



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΡΕΥΣΤΩΝ

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΘΕΡΜΙΚΩΝ ΣΤΡΟΒΙΛΟΜΗΧΑΝΩΝ

ΜΟΝΑΔΑ ΠΑΡΑΛΛΗΛΗΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ

ΡΕΥΣΤΟΔΥΝΑΜΙΚΗΣ & ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ

**ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ
ΤΩΝ ΑΡΜΟΝΙΚΩΝ ΓΙΑ ΧΡΟΝΙΚΑ ΠΕΡΙΟΔΙΚΕΣ ΣΤΡΩΤΕΣ ΡΟΕΣ**

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΑΔΑΜ. Δ. ΛΑΜΠΡΟΠΟΥΛΟΥ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ

ΚΥΡΙΑΚΟΣ. Χ. ΓΙΑΝΝΑΚΟΓΛΟΥ

ΑΘΗΝΑ ΟΚΤΩΒΡΙΟΣ 2012



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΡΕΥΣΤΩΝ

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΘΕΡΜΙΚΩΝ ΣΤΡΟΒΙΛΟΜΗΧΑΝΩΝ

ΜΟΝΑΔΑ ΠΑΡΑΛΛΗΛΗΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ

ΡΕΥΣΤΟΔΥΝΑΜΙΚΗΣ & ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ ΤΩΝ ΑΡΜΟΝΙΚΩΝ ΓΙΑ ΧΡΟΝΙΚΑ ΠΕΡΙΟΔΙΚΕΣ ΣΤΡΩΤΕΣ ΡΟΕΣ

του Αδάμ .Δ. Λαμπρόπουλου
Επιβλέπων: Κυριάκος .Χ. Γιαννάκογλου
Αθήνα Οκτώβριος 2012

Περίληψη

Σκοπός αυτής της διπλωματικής εργασίας είναι η εφαρμογή και ο προγραμματισμός της μεθόδου ισορροπίας των αρμονικών στις εξισώσεις Navier-Stokes και η αριθμητική επίλυση των μετασχηματισθεισών εξισώσεων για χρονικά περιοδικές στρωτές ροές.

Η βασική ιδέα της μεθόδου είναι η χρησιμοποίηση της εκ των προτέρων, γνώσης της περιοδικότητας του φαινομένου με την προσέγγιση των αγνώστων μεταβλητών μέσω πεπερασμένων τριγωνομετρικών σειρών. Με αυτόν τον τρόπο το πρόβλημα ανάγεται στον υπολογισμό των συντελεστών των προσεγγιστικών σειρών, ώστε το αρχικό μη-μόνιμο χρονικά πρόβλημα να αντικαθίσταται από ένα μικρό αριθμό χρονικά μόνιμων εξισώσεων ροής.

Το βασικό πλεονέκτημα αυτής της προσέγγισης είναι ο απευθείας υπολογισμός του περιοδικού φαινομένου και η μείωση του υπολογιστικού κόστους που συνεπάγεται αυτό, σε αντίθεση με την μέθοδο της χρονοπροέλασης που ο υπολογισμός του μεταβατικού φαινομένου δεν είναι δυνατόν να παρακαμφθεί.

Σε αυτήν την εργασία, γίνεται ο υπολογισμός του πεδίου ροής γύρω από μια απομονωμένη αεροτομή, που η γωνία προσβολής μεταβάλλεται περιοδικά με τον χρόνο. Για την επίλυση χρησιμοποιήθηκαν και οι δύο μέθοδοι, έγινε σύγκριση των αποτελεσμάτων τους και προέκυψε ότι πρακτικά ταυτίζονται ενώ ο υπολογιστικός χρόνος με την νέα μέθοδο μειώνεται κατά ένα σημαντικό ποσοστό.



**NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY
OF ATHENS**

SCHOOL OF MECHANICAL ENGINEERING

DEPARTMENT OF FLUIDS

LABORATORY OF THERMAL TURBOMACHINES

PARALLEL CFD & OPTIMIZATION UNIT

**PROGRAMMING OF THE HARMONIC BALANCE
METHOD FOR PERIODIC LAMINAR FLOWS**

Adam. D .Labropoulos
Advisor:Kyriakos. X . Giannakoglou
Athens October 2012

Abstract

The purpose of this diploma thesis is the implementation of the harmonic balance technique in Navier-Stokes equations and the numerical solution of the transformed equations for periodic laminar flows.

The basic idea of this method is the exploitation of the ,a priori, knowledge of the periodicity of the phenomenon by approximating the unknown variables with trigonometrical series. By doing so, the initial time dependent problem is replaced by a system of time-independent equations.

The main advantage of this approach is the reduction of the computational cost due to the ability of the direct computation of the periodic field in contrast to, the time-marching method where the computation of the transient field can not be by-passed.

In this diploma the flow field around an isolated airfoil is being computed where the angle of attack is a periodic function of time. The results of the harmonic balance method are compared to those obtained by the time-marching method and is concluded that they are practically identical, also the computational cost by the use of the new method is greatly decreased.

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή μου Κ. Χ . Γιαννάκογλου για τη δυνατότητα που μου έδωσε να ασχοληθώ με αυτό το πρωτότυπο θέμα και τη βοήθεια που μου προσέφερε κατά τη διάρκεια της δημιουργίας αυτής της διπλωματικής. Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους διδάκτορες Δρ.Ξ.Τρομπούκη και Δρ.Βαρβάρα Ασούτη για τη σημαντική βοήθεια που μου προσέφεραν σε πολλά σημεία κατά τη διάρκεια δημιουργίας του κώδικα.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένεια μου για τη στήριξη της, κατά τη διάρκεια των σπουδών μου.

Περιεχόμενα

1	ΕΙΣΑΓΩΓΗ	1
2	ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ	3
2.1	ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ NAVIER-STOKES	3
2.2	ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥ ΕΡΓΑΖΟΜΕΝΟΥ ΜΕΣΟΥ	4
2.3	ΑΔΙΑΣΤΑΤΟΠΟΙΗΣΗ	6
3	ΔΙΑΚΡΙΤΟΠΟΙΗΣΗ ΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΚΑΙ ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΟΥΣ	8
3.1	ΔΙΑΚΡΙΤΟΠΟΙΗΣΗ ΠΕΔΙΟΥ ΡΟΗΣ	8
3.1.1	ΧΩΡΙΚΗ ΔΙΑΚΡΙΤΟΠΟΙΗΣΗ	8
3.1.2	ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ	9
3.2	ΜΗ-ΣΥΝΕΚΤΙΚΟΙ ΟΡΟΙ	10
3.2.1	ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ	10
3.2.2	ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΙΑΚΩΒΙΑΝΗΣ	11
3.3	ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΚΑΙ ΙΔΙΟΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ ΙΑΚΩΒΙΑΝΗΣ	12
3.3.1	ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΜΗ-ΣΥΝΕΚΤΙΚΩΝ ΟΡΩΝ	12
3.4	ΣΥΝΕΚΤΙΚΟΙ ΟΡΟΙ	14
3.5	ΧΡΟΝΙΚΗ ΔΙΑΚΡΙΤΟΠΟΙΗΣΗ	16
3.5.1	ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΗΣ ΧΡΟΝΟΠΡΟΕΛΑΣΗΣ	16
3.6	ΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ	18
3.6.1	ΤΟΙΧΩΜΑ	19
3.6.2	ΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΣΤΟ ΑΠΕΙΡΟ	20
3.6.3	ΑΡΧΙΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ	21
3.7	ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΨΕΥΔΟΧΡΟΝΙΚΟΥ ΒΗΜΑΤΟΣ	21
3.8	ΣΧΗΜΑ ΕΠΙΛΥΣΗΣ	22
4	ΜΕΘΟΔΟΣ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ ΤΩΝ ΑΡΜΟΝΙΚΩΝ	24
4.1	ΕΙΣΑΓΩΓΗ	24
4.2	ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ	25
4.3	ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΩΝ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΘΕΙΣΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ	29
4.4	ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ	29
4.5	ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ	30

4.6	ΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ	32
4.7	ΣΧΗΜΑ ΕΠΙΛΥΣΗΣ	33
4.8	ΔΟΜΗ ΤΟΥ ΚΩΔΙΚΑ ΕΠΙΛΥΣΗΣ	34
5	ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΣΕ ΣΤΡΩΤΕΣ ΡΟΕΣ	37
5.1	ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 1	39
5.1.1	ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΑΝΩΣΗΣ	39
5.1.2	ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΟΠΙΣΘΕΛΚΟΥΣΑΣ	41
5.2	ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 2	44
5.2.1	ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΑΝΩΣΗΣ	44
5.2.2	ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΟΠΙΣΘΕΛΚΟΥΣΑΣ	46
5.3	ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 3	49
5.3.1	ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΓΩΝΙΑΣ ΕΙΣΟΔΟΥ	49
5.3.2	ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΑΝΩΣΗΣ	50
5.3.3	ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΟΠΙΣΘΕΛΚΟΥΣΑΣ	52
5.4	ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 4	54
5.4.1	ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΓΩΝΙΑΣ ΕΙΣΟΔΟΥ	54
5.4.2	ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΑΝΩΣΗΣ	55
5.4.3	ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΟΠΙΣΘΕΛΚΟΥΣΑΣ	57
5.5	ΕΙΚΟΝΕΣ ΤΟΥ ΠΕΔΙΟΥ ΡΟΗΣ ΣΕ 7 ΙΣΑΠΕΧΟΥΣΕΣ ΧΡΟΝΙΚΕΣ ΣΤΙΓΜΕΣ ΕΣΩΤΕΡΙΚΑ ΤΗΣ ΠΕΡΙΟΔΟΥ	59
6	ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΧΡΟΝΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ	67
6.1	ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΟΥ ΧΡΟΝΟΥ ΜΕ ΤΗΝ ΜΕΘΟΔΟ ΤΗΣ ΧΡΟΝΟΠΡΟΕΛΑΣΗΣ	67
6.2	ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΟΥ ΧΡΟΝΟΥ ΜΕ ΤΗΝ ΜΕΘΟΔΟ ΤΗΣ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ ΤΩΝ ΑΡΜΟΝΙΚΩΝ	74
6.3	ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΟΥ ΚΕΡΔΟΥΣ	77
7	ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ-ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ	78

Κεφάλαιο 1

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Οι κώδικες υπολογιστικής ρευστοδυναμικής στην πλειονότητα τους, για την επίλυση μη-μόνιμων πεδίων ροής χρησιμοποιούν ένα σχήμα πεπερασμένων διαφορών για τη διακριτοποίηση του χρονικού όρου των εξισώσεων Navier-Stokes. Με βάση αυτό το σχήμα τα μεγέθη της ροής σε κάθε χρονική στιγμή είναι δυνατό να υπολογιστούν από την γνώση αυτών των ίδιων μεγεθών σε προγενέστερες χρονικές στιγμές. Το πλεονέκτημα αυτής της μεθόδου είναι η δυνατότητα της μοντελοποίησης του πεδίου ροής για κάθε μορφή χρονικής διέγερσης. Ωστόσο, υπάρχουν περιπτώσεις που τα μεγέθη της ροής εμφανίζουν περιοδικότητα και αυτή η γνώση δεν μοντελοποιείται από το σχήμα που προαναφέρθηκε, αλλά όταν εφαρμόζεται σε περιοδικά πεδία ροής αναγκαστικά υπολογίζονται τα μεγέθη κατά τη διάρκεια του μεταβατικού φαινομένου μέχρι να υπολογιστούν οι περιοδικές τιμές των μεγεθών και που συνήθως αυτές ενδιαφέρουν τον μελετητή του φαινομένου. Με την μέθοδο της ισορροπίας των αρμονικών που μελετάται σε αυτήν την εργασία, χρησιμοποιείται η γνώση της περιοδικότητας του φαινομένου με την χρήση τριγωνομετρικών σειρών για την προσέγγιση των μεγεθών της ροής. Με βάση αυτήν την μέθοδο, γίνεται μετάβαση από το πεδίο του χρόνου στο πεδίο των συχνοτήτων και εξαλείφεται η χρονική εξάρτηση των μεγεθών της ροής. Ακόμη, οι χρονικά μεταβαλλόμενες εξισώσεις αντικαθίστανται από ένα σύστημα N_T γραμμικώς πεπλεγμένων εξισώσεων, όπου N_T ο αριθμός των χρονικών στιγμών που υπολογίζονται εσωτερικά της περιόδου. Με την χρήση αυτής της μεθόδου αποφεύγεται ο υπολογισμός του μεταβατικού φαινομένου, με αποτέλεσμα την μείωση του υπολογιστικού χρόνου.

