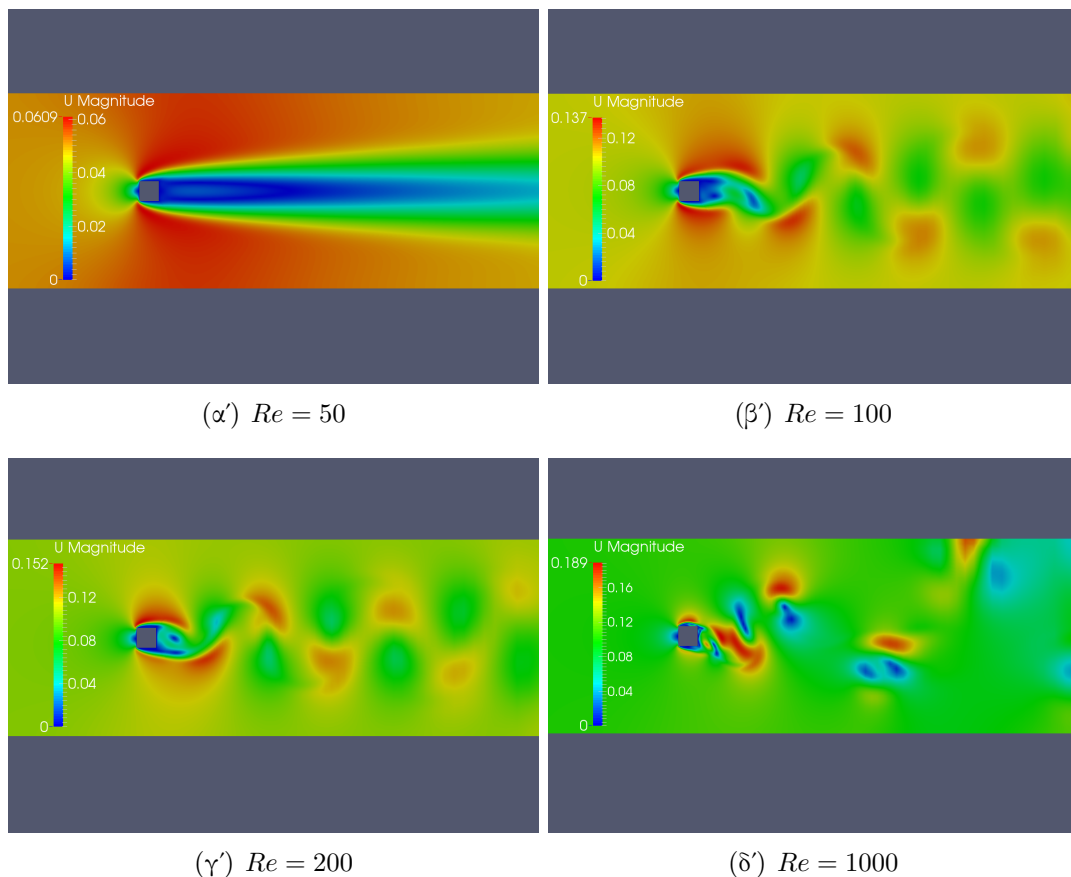
Σχήμα 5.1: Υπολογιστικό πλέγμα επίλυσης 2D ροής.

στρόβιλοι όπως αναλύθηκε και στην εισαγωγή εμφανίζονται σε ένα εύρος αριθμών Reynolds. Παρότι υπάρχει αρκετή βιβλιογραφία για τη ροή γύρω από κύλινδρο [30], [7], δεν μπορεί να υποτεθεί με σιγουριά ότι η ροή γύρω από το τετραγωνικό πρίσμα θα ακολουθήσει την ίδια δυναμική. Επομένως, ακολουθεί μια παραμετρική ανάλυση που θα συσχετίσει τον αριθμό Reynolds με το σχηματισμό στροβίλων. Ο αριθμός Reynolds είναι :

$$Re = \frac{ud}{\nu} \quad (5.1)$$

Θεωρείται σταθερή ταχύτητα εισόδου  $u = 0.1m/s$  και χαρακτηριστικό μήκος την πλευρά του τετραγώνου  $d = 0.1m$ , επομένως η μεταβλητή  $\nu$  θα είναι η παράμετρος με την οποία θα ορίζεται ο Reynolds. Στο σχήμα 5.2 παρουσιάζεται η μορφή της ροής για διάφορους αριθμούς Reynolds. Παρατηρείται ότι για  $Re = 40$  δεν δημιουργούνται στρόβιλοι, για  $Re = 100$  και  $Re = 200$  η ύπαρξη στροβίλων είναι εμφανής, δημιουργώντας το χαρακτηριστικό μοτίβο, ενώ για  $Re = 1000$  οι στρόβιλοι φαίνεται να διαλύονται. Επομένως, σε όλες τις περιπτώσεις που θα αναλυθούν στη συνέχεια, έχει επιλεγεί  $Re = 100$ .

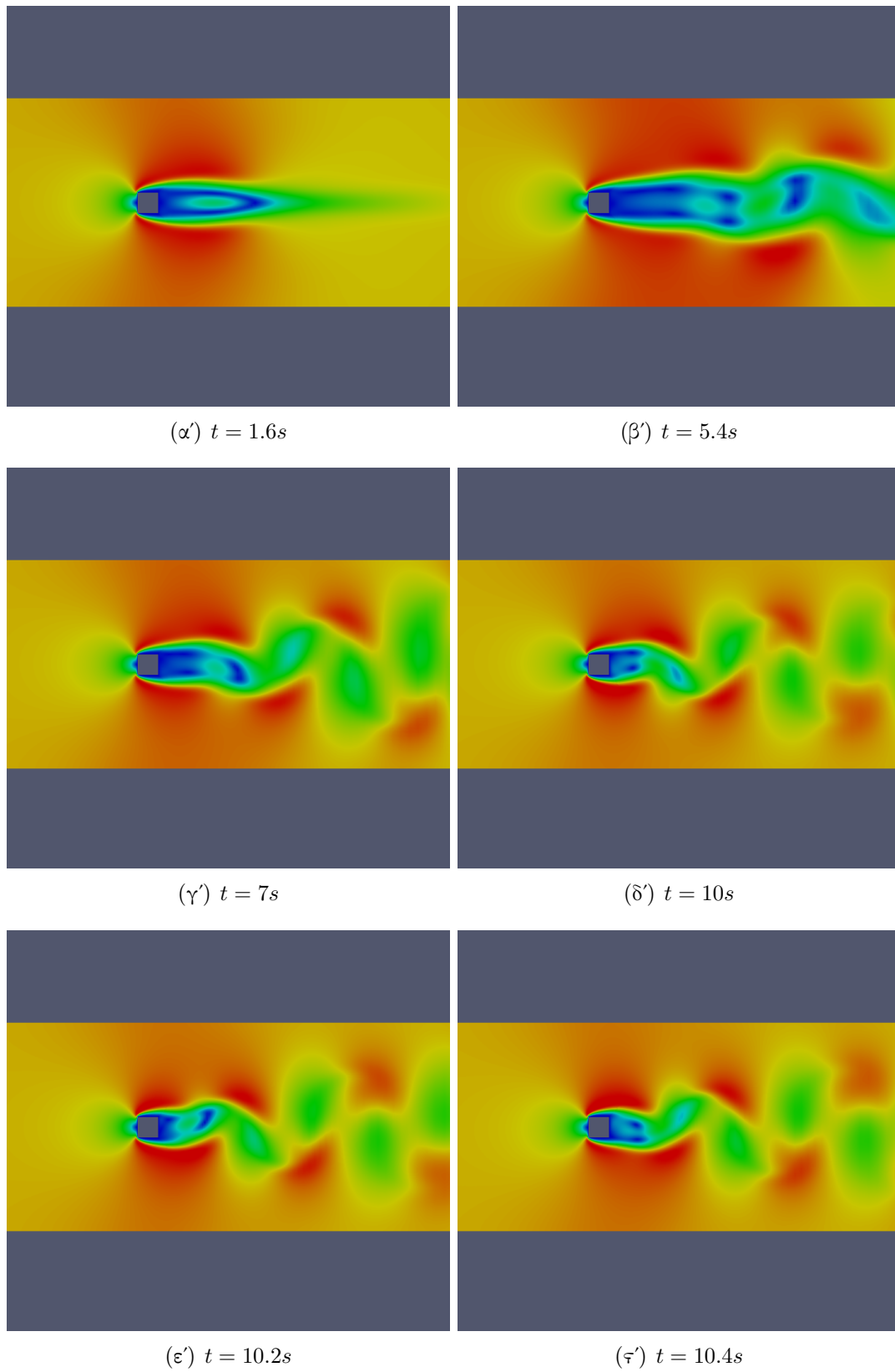
Για  $Re = 100$  απεικονίζονται έξι στιγμιότυπα της ροής από το αρχικό πεδίο μέχρι τη δημιουργία στροβίλων (σχήμα 5.3), καθώς και οι τιμές του συντελεστή αντίστασης και άνωσης σε συνάρτηση με το χρόνο (σχήματα 5.4 και 5.5). Είναι φανερό πως όταν



**Σχήμα 5.2:** Πεδία ροής, όπως υπολογίστηκαν, γύρω από τετραγωνικό πρίσμα για διάφορους αριθμούς Reynolds.

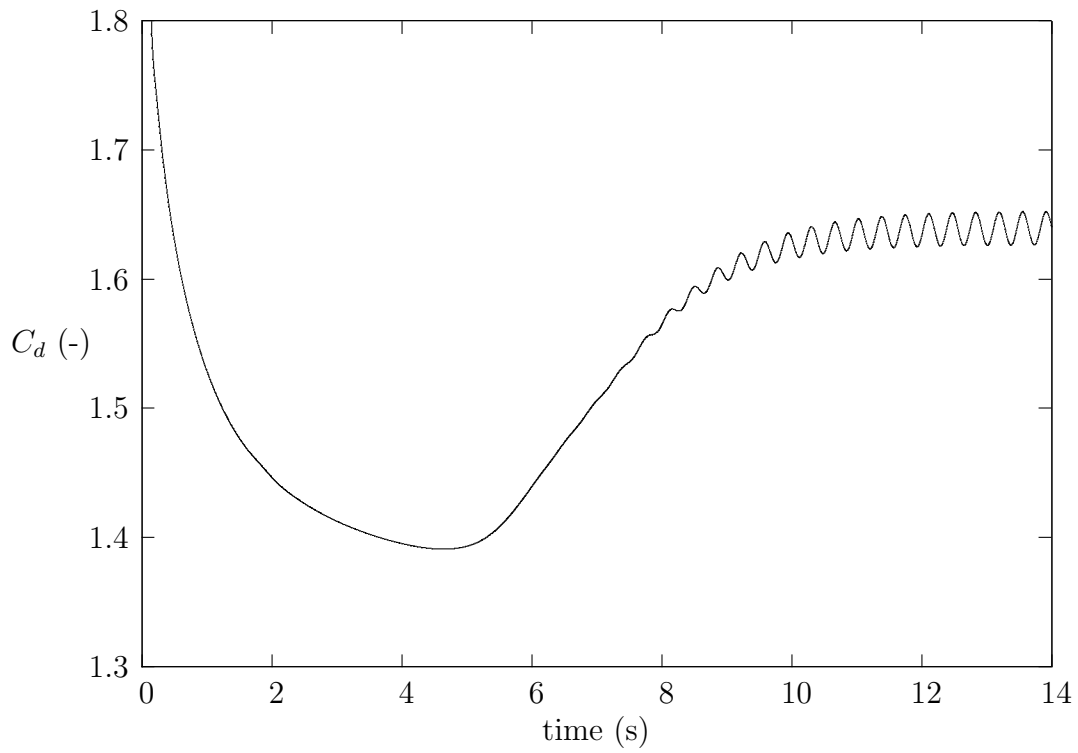
αρχίζουν να δημιουργούνται οι αποκολλήσεις ( $t = 5.4s$  στο σχήμα 5.3) των στροβίλων ο συντελεστής αντίστασης αυξάνει κατά πολύ και, στη συνέχεια, ταλαντώνεται γύρω από μια τιμή  $C_d \approx 1.62$ .

Όμοια ο συντελεστής άνωσης ξεκινά να ταλαντώνεται γύρω από το μηδέν αφού το σώμα είναι μη-ανωστικό. Μπορεί να παρατηρηθεί ότι η περίοδος ταλάντωσης του  $C_l$  είναι διπλάσια από του  $C_d$ . Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι όταν αποκολλάται ο πάνω στρόβιλος ασκείται δύναμη προς τα κάτω ( $C_l < 0$ ) ενώ όταν αποκολλάται ο κάτω στρόβιλος ασκείται δύναμη προς τα πάνω ( $C_l > 0$ ). Αντίθετα, στη διεύθυνση της δύναμης αντίστασης, όποιος στρόβιλος και να αποκολληθεί η κατεύθυνση της δύναμης είναι ίδια. Ορίζεται ως περίοδος του φαινομένου, ο χρόνος μεταξύ δύο διαδοχικών αποκολλήσεων στροβίλων ίδιας φοράς. Επομένως, κοιτώντας το χρονικό διάστημα ανάμεσα σε δύο μέγιστα στο διάγραμμα του  $C_l$  υπολογίζεται η περίοδος του φαινομένου  $T = 0.724s$ . Στον κύλινδρο, με βάση τη βιβλιογραφία, [30], η αντίστοιχη περίοδος είναι  $T = 0.6s$ .

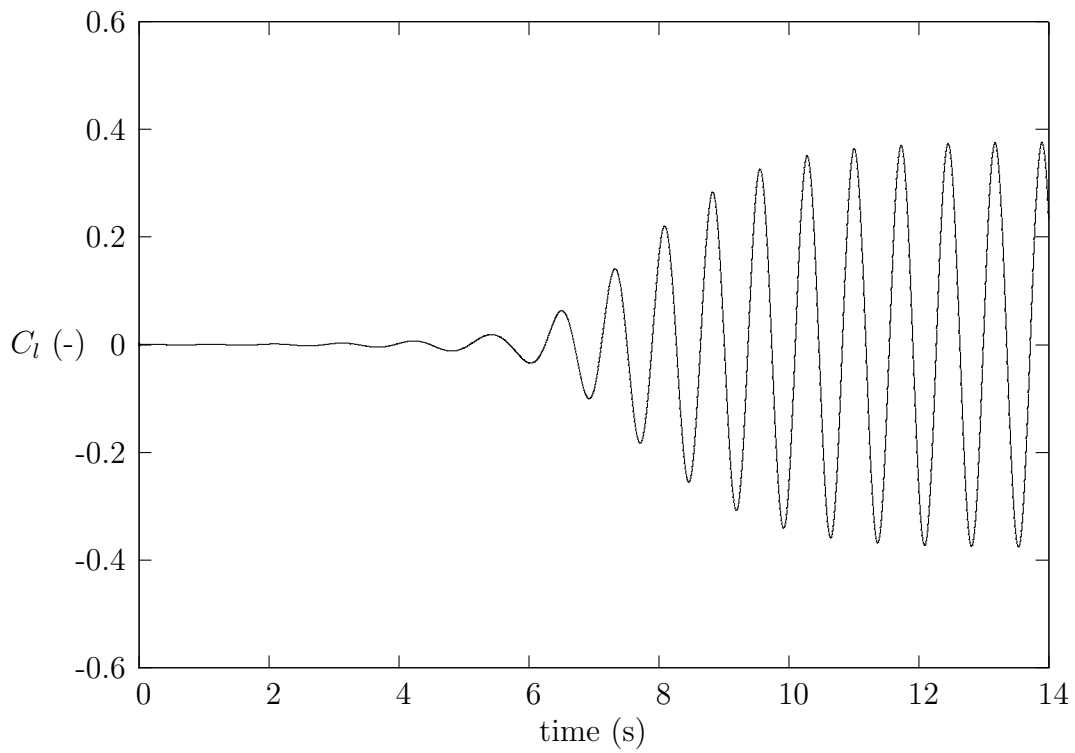


Σχήμα 5.3: Σχηματισμός στροβίλων von Karman για  $Re = 100$ .





Σχήμα 5.4: Συντελεστής αντίστασης  $C_d$  για  $Re = 100$  σε συνάρτηση με το χρόνο.



Σχήμα 5.5: Συντελεστής άνωσης  $C_l$  για  $Re = 100$  σε συνάρτηση με το χρόνο.

Για την εφαρμογή ενός ROM μέσω του επαυξητικού SVD θα εξεταστεί αρχικά μόνο το τμήμα της χρονικής μεταβολής που αφορά την περιοδικά μόνιμη ροή. Δηλαδή θα αγνοηθεί το μεταβατικό στάδιο από τη στιγμή που εφαρμόζεται η επ' άπειρον ταχύτητα μέχρι να σχηματιστεί πλήρως το φαινόμενο σχηματισμού στροβίλων. Όπως αναφέρθηκε και στο προηγούμενο κεφάλαιο, είναι σημαντικό να βρεθεί ο κατάλληλος αριθμός ιδιόμορφων τιμών που πρέπει να αποθηκευτούν ώστε να προκύψει μια καλή προσέγγιση του αρχικού πίνακα στιγμιοτύπων. Ένας τρόπος που είχε προταθεί, [13], για να γίνει μια τέτοια επιλογή είναι ο υπολογισμός του αριθμού TEC (total energy content), πέραν αυτού του τρόπου όμως, παρακάτω θα αναλυθούν και άλλοι δύο τρόποι εκτίμησης της προσέγγισης. Στη συνέχεια, όταν χρησιμοποιείται ο όρος *rank* δηλώνει την τάξη του προσεγγιστικού πίνακα στιγμιοτύπων καθώς και τον αριθμό των ιδιόμορφων τιμών.

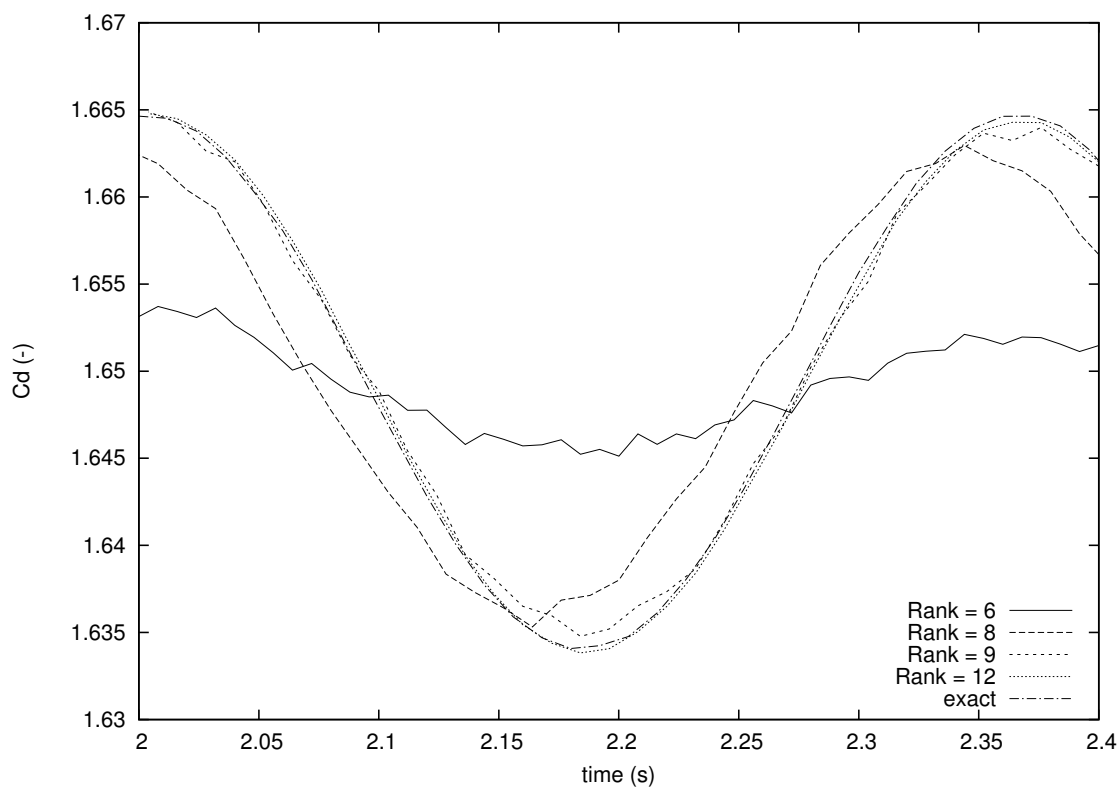
Ο συντελεστής αντίστασης υπολογίζεται ολοκληρώνοντας τις πιέσεις γύρω από το σώμα και προσθέτοντας τις δυνάμεις λόγω συνεκτικότητας, οι οποίες περιλαμβάνουν παραγωγούς ταχυτήτων. Επομένως η σύγκριση του συντελεστή αντίστασης της πλήρους λύσης, με αυτές που θα προκύψουν εφαρμόζοντας το επαυξητικό SVD, για διάφορα *rank*, θα ήταν ένα καλό μέτρο σύγκρισης της ποιότητας της λύσης που αναπαράγεται, καθώς ο υπολογισμός του  $C_d$  θα περιλαμβάνει τα σφάλματα που θα δημιουργούνται τόσο στην πίεση όσο και στην ταχύτητα.

$$C_d = \frac{D/b}{\frac{1}{2}\rho U^2} = \frac{1}{\rho U^2} \int_S (p - p_0) \vec{n} \cdot \vec{j} dS + \frac{1}{\rho U^2} \int_S -\nu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \vec{t} \cdot \vec{j} dS \quad (5.2)$$

Με βάση τα παραπάνω, στο σχήμα 5.6 παριστώνται τα διαγράμματα του συντελεστή αντίστασης για διάφορα *rank*s, καθώς και το διάγραμμα της ακριβούς λύσης.

Παρατηρείται ότι για  $rank = 6$  η λύση που προκύπτει δεν είναι καλή, ενώ αυξάνοντας το *rank* μέχρι την τιμή 12 είναι φανερό ότι η λύση είναι σχεδόν τέλεια. Αν το *rank* έπαιρνε την τιμή 14 δε θα ήταν δυνατό να φανεί η διαφορά πάνω στο διάγραμμα, επομένως μια επιλογή για  $rank > 14$  δε θα παρείχε κάποια ουσιαστική βελτίωση στη λύση και, επιπρόσθετα, θα κόστιζε σε μνήμη.