Αυτή η διπλωματική εργασία είναι ουσιαστικά μια επέκταση της εργασίας του Γ.Κανέλλη [1]. Ο συνάδελφος τροποποίησε τον υπάρχοντα κώδικα του ΕΘΣ για την επίλυση των ατριβών εξισώσεων Euler με χρήση μη-δομημένων πλεγμάτων, προκειμένου να επιλύονται οι εξισώσεις της ροής με βάση την μέθοδο της ισορροπίας των αρμονικών. Ο σκοπός της παρούσας εργασίας είναι η προσθήκη των συνεκτικών όρων στις εξισώσεις για την επίλυση χρονικά περιοδικά στρωτών ροών.

ΔΟΜΗ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Στο δεύτερο κεφάλαιο παρουσιάζεται η μαθηματική διατύπωση του προβλήματος που επιλύθηκε σε αυτήν την εργασία. Στο τρίτο κεφάλαιο περιγράφεται η μέθοδος επίλυσης των εξισώσεων με βάση την κλασική μέθοδο της χρονοπροέλασης. Στο τέταρτο κεφάλαιο θεμελιώνεται η μέθοδος της ισορροπίας των αρμονικών στις εξισώσεις της ρευστοδυναμικής και στη συνέχεια περιγράφεται η μεθοδολογία επίλυσης τους. Το πέμπτο κεφάλαιο ασχολείται με τη σύγκριση των αποτελεσμάτων της μεθόδου της ισορροπίας των αρμονικών με τα αποτελέσματα της μεθόδου της χρονοπροέλασης, προκειμένου να ελεγχθεί η αξιοπιστία της μεθόδου. Στο έκτο κεφάλαιο συγκρίνονται οι χρόνοι υπολογισμού για τις δυο μεθόδους και εξετάζεται κατά πόσο μειώνεται το υπολογιστικό κόστος.

Κεφάλαιο 2

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ

Σε αυτό το κεφάλαιο, θα γίνει αναφορά στις διαφορικές εξισώσεις, που περιγράφουν μαθηματικά τη ροή και σε ορισμένες παραδοχές που αφορούν τη σύσταση του εργαζόμενου μέσου, προκειμένου να προκύψει ένα κλειστό σύστημα εξισώσεων.

2.1 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ NAVIER-STOKES

Οι εξισώσεις επιλύονται σε αδιάστατη συντηρητική μορφή, με αμελητέους τους όρους της βαρύτητας και για καρτεσιανό σύστημα αναφοράς, για δυο διαστάσεις.

- Αρχή διατήρησης της μάζας

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \vec{V} = 0 \quad (2.1.1)$$

όπου

$$\vec{V} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

- Αρχή διατήρησης της ορμής

$$\frac{\partial \rho \vec{V}}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \vec{V} \otimes \vec{V} + \nabla p - \nabla \cdot \overset{\leftrightarrow}{\tau} = 0 \quad (2.1.2)$$

όπου

$$\vec{V} \otimes \vec{V} = \begin{bmatrix} uu & uv \\ vu & vv \end{bmatrix}, \quad \overset{\leftrightarrow}{\tau} = \begin{bmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} \\ \tau_{21} & \tau_{22} \end{bmatrix} \quad (2.1.3)$$

- Αρχή διατήρησης της ενέργειας

$$\frac{\partial \rho e_t}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho e_t + p) \vec{V} - \nabla \cdot (\overset{\leftrightarrow}{\tau} \cdot \vec{V}) - \nabla \dot{q} = 0 \quad (2.1.4)$$

όπου

$$e_t = \frac{E_t}{\rho} = e + \frac{1}{2}(u^2 + v^2) \quad (2.1.5)$$

2.2 ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥ ΕΡΓΑΖΟΜΕΝΟΥ ΜΕΣΟΥ

Απο τις (2.1.1),(2.1.2),(2.1.4) δεν είναι δυνατόν να επιλυθεί το πρόβλημα διότι προκύπτουν περισσότεροι άγνωστοι απο τις εξισώσεις. Οι επιπλέον πληροφορίες σχετίζονται με τη σύσταση του ρευστού.

- Παραδοχή Νευτώνειου ρευστού
Οι δυνάμεις τριβών είναι γραμμικώς ανάλογες των παραμορφώσεων του ρευστού

$$\tau_{ij} = \frac{\mu}{Re} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) \quad (2.2.1)$$

όπου

$$Re = \frac{\rho_{ref} V_{ref} L_{ref}}{\mu_{ref}}$$

και με το δείκτη *ref* συμβολίζονται τα μεγέθη αναφοράς που χρησιμοποιήθηκαν για την αδιαστατοποίηση των εξισώσεων

- Θεωρείται ότι η αλληλεπίδραση θερμότητας γίνεται μόνο με αγωγή και η θερμική αγωγιμότητα του υλικού παραμένει σταθερή, άρα ισχύει

$$\vec{q} = \frac{\mu\gamma}{RePr} \nabla T \quad (2.2.2)$$

όπου

$$Pr = \frac{\mu c_p}{k}$$

Να σημειωθεί, ότι για τον υπολογισμό του αριθμού *Pr* χρησιμοποιούνται τα διαστατά μεγέθη

- Παραδοχή τέλειου αερίου.

$$p = \rho RT \quad (2.2.3)$$

- Παραδοχή σταθερής θερμοχωρητικότητας
Η θερμοχωρητικότητα ορίζεται ως ο ρυθμός μεταβολής της ποσότητας της ενέργειας που πρέπει να αποδοθεί σε ένα κλειστό σύστημα προς την αντίστοιχη αύξηση της θερμοκρασίας του. Ανάλογα με τον τρόπο που γίνεται αυτή η πρόσδοση ορίζονται οι παρακάτω θερμοχωρητικότητες

- Υπό σταθερό όγκο

$$c_v = \left(\frac{\partial Q}{\partial T} \right)_v$$

2.2. ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥ ΕΡΓΑΖΟΜΕΝΟΥ ΜΕΣΟΥ

- Υπό σταθερή πίεση

$$c_p = \left(\frac{\partial Q}{\partial T} \right)_p$$

Ακόμη, με την χρησιμοποίηση του τύπου της ενθαλπίας

$$h = e + pv \quad (2.2.4)$$

προκύπτουν οι ακόλουθες ισοδύναμες μορφές του πρώτου θερμοδυναμικού αξιωματος

$$de = \delta q - dw \Leftrightarrow de = \delta q - p dv \Leftrightarrow dh = \delta q - v dp$$

Επομένως οι ειδικές θερμοχωρητικότητες γράφονται

$$c_v = \left(\frac{\partial e}{\partial T} \right)_v$$

$$c_p = \left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_p$$

Στη γενική περίπτωση οι θερμοχωρητικότητες είναι συναρτήσεις δυο θερμοδυναμικών ποσοτήτων επιλογής, ωστόσο στη συγκεκριμένη περίπτωση θεωρούνται σταθερές και προκύπτουν οι σχέσεις

$$e = c_v T \quad (2.2.5)$$

$$h = c_p T \quad (2.2.6)$$

Ακόμη, με βάση τα προηγούμενα ισχύει η παρακάτω σχέση

$$\begin{aligned} h = e + RT &\Leftrightarrow dh = de + R dT \Leftrightarrow c_p dT = c_v dT + R dT \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow R = c_p - c_v \end{aligned} \quad (2.2.7)$$

Ορίζεται ακόμη ο λόγος των θερμοχωρητικότητων.

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v} \quad (2.2.8)$$

Η ολική ενέργεια ανά μονάδα όγκου συνδέεται με την πίεση, απο τη σχέση

$$E_t = \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} \rho (u^2 + v^2) \quad (2.2.9)$$

Τέλος, η ολική ενθαλπία ανά μονάδα μάζας υπολογίζεται απο τον τύπο

$$h_t = \frac{E_t + p}{\rho} = \frac{\gamma p}{\rho(\gamma - 1)} + \frac{1}{2} \rho (u^2 + v^2) \quad (2.2.10)$$

2.3 ΑΔΙΑΣΤΑΤΟΠΟΙΗΣΗ

Για την αδιαστατοποίηση επιλέγονται τα παρακάτω μεγέθη αναφοράς

$$\begin{aligned} L_{ref}: & \text{ χορδή της αεροτομής} \\ \mu_{ref}: & \text{ συνεκτικότητα αναφοράς} \\ R_{ref}: & \text{ θερμοχωρητικότητα } c_v \end{aligned}$$

Για περιπτώσεις εξωτερικής αεροδυναμικής

$$\begin{aligned} V_{ref}: & \text{ ταχύτητα της επ' άπειρον ροής} \\ \rho_{ref}: & \text{ πυκνότητα της επ' άπειρον ροής} \end{aligned}$$

Για περιπτώσεις εσωτερικής αεροδυναμικής

$$\begin{aligned} p_{ref}: & \text{ ολική πίεση στην είσοδο } p_{t_{in}} \\ T_{ref}: & \text{ ολική θερμοκρασία στην είσοδο } T_{t_{in}} \end{aligned}$$

Με βάση αυτά τα μεγέθη αναφοράς προκύπτουν άμεσα τα εξής αδιάστατα μεγέθη

$$\begin{aligned} \bar{x} = \frac{x}{L_{ref}}, \bar{y} = \frac{y}{L_{ref}}, \bar{u} = \frac{u}{V_{ref}}, \bar{v} = \frac{v}{V_{ref}} \\ \bar{\rho} = \frac{\rho}{\rho_{ref}}, \bar{R} = \frac{R}{R_{ref}}, \bar{\mu} = \frac{\mu}{\mu_{ref}} \end{aligned} \quad (2.3.1)$$

Η αδιαστατοποίηση των υπόλοιπων μεγεθών γίνεται με τέτοιο τρόπο, ώστε οι εξισώσεις να διατηρήσουν κατά το δυνατόν την αρχική τους μορφή. Πιο συγκεκριμένα για την περίπτωση της εξωτερικής αεροδυναμικής προκύπτουν τα παρακάτω μεγέθη αναφοράς

$$\begin{aligned} (c_p)_{ref} = c_v, (c_v)_{ref} = c_v \\ T_{ref} = \frac{U_{ref}^2}{R_{ref}} = \frac{U_{ref}^2}{c_v} \\ p_{ref} = \rho_{ref} U_{ref}^2 \\ e_{ref} = U_{ref}^2 \end{aligned}$$

Τέλος, οι αδιαστατοποιημένες διαφορικές εξισώσεις γράφονται σε μητρική γραφή.

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{F}_{inv}}{\partial x} + \frac{\partial \vec{G}_{inv}}{\partial y} - \frac{\partial \vec{F}_{vis}}{\partial x} - \frac{\partial \vec{G}_{vis}}{\partial y} = 0 \quad (2.3.2)$$

όπου

$$\vec{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho e_t \end{bmatrix} \quad \vec{F}_{inv} = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 \\ \rho uv \\ (\rho e_t + p)u \end{bmatrix} \quad \vec{G}_{inv} = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho vu \\ \rho v^2 \\ (\rho e_t + p)v \end{bmatrix}$$

2.3. ΑΔΙΑΣΤΑΤΟΠΟΙΗΣΗ

$$\vec{F}_{vis} = \frac{1}{Re} \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{11} \\ \tau_{12} \\ \tau_{11}u + \tau_{12}v + q_x \end{bmatrix} \quad \vec{G}_{vis} = \frac{1}{Re} \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{21} \\ \tau_{22} \\ \tau_{22}v + \tau_{21}u + q_y \end{bmatrix}$$

Το διάνυσμα \vec{U} είναι συνάρτηση των χωρικών μεταβλητών και του χρόνου

$$\vec{U} = \vec{U}(\vec{X}, t)$$

όπου $\vec{X} = (x, y)$

Κεφάλαιο 3

ΔΙΑΚΡΙΤΟΠΟΙΗΣΗ ΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΚΑΙ ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΟΥΣ

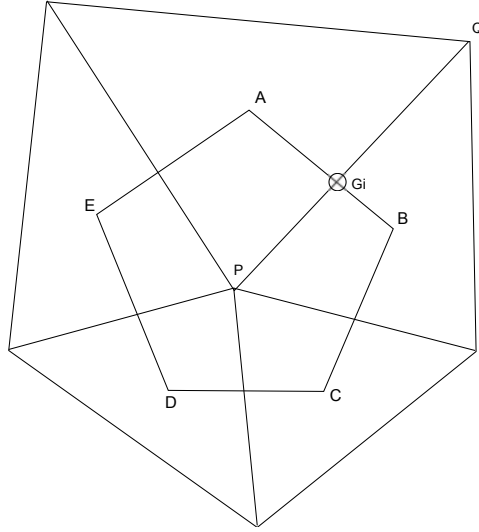
Σε αυτό το κεφάλαιο, θα παρουσιασθεί η μέθοδος διακριτοποίησης των εξισώσεων. Η παρουσίαση θα χωριστεί σε δυο μέρη που το καθένα θα αφορά τους μη-συνεκτικούς και συνεκτικούς όρους ξεχωριστά.

3.1 ΔΙΑΚΡΙΤΟΠΟΙΗΣΗ ΠΕΔΙΟΥ ΡΟΗΣ

Το πλέγμα που χρησιμοποιήθηκε είναι μη-δομημένο, αποτελούμενο από τριγωνικά στοιχεία. Χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος των πεπερασμένων όγκων σε κεντροκομβική διατύπωση, που συνεπάγεται ότι οι εξισώσεις ολοκληρώνονται σε χωρία με σύνορα περιμετρικά κάθε κόμβου του πλέγματος. Μετά το πέρας αυτής της διαδικασίας, προκύπτει ένα σύστημα με αγνώστους τα μεγέθη της ροής (πυκνότητα, ορμή, ενέργεια) για κάθε κόμβο σε μια δεδομένη χρονική στιγμή.

3.1.1 ΧΩΡΙΚΗ ΔΙΑΚΡΙΤΟΠΟΙΗΣΗ

Στο σχήμα 3.1 παρουσιάζεται ένας κόμβος του πλέγματος P και οι γειτονικοί κόμβοι του πλέγματος Q_i που τον περιστοιχίζουν. Αφού ενωθούν τα βαρύκεντρα των τριγώνων που σχηματίζονται από τις ακμές που ενώνουν τους κόμβους μεταξύ τους, προκύπτει το πολύγωνο $ABCDE$ ή αλλιώς, κυψέλη ελέγχου. Είναι φανερό ακόμη, ότι οι ακμές της κυψέλης δεν τέμνουν επακριβώς κάθετα τις ακμές των τριγώνων και αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι τα τρίγωνα δεν είναι ισόπλευρα. Αν και αυτό είναι το επιθυμητό, συχνά δεν επιτυγχάνεται λόγω της πολύπλοκης γεωμετρίας των συνόρων του πεδίου ροής.



Σχήμα 3.1: Κυβέλη ελέγχου.

3.1.2 ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

Οι εξισώσεις που θα ολοκληρωθούν σε κάθε κυβέλη γράφονται συνοπτικά

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t}(\vec{X}, t) + \frac{\partial \vec{F}}{\partial x}(\vec{U}(\vec{X}, t)) + \frac{\partial \vec{G}}{\partial y}(\vec{U}(\vec{X}, t)) = 0 \quad (3.1.1)$$

όπου

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \vec{F}_{inv} - \vec{F}_{vis} \\ \vec{G} &= \vec{G}_{inv} - \vec{G}_{vis} \end{aligned}$$

Αν ονομαστεί Ω το σημειοσύνολο εσωτερικά της κυβέλης και ολοκληρωθεί η 3.1.1 ισχύει

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \vec{U}}{\partial t}(\vec{X}, t) dx dy + \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \vec{F}}{\partial x}(\vec{U}(\vec{X}, t)) + \frac{\partial \vec{G}}{\partial y}(\vec{U}(\vec{X}, t)) \right) dx dy = 0$$

Απο το θεώρημα Green-Gauss

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial \vec{F}}{\partial x}(\vec{U}(\vec{X}, t)) + \frac{\partial \vec{G}}{\partial y}(\vec{U}(\vec{X}, t)) \right) dx dy = 0 = \int_{\partial \Omega} \vec{F}(\vec{U}(\vec{X}, t)) n_x + \vec{G}(\vec{U}(\vec{X}, t)) n_y dl$$

Ακόμη ισχύει προσεγγιστικά

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \vec{U}}{\partial t}(\vec{X}, t) dx dy \approx \frac{\partial \vec{U}}{\partial t}(\vec{X}_P, t) A_{\Omega}$$

Επομένως, συνδυάζοντας τις τρεις τελευταίες σχέσεις προκύπτει

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t}(\vec{X}_P, t) A_{\Omega} + \int_{\partial \Omega} \vec{F}(\vec{U}(\vec{X}, t)) n_x + \vec{G}(\vec{U}(\vec{X}, t)) n_y dl = 0$$

Ορίζεται στη συνέχεια το μέγεθος

$$\vec{\Phi}_{PQ_i}^t = \int_{\partial\Omega} \vec{F}(\vec{U}(\vec{X}, t))n_x + \vec{G}(\vec{U}(\vec{X}, t))n_y dl = 0 \quad (3.1.2)$$

που στην ουσία εκφράζει το ρυθμό εκροής και διάχυσης των μεγεθών της ροής για τους μη-συνεκτικούς και συνεκτικούς όρους αντίστοιχα στα σύνορα της κυψέλης, πιο συγκεκριμένα απο την ακμή της κυψέλης που τέμνει την ακμή PQ_i . Και τελικά ισχύει η εξίσωση

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t}(\vec{X}_P, t)A_\Omega + \sum_{i=1}^{cs} \vec{\Phi}_{PQ_i}^t = 0 \quad (3.1.3)$$

όπου cs ο συνολικός αριθμός των ακμών που έχουν ως μια άκρη το P . Επομένως, το πρόβλημα ανάγεται στον υπολογισμό των $\vec{\Phi}_{PQ_i}^t$ της εξίσωσης 3.1.3.

3.2 ΜΗ-ΣΥΝΕΚΤΙΚΟΙ ΟΡΟΙ

Το ολοκλήρωμα των μη-συνεκτικών όρων στην εξίσωση 3.1.2 προσεγγίζεται απο τη σχέση

$$\vec{\Phi}_{PQ_i}^{inv,t} \approx (\vec{F}_{inv}(U(\vec{X}_{G_i}, t))n_{xi} + \vec{G}_{inv}(U(\vec{X}_{G_i}, t))n_{yi})\delta l_i \quad (3.2.1)$$

όπου $n_i = (n_{xi}, n_{yi})$ το μοναδιαίο διάνυσμα κάθετα στην ακμή της κυψέλης που τέμνει το ευθύγραμμο τμήμα PQ_i και δl_i το μήκος της ακμής.

3.2.1 ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ

Ορίζεται το μητρώο μετασχηματισμού

$$\mathbf{T}_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n_{xi} & n_{yi} & 0 \\ 0 & -n_{yi} & n_{xi} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

και εύκολα αποδεικνύεται με πράξεις ότι ισχύει $\forall U$ η ισότητα

$$n_{xi}\vec{F}_{inv}(U) + n_{yi}\vec{G}_{inv}(U) = \mathbf{T}_i^{-1}\vec{F}_{inv}(T\vec{U}) \quad (3.2.2)$$

και θέτοντας

$$\vec{U} = \mathbf{T}_i\vec{U}$$

η 3.2.1 γράφεται

$$\vec{\Phi}_{PQ_i}^{inv,t} \approx \mathbf{T}_i^{-1}\vec{F}_{inv}(\vec{U}(\vec{X}_{G_i}, t))\delta l_i \quad (3.2.3)$$

3.2.2 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΙΑΚΩΒΙΑΝΗΣ

Το \vec{F} είναι μια διανυσματική συνάρτηση της μορφής $\vec{F} : R^4 \rightarrow R^4$ και αν

$$\vec{U} = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varrho \\ \varrho u \\ \varrho v \\ \varrho e_t \end{bmatrix} \text{ τότε } \vec{F}_{inv} = \begin{bmatrix} \varrho u \\ \varrho u^2 \\ \varrho v \\ (\varrho e_t + p)u \end{bmatrix}$$

Ακόμη, χρησιμοποιώντας την παρακάτω θερμοδυναμική σχέση

$$p = \varrho(\gamma - 1)e_t - (\gamma - 1)\frac{\varrho(u^2 + v^2)}{2}$$

προκύπτει

$$\vec{F}_{inv} = \begin{bmatrix} U_2 \\ \frac{U_2^2}{U_1} + U_4(\gamma - 1) - (\gamma - 1)\frac{\varrho(U_2^2 + U_3^2)}{2U_1} \\ \frac{U_2 U_3}{U_1} \\ \gamma\frac{U_2 U_4}{U_1} - (\gamma - 1)\frac{\varrho(U_2^2 + U_3^2)U_2}{2(U_1)^2} \end{bmatrix}$$

Στη συνέχεια, παρατίθεται ο ορισμός της ιακωβιανής

$$\mathbf{A}(\vec{U}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial U_1} & \frac{\partial F_1}{\partial U_2} & \frac{\partial F_1}{\partial U_3} & \frac{\partial F_1}{\partial U_4} \\ \frac{\partial F_2}{\partial U_1} & \frac{\partial F_2}{\partial U_2} & \frac{\partial F_2}{\partial U_3} & \frac{\partial F_2}{\partial U_4} \\ \frac{\partial F_3}{\partial U_1} & \frac{\partial F_3}{\partial U_2} & \frac{\partial F_3}{\partial U_3} & \frac{\partial F_3}{\partial U_4} \\ \frac{\partial F_4}{\partial U_1} & \frac{\partial F_4}{\partial U_2} & \frac{\partial F_4}{\partial U_3} & \frac{\partial F_4}{\partial U_4} \end{bmatrix}$$

επομένως, η ιακωβιανή γράφεται ισοδύναμα

$$\mathbf{A}(\vec{U}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{U_2^2}{U_1^2} + (\gamma - 1)\frac{\varrho(U_2^2 + U_3^2)}{2U_1^2} & (3 - \gamma)\frac{U_2}{U_1} & (1 - \gamma)\frac{U_3}{U_1} & (\gamma - 1) \\ -\frac{U_2 U_3}{U_1^2} & \frac{U_3}{U_1} & \frac{U_2}{U_1} & 0 \\ -\frac{\gamma U_2 U_4}{U_1^2} + (\gamma - 1)\frac{\varrho(U_2^2 + U_3^2)U_2}{2U_1^3} & \frac{\gamma U_4}{U_1} - (\gamma - 1)\frac{\varrho(3U_2^2 + U_3^2)U_2}{2U_1^2} & (1 - \gamma)\frac{U_2 U_3}{U_1^2} & \gamma\frac{U_2}{U_1} \end{bmatrix} \quad (3.2.4)$$

και αφού αντικατασταθούν οι συνιστώσες του \vec{U} προκύπτει η τελική μορφή

$$\mathbf{A}(\vec{U}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -u^2 + \frac{(\gamma-1)}{2}(u^2 + v^2) & (3 - \gamma)u & -(\gamma - 1)v & (\gamma - 1) \\ -uv & v & u & 0 \\ u[\frac{(\gamma-1)}{2}(u^2 + v^2) - h_t] & h_t - (\gamma - 1)u^2 & -(\gamma - 1)uv & \gamma u \end{bmatrix} \quad (3.2.5)$$

Το διάνυσμα $\vec{F}_{inv}(\vec{U})$ είναι ομογενής συνάρτηση πρώτου βαθμού και αποδεικνύεται ότι ισχύει η ιδιότητα

$$\vec{F}_{inv}(\vec{U}) = \mathbf{A}(\vec{U})\vec{U} \quad (3.2.6)$$

3.3 ΙΔΙΟΤΙΜΕΣ ΚΑΙ ΙΔΙΟΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ ΙΑΚΩΒΙΑΝΗΣ