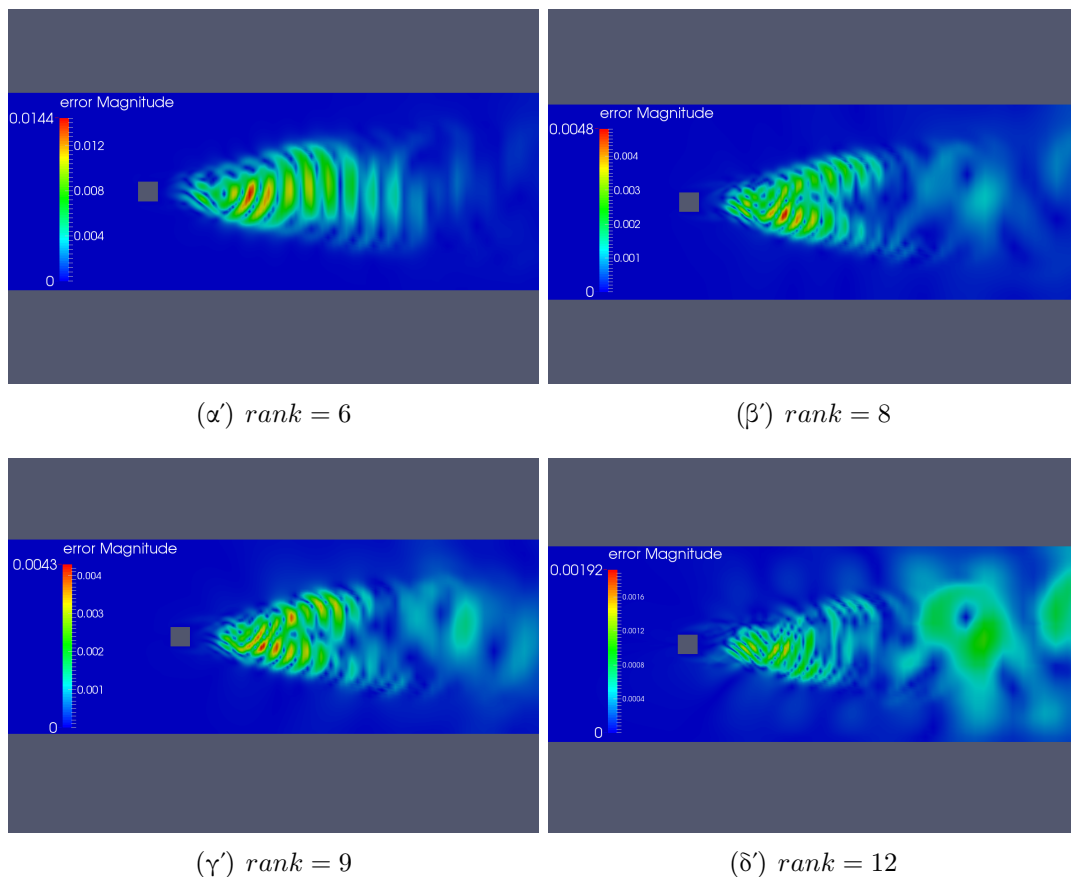
Ένας άλλος τρόπος με τον οποίο μπορεί να γίνει εκτίμηση της ποιότητας προσέγγισης, είναι να υπολογιστεί το σφάλμα, στα υπολογιστικά κελιά του πλέγματος, ανάμεσα στην ακριβή λύση και στη λύση που αναπαράγεται εφαρμόζοντας



**Σχήμα 5.6:** Συντελεστής αντίστασης σε συνάρτηση με το χρόνο για διάφορα ranks και σύγκρισή τους με την πλήρη λύση.

το επαυξητικό SVD. Επομένως στο σχήμα 5.7 παρουσιάζεται το σφάλμα της ταχύτητας σε όλο το πεδίο ροής για διάφορα ranks.

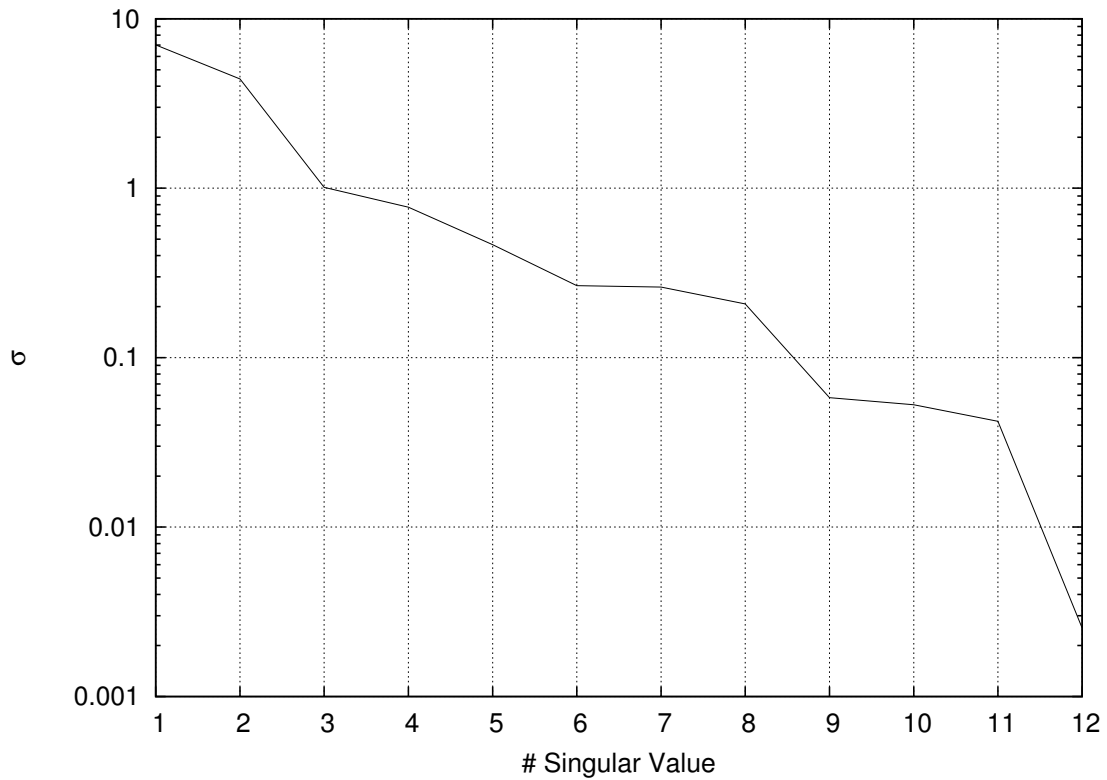
Όπως φαίνεται το μεγαλύτερο σφάλμα βρίσκεται στον ομόρρου που δημιουργείται πίσω από το σώμα, ενώ στα υπόλοιπα σημεία είναι μηδενικό. Όπως είχε αναφερθεί κατά την ανάλυση των Προτύπων Μειωμένης Τάξης, τα βασικά χαρακτηριστικά ενός συστήματος μπορούν να αναπαραχθούν χρησιμοποιώντας ελάχιστη πληροφορία. Για τις περιοχές στις οποίες δεν υπάρχει κάποια έντονη χρονική μεταβολή των μεγεθών, όπως λ.χ μακριά από το σώμα, απαιτείται ένας πολύ μικρός αριθμός ιδιόμορφων τιμών ώστε να προκύψει μια καλή προσέγγιση. Αντίθετα, στις περιοχές όπου οι χρονικές παράγωγοι των μεγεθών της ροής έχουν μεγάλες τιμές, απαιτείται πολύ μεγαλύτερος αριθμός ιδιόμορφων τιμών ώστε να προσεγγιστούν με ακρίβεια τα δυναμικά φαινόμενα. Έτσι, στο τμήμα που η ροή δεν έχει ιδιαίτερες διαταραχές, το σφάλμα είναι σχεδόν μηδενικό, ενώ στον ομόρρου που υπάρχουν επανακυκλοφορίες, στρόβιλοι και γενικά μεγάλες τιμές στις χρονικές παραγώγους των ροϊκών μεγεθών, το σφάλμα είναι μεγάλο.



**Σχήμα 5.7:** Το σφάλμα της προσεγγιστικής λύσης, η οποία υπολογίστηκε μέσω του επαυξητικού SVD, σε σχέση με την ακριβή λύση για διάφορα ranks.

Θα οριστεί ως σφάλμα, η απόλυτη τιμή της διαφοράς μεταξύ της ακριβούς και της προσεγγιστικής λύσης, δηλαδή  $error = |U_{exact} - U_{SVD}|$ . Υπενθυμίζεται ότι η επί άπειρον ταχύτητα της ροής είναι  $U_{\infty} = 0.1m/s$ . Παρατηρώντας το σχήμα 5.7, φαίνεται ότι η μέγιστη απόλυτη τιμή του σφάλματος είναι  $error = 0.0144$  για  $rank = 6$ , δηλαδή ποσοστό 14% ως προς την  $U_{\infty}$ . Το οποίο δείχνει ότι δεν είναι καλή η προσέγγιση. Αντίθετα για  $rank = 12$ , προσθέτοντας δηλαδή άλλες έξι ιδιόμορφες τιμές, το μέγιστο σφάλμα πέφτει κατά μία τάξη μεγέθους σε ένα ποσοστό 1% ως προς την  $U_{\infty}$ , το οποίο είναι απολύτως ικανοποιητικό.

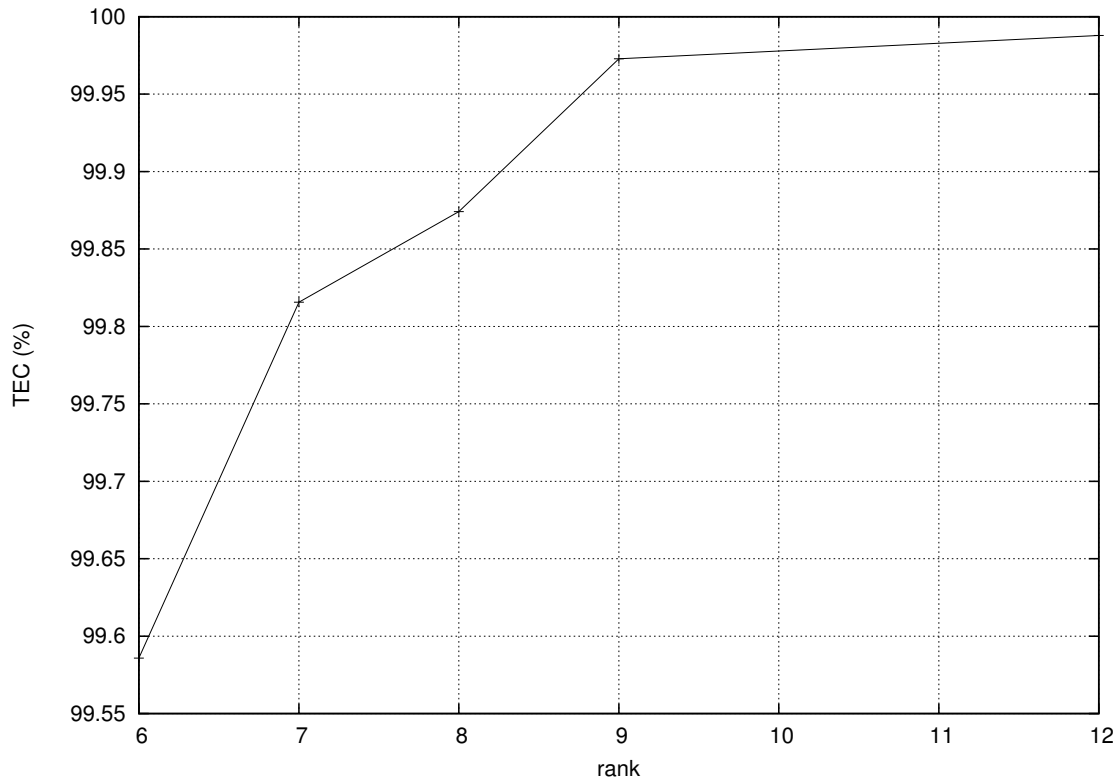
Ο τελευταίος τρόπος αξιολόγησης που θα παρουσιαστεί είναι αυτός που παρουσιάστηκε και στη θεωρία, μέσω του υπολογισμού του αριθμού TEC. Στο διάγραμμα 5.8 παρουσιάζεται η κατανομή που ακολουθούν οι ιδιόμορφες τιμές για τον πίνακα στιγμιοτύπων της πίεσης, οι οποίες παρουσιάζονται και πινακοποιημένες.



Σχήμα 5.8: Η κατανομή των ιδιόμορφων τιμών του πίνακα στιγμοτύπων της πίεσης.

Singular values	
1st	7.012
2nd	4.411
3rd	1.012
4th	0.773
5th	0.463
6th	0.266
7th	0.261
8th	0.207
9th	0.058
10th	0.052
11th	0.042
12th	0.003

Παρατηρείται ότι οι τιμές των ιδιόμορφων τιμών μειώνονται με εκθετικό τρόπο το οποίο επαληθεύει το γεγονός ότι για  $rank > 14$  δεν θα υπάρξει ουσιαστική αλλαγή



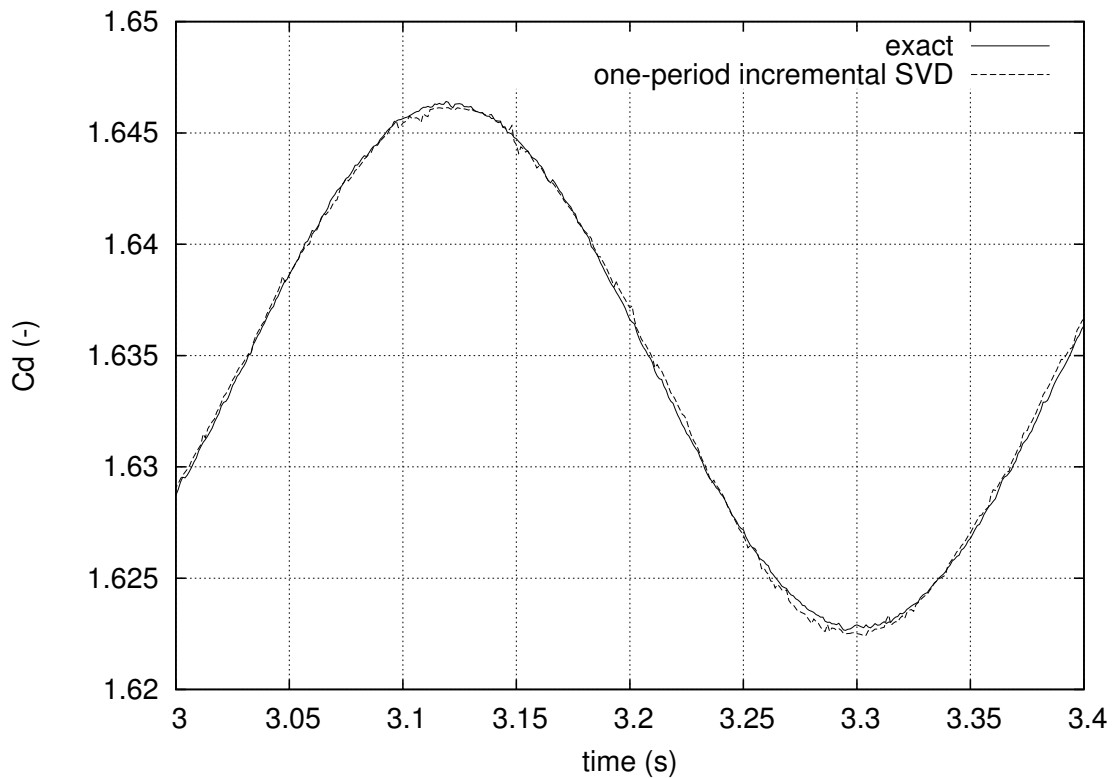
**Σχήμα 5.9:** Η συνολική περιέχουσα ενέργεια (*Total Energy Content*) του προσεγγιστικού πίνακα πιέσεων συναρτήσει του Rank.

στη προσεγγιστική λύση. Στη συνέχεια, με βάση τον τύπο

$$TEC = \frac{\sum_{i=1}^k \sigma_i^2}{\sum_{i=1}^m \sigma_i^2} \quad (5.3)$$

όπου  $k$  το rank που έχει επιλεγεί κάθε φορά (6, 8, 9, 12) και  $m$  ο αριθμός των συνολικών στιγμιοτύπων. Στο σχήμα 5.9 παρουσιάζεται το επί τοις εκατό ποσοστό της πληροφορίας που περιέχεται στο προσεγγιστικό πίνακα πιέσεων ως προς τη συνολική πληροφορία του πλήρους πίνακα. Στο διάγραμμα παρατηρείται ότι, ακόμα και με μικρά ranks, το TEC είναι αρκετά μεγάλο ( $> 99.4\%$ ) χωρίς όμως η προσέγγιση που προκύπτει να είναι ικανοποιητική. Ικανοποιητική λύση είχε προκύψει για  $rank \geq 12$ , επομένως το κριτήριο που θα μπορούσε να τεθεί, για τη συγκεκριμένη περίπτωση, είναι  $TEC > 99.98\%$ .

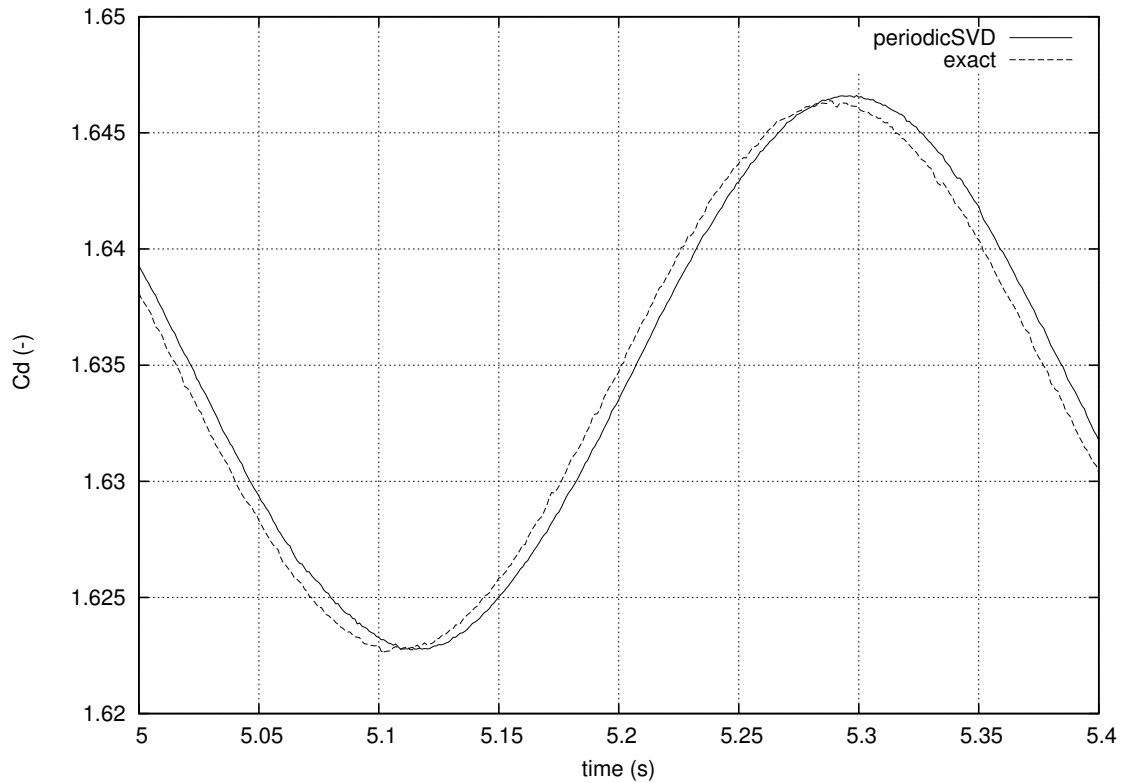
Στη μέχρι τώρα ανάλυση, το επαυξητικό SVD εφαρμόζονταν σε κάθε χρονικό βήμα, από τη στιγμή που το φαινόμενο έκλυσης στροβίλων είχε γίνει περιοδικά μόνιμο και



**Σχήμα 5.10:** Σύγκριση ανάμεσα στον συντελεστή αντίστασης της πλήρους λύσης και της λύσης με εφαρμογή SVD μόνο σε μία περίοδο για  $rank=10$ .

σταματούσε με την ολοκλήρωση κάποιου αριθμού περιόδων. Από τη στιγμή όμως που το φαινόμενο είναι περιοδικό, μπορεί να εφαρμοστεί το επαυξητικό SVD σε μία μόνο περίοδο και οι λύσεις που θα προκύψουν να αναπαραχθούν για τις αντίστοιχες χρονικές στιγμές των υπολοίπων περιόδων. Με τον τρόπο αυτό, εξοικονομείται το υπολογιστικό κόστος εκτέλεσης του επαυξητικού SVD σε κάθε χρονικό βήμα, για όλη τη χρονική διάρκεια κατά την οποία επιλύεται η ροή. Στο γράφημα 5.10, έχει σχεδιαστεί ο συντελεστής αντίστασης εκτελώντας επαυξητικό SVD, για  $rank = 10$ , σε μία μόνο περίοδο, καθώς και ο συντελεστής αντίστασης της πλήρους λύσης. Το χρονικό διάστημα για το οποίο σχεδιάστηκε ο συντελεστής αντίστασης είναι αυτό στο οποίο εκτελέστηκε το επαυξητικό SVD.