Απο φυσικής πλευράς οι ιδιοτιμές της ιακωβιανής εκφράζουν την φορά που μεταφέρεται η πληροφορία σε διαδοχικές χρονικές στιγμές. Οι ιδιοτιμές του μητρώου \mathbf{A} είναι

$$\begin{bmatrix} u - c \\ u \\ u \\ u + c \end{bmatrix}$$

όπου $c = \sqrt{\gamma RT}$ η ταχύτητα του ήχου. Ακολούθως αποτυπώνονται τα ιδιοδιανύσματα του μητρώου

$$\mathbf{K}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ u - a \\ v \\ H_t - cu \end{bmatrix} \quad \mathbf{K}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ u \\ v \\ \frac{1}{2}\mathbf{V}^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ v \end{bmatrix} \quad \mathbf{K}^{(4)} = \begin{bmatrix} 1 \\ u + c \\ v \\ H_t + vc \end{bmatrix}$$

Ορίζονται ακόμη τα μητρώα

$$\mathbf{\Lambda}^{-1}(\vec{U}) \quad \mathbf{\Lambda}^{+1}(\vec{U}) \quad |\mathbf{\Lambda}|(\vec{U})$$

που περιέχουν τις αρνητικές, θετικές και απόλυτες τιμές των ιδιοτιμών του \mathbf{A} αντίστοιχα. Και απο τα παραπάνω προκύπτουν τα μεγέθη

$$\mathbf{A}^{-1}(\vec{U}) = \mathbf{K}\mathbf{\Lambda}^{-1}\mathbf{K}^{-1} \quad \mathbf{A}^{+1}(\vec{U}) = \mathbf{K}\mathbf{\Lambda}^{+1}\mathbf{K}^{-1} \quad |\mathbf{A}|(\vec{U}) = \mathbf{K}|\mathbf{\Lambda}|\mathbf{K}^{-1}$$

3.3.1 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΜΗ-ΣΥΝΕΚΤΙΚΩΝ ΟΡΩΝ

Λόγω της 3.2.6, η 3.2.3 γράφεται

$$\vec{\Phi}_{PQ_i}^{inv,t} \approx \mathbf{T}_i^{-1}\mathbf{A}(\vec{U}(\vec{X}_{G_i}, t))\vec{U}(\vec{X}_{G_i}, t)\delta l_i \quad (3.3.1)$$

Για τον υπολογισμό του όρου $\mathbf{A}(\vec{U}(\vec{X}_{G_i}, t))\vec{U}(\vec{X}_{G_i}, t)$ λύνεται ένα μονοδιάστατο πρόβλημα Riemann κατά τη διεύθυνση του διανύσματος $(n)_i$ χρησιμοποιώντας το προσεγγιστικό σχήμα FVS ή εναλλακτικά τον προσεγγιστικό επιλύτη του Roe. Προκειμένου να αυξηθεί η τάξη ακρίβειας ορίζονται τα δύο διανύσματα

$$\begin{aligned}\vec{U}_L^t &= \vec{U}(\vec{X}_P, t) + \frac{1}{2}\nabla \cdot \vec{U}(\vec{X}_P, t) \\ \vec{U}_{R_i}^t &= \vec{U}(\vec{X}_{Q_i}, t) - \frac{1}{2}\nabla \cdot \vec{U}(\vec{X}_{Q_i}, t)\end{aligned}$$

Ακολουθούν οι προσεγγιστικές παραστάσεις που προκύπτουν από την εφαρμογή του κάθε σχήματος.

ΣΧΗΜΑ FVS (Flux Vector Splitting)

Θεωρείται το διάνυσμα

$$\vec{U}_{RL_i}^t = \frac{\vec{U}_{R_i}^t + \vec{U}_L^t}{2}$$

Ακόμη, ορίζονται τα μητρώα

$$\mathbf{A}_{i,t}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}(\vec{U}_{RL_i}^t) \quad \mathbf{A}_{i,t}^{+1} = \mathbf{A}^{+1}(\vec{U}_{RL_i}^t)$$

και προκύπτει η προσεγγιστική σχέση

$$\mathbf{A}(\vec{U}(\vec{X}_{G_i}, t))\vec{U}(\vec{X}_{G_i}, t) \approx \mathbf{A}_{i,t}^{-1}\vec{U}_{R_i}^t + \mathbf{A}_{i,t}^{+1}\vec{U}_L^t \quad (3.3.2)$$

ΣΧΗΜΑ Roe

Το διάνυσμα $\vec{U}_{RL_i}^t$ προσεγγίζεται με βάση τις σταθμισμένες τιμές κατά Roe.

$$\varrho_{RL}^t = \sqrt{\varrho_R \varrho_L} \Big|_t$$

$$u_{RL}^t = \frac{\sqrt{\varrho_R} u_R + \sqrt{\varrho_L} u_L}{\sqrt{\varrho_R} + \sqrt{\varrho_L}} \Big|_t$$

$$v_{RL}^t = \frac{\sqrt{\varrho_R} v_R + \sqrt{\varrho_L} v_L}{\sqrt{\varrho_R} + \sqrt{\varrho_L}} \Big|_t$$

$$h_{RL}^t = \frac{\sqrt{\varrho_R} h_{tR} + \sqrt{\varrho_L} h_{tL}}{\sqrt{\varrho_R} + \sqrt{\varrho_L}} \Big|_t$$

$$\varrho_{RL}^t e_{RL}^t = \frac{\varrho_{RL}^t h_{tRL}^t}{\gamma} + \varrho_{RL}^t \frac{\gamma - 1}{2\gamma} ((u_{RL}^t)^2 + (v_{RL}^t)^2)$$

και προκύπτει η προσεγγιστική σχέση

$$\mathbf{A}(\vec{U}(\vec{X}_{G_i}, t))\vec{U}(\vec{X}_{G_i}, t) \approx \frac{\mathbf{A}(\vec{U}_R^t)\vec{U}_{R_i}^t + \mathbf{A}(\vec{U}_L^t)\vec{U}_L^t}{2} - \frac{|\mathbf{A}|(\vec{U}_{RL_i}^t)}{2}(\vec{U}_{R_i}^t - \vec{U}_L^t) \quad (3.3.3)$$

και αν τεθεί

$$\mathbf{A}_{i,t}^{-1} = \frac{\mathbf{A}(\vec{U}_{R_i}^t) - |\mathbf{A}|(\vec{U}_{RL_i}^t)}{2} \quad \mathbf{A}_{i,t}^{+1} = \frac{\mathbf{A}(\vec{U}_L^t) + |\mathbf{A}|(\vec{U}_{RL_i}^t)}{2}$$

τότε η 3.3.3 γράφεται στη μορφή της 3.3.2

$$\mathbf{A}(\vec{U}(\vec{X}_{G_i}, t))\vec{U}(\vec{X}_{G_i}, t) \approx \mathbf{A}_{i,t}^{-1}\vec{U}_{R_i}^t + \mathbf{A}_{i,t}^{+1}\vec{U}_L^t \quad (3.3.4)$$

Τελικά, η 3.3.1 γράφεται ως

$$\begin{aligned} \vec{\Phi}_{PQ_i}^{inv,t} &\approx \mathbf{T}_i^{-1}(\mathbf{A}_{i,t}^{-1}\vec{U}_{R_i}^t + \mathbf{A}_{i,t}^{+1}\vec{U}_L^t) \delta l_i \Leftrightarrow \\ \vec{\Phi}_{PQ_i}^{inv,t} &\approx \mathbf{A}_{R_i}^t \vec{U}_{R_i}^t + \mathbf{A}_{L_i}^t \vec{U}_L^t \end{aligned} \quad (3.3.5)$$

όπου

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{R_i}^t &= \mathbf{T}_{i,t}^{-1} \mathbf{A}_{i,t}^{-1} \mathbf{T}_{i,t} \delta l_i \\ \mathbf{A}_{L_i}^t &= \mathbf{T}_{i,t}^{-1} \mathbf{A}_{i,t}^{+1} \mathbf{T}_{i,t} \delta l_i \end{aligned}$$

3.4 ΣΥΝΕΚΤΙΚΟΙ ΟΡΟΙ

Παρόμοια με το προηγούμενο κεφάλαιο οι όροι διάχυσης θα προσεγγιστούν στο σημείο τομής G_i του συνόρου της κυψέλης με την ακμή PQ_i . Ακόμη οι όροι \vec{F}_{vis} και \vec{G}_{vis} θα θεωρηθούν συναρτήσεις του διανύσματος των μη-συντηρητικών μεταβλητών

$$\vec{V} = \begin{bmatrix} \varrho \\ u \\ v \\ T \end{bmatrix}$$

Απο την εξίσωση 3.1.2 κρατώντας τους συνεκτικούς όρους και προσεγγίζοντας το ολοκλήρωμα προκύπτει

$$\vec{\Phi}_{PQ_i}^{vis,t} \approx (\vec{F}_{vis}(\vec{V}(\vec{X}_{G_i}, t))n_{x_i} + \vec{G}_{vis}(\vec{V}(\vec{X}_{G_i}, t))n_{y_i})\delta l_i \quad (3.4.1)$$

και απο τις 2.3.2

$$\vec{\Phi}_{PQ_i}^{vis,t} \approx \frac{1}{Re} \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{11}n_{x_i} + \tau_{21}n_{y_i} \\ \tau_{12}n_{x_i} + \tau_{22}n_{y_i} \\ \tau_{11}un_{x_i} + \tau_{12}vn_{y_i} + q_x n_{x_i} + \tau_{22}vn_{y_i} + \tau_{21}un_{y_i} + q_y n_{y_i} \end{bmatrix}_{G_i}^t \delta l_i$$

Ακόμη, οι τάσεις τριβών και οι ρυθμοί πρόσδοσης θερμότητας συνδέονται με τις συνιστώσες του μη-συντηρητικού διανύσματος με βάση τις παρακάτω σχέσεις.

$$\begin{aligned}\tau_{11} &= \mu \frac{2}{3} \left(2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\ \tau_{12} &= \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \tau_{22} &= \mu \frac{2}{3} \left(2 \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{q}_x &= \frac{\mu \gamma}{Pr} \frac{\partial T}{\partial x} \\ \dot{q}_y &= \frac{\mu \gamma}{Pr} \frac{\partial T}{\partial y}\end{aligned}$$

Επομένως, για τη προσέγγιση των συνεκτικών όρων είναι απαραίτητος ο υπολογισμός των κλίσεων των μη-συντηρητικών μεταβλητών στο σημείο G_i . Αν αντικατασταθούν οι σχέσεις στο $\vec{\Phi}_{PQ_i}^{vis,t}$ προκύπτει η εξίσωση

$$\vec{\Phi}_{PQ_i}^{vis,t} \approx \frac{\mu}{Re} \mathbf{D}_x(\vec{V}(\vec{X}_{G_i}, t), \vec{n}_i) \frac{\partial \vec{V}}{\partial x}(\vec{X}_{G_i}, t) \delta l_i + \frac{\mu}{Re} \mathbf{D}_y(\vec{V}(\vec{X}_{G_i}, t), \vec{n}_i) \frac{\partial \vec{V}}{\partial y}(\vec{X}_{G_i}, t) \delta l_i \quad (3.4.2)$$

όπου

$$\mathbf{D}_x = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{3}n_{x_i} & n_{y_i} & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3}n_{y_i} & n_{x_i} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3}(2un_{x_i} - vn_{y_i}) & vn_{x_i} + un_{y_i} & \frac{\gamma}{Pr}n_{x_i} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D}_y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n_{y_i} & -\frac{2}{3}n_{x_i} & 0 \\ 0 & n_{x_i} & \frac{4}{3}n_{y_i} & 0 \\ 0 & un_{y_i} + vn_{x_i} & \frac{2}{3}(-un_{x_i} + 2vn_{y_i}) & \frac{\gamma}{Pr}n_{y_i} \end{bmatrix}$$