Το μειονέκτημα της εφαρμογής του SVD σε μία περίοδο, βρίσκεται στο γεγονός ότι δεν είναι γνωστή ακριβώς η τιμή της περιόδου του φαινομένου. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα, όταν αναπαράγεται η λύση σε χρονικές στιγμές που βρίσκονται μακριά από την περίοδο που εφαρμόστηκε το SVD, να δημιουργείται μια διαφορά φάσης ανάμεσα στην προσεγγιστική και την ακριβή λύση. Στο σχήμα 5.11 έχει σχεδιαστεί η



**Σχήμα 5.11:** Η λύση που αναπαράγει το περιοδικό SVD 8 περιόδους μετά την περίοδο εφαρμογής του.

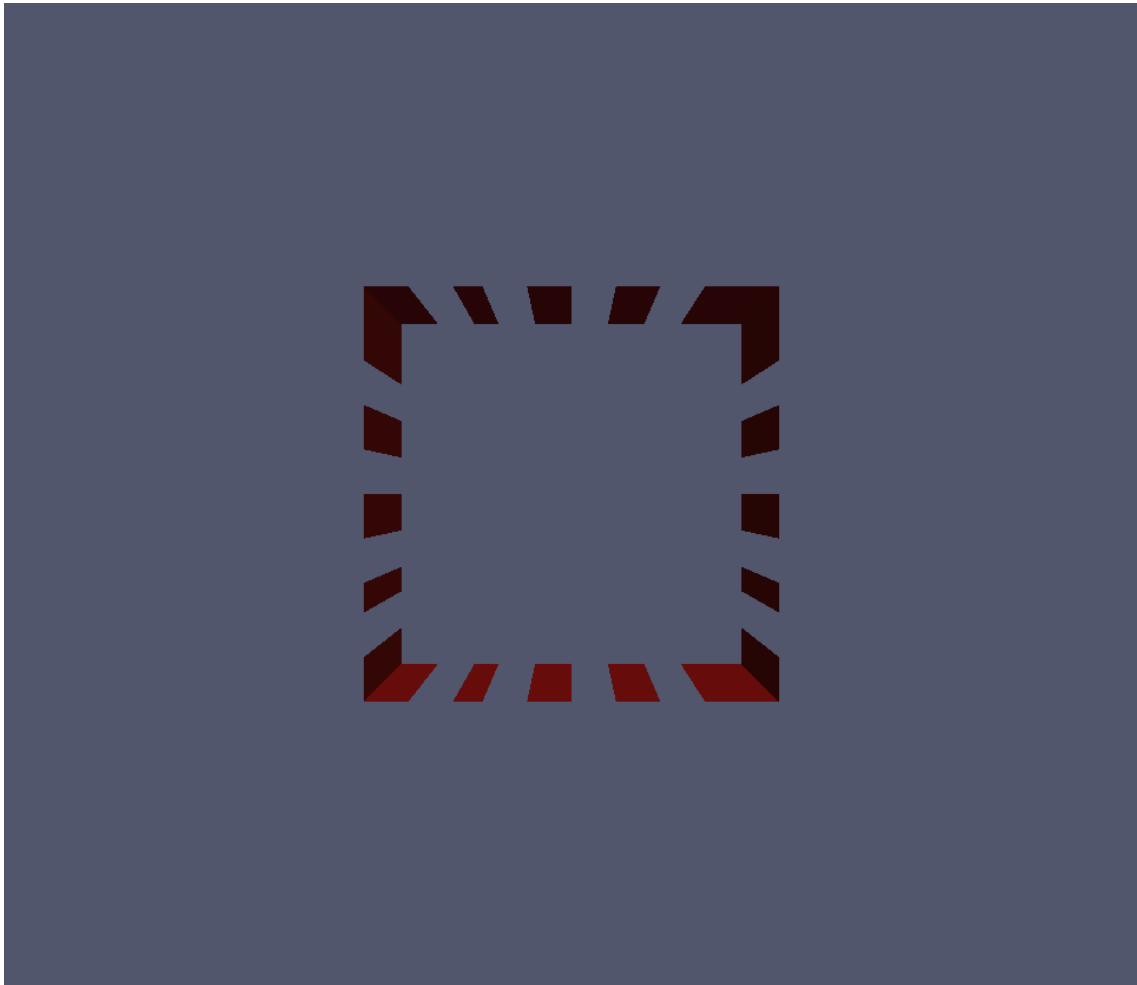
λύση που αναπαράγει το SVD 8 περιόδους μετά την περίοδο στην οποία εφαρμόστηκε. Σε αυτό φαίνεται ξεκάθαρα η διαφορά φάσης που αποκτούν οι δύο λύσεις εξαιτίας του σφάλματος που υπάρχει στον υπολογισμό της περιόδου του φαινομένου έκλυσης στροβίλων. Μια λύση για το πρόβλημα αυτό είναι η εφαρμογή περισσότερων του ενός SVD, σε διάφορες περιόδους, ώστε η λύση να αναπαράγεται από κοντινές κάθε φορά περιόδους, μειώνοντας έτσι το σφάλμα λόγω διαφοράς φάσης.

### 5.2.1 Έλεγχος της Ροής

Ο τελικός στόχος, για την περίπτωση που εξετάζεται, είναι η ελαχιστοποίηση της αντικειμενικής συνάρτησης, όπως αυτή ορίστηκε στο κεφάλαιο 2, μέσω του ελέγχου της ροής γύρω από το σώμα. Για το στήσιμο του προβλήματος ορίστηκαν τα εξής δεδομένα :

- Η συχνότητα έγχυσης/αναρρόφησης των δεσμών είναι σταθερή και ίση με  $f =$



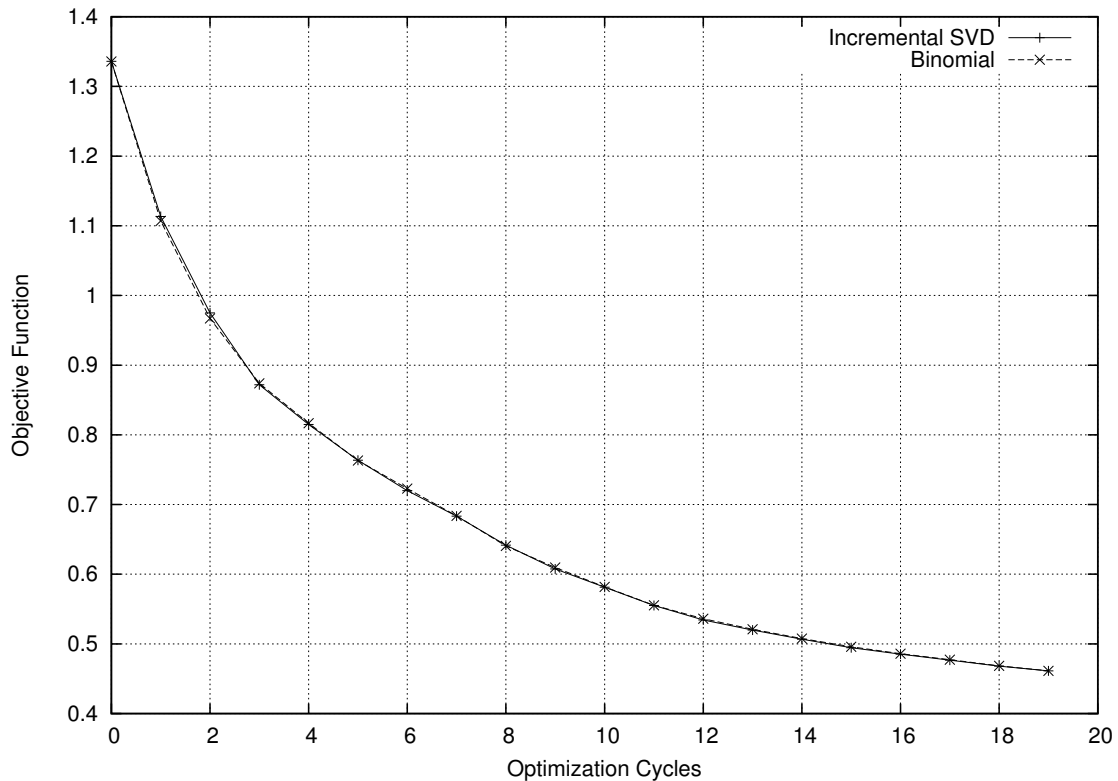


**Σχήμα 5.12:** Η τοπολογία, σε προοπτικό σχήμα, των παλλόμενων δεσμών έγχυσης/αναρρόφησης πάνω στο τετραγωνικό πρίσμα.

$$\frac{u_{\infty}}{d} = 10Hz.$$

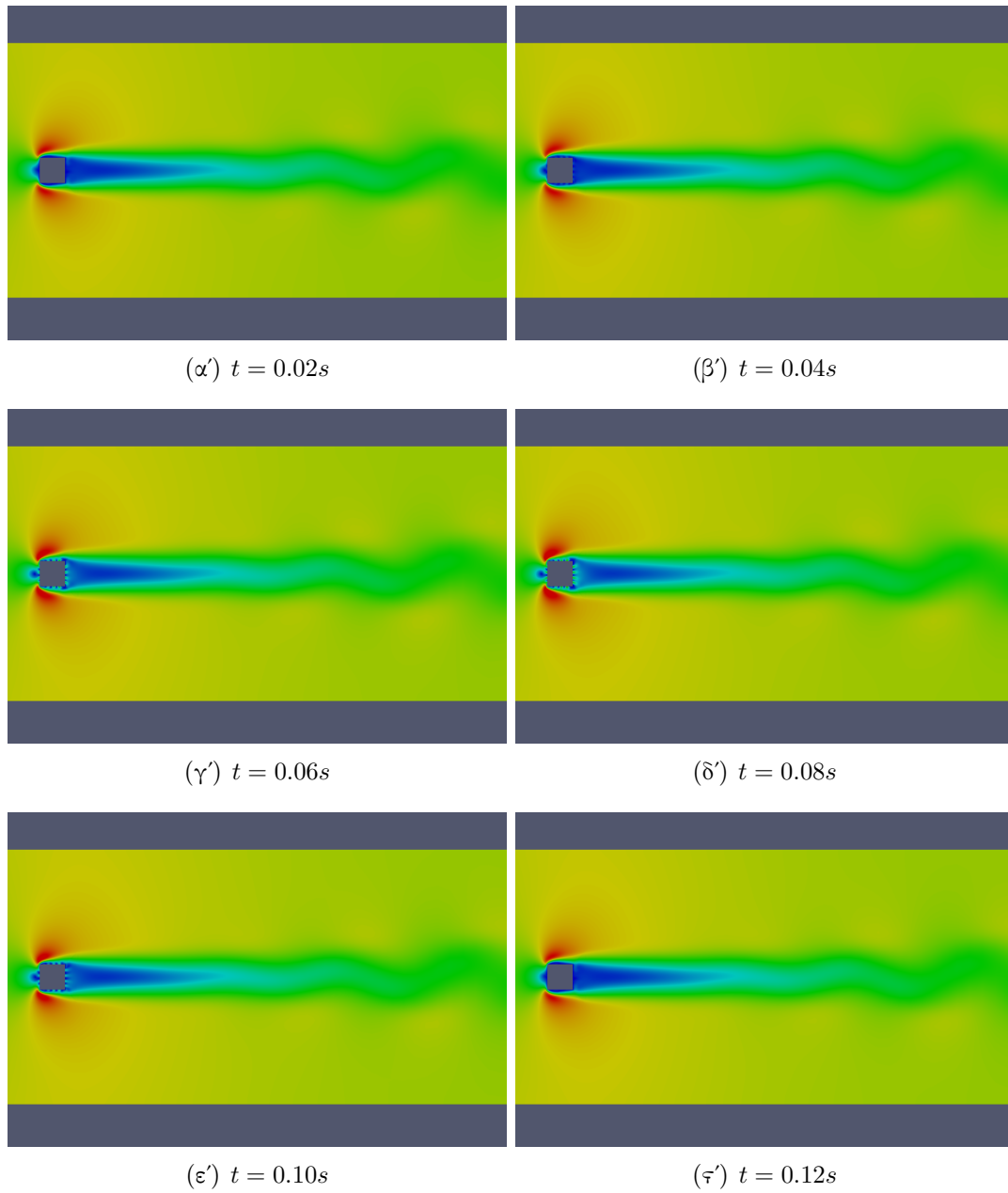
- Χρησιμοποιήθηκαν συνολικά 16 δέσμες, ισοκατανεμημένες στις πλευρές του τετραγώνου ( 4 δέσμες σε κάθε πλευρά), σχήμα 5.12.
- Το χρονικό βήμα επίλυσης της ροής είναι  $dt = 10^{-3}$ .
- Ο αριθμός του βήματος στον τύπο της απότομης καθόδου είναι  $\eta = 10^{-3}$ .
- Οι παράγωγοι ευαισθησίας υπολογίζονται σε μία περίοδο και, συγκεκριμένα, σε αυτήν που εφαρμόζεται το περιοδικό SVD.

Εκτελώντας 20 κύκλους βελτιστοποίησης, οι τιμές της αντικειμενικής συνάρτησης για rank 14, αναπαρίστανται στο σχήμα 5.13, σε σύγκριση με τις τιμές που

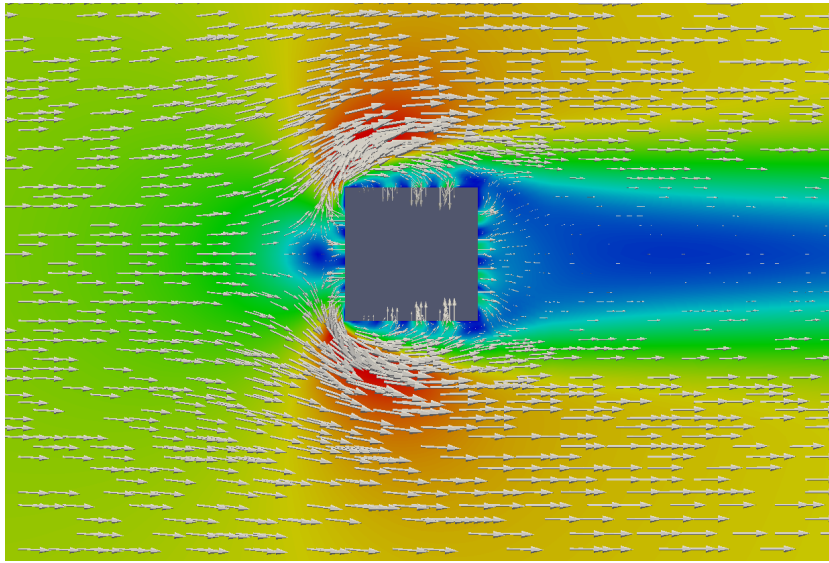


**Σχήμα 5.13:** Διάγραμμα αντικειμενικής συνάρτησης για κάθε κύκλο βελτιστοποίησης, εφαρμόζοντας *Binomial Checkpointing* και *Incremental SVD*

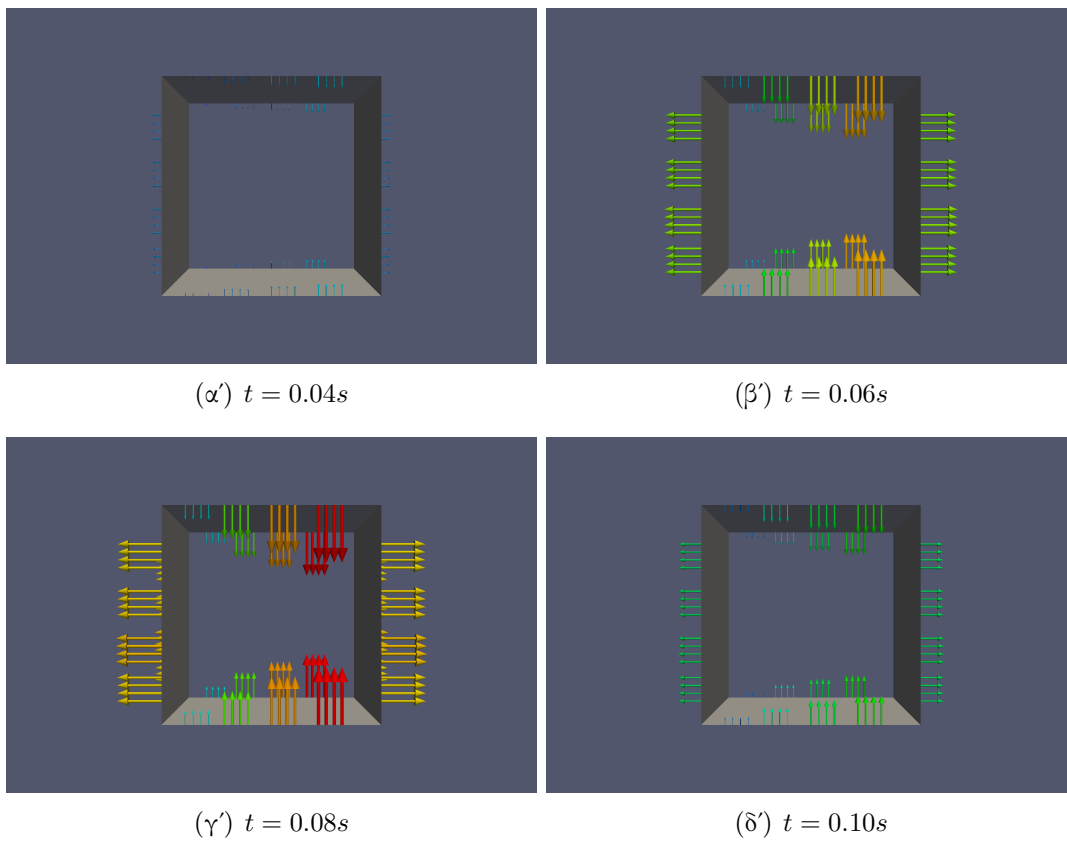
προκύπτουν αν εκτελεστεί μια ακριβής μέθοδος, όπως αυτή της διωνυμικής κατανομής Σημείων Ελέγχου (*binomial Checkpointing*). Είναι φανερό ότι σε κάθε βήμα βελτιστοποίησης, τα αποτελέσματα που προκύπτουν από την ακριβή μέθοδο είναι ίδια με αυτά που προκύπτουν από την προσεγγιστική μέθοδο του SVD. Επομένως φαίνεται ότι υπάρχει μεγάλο κέρδος σε υπολογιστικό χρόνο, χωρίς να υπάρχουν απώλειες στην ακρίβεια της λύσης. Στη συνέχεια, στο σχήμα 5.14 παρουσιάζονται έξι στιγμιότυπα της ροής μετά και το τελευταίο βήμα της διαδικασίας βελτιστοποίησης. Όπως φαίνεται, στον ομόρρου, οι στρόβιλοι von Karman έχουν καταστραφεί, και οι επανακυκλοφορίες πίσω από το σώμα είναι μικρότερης έντασης. Στο σχήμα 5.15 απεικονίζεται ένα στιγμιότυπο από τον τελευταίο κύκλο βελτιστοποίησης, στο οποίο διακρίνονται οι δέσμες γύρω από το σώμα καθώς και τα διανύσματα των ταχυτήτων της ροής. Ενώ στο σχήμα 5.16 απεικονίζονται 4 στιγμιότυπα, που περιέχουν τα διανύσματα της ταχύτητας με την οποία αναρροφούν ή εγχέουν αέρα οι δέσμες. Παρατηρείται ότι ο τρόπος με τον οποίο γίνεται η έγχυση και η αναρρόφηση των δεσμών είναι τέτοιος που να δημιουργεί στρόβιλους οι οποίοι κρατούν τη ροή προσκολλημένη πάνω στο σώμα, αποτρέποντας έτσι τη δημιουργία ανακυκλοφορίας



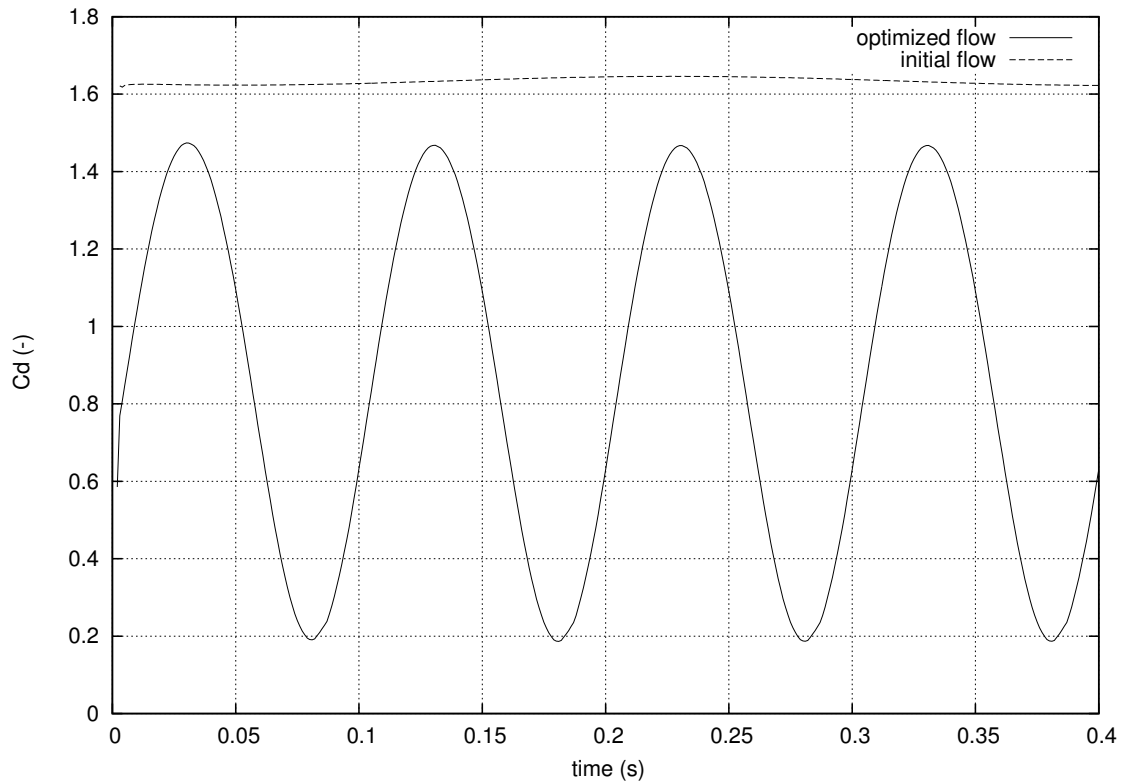
Σχήμα 5.14: Στιγμιότυπα της ροής μετά από 20 κύκλους βελτιστοποίησης κάθε 0.02sec



Σχήμα 5.15: Διανύσματα ταχυτήτων της ροής γύρω από το σώμα στο τελευταίο κύκλο βελτιστοποίησης.



Σχήμα 5.16: Στιγμιότυπα της ταχύτητας έγχυσης/αναρρόφησης των δεσμών στον τελευταίο κύκλο βελτιστοποίησης.

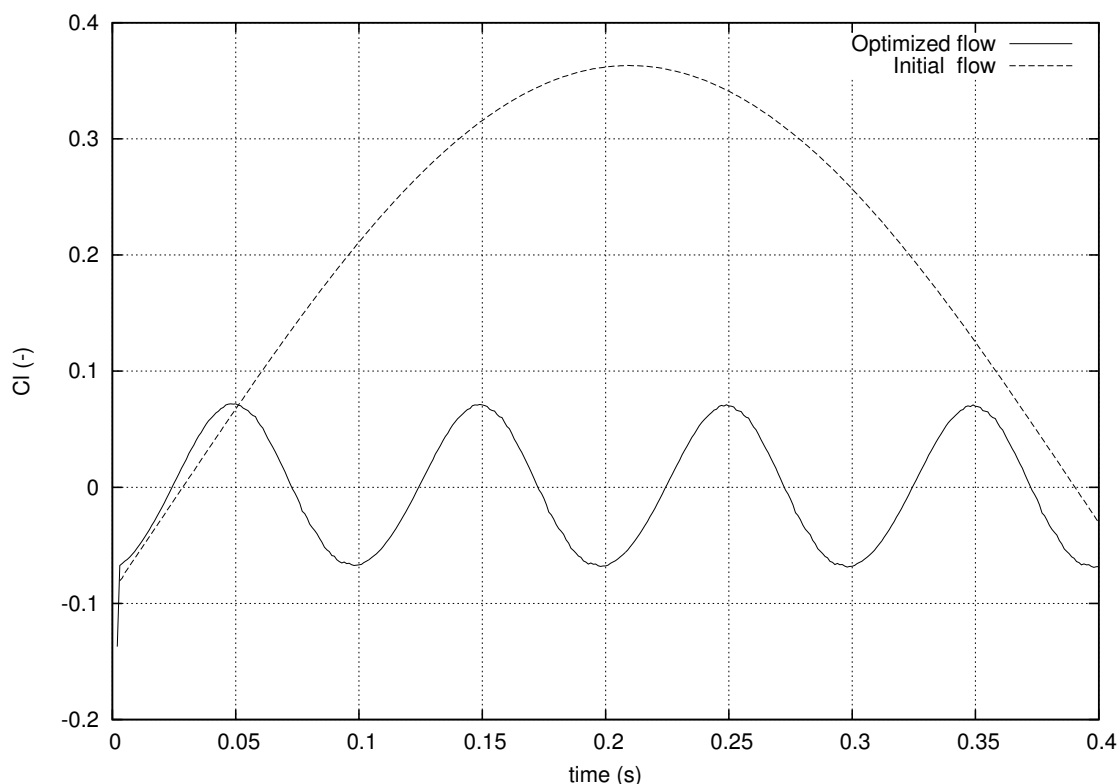


Σχήμα 5.17: Συντελεστής αντίστασης για τη βελτιστοποιημένη και την αρχική ροή

στο πίσω μέρος του πρίσματος. Υπενθυμίζεται ότι οι μεταβλητές σχεδιασμού για τη βελτιστοποίηση ήταν μόνο τα πλάτη έγχυσης/αναρρόφησης των δεσμών. Επίσης, κάθε δέσμη συμπεριφέρεται όπως η συμμετρική της, επομένως θεωρούνται 8 μεταβλητές σχεδιασμού. Ξεκινώντας την αρίθμηση από την πάνω αριστερά δέσμη και συνεχίζοντας ωρολογιακά, καταγράφονται οι τελικές τιμές των μεταβλητών σχεδιασμού.

Μεταβλητές Σχεδιασμού			
jet 1	-0.0115	jet 5	0.0348
jet 2	-0.0264	jet 6	0.0357
jet 3	-0.0377	jet 7	0.0348
jet 4	-0.0488	jet 8	0.0344

Τέλος, στο σχήμα 5.17 παρουσιάζεται η κατανομή του συντελεστή αντίστασης σε συνάρτηση με το χρόνο για τη βελτιστοποιημένη ροή σε σύγκριση με την αρχική. Παρατηρείται ότι, μετά το τέλος της βελτιστοποίησης, η τιμή του συντελεστή αντίστασης ταλαντώνεται γύρω από μια μέση τιμή  $C_d = 0.85$  η οποία είναι σαφώς



**Σχήμα 5.18:** Συντελεστής άνωσης για τη βελτιστοποιημένη και την αρχική ροή

μικρότερη από την τιμή χωρίς βελτιστοποίηση. Το ανεπιθύμητο αποτέλεσμα είναι ότι το πλάτος της ταλάντωσης της αντίστασης έχει αυξηθεί κατά πολύ, το φαινόμενο αυτό θα μπορούσε να αντιμετωπιστεί αν οι δέσμες είχαν διαφορετική φάση έγχυσης/αναρρόφησης μεταξύ τους. Για να γίνει αυτό θα έπρεπε να συμπεριληφθούν στις μεταβλητές σχεδιασμού τόσο τα πλάτη όσο και τις φάσεις έγχυσης/αναρρόφησης των δεσμών και να υπολογιστούν οι αντίστοιχες παράγωγοι ευαισθησίας. Ένα άλλο φαινόμενο που παρατηρείται είναι η αλλαγή στη συχνότητα ταλάντωσης, η οποία συγκλίνει προς της τιμή  $f = 10\text{Hz}$  τόσο όση είναι και η συχνότητα των δεσμών. Πρόκειται ουσιαστικά για μία εξαναγκασμένη ταλάντωση εξαιτίας των δυνάμεων ορμής που δέχεται το σώμα από τις δέσμες.

Χωρίς αρχικά να αποτελούσε στόχο η δύναμη άνωσης, θα ήταν λογικό εξαιτίας της 'καταστροφής' των στροβίλων με τη χρήση των δεσμών και την καλύτερη προσκόλληση της ροής πάνω στο σώμα να υπάρξει βελτίωση και στην καμπύλη του συντελεστή άνωσης. Κάτι τέτοιο επαληθεύεται από το σχήμα 5.18 στο οποίο παρουσιάζονται, ο συντελεστής άνωσης για τη βελτιστοποιημένη ροή και την αρχική ροή.

# Κεφάλαιο 6

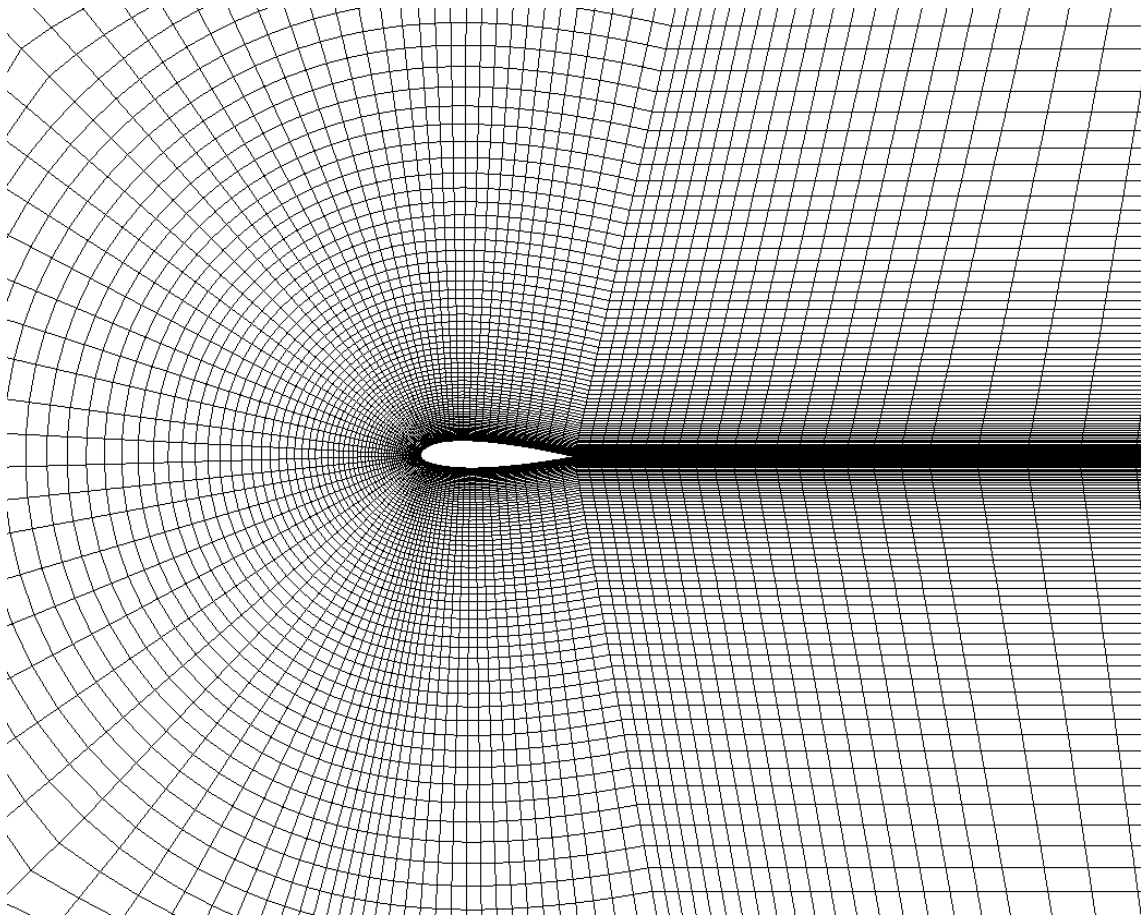
## Ροή γύρω από Μεμονωμένη Αεροτομή

Η περίπτωση που θα εξεταστεί σε αυτό το κεφάλαιο, αφορά τη ροή γύρω από ένα ανωστικό σώμα και, συγκεκριμένα, μια αεροτομή. Η ροή όπως και στην προηγούμενη περίπτωση είναι ασυμπίεστη και στρωτή, ενώ για την εισαγωγή μη-μονιμότητας θα μεταβάλλεται χρονικά η γωνία εισόδου της επί άπειρον ροής.

### 6.1 Περιγραφή του προβλήματος

Η αεροτομή που μελετάται υπάρχει στις βιβλιοθήκες του OpenFOAM. Τα κύρια γεωμετρικά χαρακτηριστικά της αεροτομής περιλαμβάνουν, χορδή  $c = 0.035m$  και επί τις εκατό λόγο μέγιστου πάχους ως προς τη χορδή  $\frac{h}{c} = 18\%$ , ενώ λόγω της συμμετρίας ως προς τη διάσταση του βάθους το πρόβλημα αφορά διδιάστατη ροή. Το πλέγμα γύρω από την αεροτομή είναι δομημένο C-type, διαθέτει 10720 τετραπλευρικά υπολογιστικά κελιά και παρουσιάζεται στο σχήμα 6.1. Το μέτρο της ταχύτητας της επί άπειρον ροής είναι  $U = 0.1m/s$  και η κινηματική συνεκτικότητα του ρευστού θεωρείται ίση με  $\nu = 3 \cdot 10^{-6}m^2/s$ , επομένως ο αριθμός Reynolds της ροής είναι

$$Re = \frac{Uc}{\nu} \implies Re = 1050 \quad (6.1)$$

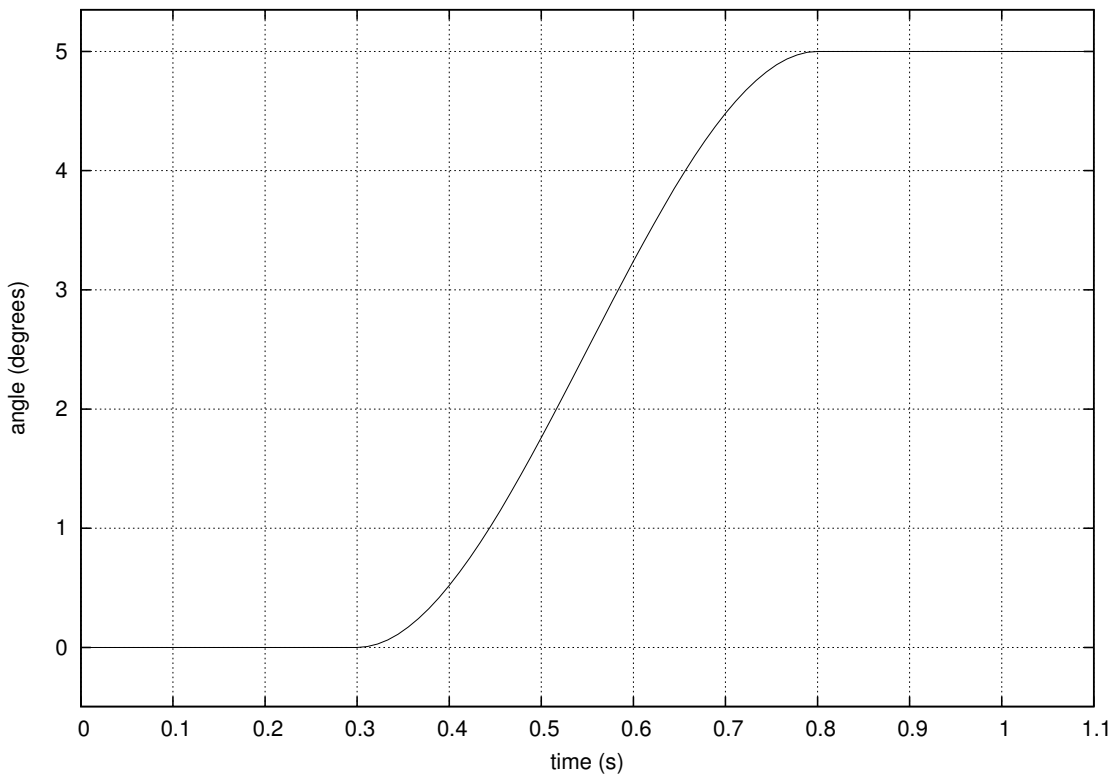


**Σχήμα 6.1:** Υπολογιστικό πλέγμα τύπου  $C$  γύρω από την αεροτομή, για την επίλυση  $2D$  ροής.

όπου, το χαρακτηριστικό μήκος  $c$ , θεωρείται το μήκος της χορδής της αεροτομής.

Για την αλλαγή στη γωνία πρόσπτωσης της επί άπειρον ροής, εισάγεται μια μη-μόνιμη οριακή συνθήκη στην είσοδο του υπολογιστικού χωρίου, η οποία μεταβάλλει το διάνυσμα της ταχύτητας ομαλά, από την αρχική του τιμή στην αντίστοιχη επιθυμητή. Πιο συγκεκριμένα, η αρχική γωνία της επί άπειρον ταχύτητας είναι μηδέν, δηλαδή η ταχύτητα είναι παράλληλη ως προς τη χορδή της αεροτομής. Στη συνέχεια, η γωνία μεταβάλλεται ομαλά για ένα συγκεκριμένο χρονικό διάστημα, μέχρις ότου αποκτήσει μία τελική τιμή ίση με  $5$  μοίρες. Η έννοια της ομαλής μετάβασης, όπως αναφέρθηκε παραπάνω, έγκειται στην ύπαρξη συνέχειας τόσο στην τιμή της γωνίας της ταχύτητας, όσο και στην παράγωγο αυτής. Επομένως, η συνάρτηση αλλαγής της γωνίας σε σχέση με το χρόνο δίνεται από ένα πολυώνυμο τρίτου βαθμού, του οποίου η μορφή φαίνεται στο σχήμα 6.2. Όπως παρατηρείται,





**Σχήμα 6.2:** Η μεταβολή της γωνίας της επ' άπειρον ταχύτητας σε συνάρτηση με το χρόνο.

αρχικά η τιμή της γωνίας είναι μηδενική και τη χρονική στιγμή  $t = 0.3\text{sec}$  αρχίζει να μεταβάλλεται μέχρι τη χρονική στιγμή  $t = 0.8\text{sec}$ , όπου και σταθεροποιείται στην τιμή των 5 μοιρών.

## 6.2 Αποτελέσματα

Με βάση τον τρόπο που ορίστηκε η μεταβολή της γωνίας της επ' άπειρον ταχύτητας, μελετάται το αποτέλεσμα που έχει αυτό το μεταβατικό φαινόμενο, στα αεροδυναμικά χαρακτηριστικά της αεροτομής. Στα σχήματα, 6.3 έως 6.4, παρουσιάζονται οι συντελεστές αντίστασης και άνωσης της αεροτομής. Παρατηρείται ότι η καμπύλη, κάνει μια ταλάντωση λόγω του μεταβατικού φαινομένου αλλαγής της γωνίας και, στη συνέχεια, τείνει ασυμπτωτικά προς την τιμή της μόνιμης κατάστασης, δηλαδή την τιμή που θα είχε αν το φαινόμενο ήταν μόνιμο και η γωνία του διανύσματος ταχύτητας 5 μοίρες. Έτσι ο συντελεστής αντίστασης αποκτά την τιμή  $Cd = 0.160$ , ενώ ο συντελεστής άνωσης την τιμή  $Cl = 0.159$ . Στη συνέχεια, στο

Μεταβλητές Σχεδιασμού	
jet 1	-0.00156513
jet 2	-0.00117045
jet 3	0.00257844
jet 4	0.00291683

**Πίνακας 6.1:** Τα πλάτη έγχυσης/αναρρόφησης των παλλόμενων δεσμών, μετά τον 20<sup>ο</sup> κύκλο βελτιστοποίησης για σταθερή γωνία επ' άπειρον ροής.

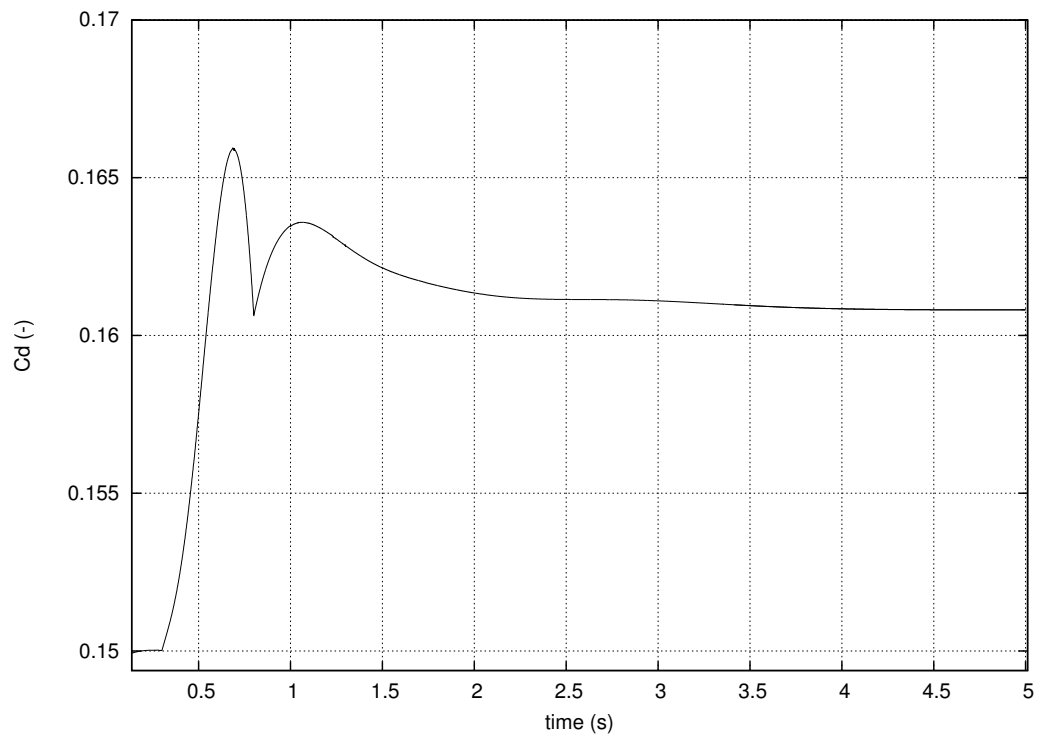
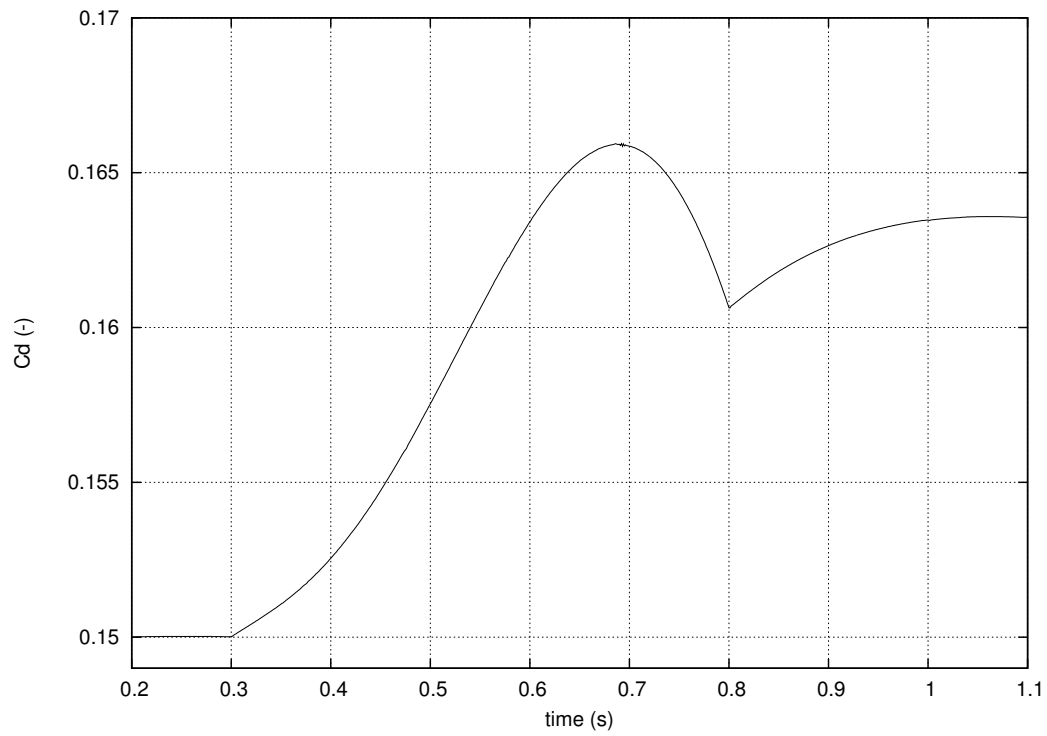
σχήμα 6.5, παρουσιάζονται έξι χρονικά στιγμιότυπα της ροής γύρω από την αεροτομή στη διάρκεια του μεταβατικού φαινομένου.