και

$$\mathbf{D}_x(\vec{V}(\vec{X}_{G_i}, t), \vec{n}_i) \approx \frac{\mathbf{D}_x(\vec{V}(\vec{X}_P, t), \vec{n}_i) + \mathbf{D}_x(\vec{V}(\vec{X}_{Q_i}, t), \vec{n}_i)}{2}$$

$$\mathbf{D}_y(\vec{V}(\vec{X}_{G_i}, t), \vec{n}_i) \approx \frac{\mathbf{D}_y(\vec{V}(\vec{X}_P, t), \vec{n}_i) + \mathbf{D}_y(\vec{V}(\vec{X}_{Q_i}, t), \vec{n}_i)}{2}$$

για να προσεγγιστεί η παράγωγος χρησιμοποιείται ο τύπος

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial x_l}(\vec{X}_{G_i}, t) = \left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial x_l} \right)_M^t - \left[\left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial x_r} \right)_M^t n_{x_r} - \left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial n} \right)_M^t \right] n_{x_l} \quad (3.4.3)$$

όπου

$$\left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial x_l}\right)_M^t = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \vec{V}}{\partial x_l}(\vec{X}_P, t) + \frac{\partial \vec{V}}{\partial x_l}(\vec{X}_{Q_i}, t) \right] \quad (3.4.4)$$

και

$$\left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial n}\right)_M = \frac{\vec{V}(\vec{X}_P, t) - \vec{V}(\vec{X}_{Q_i}, t)}{|PQ_i|} \quad (3.4.5)$$

με $|PQ_i|$ συμβολίζεται το μήκος της ακμής

3.5 ΧΡΟΝΙΚΗ ΔΙΑΚΡΙΤΟΠΟΙΗΣΗ

3.5.1 ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΗΣ ΧΡΟΝΟΠΡΟΕΛΑΣΗΣ

Σε αυτήν την υποενότητα θα γίνει η διακριτοποίηση των εξισώσεων σε μια κυψέλη με την μέθοδο την χρονοπροέλασης. Ο σκοπός της μεθόδου είναι απο την γνώση των μεγεθών τις χρονικές στιγμές t_{n-1} και t_n να προσδιοριστούν τα ίδια μεγέθη την χρονική στιγμή t_{n+1} και μετά το πέρας αυτής της διαδικασίας με την ίδια λογική να γίνει ο υπολογισμός την στιγμή t_{n+2} . Επομένως, είναι ορθό να διατυπωθεί, ότι με βάση αυτήν την μεθοδολογία, το μέτωπο της πληροφορίας προελαύνει ως προς τον χρόνο εξού και το όνομα της μεθόδου. Ακόμη, εκτός απο την χρονική εξάρτηση των μεγεθών θεωρείται ότι τα μεγέθη της ροής εξαρτώνται απο μια επιπλέον μεταβλητή, που αναπαριστά τον ψευδοχρόνο t_{ps} . Ο ψευδοχρόνος δεν έχει φυσική έννοια, έχει έννοια μόνο ως μια μέθοδο επίλυσης όπου για να γίνει η μετάβαση απο την χρονική στιγμή n στην $n+1$ πρέπει να προσδιοριστούν τα μεγέθη στις ενδιάμεσες ψευδοχρονικές στιγμές. Επομένως το διάνυσμα \vec{U} θεωρείται συνάρτηση και του ψευδοχρόνου, δηλαδή

$$\vec{U} = \vec{U}(\vec{X}, t, t_{ps})$$

Η εξίσωση 3.6.1 γράφεται μαζί με την προσθήκη του ψευδοχρονικού όρου

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t}(\vec{X}_P, t, t_{ps})A_\Omega + \frac{\partial \vec{U}}{\partial t_{ps}}(\vec{X}_P, t, t_{ps})A_\Omega + \sum_{i=1}^{cs} \vec{\Phi}_{PQ_i}^{t, t_{ps}} = 0 \quad (3.5.1)$$

Στη συνέχεια, διακριτοποιούνται οι χρονικές στιγμές

$$t^n = (n-1)\Delta t \text{ και } t^k = (k-1)\Delta t_{ps}$$

και ορίζονται οι ποσότητες

$$\vec{U}_P^{n,k} = \vec{U}(\vec{X}_P, t^n, t_{ps}^k) \quad \left(\frac{\partial \vec{U}}{\partial t}\right)_P^{n+1,k+1} = \frac{\partial \vec{U}}{\partial t}(\vec{X}_P, t^n, t_{ps}^k) \quad \vec{\Phi}_{PQ_i}^{n,k} = \vec{\Phi}_{PQ_i}^{t^n, t_{ps}^k}$$

Ακόμη, η παράγωγος του πραγματικού χρόνου προσεγγίζεται με ένα σχήμα πίσω διαφορών δεύτερης τάξης

$$\left(\frac{\partial \vec{U}}{\partial t}\right)_P^{n+1,k+1} = \frac{3\vec{U}_P^{n+1,k+1} - 4\vec{U}_P^n + \vec{U}_P^{n-1}}{2\Delta t}$$

Η ψευδοχρονική παράγωγος προσεγγίζεται με ένα σχήμα πρώτης τάξης ακριβείας

$$\left(\frac{\partial \vec{U}}{\partial t_{ps}} \right)_P^{n+1,k+1} = \frac{\vec{U}_P^{n+1,k+1} - \vec{U}_P^{n+1,k}}{\Delta t_{ps}}$$

Αντικαθιστώντας τις δυο τελευταίες σχέσεις στην 3.5.1 και προκύπτει η σχέση

$$\frac{3\vec{U}_P^{n+1,k+1} - 4\vec{U}_P^n + \vec{U}_P^{n-1}}{2\Delta t} A_\Omega + \frac{\vec{U}_P^{k+1} - \vec{U}_P^k}{\Delta t_{ps}} A_\Omega + \sum_{i=1}^{cs} \vec{\Phi}_{PQ_i}^{n+1,k+1} = 0 \quad (3.5.2)$$

Η παραπάνω εξίσωση είναι πεπλεγμένη(implicit) λόγω του μη-γραμμικού όρου

$$\sum_{i=1}^{cs} \vec{\Phi}_{PQ_i}^{n+1,k+1}$$

Επίσης, ισχύει

$$\vec{\Phi}_{PQ_i}^{n,k} = \vec{f}(\vec{U}_P^{n,k}, \vec{U}_{Q_i}^{n,k}, \vec{N}_i)$$

τότε το ανάπτυγμα Taylor πρώτης τάξης είναι

$$\Delta \vec{\Phi}_{PQ_i} = \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{U}_P}(\vec{U}_P, \vec{U}_{Q_i}, \vec{N}_i) \Delta \vec{U}_P + \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{U}_{Q_i}}(\vec{U}_P, \vec{U}_{Q_i}, \vec{N}_i) \Delta \vec{U}_{Q_i} \quad (3.5.3)$$

Τα μεγέθη $\frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{U}_P}(\vec{U}_P, \vec{U}_{Q_i}, \vec{N}_i)$ και $\frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{U}_{Q_i}}(\vec{U}_P, \vec{U}_{Q_i}, \vec{N}_i)$ είναι ιακωβιανά μητρώα που στη συγκεκριμένη περίπτωση έχουν διαστάσεις 4×4 . Επομένως ο μη-γραμμικός όρος γράφεται ως

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{cs} \vec{\Phi}_{PQ_i}^{n+1,k+1} &= \sum_{i=1}^{cs} \vec{\Phi}_{PQ_i}^{n+1,k} + \sum_{i=1}^{cs} \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{U}_P}(\vec{U}_P^{n+1,k}, \vec{U}_{Q_i}^{n+1,k}, \vec{N}_i) \Delta \vec{U}_P^{n+1,k+1} + \\ &\quad \sum_{i=1}^{cs} \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{U}_{Q_i}}(\vec{U}_P^{n+1,k}, \vec{U}_{Q_i}^{n+1,k}, \vec{N}_i) \Delta \vec{U}_{Q_i}^{n+1,k+1} \end{aligned}$$

όπου $\Delta \vec{U}_P^{n+1,k+1} = \vec{U}_P^{n+1,k+1} - \vec{U}_P^{n+1,k}$ και $\Delta \vec{U}_{Q_i}^{n+1,k+1} = \vec{U}_{Q_i}^{n+1,k+1} - \vec{U}_{Q_i}^{n+1,k}$ συνεχίζοντας τίθεται

$$\begin{aligned} [diag]_P^{n+1,k} &= \sum_{i=1}^{cs} \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{U}_P}(\vec{U}_P^{n+1,k}, \vec{U}_{Q_i}^{n+1,k}, \vec{N}_i) \\ [zm]_{Q_i}^{n+1,k} &= \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{U}_{Q_i}}(\vec{U}_P^{n+1,k}, \vec{U}_{Q_i}^{n+1,k}, \vec{N}_i) \end{aligned}$$

τότε προκύπτει

$$\sum_{i=1}^{cs} \vec{\Phi}_{PQ_i}^{n+1,k+1} = \sum_{i=1}^{cs} \vec{\Phi}_{PQ_i}^{n+1,k} + [diag]_P^{n+1,k} \Delta \vec{U}_P^{n+1,k+1} + \sum_{i=1}^{cs} [zm]_{Q_i}^{n+1,k} \Delta \vec{U}_{Q_i}^{n+1,k+1} \quad (3.5.4)$$

Και τελικά αντικαθιστώντας την 3.5.4 στην 3.5.2

$$\begin{aligned} & \frac{3\vec{U}_P^{n+1,k} + 3\Delta \vec{U}_P^{n+1,k+1} - 4\vec{U}_P^n + \vec{U}_P^{n-1}}{2\Delta t} A_\Omega + \frac{\Delta \vec{U}_P^{n+1,k+1}}{\Delta t_{ps}} A_\Omega + \\ & \sum_{i=1}^{cs} \vec{\Phi}_{PQ_i}^{n+1,k} + [diag]_P^{n+1,k} \Delta \vec{U}_P^{n+1,k+1} + \sum_{i=1}^{cs} [zm]_{Q_i}^{n+1,k} \Delta \vec{U}_{Q_i}^{n+1,k+1} = 0 \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\left[A_\Omega \mathbf{I} \left(\frac{3}{2\Delta t} + \frac{1}{\Delta t_{ps}} \right) + [diag]_P^{n+1,k} \right] \Delta \vec{U}_P^{n+1,k+1} + \sum_{i=1}^{cs} [zm]_{Q_i}^{n+1,k} \Delta \vec{U}_{Q_i}^{n+1,k+1} = \vec{R} \quad (3.5.5)$$

όπου

$$\vec{R} = - \left[\frac{3\vec{U}_P^{n+1,k} - 4\vec{U}_P^n + \vec{U}_P^{n-1}}{2\Delta t} + \vec{\Phi}_{PQ_i}^{n+1,k} \right]$$

Το διάνυσμα \vec{R} είναι το υπόλοιπο(residual) και όταν συγκλίνει στο μηδέν συνεπάγεται ότι τα αριθμητικά μεγέθη για τη συγκεκριμένη κυψέλη ικανοποιούν τη φυσική του προβλήματος για τη χρονική στιγμή n .

Στη συνέχεια τίθεται

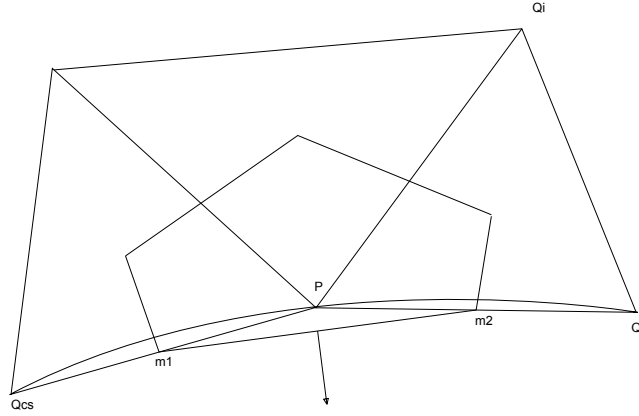
$$[DIAG]^{n+1,k} = \left[A_\Omega \mathbf{I} \left(\frac{3}{2\Delta t} + \frac{1}{\Delta t_{ps}} \right) + [diag]_P \right]$$

και τελικά η 3.5.5 γράφεται

$$[DIAG]^{n+1,k} \Delta \vec{U}_P^{n+1,k+1} + \sum_{i=1}^{cs} [zm]_{Q_i} \Delta \vec{U}_{Q_i}^{n+1,k+1} = \vec{R} \quad (3.5.6)$$

3.6 ΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ

Σε αυτό το υποκεφάλαιο θα γίνει αναφορά στη μέθοδο που ακολουθείται για την εισαγωγή των οριακών συνθηκών στις διακριτοποιημένες εξισώσεις για το τοίχωμα πρώτα και στη συνέχεια για την περιοχή του ελεύθερου ρεύματος. Τέλος, θα παρατεθούν οι οριακές συνθήκες στον άξονα του χρόνου ή αλλιώς οι αρχικές συνθήκες.