### 6.2.1 Βελτιστοποίηση Μόνιμης Ροής

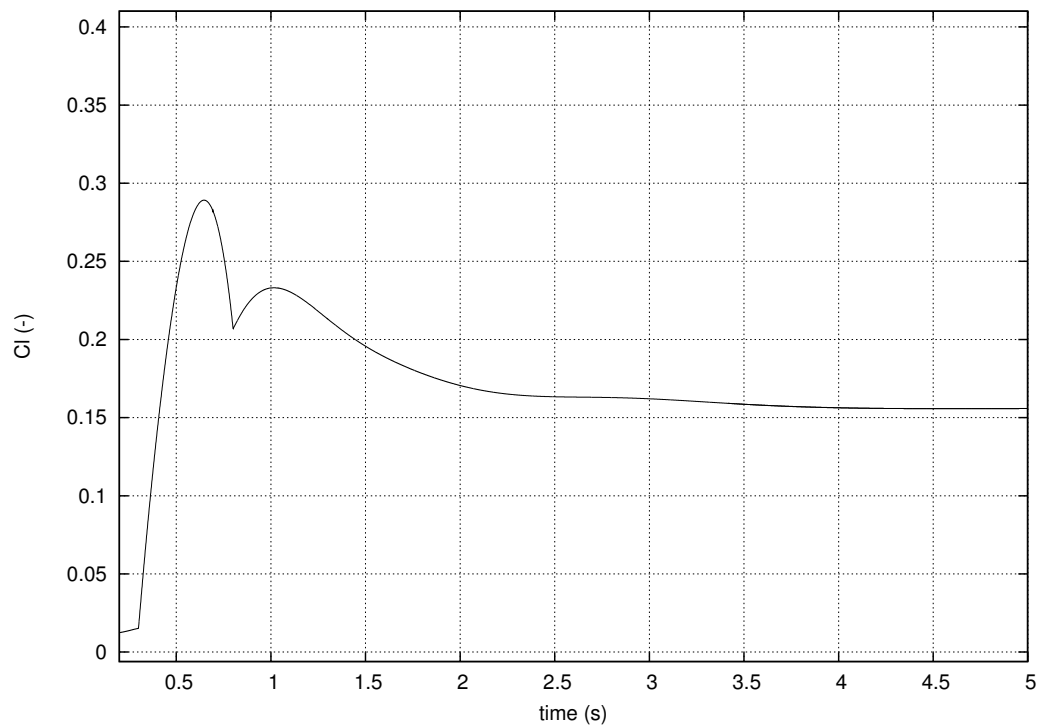
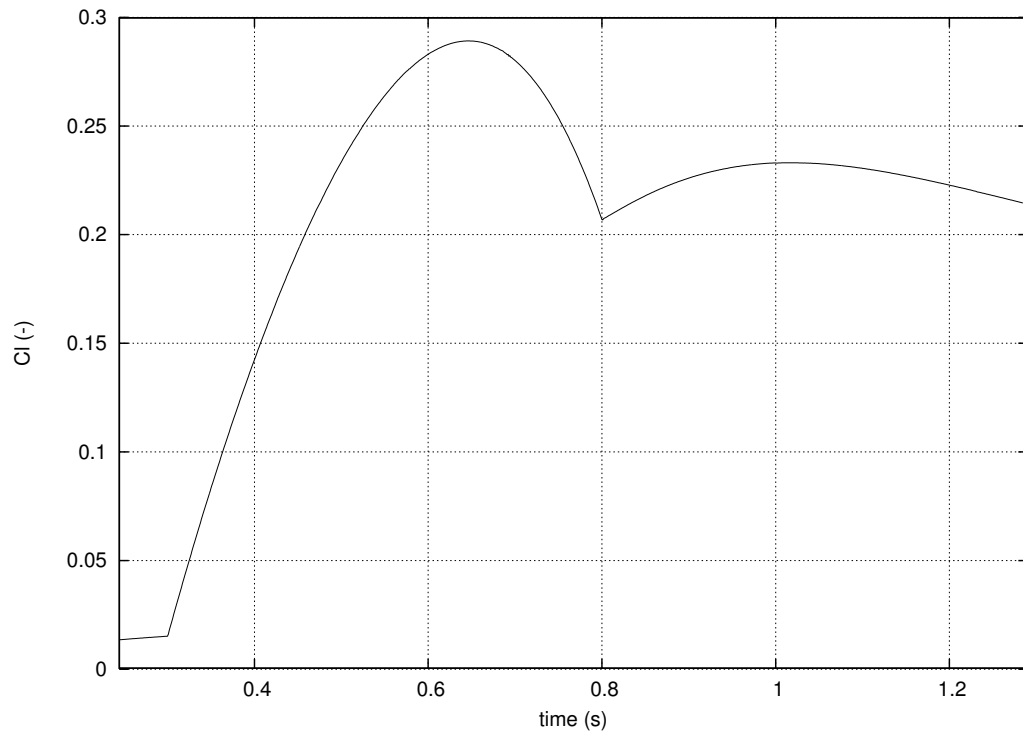
Αρχικά, με τη χρήση παλλόμενων δεσμών έγχυσης/αναρρόφησης (pulsating jets) βελτιστοποιείται η ροή για μόνιμη γωνία επ' άπειρον ταχύτητας ίση με 5 μοίρες. Θα χρησιμοποιηθούν συνολικά 4 δέσμες και οι θέσεις στις οποίες βρίσκονται πάνω στην αεροτομή φαίνονται στο σχήμα 6.6. Η συχνότητα αναρρόφησης/έγχυσης επιλέχθηκε να είναι ίση με  $8Hz$ , ενώ για τη βελτιστοποίηση το μέγεθος  $\eta$ , που συμβολίζει το βήμα της απότομης καθόδου, επιλέχθηκε να είναι  $\eta = 2 \cdot 10^{-3}$ . Τα αποτελέσματα της βελτιστοποίησης στο συντελεστή αντίστασης, παρουσιάζονται στο σχήμα 6.7, όπου έχουν σχεδιαστεί ο συντελεστής αντίστασης πριν τη βελτιστοποίηση, η χρονική διακύμανση του συντελεστή αντίστασης μετά τη βελτιστοποίηση καθώς και η μέση τιμή της βελτιστοποιημένης λύσης. Όπως είναι λογικό, λόγω των παλλόμενων δεσμών, το  $C_d$  ταλαντώνεται με τη συχνότητα έγχυσης/αναρρόφησης ( $8Hz$ ) γύρω από μια μέση τιμή, η οποία είναι σαφώς μικρότερη της αρχικής. Στο σχήμα 6.8 παρουσιάζονται έξι στιγμιότυπα της ροής μετά τη βελτιστοποίηση, ενώ στον πίνακα 6.1 παρουσιάζονται οι τιμές από τα πλάτη ταλάντωσης των παλλόμενων δεσμών. Η αρίθμηση των δεσμών ξεκινά από την πρώτη δέσμη στην πλευρά υποπίεσης και συνεχίζει ωρολογιακά. Τέλος στο γράφημα 6.9 παρουσιάζονται οι τιμές της αντικειμενικής συνάρτησης για κάθε κύκλο βελτιστοποίησης.

Η τελική τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης στον 20<sup>ο</sup> κύκλο βελτιστοποίησης είναι  $F_{obj} = 0.012696$ , με την αρχική τιμή να είναι  $F_{obj}^{init} = 0.012934$

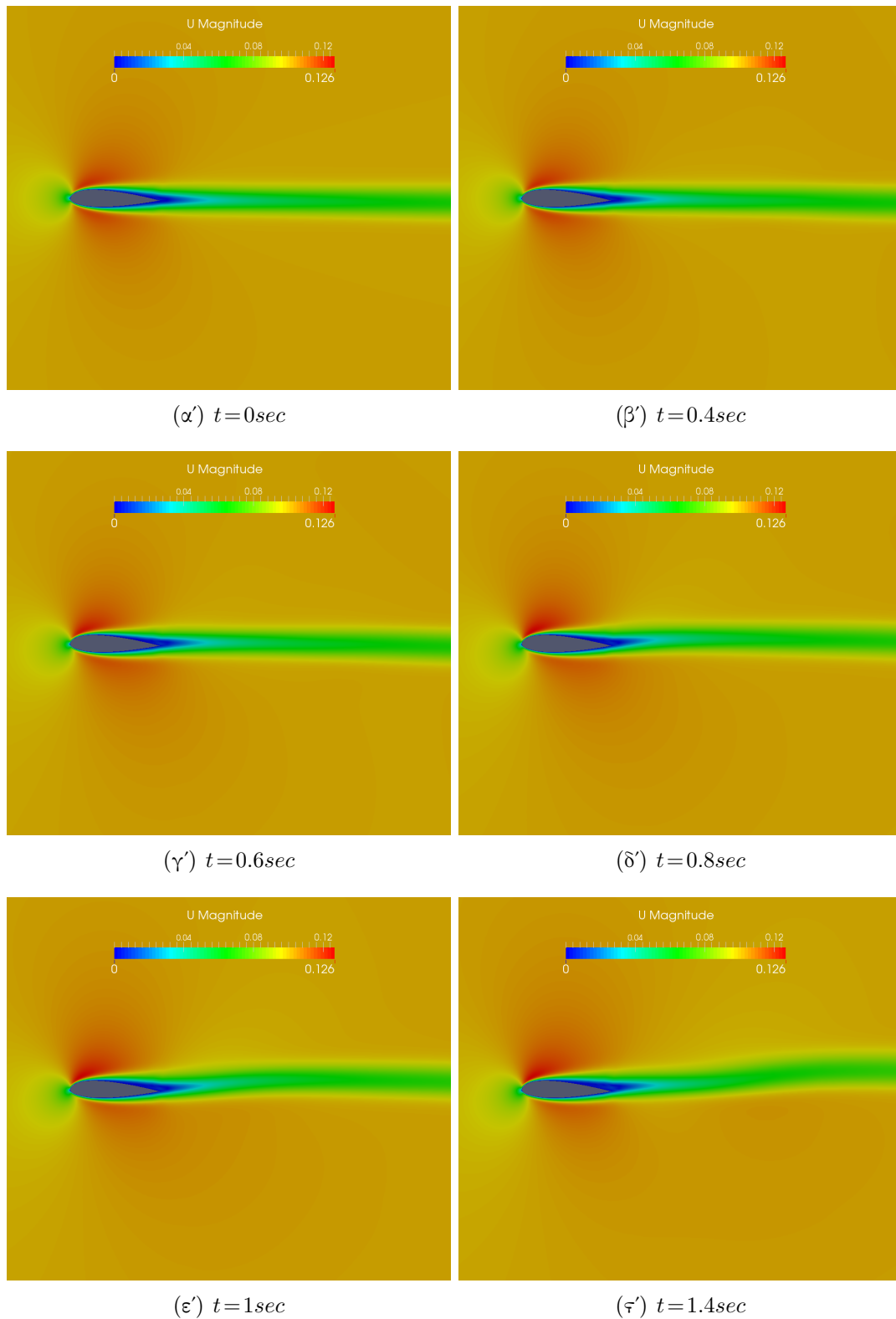
Έχει ενδιαφέρον να εξεταστεί τι αποτέλεσμα θα είχε η βελτιστοποιημένη λύση που προέκυψε από την περίπτωση της σταθερής γωνίας επ' άπειρον ταχύτητας, στο μεταβατικό φαινόμενο. Με βάση τα πλάτη των δεσμών που προέκυψαν παραπάνω,



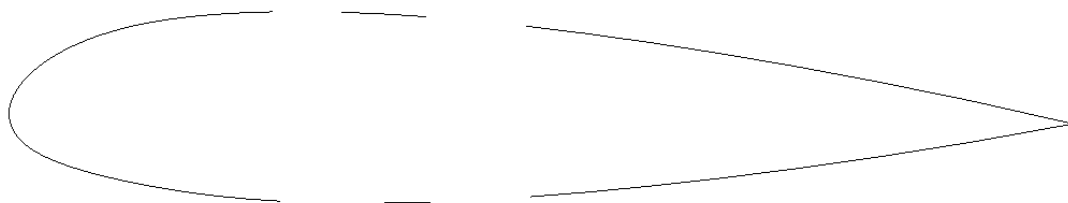
**Σχήμα 6.3:** Καμπύλη του συντελεστή αντίστασης στο μεταβατικό φαινόμενο αλλαγής γωνίας της επ' άπειρον ταχύτητας. Η αλλαγή της γωνίας αρχίζει τη χρονική στιγμή  $t=0.3\text{sec}$  και σταματάει τη χρονική στιγμή  $t=0.8\text{sec}$ .



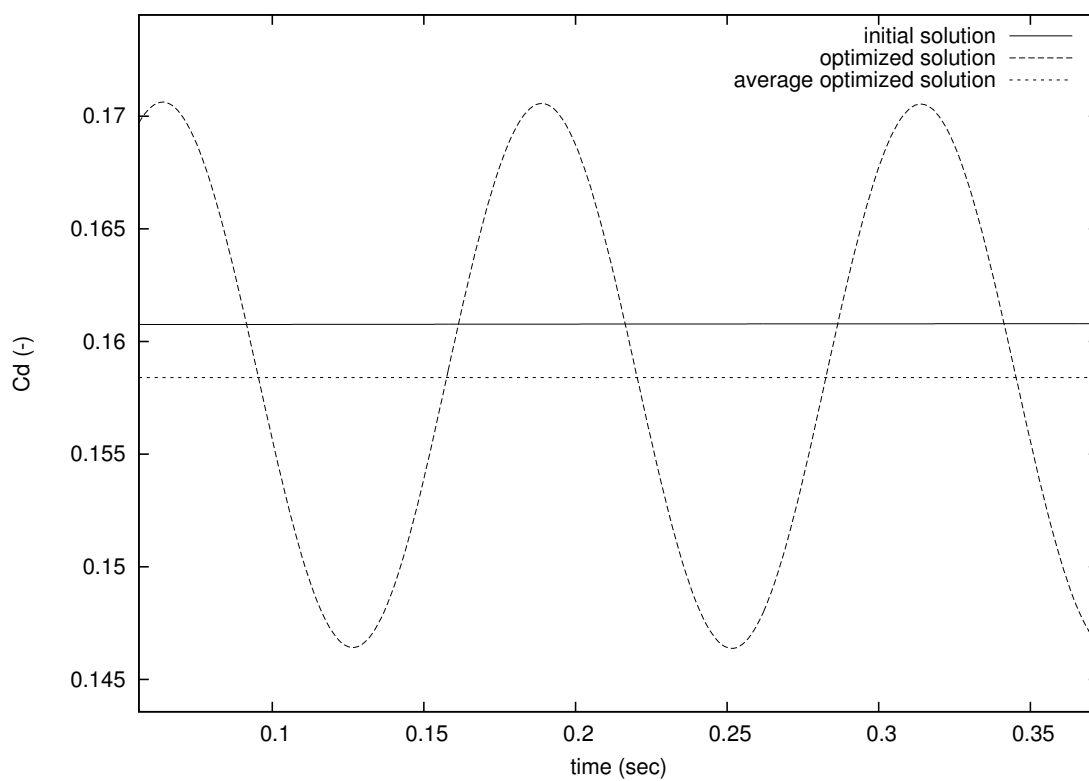
**Σχήμα 6.4:** Καμπύλη του συντελεστή άνωσης στο μεταβατικό φαινόμενο αλλαγής γωνίας της επ' άπειρον ταχύτητας. Η αλλαγή της γωνίας αρχίζει τη χρονική στιγμή  $t=0.3\text{sec}$  και σταματάει τη χρονική στιγμή  $t=0.8\text{sec}$ .



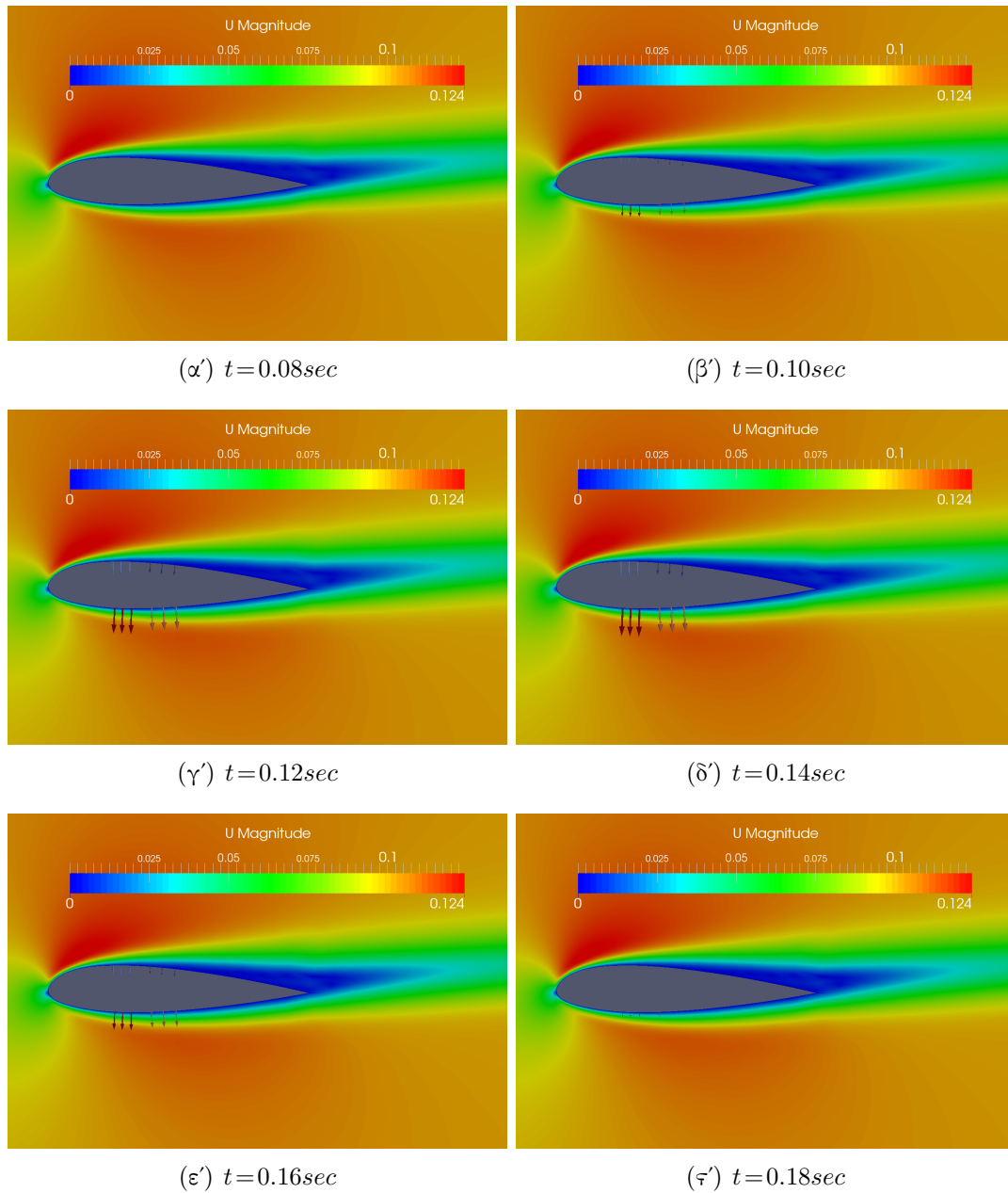
**Σχήμα 6.5:** Στιγμιότυπα της ροής για τις διάφορες χρονικές στιγμές, στη διάρκεια του μεταβατικού φαινομένου αλλαγής γωνίας της επ' άπειρον ταχύτητας.



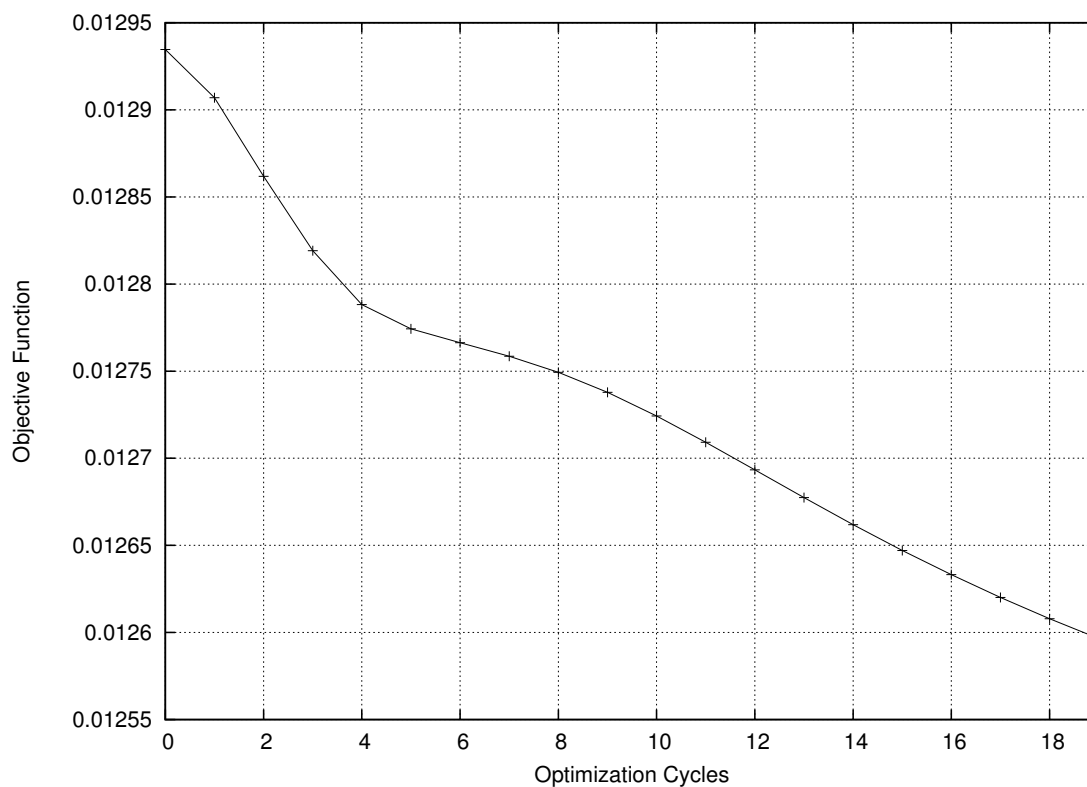
Σχήμα 6.6: Η τοπολογία των παλλόμενων δεσμών έγχυσης/αναρρόφησης στην αεροτομή.



Σχήμα 6.7: Οι συντελεστές αντίστασης πριν και μετά τη βελτιστοποίηση σε μόνιμη ροή με γωνία εισόδου 5 μοιρών.



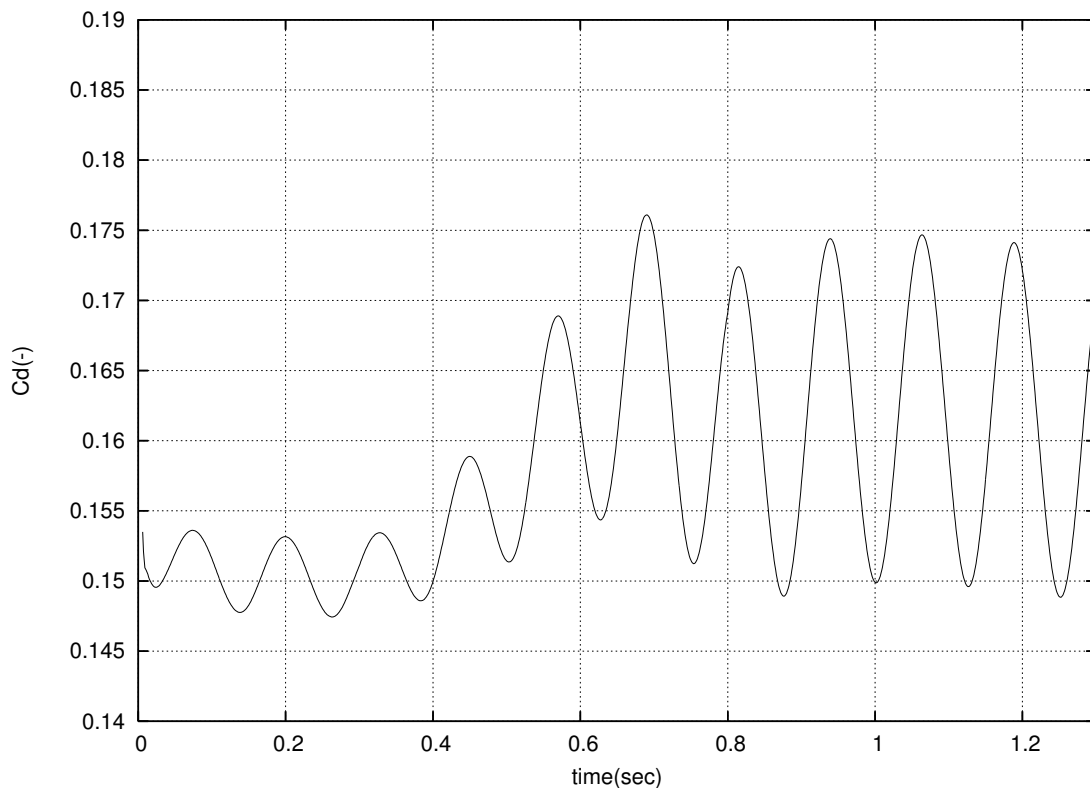
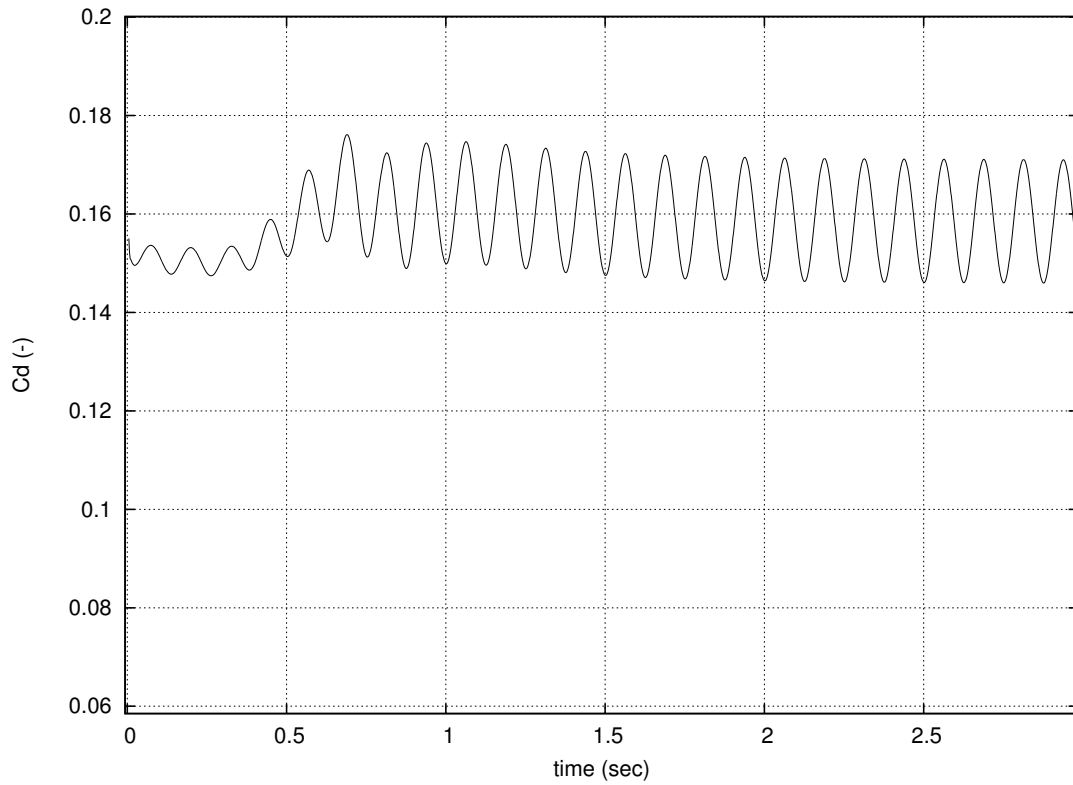
**Σχήμα 6.8:** Στιγμιότυπα της βελτιστοποιημένης ροής με χρήση παλλόμενων δεσμών έγχυσης/αναρρόφησης για σταθερή γωνία επ' άπειρον ροής.



**Σχήμα 6.9:** Η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης σε κάθε κύκλο βελτιστοποίησης για σταθερή γωνία επ' άπειρον ροής.

επιλύεται η ροή με την εισαγωγή της μη-μόνιμης οριακής συνθήκης. Στο σχήμα 6.10 έχει σχεδιαστεί η τιμή του συντελεστή αντίστασης σε συνάρτηση με το χρόνο. Είναι φανερό πως, εξαιτίας της έγχυσης/αναρρόφησης ρευστού, η μορφή του συντελεστή αντίστασης έχει διαφοροποιηθεί από την αρχική, όπως είχε παρουσιαστεί στο σχήμα 6.3. Επίσης μετά τα 1.3sec, με τη σταθεροποίηση της γωνίας πρόσπτωσης, σταθεροποιείται και η καμπύλη, η οποία αποκτά τη μορφή της βέλτιστης λύσης που υπολογίστηκε νωρίτερα. Για να διαπιστωθεί κατά πόσο η βέλτιστη λύση που προέκυψε για σταθερή γωνία εισόδου, βελτιστοποιεί και τη νέα μεταβατική ροή, υπολογίζονται οι αντικειμενικές συναρτήσεις σε διάφορες χρονικές περιόδους. Τα αποτελέσματα καταγράφονται στον πίνακα 6.2 και σχεδιάζονται στο σχήμα 6.11. Παρατηρείται ότι, όσο ο χρόνος ολοκλήρωσης αυξάνει, τόσο η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης προσεγγίζει την τιμή της βελτιστοποιημένης μόνιμης ροής ( $F_{obj} = 0.012696$ ). Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι, η βέλτιστη απόδοση στο τμήμα όπου έχει σταθεροποιηθεί η μόνιμη ροή, κυριαρχεί επί του πρώτου τμήματος του μεταβατικού φαινομένου.

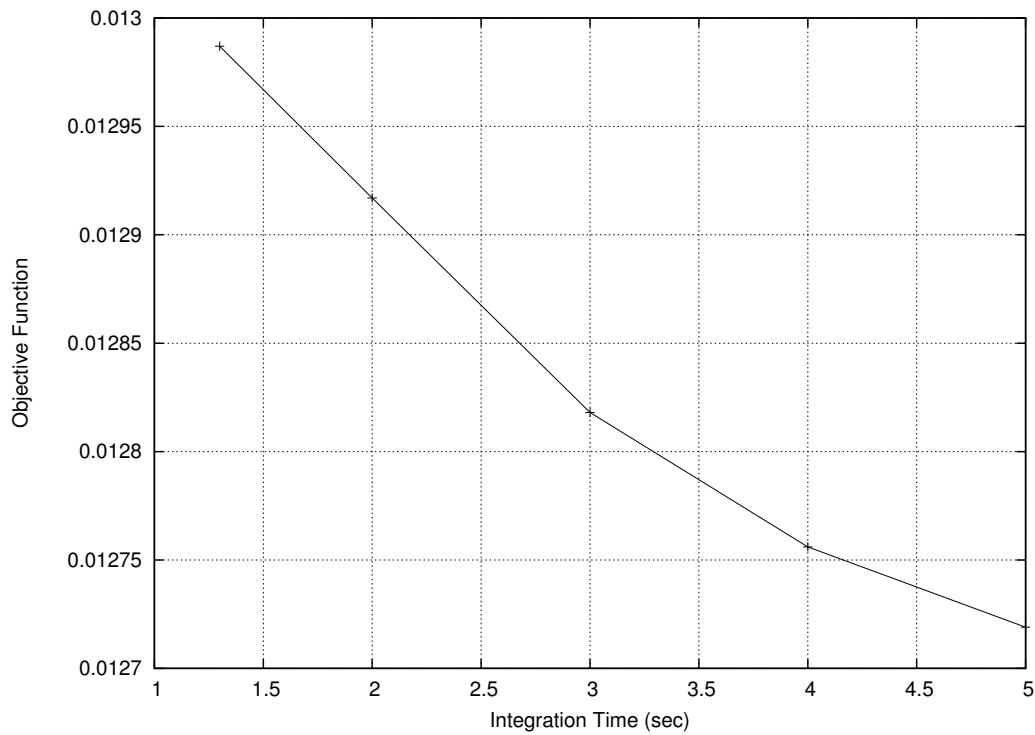




**Σχήμα 6.10:** Ο συντελεστής αντίστασης στη διάρκεια του μεταβατικού φαινομένου με τα δεδομένα της βελτιστοποιημένης ροής σταθερής επ' άπειρον γωνίας.

Χρόνος Ολοκλήρωσης	$F_{objective}$
1.3sec	0.012987
2.0sec	0.012917
3.0sec	0.012818
4.0sec	0.012756
5.0sec	0.012719

**Πίνακας 6.2:** Πινακοποιημένες τιμές της αντικειμενικής συνάρτησης για διάφορες χρονικές περιόδους ολοκλήρωσης, χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα της βελτιστοποίησης σε μόνιμη ροή.



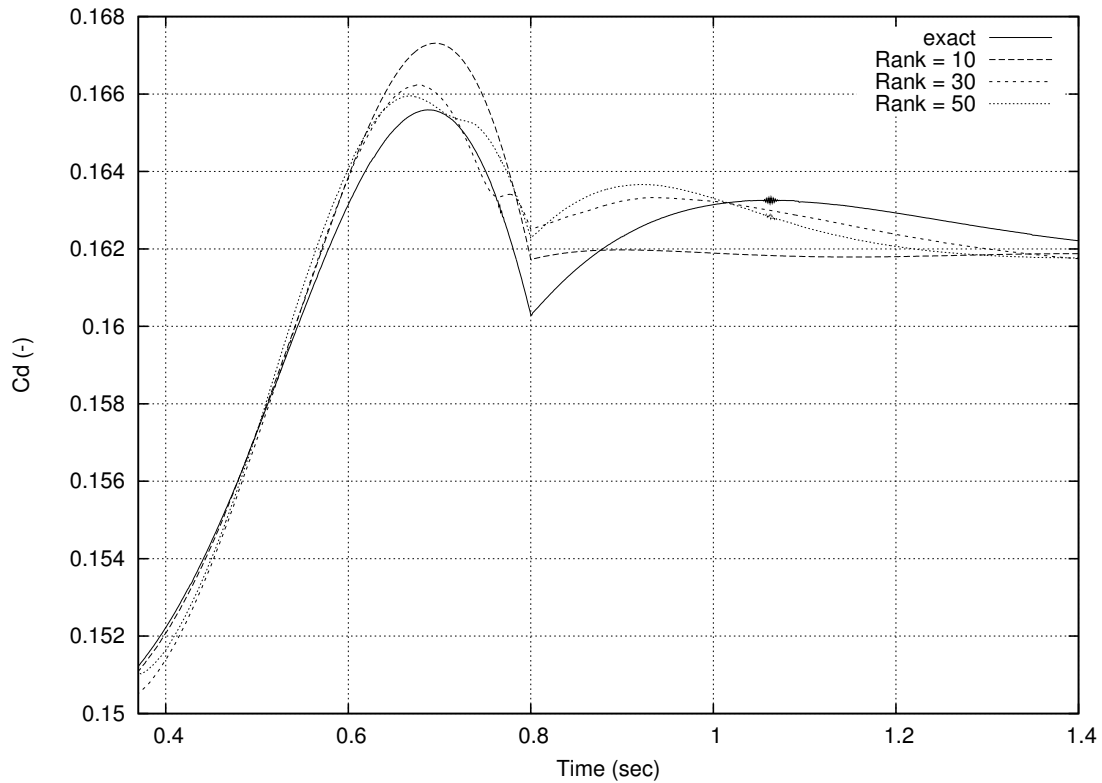
**Σχήμα 6.11:** Γραφική παράσταση της αντικειμενικής συνάρτησης στις διάφορες χρονικές στιγμές ολοκλήρωσης, χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα της βελτιστοποίησης σε μόνιμη ροή.

## 6.2.2 Βελτιστοποίηση Μη-Μόνιμης Ροής

Τελικός σκοπός είναι η βελτιστοποίηση και ο έλεγχος της ροής γύρω από την αεροτομή κατά τη διάρκεια του μεταβατικού φαινομένου. Από τη μορφή που έχει ο συντελεστής αντίστασης (σχήμα 6.3), παρατηρείται ότι η αλλαγή της γωνίας εισόδου έχει επίδραση και στις επόμενες χρονικές στιγμές, έως ότου στη ροή αρχίζει να αποκαθίσταται η μονιμότητα. Επομένως, η βελτιστοποίηση θα αφορά το χρονικό διάστημα, με αρχή τη στιγμή αλλαγής της γωνίας (0.3 sec), μέχρι τη χρονική στιγμή 1.3 sec.

Όπως και στην περίπτωση του τετραγωνικού πρίσματος (Κεφ.5), θα χρησιμοποιηθεί ο αλγόριθμος της επαυξητικής Ανάλυσης Ιδιόμορφων Τιμών (Incremental SVD), για την προσεγγιστική αποθήκευση των πρωτευόντων πεδίων, που απαιτούνται για την επίλυση του συζυγούς προβλήματος. Για το λόγο αυτό, θα γίνει μια παραμετρική ανάλυση για να διαπιστωθεί, ποια είναι η ελάχιστη απαραίτητη τάξη (rank) του πίνακα στιγμιοτύπων, η οποία αποδίδει μια ικανοποιητική (με βάση κάποιο κριτήριο) προσέγγιση του πρωτεύοντος πεδίου ροής. Υπενθυμίζεται ότι η τάξη του πίνακα στιγμιοτύπων αντιστοιχεί και στον αριθμό των ιδιόμορφων τιμών (singular values) που λαμβάνονται υπόψη. Στο διάγραμμα 6.12, έχουν σχεδιαστεί οι καμπύλες του συντελεστή αντίστασης που προκύπτουν για διάφορα ranks, σε σύγκριση με την ακριβή λύση. Παρατηρείται ότι η καμπύλη της πλήρους λύσης δεν προσεγγίζεται ικανοποιητικά παρά τον πολύ μεγάλο αριθμό Ιδιόμορφων Τιμών που χρησιμοποιήθηκαν. Η δυσκολία στο να προσεγγισθεί η καμπύλη του συντελεστή αντίστασης, οφείλεται στην ασυνέχεια πρώτης παραγώγου που δημιουργείται τη χρονική στιγμή  $t = 0.8sec$ , καθώς η δυναμική του συστήματος αλλάζει απότομα στο σημείο αυτό. Για να αντιμετωπιστεί το πρόβλημα αυτό θα χρειαζόταν πολύ μεγαλύτερος αριθμός Ιδιόμορφων Τιμών, ώστε να προκύψει μια καλή προσέγγιση, πράγμα το οποίο είναι υπολογιστικά ασύμφορο (πράξεις με πίνακες πολύ μεγάλων διαστάσεων) και θα κόστιζε και σε μνήμη. Επομένως, για να συνεχίσει να συμφέρει η χρησιμοποίηση του επαυξητικού SVD σε σύγκριση με κάποια άλλη μέθοδο, όπως π.χ τη μέθοδο Δυωνυμικής Κατανομής Σημείων Ελέγχου (Binomial Check-pointing), εφαρμόζεται ένας αλγόριθμος πολλαπλού επαυξητικού SVD.

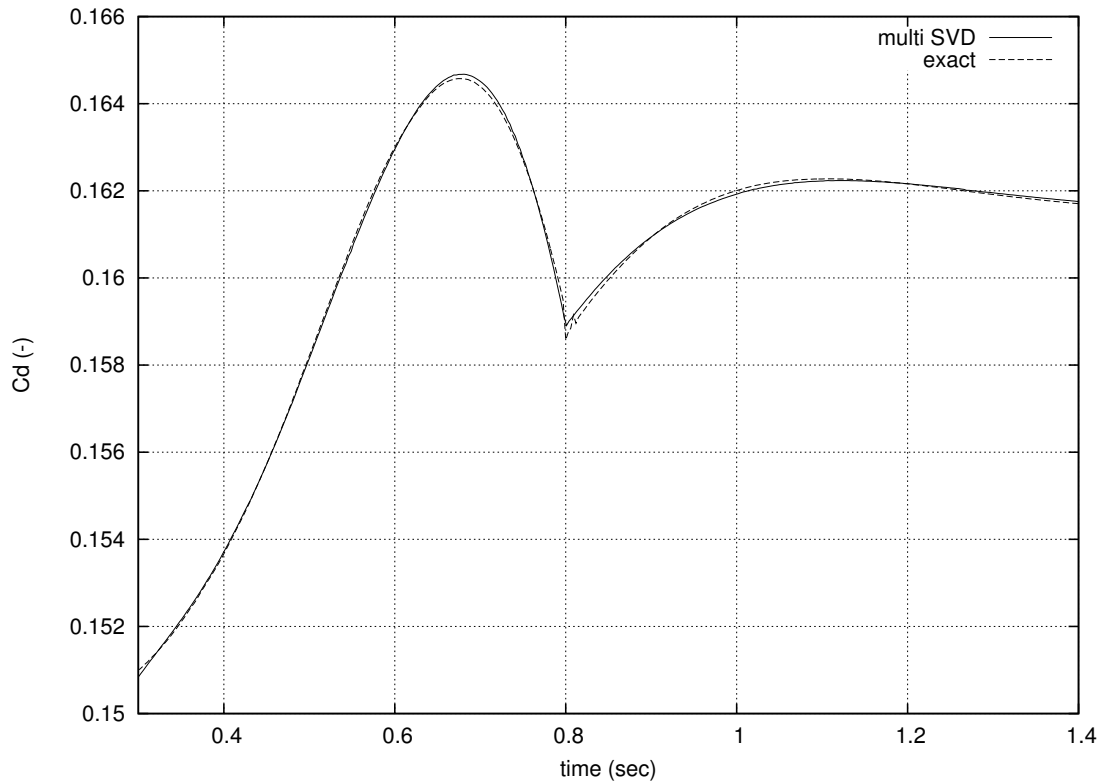
Στη μέχρι τώρα ανάλυση, το επαυξητικό SVD εφαρμόζεται από την αρχική έως την τελική χρονική στιγμή, προσπαθώντας να προσομοιώσει ολόκληρη τη δυναμική του συστήματος. Όταν όμως η δυναμική του συστήματος αλλάζει απότομα, η προσομοίωση



**Σχήμα 6.12:** Συντελεστές αντίστασης για διάφορα ranks και σύγκρισή τους με την πλήρη λύση.

γίνεται αρκετά δύσκολη. Για την περίπτωση που αναλύεται σε αυτό το κεφάλαιο, η δυναμική αλλάζει εξαιτίας της αλλαγής της γωνίας εισόδου της επί άπειρον ταχύτητας, επομένως με την a priori γνώση των σημείων στα οποία θα γίνει η αλλαγή μπορούν να οριστούν τα σημεία επανεκκίνησης ενός νέου SVD. Με άλλα λόγια, αντί για την αποθήκευση ενός ενιαίου σετ πινάκων  $U$ ,  $\Sigma$ ,  $V$ , θα αποθηκεύονται  $n$  το πλήθος τέτοια σετ τα οποία θα περιλαμβάνουν ανεξάρτητα κομμάτια 'ομοιόμορφης' δυναμικής. Στο συγκεκριμένο πρόβλημα, για την προσέγγιση της λύσης του πρωτεύοντος πεδίου ροής, θα εκτελεστεί ένα επαυξητικό SVD από την αρχική χρονική στιγμή, μέχρι την  $t=0.3sec$  (η στιγμή που αρχίζει να αλλάζει η γωνία), ένα επαυξητικό SVD καθ' όλη τη διάρκεια μεταβολής της γωνίας ( $t \in [0.3, 0.8]$ ) και τέλος ένα επαυξητικό SVD από  $t=0.8sec$  (η στιγμή που σταθεροποιείται η γωνία στις 5 μοίρες) μέχρι την τελική χρονική στιγμή.