Σχήμα 3.2: Κυψέλη στο τοίχωμα.

3.6.1 ΤΟΙΧΩΜΑ

ΜΗ-ΣΥΝΕΚΤΙΚΟΙ ΟΡΟΙ

Στο σχήμα 3.2 παρουσιάζεται η κυψέλη που σχηματίζεται από τα βαρύκεντρα των τριγωνικών στοιχείων του τοιχώματος και από τα μέσα των ακμών PQ_1 και PQ_{cs} . Προφανώς, τα σημεία P , Q_1 και PQ_{cs} είναι σημεία του τοιχώματος. Η εξίσωση 3.6.1 λόγω του τοιχώματος γράφεται ως εξής

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t}(\vec{X}_P, t)A_\Omega + \sum_{i=1}^{cs} \vec{\Phi}_{PQ_i}^t + \vec{\Phi}^{w,t} = 0$$

Ο όρος $\vec{\Phi}^{w,t}$ υπολογίζεται ως

$$\begin{aligned} \vec{\Phi}^{w,t} &\approx (\vec{F}_{inv}(\vec{U}(\vec{X}_P, t))n_{wx} + \vec{G}_{inv}(\vec{U}(\vec{X}_P, t))n_{wy})(m_1m_2) \Leftrightarrow \\ \vec{\Phi}^{w,t} &\approx \mathbf{T}_w^{-1} \vec{F}_{inv}(\vec{U}(\vec{X}_P, t))(m_1m_2) \end{aligned}$$

και το n_w είναι το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στο ευθύγραμμο τμήμα (m_1m_2) . Μετά απο πράξεις οι μη-συνεκτικές ροές στο τοίχωμα γράφονται

$$\vec{\Phi}^{w,t} \approx \begin{bmatrix} \rho(\vec{u}\vec{n}_w) \\ \rho u(\vec{u}\vec{n}_w) + pn_{wx} \\ \rho v(\vec{u}\vec{n}_w) + pn_{wy} \\ (\rho e_t + p)\vec{u}\vec{n}_w \end{bmatrix}_P^t$$

όμως $(\vec{u}\vec{n}_w)_P = 0$ άρα η παραπάνω ισοδυναμεί με τη σχέση

$$\vec{\Phi}^{w,t} \approx \begin{bmatrix} 0 \\ pn_{wx} \\ pn_{wy} \\ 0 \end{bmatrix}_P^t$$

ΣΥΝΕΚΤΙΚΟΣ ΟΡΟΣ

Λόγω της συνεκτικότητας οι ταχύτητες στο τοίχωμα μηδενίζονται, επομένως $(u, v)_P = 0$. Ακόμη κατά την εφαρμογή της μεθόδου της χρονοπροέλασης στην εξίσωση 3.5.6 ο όρος $\Delta \vec{U}_P$ πρέπει να παραμένει μηδενικός, προκειμένου οι ταχύτητες να διατηρήσουν την μηδενική τους τιμή στο επόμενο ψευδοχρονικό βήμα. Επομένως, τίθεται

$$[zm]_i^{n+1,k}(2:3,:) = 0 \text{ για } (i = 2:cs - 1)$$

προκειμένου να μηδενιστεί η συνεισφορά από τις ταχύτητες των γειτονικών κόμβων που δεν είναι μηδενικές

$$[DIAG]_P^{n+1,k}(2,2) = 1 \text{ και } [DIAG]_P(3,3) = 1$$

και οι υπόλοιποι όροι στις γραμμές 2 και 3 μηδενίζονται, προκειμένου να εξαλειφθούν οι συνεισφορές από τις μη-μηδενικές μεταβλητές (πυκνότητα, ενέργεια).

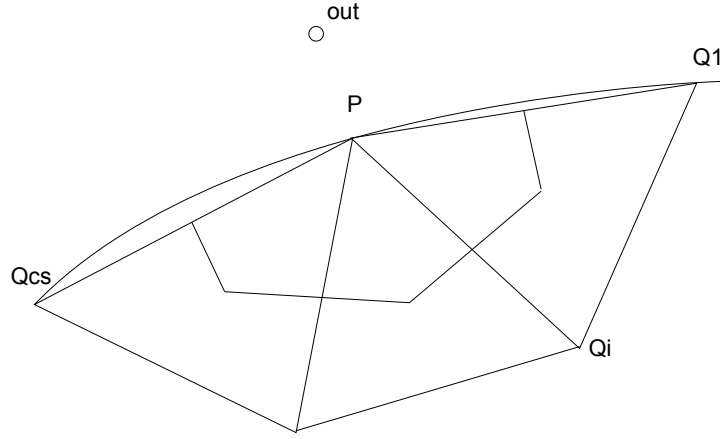
3.6.2 ΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΣΤΟ ΑΠΕΙΡΟ

Τα μεγέθη που δίνονται για την επ'άπειρον ροή σε περιπτώσεις εξωτερικής αεροδυναμικής είναι ο αριθμός Mach (M_∞), η πυκνότητα (ρ_∞), το μέτρο της ταχύτητας ($|\vec{V}_\infty|$) και η γωνία ως προς τη χορδή της αεροτομής a_∞ . Στο σχήμα 3.3 φαίνεται μια κυψέλη στα όρια του πεδίου ροής. Προκειμένου να εισαχθούν οι οριακές συνθήκες, θεωρείται ένας υποθετικός κόμβος "out" εξωτερικά των ορίων και οι τιμές του συντηρητικού διανύσματος σε αυτόν τον κόμβο είναι

$$\vec{U}_{out} = \begin{bmatrix} \rho_\infty \\ (\rho u)_{far} \\ (\rho v)_{far} \\ E_{far} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_\infty \\ \rho_\infty |\vec{V}_\infty| \cos(a_\infty) \\ \rho_\infty |\vec{V}_\infty| \sin(a_\infty) \\ \frac{p_{out}}{\gamma-1} + \frac{1}{2} \rho_\infty |\vec{V}_\infty|^2 \end{bmatrix}$$

όπου

$$p_{out} = \rho_\infty \frac{|\vec{V}_\infty|^2}{(M_\infty)^2 \gamma}$$



Σχήμα 3.3: Κυψέλη στα εξωτερικά όρια.

Η εξίσωση 3.6.1 λόγω του συνόρου γράφεται ως

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t}(\vec{X}_P, t)A_\Omega + \sum_{i=1}^{cs} \vec{\Phi}_{PQ_i}^t + \vec{\Phi}^{out,t} = 0$$

και

$$\vec{\Phi}^{out,t} = \mathbf{A}^L(\vec{U}(\vec{X}_P, t))\vec{U}(\vec{X}_P, t) + \mathbf{A}^R(\vec{U}(\vec{X}_P, t))\vec{U}_{out}$$

3.6.3 ΑΡΧΙΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ

Αν θεωρηθεί ότι το διάνυσμα \vec{U}_{out} είναι συνάρτηση του χρόνου, τότε σε κάθε κόμβο i_s του πλέγματος τίθεται

$$\vec{U}(\vec{X}_{i_s}, 0) = \vec{U}_{out}(0)$$

Επίσης πρέπει να σημειωθεί, ότι στη μέθοδο της χρονοπροέλασης, εφόσον χρησιμοποιήθηκε σχήμα διπλής ακριβείας για τον υπολογισμό του $\vec{U}(\vec{X}_{i_s}, t^{n+1})$, είναι απαραίτητη η γνώση των τιμών $\vec{U}(\vec{X}_{i_s}, t^n)$ και $\vec{U}(\vec{X}_{i_s}, t^{n-1}) \forall i_s$. Άρα όταν $n = 1$ χρησιμοποιείται ένα σχήμα πρώτης τάξης για τον υπολογισμό των $\vec{U}(\vec{X}_{i_s}, t^2)$.

3.7 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΨΕΥΔΟΧΡΟΝΙΚΟΥ ΒΗΜΑΤΟΣ

Το ψευδοχρονικό βήμα για κάθε κόμβο P υπολογίζεται από τη σχέση

$$\Delta t_{ps}^P = CFL \frac{A_\Omega}{C + D} \quad (3.7.1)$$

όπου

$$D = \frac{2}{\rho^P} \frac{A_\Omega}{S_x^P + S_y^P} \max \left[\frac{c_p \mu}{RePr}, \frac{\mu}{Re} \right]$$

$$C = (|u^P| + c^P)S_x^P + (|v^P| + c^P)S_y^P$$

$$S_x^P = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{cs} n_{x_i}$$

$$S_y^P = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{cs} n_{y_i}$$

3.8 ΣΧΗΜΑ ΕΠΙΛΥΣΗΣ

Σε αυτό το σημείο πρέπει να επιλυθεί η εξίσωση 3.5.6

$$[DIAG]^{n+1,k} \Delta \vec{U}_P^{n+1,k+1} + \sum_{i=1}^{cs} [zm]_{Q_i}^{n+1,k} \Delta \vec{U}_{Q_i}^{n+1,k+1} = \vec{R}$$

Αν η παραπάνω γραφεί για κάθε κόμβο is θα προκύψει ένα γραμμικό σύστημα της μορφής

$$[\mathbf{B}] \Delta \vec{U} = \vec{C}$$

όπου οι διαστάσεις του μητρώου $[\mathbf{B}]$ είναι $4N_s \times 4N_s$ και των διανυσμάτων $\Delta \vec{U}$ και \vec{C} $4N_s$, αφού σε κάθε κόμβο υπάρχουν τέσσερις άγνωστοι. Επομένως, πρέπει να επιλυθεί ένα γραμμικό σύστημα για την μετάβαση από μια ψευδοχρονική στιγμή στην επόμενη. Για την επίλυση του συστήματος από πλευράς υπολογιστικού κόστους είναι συμφερότερη η επιλογή ενός επαναληπτικού σχήματος, επειδή το μητρώο $[\mathbf{B}]$ εκτός από το μέγεθός του είναι και αραιό αφού οι μεταβλητές κάθε κόμβου P επηρεάζονται μόνο από τις μεταβλητές των γειτονικών κόμβων. Επομένως ξαναγράφεται η 3.5.6 ως εξής

$$\Delta \vec{U}_P^{n+1,k+1} = ([DIAG]^{n+1,k})^{-1} \left[\vec{R} - \sum_{i=1}^{cs} [zm]_{Q_i}^{n+1,k} \Delta \vec{U}_{Q_i}^{n+1,k+1} \right]$$

στη συνέχεια ορίζονται δυο νέα διανύσματα $\Delta \vec{U}^{new}$ και $\Delta \vec{U}^{old}$ για τα οποία ισχύει $\Delta \vec{U}_P^{new} = \Delta \vec{U}_P^{n+1,k+1}$ $\Delta \vec{U}_{Q_i}^{old} = \Delta \vec{U}_{Q_i}^{n+1,k+1}$ και τότε η παραπάνω γράφεται

$$\Delta \vec{U}_P^{new} = ([DIAG]^{n+1,k})^{-1} \left[\vec{R} - \sum_{i=1}^{cs} [zm]_{Q_i}^{n+1,k} \Delta \vec{U}_{Q_i}^{old} \right]$$

Αρχικά $\Delta \vec{U}^{old} = 0$ και επιλύοντας την τελευταία εξίσωση για κάθε κόμβο υπολογίζεται το $\Delta \vec{U}^{new}$, στη συνέχεια τίθεται $\Delta \vec{U}^{old} = \Delta \vec{U}^{new}$ και η ίδια διαδικασία συνεχίζεται για έναν ορισμένο αριθμό επαναλήψεων. Στο τέλος η τιμή στο $k + 1$ υπολογίζεται απο τη σχέση

$$\vec{U}^{n+1,k+1} = \vec{U}^{n+1,k} + \Delta \vec{U}^{new}$$

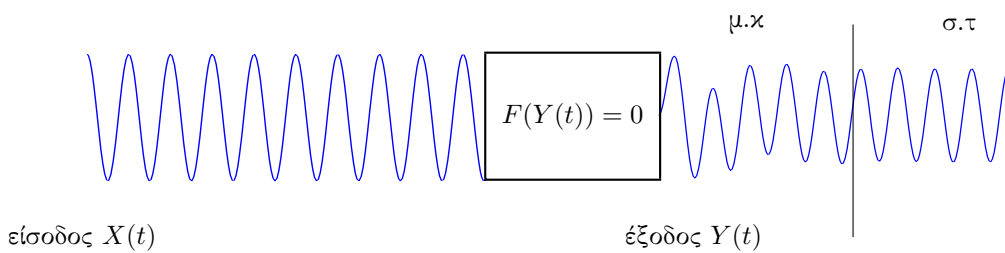
ΣΧΟΛΙΟ

Σε αυτό το σημείο, τελειώνει η παρουσίαση της επίλυσης των εξισώσεων για μη-μόνιμες ροές με την προυπάρχουσα μέθοδο της χρονοπροέλασης. Στο επόμενο κεφάλαιο περιγράφεται η εφαρμογή της μεθόδου ισορροπίας των αρμονικών στις εξισώσεις N-S.

Κεφάλαιο 4

ΜΕΘΟΔΟΣ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ ΤΩΝ ΑΡΜΟΝΙΚΩΝ

4.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ



Σχήμα 4.1: Απόκριση συστήματος σε αρμονική διέγερση.

Στο σχήμα 4.1 απεικονίζεται ένα σύστημα, το οποίο δέχεται ως είσοδο μια περιοδική συνάρτηση X ως προς τον χρόνο και η έξοδος του είναι μια συνάρτηση Y , που προκύπτει ως λύση της $F(Y(t)) = 0$. Η F είναι μια διαφορική εξίσωση και η είσοδος X επιλέγεται ανάλογα με το πρόβλημα. Απο το σχήμα είναι εμφανές ότι απο ένα σημείο και έπειτα, οι τιμές της Y είναι περιοδικές και το σύστημα βρίσκεται στη σταθερή κατάσταση (σ.τ), σε αντίθεση με τις προγενέστερες χρονικές στιγμές που η κατάσταση του ονομαστικά λέγεται μεταβατική. Εφόσον είναι γνωστό εκ των προτέρων ότι η απόκριση θα είναι περιοδική, η συνάρτηση Y εκφράζεται ως ένα πεπερασμένο άθροισμα τριγωνομετρικών όρων

$$Y(t) = Y_0 + \sum_{i=1}^{N_T} Y_{c_i} \cos(\omega_i t) + Y_{s_i} \sin(\omega_i t)$$

όπου πλέον οι άγνωστοι είναι οι συντελεστές Y_{c_i} και Y_{s_i} . Για να προσδιορισθούν οι συντελεστές θα πρέπει να χρησιμοποιηθεί η συνάρτηση F που προφανώς αν δεν είναι γραμμική δεν είναι δυνατόν να αναπτυχθεί μια γενική μεθοδολογία. Στη συνέχεια θα γίνει εφαρμογή της μεθόδου στις εξισώσεις της ρευστομηχανικής.

4.2 ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ

Οι εξισώσεις του προβλήματος όπως παρουσιάστηκαν σε προηγούμενο κεφάλαιο είναι

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{F}(\vec{U})}{\partial x} + \frac{\partial \vec{G}(\vec{U})}{\partial y} = 0$$

Το διάνυσμα \vec{U} είναι συνάρτηση του χρόνου και των χωρικών μεταβλητών δηλαδή

$$\vec{U} = \vec{U}(\vec{X}, t)$$

και αν τεθεί

$$\vec{R}(\vec{U}(\vec{X}, t)) = \frac{\partial \vec{F}(\vec{U})}{\partial x} + \frac{\partial \vec{G}(\vec{U})}{\partial y}$$

τότε προκύπτει η εξίσωση

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t}(\vec{X}, t) + \vec{R}(\vec{U}(\vec{X}, t)) = 0 \quad (4.2.1)$$

Είσοδος σε αυτήν την εξίσωση θεωρούνται οι οριακές συνθήκες

$$\vec{U}(\vec{X}, t) = \vec{U}_{out} \quad \forall \vec{X} \in B$$

με B το σημειοσύνολο των ορίων του προβλήματος και ως έξοδος η λύση της διαφορικής εξίσωσης $\vec{U}(\vec{X}, t)$. Επομένως τίθεται

$$\vec{U}(\vec{X}, t) = \vec{U}_0(\vec{X}) + \sum_{i=1}^{N_H} \vec{U}_{c_i}(\vec{X}) \cos(\omega_i t) + \vec{U}_{s_i}(\vec{X}) \sin(\omega_i t)$$

και παραγωγίζοντας ως προς τον τον χρόνο

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t}(\vec{X}, t) = \sum_{i=1}^{N_H} -\omega_i \vec{U}_{c_i}(\vec{X}) \sin(\omega_i t) + \omega_i \vec{U}_{s_i}(\vec{X}) \cos(\omega_i t)$$

Συνεχίζοντας ορίζεται το διάνυσμα

$$\vec{c}(t) = [0 \quad -\sin(\omega t) \quad \cos(\omega t) \quad \cdots \quad -k \sin(\omega k t) \quad k \cos(\omega k t) \quad \cdots \quad -N_H \sin(\omega N_H t) \quad N_H \cos(\omega N_H t)]$$

Οι συντελεστές στο πεδίο των συχνοτήτων τοποθετούνται επίσης σε έναν πίνακα

$$\vec{U}_{fr}^T(\vec{X}) = [\vec{U}_0(\vec{X}) \quad \vec{U}_{c_1}(\vec{X}) \quad \vec{U}_{s_1}(\vec{X}) \quad \cdots \quad \vec{U}_{c_k}(\vec{X}) \quad \vec{U}_{s_k}(\vec{X}) \quad \cdots \quad \vec{U}_{c_{N_H}}(\vec{X}) \quad \vec{U}_{s_{N_H}}(\vec{X})]$$

Επομένως, η 4.2.1 γράφεται ισοδύναμα χρησιμοποιώντας τανυστική γραφή

$$\omega c_j(t) U_{fr,j}(\vec{X}) + \vec{R}(\vec{U}(\vec{X}, t)) = 0 \quad (4.2.2)$$

Προκειμένου να διατυπωθεί η 4.2.2 στο πεδίο των συχνοτήτων, θα πρέπει να αντικατασταθεί η μεταβλητή \vec{U} εκφρασμένη σε τριγωνομετρική σειρά στη συνάρτηση

$\vec{R}(\vec{U}(\vec{X}, t))$, όμως λόγω της μη-γραμμικότητας της συνάρτησης αυτός ο τρόπος προσέγγισης δεν είναι επιθυμητός. Αντί αυτού εκφράζεται ο πρώτος όρος στο πεδίο του χρόνου χρησιμοποιώντας το διακριτό μετασχηματισμό *Fourie*. Πιο συγκεκριμένα μέσα στην περίοδο έχουν επιλεγεί $N_T = 2N_H + 1$ χρονικά σημεία και οι μεταβλητές στο πεδίο του χρόνου είναι οι τιμές αυτής της συνάρτησης $\vec{U}(\vec{X}, t)$ σε αυτά τα χρονικά σημεία. Επομένως ορίζεται το διάνυσμα

$$\vec{U}_t^T(\vec{X}) = [\vec{U}(\vec{X}, t_1) \quad \vec{U}(\vec{X}, t_2) \quad \cdots \quad \vec{U}(\vec{X}, t_i) \quad \cdots \quad \vec{U}(\vec{X}, t_{N_T})]$$

όπου

$$t_i = t_0 + (i - 1)\Delta t = t_0 + (i - 1)\frac{T}{N_T} = t_0 + (i - 1)\frac{2\pi}{\omega N_T} = t_0 + (i - 1)\frac{\alpha}{\omega}$$

χρησιμοποιείται το μητρώο διακριτού μετασχηματισμού \mathbf{E} *Fourier* με την παρακάτω ιδιότητα

$$\vec{U}_{fr}(\vec{X}) = \mathbf{E} \cdot \vec{U}_t(\vec{X})$$

Άρα η 4.2.2 γράφεται ισοδύναμα

$$\omega c_j(t) E_{ji} \cdot \vec{U}_{t,i}(\vec{X}) + \vec{R}(\vec{U}(\vec{X}, t)) = 0 \quad (4.2.3)$$

Η 4.2.3 ισχύει για κάθε χρονική στιγμή, επομένως αντικαθίσταται η τιμή t με τις τιμές t_i και διαμορφώνεται το παρακάτω κλειστό σύστημα εξισώσεων.

$$\begin{cases} \omega c_j(t_1) E_{ji} \cdot \vec{U}_t(\vec{X}) + \vec{R}(\vec{U}(\vec{X}, t_1)) = 0 \\ \vdots \\ \omega c_j(t_i) E_{ji} \cdot \vec{U}_t(\vec{X}) + \vec{R}(\vec{U}(\vec{X}, t_i)) = 0 \\ \vdots \\ \omega c_j(t_{N_T}) E_{ji} \cdot \vec{U}_t(\vec{X}) + \vec{R}(\vec{U}(\vec{X}, t_{N_T})) = 0 \end{cases} \quad (4.2.4)$$

Συνεχίζοντας ορίζεται το μητρώο

$$C_{ij} = c_j(t_i)$$

και το διάνυσμα

$$\vec{R}_t^T(\vec{X}) = [\vec{R}(\vec{U}(\vec{X}, t_1)) \quad \cdots \quad \vec{R}(\vec{U}(\vec{X}, t_i)) \quad \cdots \quad \vec{R}(\vec{U}(\vec{X}, t_{N_T}))] .$$

Άρα το σύστημα 4.2.4 γράφεται ισοδύναμα

$$\omega \mathbf{C} \cdot \mathbf{E} \cdot \vec{U}_t(\vec{X}) + \vec{R}_t^T(\vec{X}) = 0 \quad (4.2.5)$$

Επομένως προκύπτει ένα σύστημα που έχει εξαλειφθεί η χρονική μεταβλητή, αλλά σε αντίθεση με τις τέσσερις εξισώσεις του αρχικού συστήματος πρέπει να επιλυθεί ένα σύστημα $4N_T$ εξισώσεων.