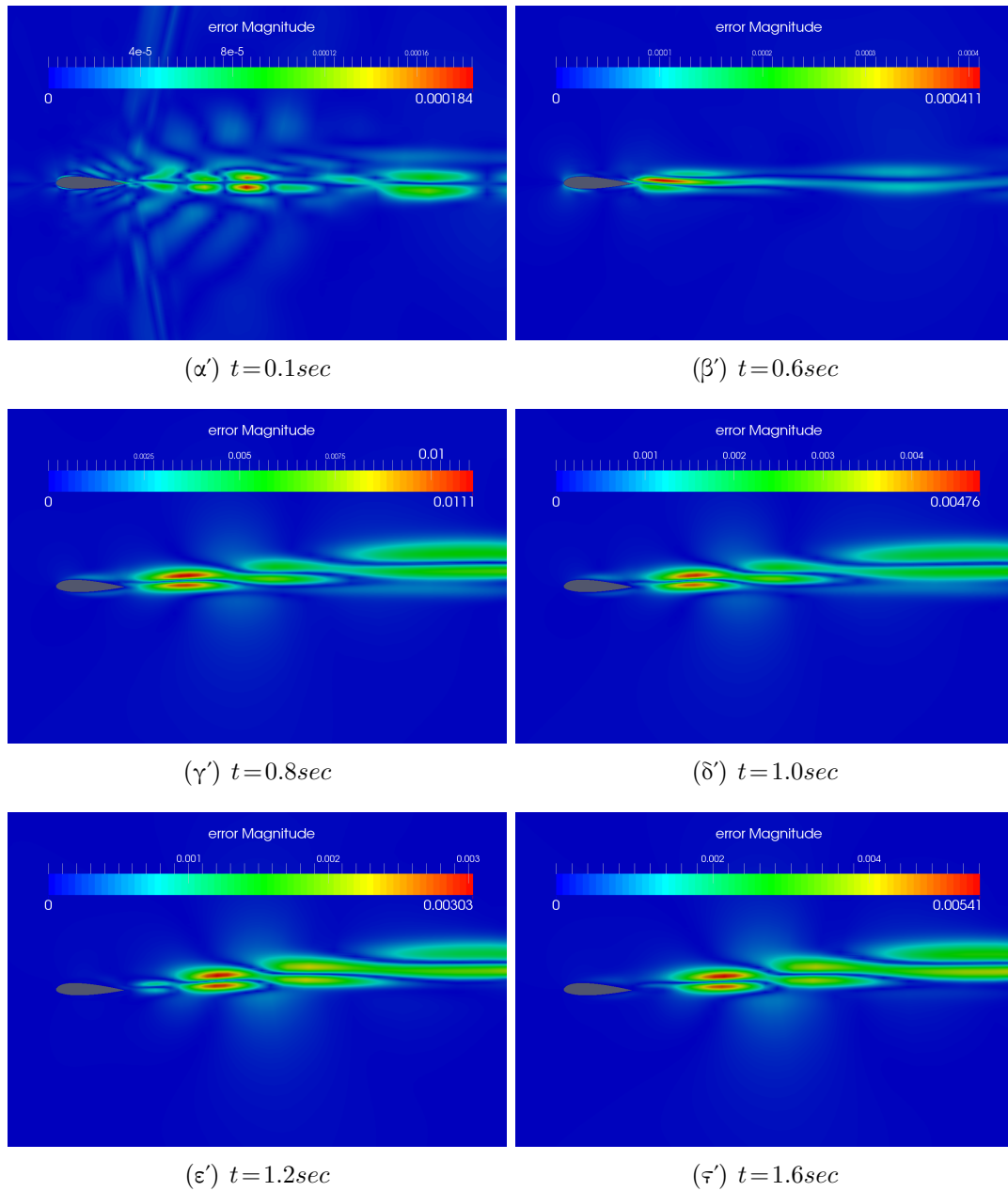
Στο σχήμα 6.13, παρουσιάζεται η προσεγγιστική καμπύλη που προέκυψε από το πολλαπλό επαυξητικό SVD, σε σύγκριση με τη καμπύλη που προκύπτει από την πλήρη λύση. Τα ranks που χρησιμοποιήθηκαν για κάθε τμήμα είναι 6, 6 και 7 αντίστοιχα με τις χρονικές περιόδους, όπως αυτές ορίστηκαν παραπάνω. Αν ληφθεί υπόψη, ότι



**Σχήμα 6.13:** Συντελεστές αντίστασης με εφαρμογή πολλαπλού SVD, με rank και σύγκρισή τους με την πλήρη λύση.

το επιθυμητό διάστημα στο οποίο θα γίνει η βελτιστοποίηση ορίστηκε από 0.3 έως 1.3 δευτερόλεπτα, η προσέγγιση της πρώτης χρονικής περιόδου (μόνιμη ροή στις 0 μοίρες) δεν παίζει κανένα ρόλο, καθώς οι συζυγείς εξισώσεις δεν θα λυθούν στο διάστημα αυτό. Επομένως με ένα συνολικό  $rank = 7 + 6 = 13$ , η καμπύλη του συντελεστή αντίστασης προσεγγίζεται με πολύ ικανοποιητικό βαθμό, σε αντίθεση με το κανονικό επαυξητικό SVD, όπου ακόμα και με  $rank = 50$  η προσέγγιση δεν ήταν καλή.

Προκύπτει έτσι ένα μεγάλο κέρδος, τόσο σε υπολογιστικό κόστος, όσο και σε απαιτούμενη μνήμη, καθώς οι πίνακες είναι μικρότερης διάστασης, επομένως ο αλγόριθμος του επαυξητικού SVD θα εκτελείται πιο γρήγορα. Στο σχήμα 6.14, παρουσιάζονται έξι στιγμιότυπα του σφάλματος ανάμεσα στην προσεγγιστική λύση του SVD και στην πλήρη λύση, σε όλο το πεδίο ροής. Το σφάλμα ορίζεται ως η απόλυτη τιμή της διαφοράς των ταχυτήτων, δηλαδή  $error = |U_{exact} - U_{SVD}|$ . Παρατηρείται ότι, οι περιοχές με την μεγαλύτερη απόκλιση είναι αυτές στον ομόρρου της αεροτομής και ιδιαίτερα γύρω από το στρώμα διάτμησης της ροής. Επίσης, το μεγαλύτερο σφάλμα παρουσιάζεται γύρω από το ιδιόμορφο σημείο στο οποίο υπάρχει



**Σχήμα 6.14:** Στιγμιότυπα του σφάλματος ανάμεσα στην προσεγγιστική λύση του επαυξητικού *SVD* και στην πλήρη λύση σε όλο το πεδίο ροής.

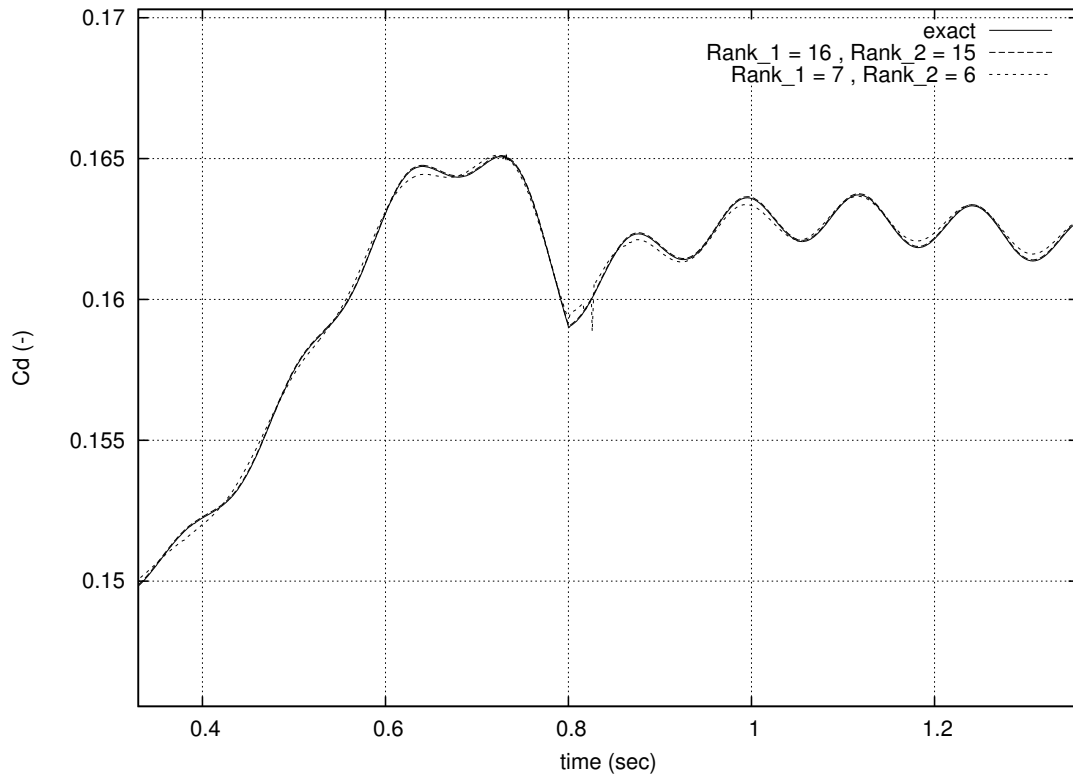
η ασυνέχεια πρώτης παραγώγου που παρατηρήθηκε στην καμπύλη του συντελεστή οπισθέλκουσας ( $t=0.8sec$ ).

Η ανάλυση που έγινε, αφορούσε μόνο τον πρώτο κύκλο βελτιστοποίησης στον οποίο οι παλλόμενες δέσμες δεν αναρροφούν ούτε εγχύουν ποσότητες ρευστού. Όταν ολοκληρωθεί ο πρώτος κύκλος βελτιστοποίησης, στο σύστημα θα προστεθεί και μια ακόμα δυναμική, λόγω της ταλάντωσης που θα δημιουργούν οι παλλόμενες δέσμες. Επομένως αναμένεται ο προηγούμενα επιλεγμένος αριθμός Ιδιόμορφων Τιμών (6 και 7), να μην επαρκεί για την προσέγγιση της ροής όταν σε αυτή θα εισαχθεί η ταλάντωση λόγω των δεσμών. Στο σχήμα 6.15, έχει σχεδιαστεί η καμπύλη του συντελεστή αντίστασης στο δεύτερο κύκλο βελτιστοποίησης για την ακριβή λύση καθώς και οι προσεγγιστικές καμπύλες που προκύπτουν για διάφορα ranks. Παρατηρείται ότι για τα ranks που είχαν επιλεγθεί αρχικά, δηλαδή για  $t \in [0.3, 0.8] \rightarrow rank=7$  και για  $t \in [0.8, 1.3] \rightarrow rank=6$ , η προσεγγιστική καμπύλη δεν ακολουθεί ικανοποιητικά αυτήν της πλήρους λύσης, υστερώντας κυρίως στην παρακολούθηση της αρμονικής ταλάντωσης και εισάγοντας θόρυβο γύρω από το ιδιόμορφο σημείο ασυνέχειας παραγώγου. Αυξάνοντας, όμως τον αριθμό των ιδιόμορφων τιμών σε 16 και 15 αντίστοιχα, προκύπτει μια πολύ καλύτερη προσέγγιση η οποία ακολουθεί πλήρως όλη τη δυναμική του συστήματος.

Με βάση τα παραπάνω, για τη βελτιστοποίηση και τον έλεγχο της ροής στο μεταβατικό φαινόμενο, ορίζονται τελικώς τα εξής:

- Η συχνότητα έγχυσης/αναρρόφησης των παλλόμενων δεσμών είναι σταθερή και ίση με  $8Hz$ .
- Το χρονικό βήμα επίλυσης της ροής είναι  $dt=0.001sec$ .
- Ο αριθμός του βήματος στον τύπο της απότομης καθόδου είναι  $\eta=2 \cdot 10^{-3}$ .
- Ο έλεγχος της ροής αφορά το διάστημα από 0.3 έως 1.3 sec, όπως αυτό ορίστηκε παραπάνω.

Έπειτα από 20 κύκλους βελτιστοποίησης, στο σχήμα 6.16 παρουσιάζονται οι τιμές της αντικειμενικής συνάρτησης για κάθε κύκλο. Η τελική τιμή που παίρνει η αντικειμενική συνάρτηση είναι  $F_{obj} = 0.0127237$ , ενώ η αρχική τιμή είναι  $F_{obj}^{init} = 0.0129425$ . Στο πίνακα 6.3 καταγράφονται οι τιμές από τα πλάτη των παλλόμενων δεσμών, όπως προέκυψαν μετά τον 20<sup>ο</sup> κύκλο βελτιστοποίησης. Όπως και στην περίπτωση της μόνιμης ροής, το jet 1 είναι η πρώτη αριστερά δέσμη στην

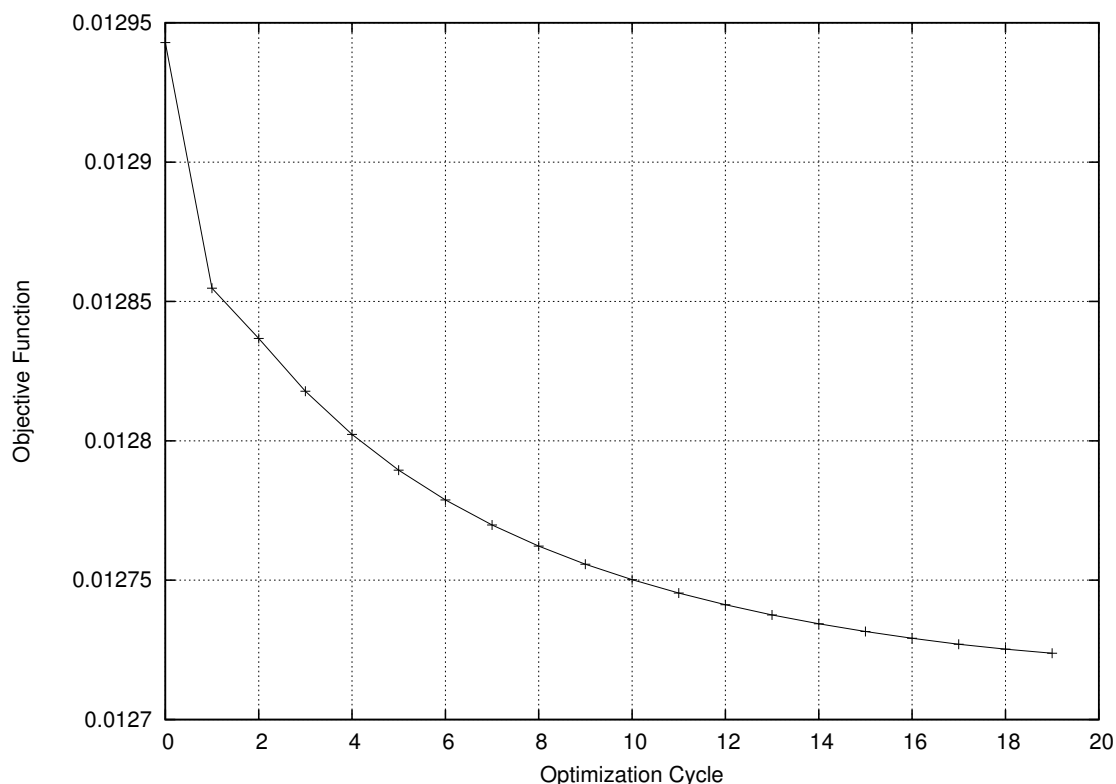


**Σχήμα 6.15:** Καμπύλες του συντελεστή αντίστασης που προκύπτουν, για διάφορα ranks του πολλαπλού επαυξητικού SVD σε σύγκριση με την πλήρη λύση.

Μεταβλητές Σχεδιασμού	
jet 1	-0.00021449
jet 2	0.00084706
jet 3	0.00297309
jet 4	0.00335769

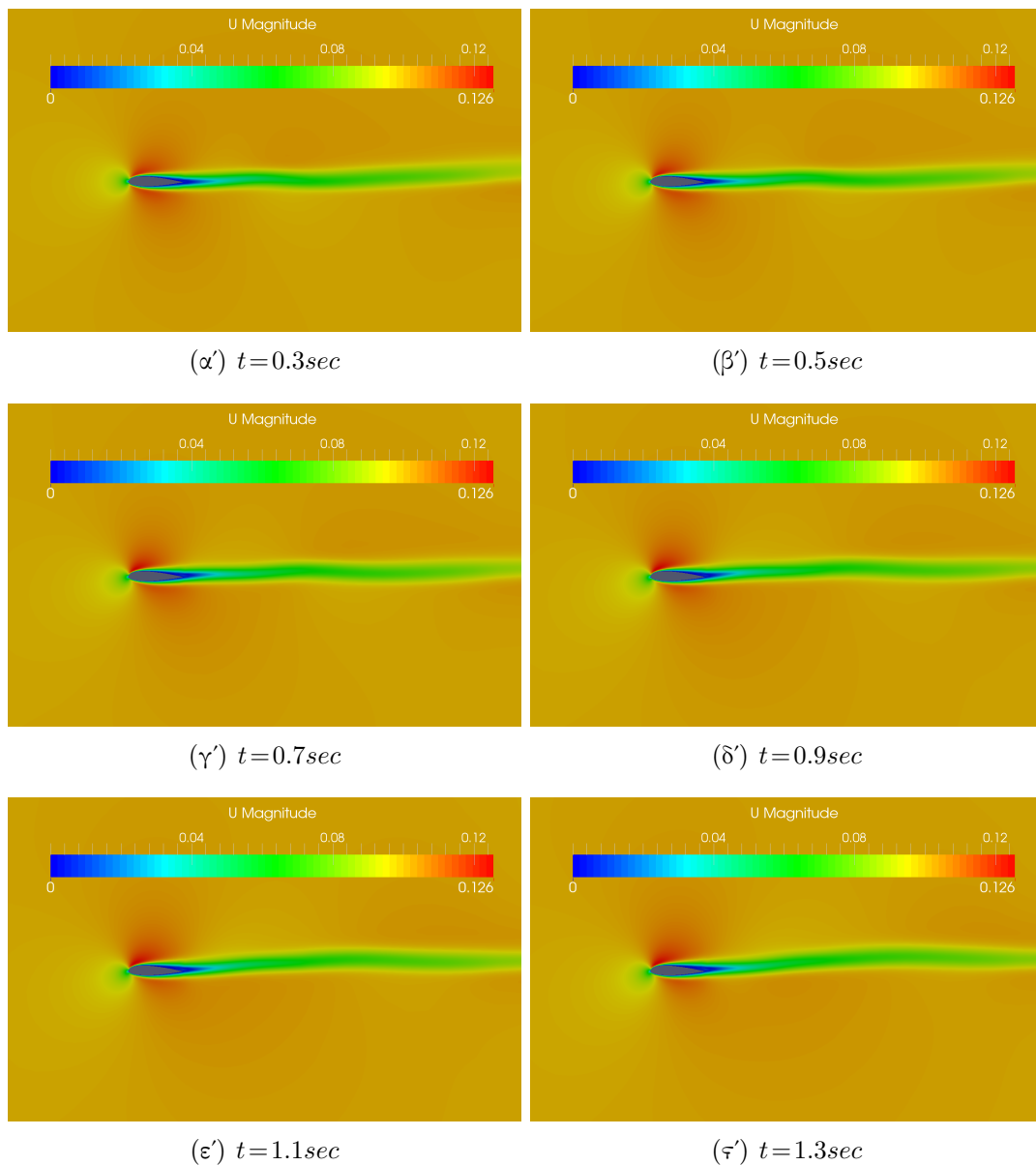
**Πίνακας 6.3:** Πινακοποιημένες τιμές με τα πλάτη έγχυσης/αναρρόφησης των παλλόμενων δεσμών.



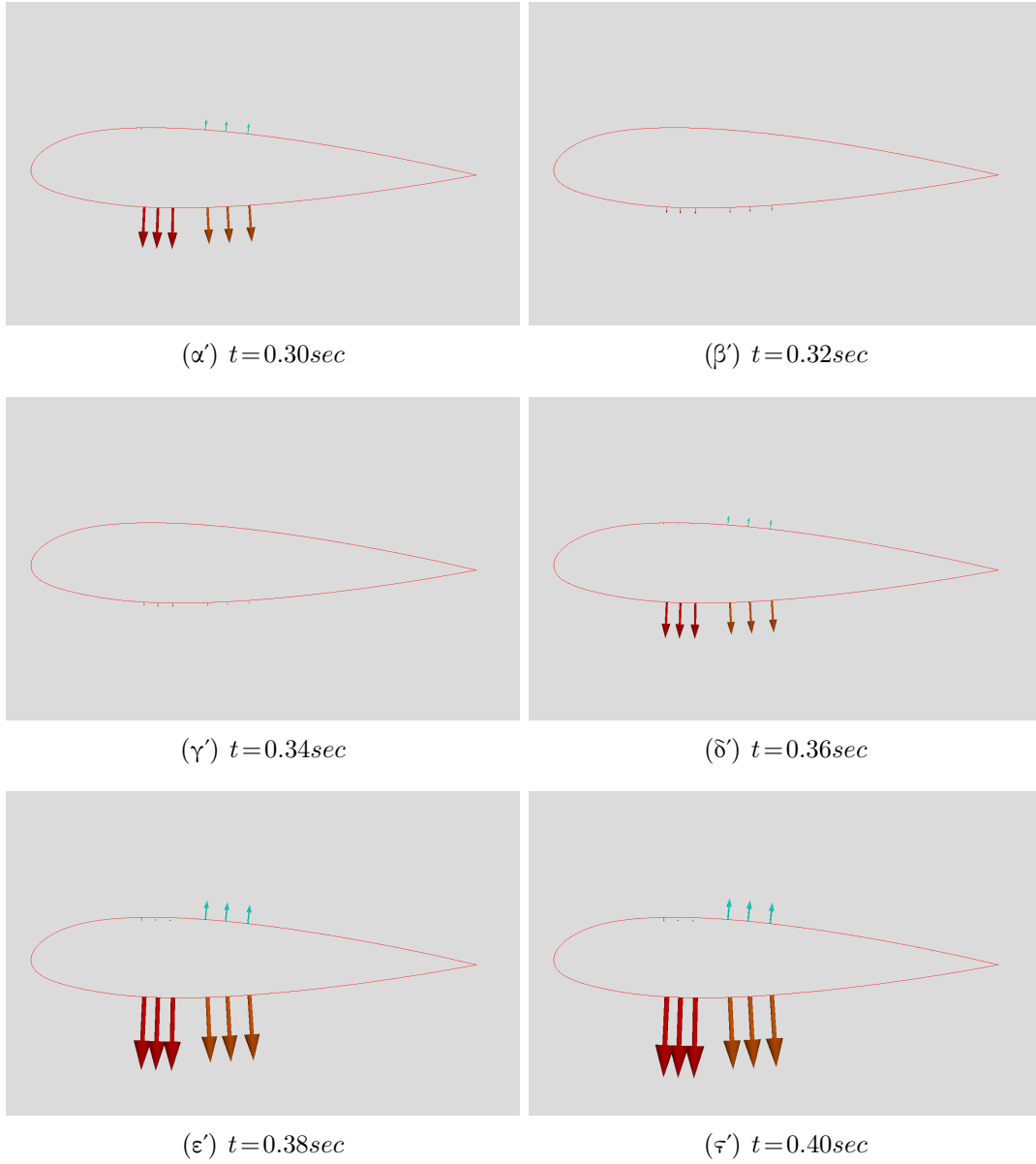


**Σχήμα 6.16:** Οι τιμές της αντικειμενικής συνάρτησης για κάθε κύκλο βελτιστοποίησης στο μεταβατικό φαινόμενο.

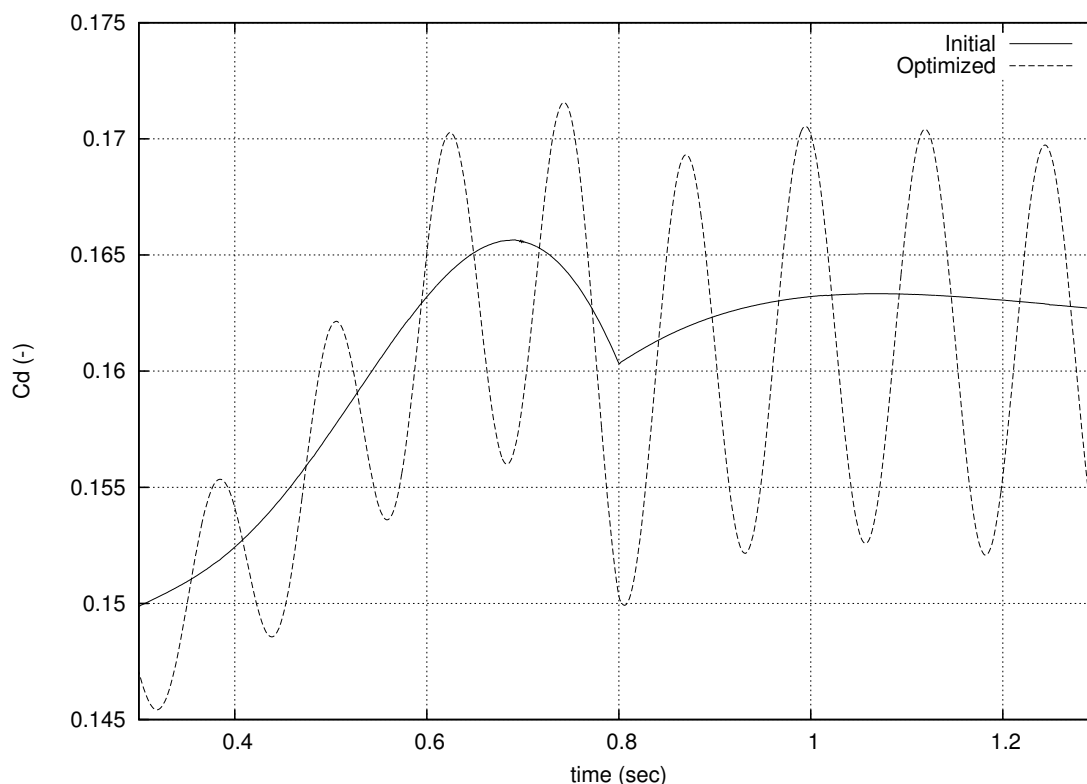
πλευρά υποπίεσης και η αρίθμηση συνεχίζει ωρολογιακά. Είναι φανερό, πως οι τιμές των μεταβλητών σχεδιασμού είναι αρκετά διαφοροποιημένες σε σχέση με αυτές της μόνιμης βελτιστοποιημένης ροής (πίνακας 6.1), τόσο ως προς τις τιμές, όσο και ως προς την κατανομή τους. Σε αντίθεση με τη μόνιμη ροή όπου στην πλευρά υποπίεσης και οι δύο δέσμες αναρροφούσαν αέρα, στην περίπτωση της μη-μόνιμης η μία αναρροφά και η άλλη εγχύει ρευστό. Με τον τρόπο αυτό δημιουργείται ένας στρόβιλος ο οποίος είναι αντίθετος του στρόβιλου που αποβάλλεται στον ομόρρου λόγω αλλαγής της κυκλοφορίας γύρω από την αεροτομή. Στο σχήμα 6.17 παρουσιάζονται έξι στιγμιότυπα της βελτιστοποιημένης ροής και στο σχήμα 6.18 παρουσιάζονται 6 στιγμιότυπα των παλλόμενων δεσμών για τα πλάτη που προσέκυψαν μετά τον 20<sup>ο</sup> κύκλο βελτιστοποίησης. Τέλος, στο σχήμα 6.19 σχεδιάζεται η αρχική καμπύλη του συντελεστή αντίστασης μαζί με την καμπύλη που προέκυψε έπειτα από τη βελτιστοποίηση. Όπως και στην περίπτωση της σταθερής γωνίας της επ' άπειρον ροής, η μέση τιμή του συντελεστή αντίστασης είναι μειωμένη, ενώ ταλαντώνεται γύρω από αυτή με τη συχνότητα έγχυσης/αναρρόφησης των παλλόμενων δεσμών (8Hz).



**Σχήμα 6.17:** Στιγμιότυπα του πεδίου ροής μετά τη βελτιστοποίηση σε διάφορες χρονικές στιγμές του μεταβατικού φαινομένου.

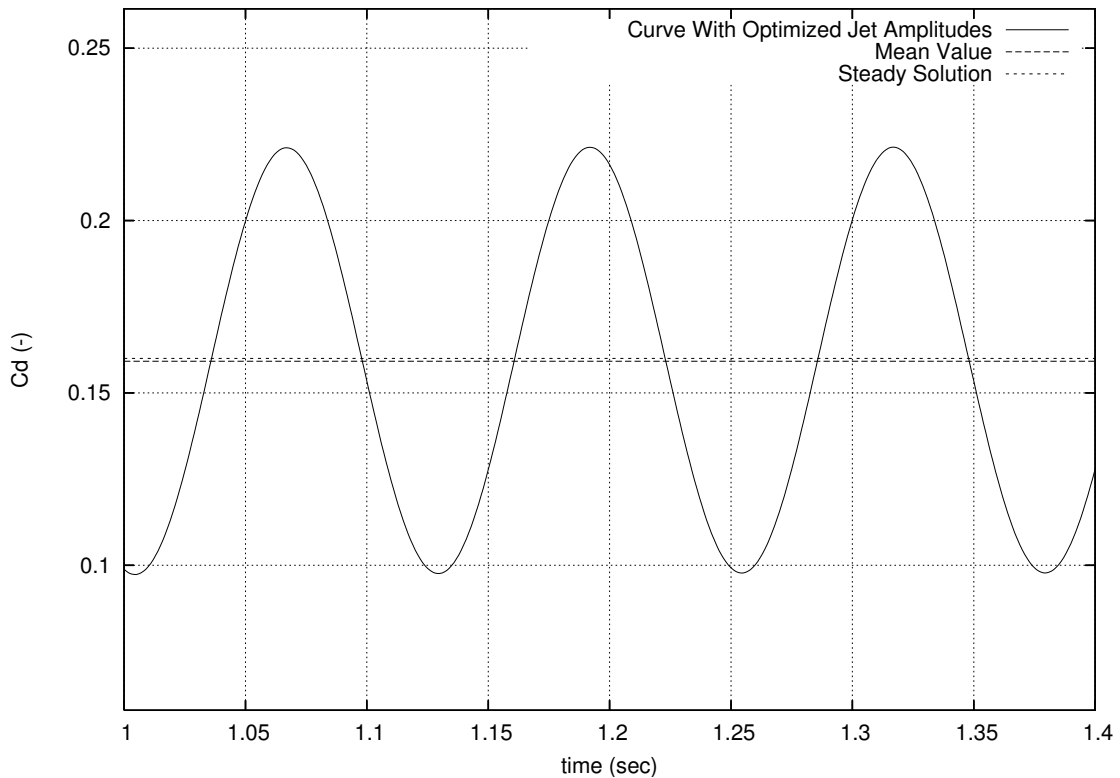


**Σχήμα 6.18:** Στιγμιότυπα έγχυσης/αναρρόφησης των παλλόμενων δεσμών μετά τον τελευταίο κύκλο βελτιστοποίησης.



**Σχήμα 6.19:** Οι καμπύλες του συντελεστή αντίστασης, στο μεταβατικό φαινόμενο, πριν και μετά τη βελτιστοποίηση.

Αξίζει να διερευνηθεί, τι αποτέλεσμα θα προέκυπτε αν οι δέσμες συνέχιζαν να εγχύουν/αναρροφούν ρευστό και στο χρονικό διάστημα όπου η γωνία εισόδου έχει σταθεροποιηθεί. Δηλαδή, πως θα συμπεριφερόταν η ροή για μόνιμη γωνία εισόδου επί άπειρης ταχύτητας, ίση με 5 μοίρες, με τα πλάτη έγχυσης/αναρρόφησης των δεσμών, να είναι αυτά που υπολογίστηκαν για τη βελτιστοποίηση της μεταβατικής ροής. Επιλύοντας τη ροή, υπολογίζεται ο συντελεστής αντίστασης που προκύπτει, και παρουσιάζεται στο σχήμα 6.20. Παρατηρείται ότι ο συντελεστής αντίστασης ταλαντώνεται γύρω από μια μέση τιμή, η οποία είναι ελάχιστα μικρότερη από την τιμή που προκύπτει για μόνιμη ροή. Επομένως, αναμένεται να υπάρξει πολύ μικρή μείωση στην τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης σε σχέση με αυτή που είχε προκύψει από τη βελτιστοποίηση της μόνιμης ροής με σταθερή γωνία εισόδου. Οι τιμές των αντικειμενικών συναρτήσεων καταγράφονται στον πίνακα 6.4.



**Σχήμα 6.20:** Οι τιμές του συντελεστή αντίστασης χρησιμοποιώντας τα πλάτη των παλλόμενων δεσμών έγχυσης/αναρρόφησης όπως αυτά προέκυψαν από τη βελτιστοποίηση της μη-μόνιμης ροής, σε σύγκριση με την τιμή για την περίπτωση μόνιμης ροής με σταθερή γωνία εισόδου 5 μοίρες.

Μόνιμη ροή	0.01293459
Βελτιστοποίηση στη Μόνιμη ροή	0.01259647
Βελτιστοποίηση στη Μη-Μόνιμη ροή	0.01290703

**Πίνακας 6.4:** Τιμές της αντικειμενικής συνάρτησης στην περίπτωση, μόνιμης ροής με γωνία εισόδου 5 μοίρες, με χρήση των δεσμών έγχυσης/αναρρόφησης έπειτα από βελτιστοποίηση στη μόνιμη και τη μεταβατική ροή.



## Κεφάλαιο 7

### Ανακεφαλαίωση-Συμπεράσματα

Στην παρούσα διπλωματική εργασία παρουσιάστηκε μια μέθοδος για τον ενεργητικό έλεγχο μη-μόνιμων ροών, βασισμένη στη συνεχή συζυγή (continuous adjoint) μέθοδο και στην Κύρια Ορθογωνική Ανάλυση (Proper Orthogonal Decomposition). Για τον ενεργητικό έλεγχο της ροής χρησιμοποιήθηκαν παλλόμενες δέσμες έγχυσης/αναρρόφησης ρευστού (pulsating jets). Αρχικά διατυπώθηκε η συνεχής συζυγής μέθοδος για μη-μόνιμη, ασυμπίεστη, στρωτή ροή, θεμελιώθηκε μαθηματικά η Κύρια Ορθογωνική Ανάλυση και αναπτύχθηκε ο αλγόριθμος της επαυξητικής Ανάλυσης Ιδιόμορφων Τιμών (incremental Singular Value Decomposition).

Στη συνέχεια εφαρμόστηκε έλεγχος της ροής, γύρω από ένα τετραγωνικό πρίσμα. Λόγω της γεωμετρίας του σώματος και της στρωτής ροής (χαμηλός αριθμός Reynolds), στον ομόρρο του σώματος σχηματίζονται στρόβιλοι von Karman, οι οποίοι μετά το τέλος της βελτιστοποίησης καταστρέφονται, οδηγώντας σε μείωση της δύναμης αντίστασης. Παρουσιάστηκε επίσης μια παραμετρική ανάλυση, για τον υπολογισμό του απαραίτητου αριθμού ιδιόμορφων τιμών, με βάση τις οποίες προκύπτει μια ικανοποιητική προσέγγιση των τιμών, των χρονικά μεταβαλλόμενων ροϊκών μεγεθών. Διαπιστώθηκε ότι αρκεί ένας πολύ μικρός αριθμός ιδιόμορφων τιμών, για να προσεγγιστεί με μεγάλη ακρίβεια το πεδίο της ροής σε κάθε χρονική στιγμή. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα την επίτευξη μεγάλου κέρδους σε μνήμη υπολογιστή, σε σύγκριση με την πλήρη αποθήκευση όλων των ροϊκών μεγεθών (full storage), αλλά και κέρδος σε υπολογιστικό κόστος, σε σύγκριση με τη μέθοδο Διωνυμικής Κατανομής Σημείων Ελέγχου (Binomial Check-pointing), καθώς οι

πρωτεύουσες εξισώσεις της ροής επιλύονται μόνο μια φορά σε κάθε κύκλο βελτιστοποίησης. Επίσης διαπιστώθηκε, πως τα αποτελέσματα που προέκυψαν από τη βελτιστοποίηση με την προσεγγιστική μέθοδο, με τη χρήση του επαυξητικού SVD, δεν διέφεραν από αυτά που προέκυψαν με χρήση κάποιας ακριβούς μεθόδου, όπως η μέθοδος Διωνυμικής Κατανομής Σημείων Ελέγχου.

Έπειτα, εξετάστηκε η ροή γύρω από μια μεμονωμένη αεροτομή, στην οποία μεταβαλλόταν χρονικά η γωνία πρόπτωσης της επ' άπειρον ταχύτητας. Ο έλεγχος της ροής με χρήση παλλόμενων δεσμών έγχυσης/αναρρόφησης αφορούσε, το χρονικό κομμάτι κατά το οποίο μεταβάλλεται η γωνία της επ' άπειρον ροής, αλλά και το χρονικό κομμάτι στο οποίο η γωνία σταθεροποιείται στην τελική τιμή της και η ροή γίνεται μόνιμη. Έγινε μια σύγκριση, μεταξύ των αποτελεσμάτων που προέκυψαν από τη βελτιστοποίηση του μεταβατικού φαινομένου και των αποτελεσμάτων από τη βελτιστοποίηση της μόνιμης ροής. Τέλος παρουσιάστηκε ένας αλγόριθμος πολλαπλού επαυξητικού SVD, για την καλύτερη και με λιγότερες απαιτήσεις μνήμης προσέγγιση έντονα δυναμικών φαινομένων. Προέκυψε ότι, χωρίζοντας το χρονικό διάστημα στο οποίο επιλύεται η ροή, σε χρονικές περιόδους με ανεξάρτητη μεταξύ τους δυναμική συμπεριφορά και εκτελώντας διακεκριμένα επαυξητικά SVD σε καθένα από αυτά, η προσέγγιση του πεδίου ροής γίνεται με πολύ μεγαλύτερη ακρίβεια από το να εκτελούνταν ένα ενιαίο επαυξητικό SVD με τον ίδιο συνολικό αριθμό ιδιόμορφων τιμών.

Κλείνοντας την παρούσα διπλωματική εργασία, όσον αφορά κάποιες ιδέες για περαιτέρω μελέτη, θα άξιζε να αναπτυχθεί και να εφαρμοσθεί η αντίστοιχη μέθοδος για τυρβώδεις ροές, με σκοπό τον έλεγχο σε περιπτώσεις με δυναμικές αποκολλήσεις της ροής (dynamic stall), αλλά και φαινόμενα πτερυγισμού (fluttering) αεροτομών. Επίσης, να αναπτυχθεί η συνεχής συζυγής μέθοδος με μεταβλητές σχεδιασμού όχι μόνο τα πλάτη και τις φάσεις έγχυσης/αναρρόφησης των δεσμών, αλλά και τις θέσεις τοποθέτησης αυτών πάνω στο εκάστοτε στερεό σώμα.



# Βιβλιογραφία

- [1] Κ.Χ. Γιαννάκογλου. *Αριθμητική Ανάλυση για Μηχανικούς*. ΕΜΠ, 2003.
- [2] Κ.Χ. Γιαννάκογλου. *Μέθοδοι Βελτιστοποίησης στην Αεροδυναμική*. ΕΜΠ, 2006.
- [3] Κ.Χ. Γιαννάκογλου. *Συνεκτικές Ροές στις Στροβιλομηχανές*. ΕΜΠ, 2004.
- [4] Σ. Τσαγγάρης. *Μηχανική των Ρευστών*. Συμεών, 2005.
- [5] Γ. Μπεργελές. *Υπολογιστική Ρευστομηχανική*. Συμεών, 2012.
- [6] Ν.Καδιανάκης Σ.Καρανάσιος. *Γραμμική Άλγεβρα Αναλυτική Γεωμετρία και Εφαρμογές*. ΕΜΠ, 2008.
- [7] Χ.Σ. Καπέλλος. *Η συνεχής συζυγής μέθοδος για περιοδικές ροές. Εφαρμογή στο βέλτιστο έλεγχο της έκλυσης στροβίλων γύρω από κύλινδρο*. Διπλωματική Εργασία, Αθήνα 2013.
- [8] D.I. Papadimitriou, K.C. Giannakoglou, *A Continuous Adjoint Formulation with Emphasis to Aerodynamic-Turbomachinery Optimization*, ECCOMAS CFD 2006 Conference, Egmond Aan Zee, Sept. 2006.
- [9] D.I. Papadimitriou, K.C. Giannakoglou, *Compressor Blade Optimization using a Continuous Adjoint Formulation*, ASME Paper GT-2006/90466, 2006.
- [10] D.I. Papadimitriou, K.C. Giannakoglou, *A continuous adjoint method with objective function derivatives based on boundary integrals for inviscid and viscous flows*, Computers & Fluids, 36, 325-341, 2007.
- [11] A.S. Zymaris, D.I. Papadimitriou, E.M. Papoutsis-Kiachagias, K.C. Giannakoglou, C. Othmer: *The Continuous Adjoint Method as a Guide for the Design of Flow Control Systems Based on Jets*, Engineering Computations, to appear 2013.
- [12] C.K. Vezyris, I.S. Kavvadias, E.M. Papoutsis-Kiachagias, K.C. Giannakoglou. *Unsteady Continuous Adjoint Method Using POD for Jet-Based Flow Control*. *11th World Congress on Computational Mechanics*.
- [13] W.Schilders, H.A.van der Vorst, J.Rommers. *Model Order Reduction*. Springer, 2000
- [14] A. Chatterjee. *An introduction to the proper orthogonal decomposition*. *Current Science*, Vol. 78, No. 7, 10 April 2000

- [15] L. Sirovich. Turbulence and the dynamics of coherent structures. *I—III. Quart. Appl. Math.*, 45(3):561–590, 1987.
- [16] K. Kunisch and S. Volkwein. *Galerkin proper orthogonal decomposition methods for parabolic problems. Numerische Mathematik*, 90:117–148, 2001
- [17] L. Balzano and S. Wright. *On grouse and incremental SVD. In Computational Advances in Multi-Sensor Adaptive Processing (CAMSAP)*, 2013 IEEE 5th International Workshop, pages 1–4, Dec 2013.
- [18] M. Brand. *Fast low-rank modifications of the thin singular value decomposition. Linear Algebra and its Applications*, 415(1):20 – 30, 2006.
- [19] S. Lall, J. E. Marsden, and S. Glavaski. A subspace approach to balanced truncation for model reduction of nonlinear control systems. *Internat. J. Robust Nonlinear Control*, 12(6):519–535, 2002.
- [20] A. Walther, A. Griewank. Advantages of Binomial Checkpointing for Memory-reduced Adjoint Calculations. *Springer, 2003*
- [21] Griewank, A. Walther, *An implementation of checkpointing for the reverse or adjoint mode of computational differentiation.* Trans. Math. Soft., 26, 19-45, 2000.
- [22] I. Charpentier. Checkpointing Schemes for Adjoint Codes: Application to the Meteorological Model Meso-NH. *SIAM Journal on Scientific Computing*.
- [23] B.C. Moore. *Principle component analysis in linear systems: controllability, observability and model reduction.* IEEE Trans. on Automat. Contr., 26:17–32, 1981.
- [24] J. Borggaard, A. Hay, D. Pelletier. *Interval-based reduced-order models for unsteady fluid flow.* 2006 Institute for Scientific Computing and Information.
- [25] Y. Saad and M. H. Schultz. *GMRES: a generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems.* SIAM J. Sci. Statist. Comput., 7:856–869, 1986.
- [26] R. V. Kadison, J. R. Ringrose. *Fundamentals of the Theory of Operator Algebras, Vol. 1: Elementary Theory.* Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1997.
- [27] O. P. Le Maitre and Omar M. Knio. *Spectral Methods for Uncertainty Quantification With Applications to Computational Fluid Dynamics.* Scientific Computation. Springer, 2010.
- [28] K. Pearson (1901). *On Lines and Planes of Closest Fit to Systems of Points in Space.* Philosophical Magazine 2 (11): 559–572.
- [29] C. Eckart, G. Young (1936). *The approximation of one matrix by another of lower rank.* Psychometrika 1 (3): 211–8.
- [30] M. M. Zdravkovich. *Flow around circular cylinders, Vol.1: Fundamentals.* USA: Oxford University Press USA, p.61, pp.258-259, 1997.
- [31] R. I. Issa. Solution of the Implicit Discretized Fluid Flow Equations by Operator Splitting. *Mechanical Engineering Rep. FS-82-15, Imperial College, London.*

- [32] Enseiht, <http://hmf.enseiht.fr/travaux/CD0102/travaux/optmfn/gpfmho/01-02/grp1/phy-know.htm>
- [33] D.Amsallem, C.Farhat. Model Reduction. *Stanford University*.
- [34] T. Kármán, 1954. *Aerodynamics: Selected Topics in the Light of Their Historical Development*, Cornell University Press, Ithaca, pp. 68–69.
- [35] A. Mallock, 1907. *On the resistance of air*. Proc. Royal Soc., A79, pp. 262–265.
- [36] H. Bénard, 1908. *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (Paris), vol. 147, pp. 839–842, 970–972.
- [37] NASA Goddard Space Flight Center. (2012, May 8) Science Focus: Von Karman Vortices. Accessed January 15, 2013.
- [38] Nasa. <http://www.nasa.gov/centers/langley/news/factsheets/Micro-VG.html>
- [39] <http://www.openfoam.com>