Θεώρημα 4.2.1 Ο πίνακας $\mathbf{D} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{E}$ σε συμβολισμό δεικτών περιγράφεται από τον τύπο

$$D_{ij} = \frac{2}{N_T} \sum_{k=1}^{N_H} k \sin(\alpha k(j-i)) \quad (4.2.6)$$

Απόδειξη

Για $t_0 = 0$ ισχύει ότι $\omega t_i = (i-1)\alpha$ και αντικαθιστώντας στο διάνυσμα $\vec{c}(t)$ προκύπτει ότι

$$\vec{c}(t_i) = [0 \quad -\sin((i-1)\alpha) \quad \cos((i-1)\alpha) \quad \cdots \quad -N_H \sin((i-1)N_H\alpha) \quad N_H \cos((i-1)N_H\alpha)]$$

Επομένως ο πίνακας \mathbf{C} σε συμβολισμό δεικτών γράφεται

$$C_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{για } j = 1 \\ -k \sin((i-1)k\alpha) & \text{για } j = 2k \\ k \cos((i-1)k\alpha) & \text{για } j = 2k + 1 \end{cases}$$

Επίσης αποδεικνύεται ότι οι τιμές του μητρώου \mathbf{E} είναι

$$E_{ij} = \frac{1}{N_T} \begin{cases} 1 & \text{για } i = 1 \\ 2 \cos(k(j-1)\alpha) & \text{για } i = 2k \\ 2 \sin(k(j-1)\alpha) & \text{για } i = 2k + 1 \end{cases}$$

Άρα ισχύει

$$D_{ij} = \sum_{k=1}^{N_T} C_{ik} E_{kj} = \sum_{k=1}^{N_H} C_{i(2k)} E_{(2k)j} + C_{i(2k+1)} E_{(2k+1)j} \Leftrightarrow$$

$$D_{ij} = \frac{1}{N_T} \sum_{k=1}^{N_T} -k \sin((i-1)k\alpha) 2 \cos(k(j-1)\alpha) + k \cos((i-1)k\alpha) 2 \sin(k(j-1)\alpha)$$

Και χρησιμοποιώντας τον τριγωνομετρικό τύπο

$$\sin(\alpha - \beta) = -\cos(\alpha) \sin(\beta) + \cos(\beta) \sin(\alpha)$$

προκύπτει

$$D_{ij} = \frac{2}{N_T} \sum_{k=1}^{N_T} k \sin((j-1)k\alpha - (i-1)k\alpha) = \frac{2}{N_T} \sum_{k=1}^{N_T} k \sin((j-i)k\alpha)$$

Άρα η 4.2.5 γράφεται ισοδύναμα

$$\omega \mathbf{D} \cdot \vec{U}_t(\vec{X}) + \vec{R}_t(\vec{X}) = 0 \quad (4.2.7)$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

- Ουσιαστικά, με την μέθοδο των αρμονικών προσεγγίζεται η χρονική παράγωγος που είναι και ο μοναδικός γραμμικός όρος των εξισώσεων.

$$\frac{\partial \vec{U}_t}{\partial t}(\vec{X}, t_i) = \omega \sum_{j=1}^{N_T} \mathbf{D}_{i,j} \vec{U}_t(\vec{X}, t_i)$$

και αφού $t_i = t_0 + (i - 1)\Delta t$ με την επιλογή του i γίνεται ο υπολογισμός της παραγωγού στα ισαπέχοντα σημεία εσωτερικά της περιόδου. Για τον υπολογισμό σε κάποια διαφορετική χρονική στιγμή πρέπει να μεταβληθεί το t_0 .

- Το άθροισμα των στοιχείων του \mathbf{D} σε μία σειρά ισούται με μηδέν, γεγονός που συνεπάγεται ότι, είναι δυνατή και η μαθηματική περιγραφή μη χρονικά μεταβαλλόμενων πεδίων ροής.
- Τα διαγώνια στοιχεία του \mathbf{D} είναι μηδενικά, που σημαίνει ότι η τιμή της παραγωγού μια συγκεκριμένη στιγμή επηρεάζεται από τις τιμές των μεταβλητών μόνο τις υπόλοιπες χρονικές στιγμές.
- Ακόμη ισχύουν οι σχέσεις

$$\mathbf{D}_{i+o,j} = \mathbf{D}_{i,j-o} \text{ για } j > o$$

$$\mathbf{D}_{i+o,j} = \mathbf{D}_{i,N_T-(o-j)} \text{ για } j \leq o$$

που συνεπάγεται ότι τα στοιχεία του μητρώου από μία σειρά στην επόμενη παραμένουν τα ίδια, αλλά οι θέσεις τους εναλλάσσονται. Επομένως, μία σειρά του μητρώου είναι αρκετή για τον προσδιορισμό και των υπόλοιπων.

4.3 ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΩΝ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΘΕΙΣΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

Όπως αναπτύχθηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο, έπειτα απο την εφαρμογή της μεθόδου της ισορροπίας των αρμονικών γίνεται ένας μετασχηματισμός απο το διάνυσμα των ροικών μεταβλητών \vec{U} στο \vec{U}_t που αποτελείται από τις τιμές του \vec{U} σε N_T ισαπέχουσες χρονικές στιγμές μέσα στην περίοδο. Σε αυτό το κεφάλαιο θα παρουσιασθούν η διακριτοποίηση και στη συνέχεια η μεθοδολογία επίλυσης των εξισώσεων των μετασχηματισθεισών μεταβλητών.

4.4 ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

Παρατίθεται η 4.2.7

$$\omega \mathbf{D} \cdot \vec{U}_t(\vec{X}) + \vec{R}_t(\vec{X}) = 0$$

Στη συνέχεια τίθεται

$$t_n = t_0 + (n - 1)\Delta t \text{ για } n \in [1, N_T]$$

και η 4.2.7 γράφεται σε συμβολισμό δεικτών όπου ισχύει η συνθήκη άθροισης στους επαναλαμβανόμενους δείκτες

$$\omega D_{it,jt} \cdot \vec{U}(\vec{X}, t_{jt}) + \vec{R}(\vec{U}(\vec{X}, t_{it})) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\omega D_{it,jt} \cdot \vec{U}(\vec{X}, t_{jt}) + \frac{\partial \vec{F}(\vec{U}(\vec{X}, t_{it}))}{\partial x} + \frac{\partial \vec{G}(\vec{U}(\vec{X}, t_{it}))}{\partial y} = 0$$

και με ολοκλήρωση στο χωρίο της κυψέλης

$$\omega D_{it,jt} \cdot \int_{\Omega} \vec{U}(\vec{X}, t_{jt}) dx dy + \int_{\Omega} \left[\frac{\partial \vec{F}(\vec{U}(\vec{X}, t_{it}))}{\partial x} + \frac{\partial \vec{G}(\vec{U}(\vec{X}, t_{it}))}{\partial y} \right] dx dy = 0 \quad (4.4.1)$$

Απο το θεώρημα Green-Gauss

$$\int_{\Omega} \left[\frac{\partial \vec{F}(\vec{U}(\vec{X}, t_{it}))}{\partial x} + \frac{\partial \vec{G}(\vec{U}(\vec{X}, t_{it}))}{\partial y} \right] dx dy = \int_{\partial \Omega} [F(\vec{U}(\vec{X}, t_{it}))n_x + G(\vec{U}(\vec{X}, t_{it}))n_y] dl$$

Ισχύει ακόμη προσεγγιστικά

$$\int_{\Omega} \vec{U}(\vec{X}, t_{jt}) dx dy \approx \vec{U}(\vec{X}_P, t_{jt}) A_{\Omega}$$

και αντικαθιστώντας τις δυο τελευταίες σχέσεις στην 4.4.1

$$\omega D_{it,jt} \cdot \vec{U}(\vec{X}_P, t_{jt}) A_{\Omega} + \int_{\partial \Omega} [F(\vec{U}(\vec{X}, t_{it}))n_x + G(\vec{U}(\vec{X}, t_{it}))n_y] dl = 0 \quad (4.4.2)$$

Συνεχίζοντας τίθεται

$$\vec{\Phi}_{PQ_i}^{it} = \int_{\partial\Omega_i} [F(\vec{U}(\vec{X}, t_{it}))n_x + G(\vec{U}(\vec{X}, t_{it}))n_y] dl$$

και η 4.4.2 γράφεται ισοδύναμα

$$\omega D_{it,jt} \cdot \vec{U}(\vec{X}_P, t_{jt}) A_\Omega + \sum_{i=1}^{cs} \vec{\Phi}_{PQ_i}^{it} = 0 \quad (4.4.3)$$

4.5 ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

Όπως και στο κεφάλαιο 3.5.1 οι μεταβλητές εξαρτώνται και απο μία πλασματική απο φυσικής πλευράς μεταβλητή τον ψευδοχρόνο, δηλαδή

$$\vec{U} = \vec{U}(\vec{X}, t, t_{ps})$$

Ακόμη, τίθεται

$$t_{ps}^k = (k-1)\Delta t_{ps} \text{ και } \vec{U}^k(\vec{X}, t) = \vec{U}(\vec{X}, t, t_{ps}^k)$$

και εισάγεται στην 4.4.3 η ψευδοχρονική παράγωγος

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t_{ps}}(\vec{X}_P, t_{it}, t_{ps}) A_\Omega + \omega D_{it,jt} \cdot \vec{U}(\vec{X}_P, t_{jt}, t_{ps}) A_\Omega + \sum_{i=1}^{cs} \vec{\Phi}_{PQ_i}^{it, t_{ps}} = 0 \quad (4.5.1)$$

Η ψευδοχρονική παράγωγος διακριτοποιείται με ένα σχήμα πρώτης τάξης

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t_{ps}}(\vec{X}_P, t_{jt}, t_{ps}) = \frac{\Delta \vec{U}_P^{it, k+1}}{\Delta t_{ps}}$$

όπου $\Delta \vec{U}_P^{it, k+1} = \vec{U}^{k+1}(\vec{X}_P, t_{it}) - \vec{U}^k(\vec{X}_P, t_{it})$. Άρα η 4.5.1 γράφεται

$$\frac{\Delta \vec{U}_P^{it, k+1}}{\Delta t_{ps}} A_\Omega + \omega D_{it,jt} \cdot \vec{U}^{k+1}(\vec{X}_P, t_{jt}) A_\Omega + \sum_{i=1}^{cs} \vec{\Phi}_{PQ_i}^{it, k+1} = 0 \quad (4.5.2)$$

Το διάνυσμα των ροών $\vec{\Phi}$ είναι συνάρτηση των κομβικών μεταβλητών, και γράφεται

$$\vec{\Phi}_{PQ_i}^{it} = \vec{f}(\vec{U}(\vec{X}_P, t_{it}), \vec{U}(\vec{X}_{Q_i}, t_{it}), \vec{N}_i)$$

και αναπτύσσοντας σε σειρά Taylor

$$\begin{aligned} \Delta \vec{\Phi}_{PQ_i}^{it, k+1} &= \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{U}_P}(\vec{U}^k(\vec{X}_P, t_{it}), \vec{U}^k(\vec{X}_{Q_i}, t_{it}), \vec{N}_i) \Delta \vec{U}_P^{it, k+1} + \\ &\quad \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{U}_{Q_i}}(\vec{U}^k(\vec{X}_P, t_{it}), \vec{U}^k(\vec{X}_{Q_i}, t_{it}), \vec{N}_i) \Delta \vec{U}_{Q_i}^{it, k+1} \end{aligned}$$

όπου

$$\Delta \vec{U}_{Q_i}^{it,k+1} = \vec{U}^{k+1}(\vec{X}_{Q_i}, t_{it}) - \vec{U}^k(\vec{X}_{Q_i}, t_{it})$$

Ορίζονται, τα μητρώα

$$[diag]_P^{it,k} = \sum_{i=1}^{cs} \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{U}_P}(\vec{U}^k(\vec{X}_P, t_{it}), \vec{U}^k(\vec{X}_{Q_i}, t_{it}), \vec{N}_i)$$

$$[zm]_{Q_i}^{it,k} = \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{U}_{Q_i}}(\vec{U}^k(\vec{X}_P, t_{it}), \vec{U}^k(\vec{X}_{Q_i}, t_{it}), \vec{N}_i) \Delta \vec{U}_{Q_i}^{k+1}$$

και η 4.5.2 γράφεται ισοδύναμα

$$\begin{aligned} \frac{\Delta \vec{U}_P^{it,k+1}}{\Delta t_{ps}} A_\Omega + \omega D_{it,jt} \cdot \vec{U}^k(\vec{X}_P, t_{jt}) A_\Omega + \omega D_{it,jt} \cdot \Delta \vec{U}_P^{jt,k+1} A_\Omega + \sum_{i=1}^{cs} \vec{\Phi}_{PQ_i}^{it,k} + \sum_{i=1}^{cs} \Delta \vec{\Phi}_{PQ_i}^{it,k} = 0 \Leftrightarrow \\ \frac{\Delta \vec{U}_P^{it,k+1}}{\Delta t_{ps}} A_\Omega + \omega \sum_{jt=1}^{N_T} D_{it,jt} \cdot \vec{U}^k(\vec{X}_P, t_{jt}) A_\Omega + \omega \sum_{jt=1}^{N_T} D_{it,jt} \cdot \Delta \vec{U}_P^{jt,k+1} A_\Omega + \sum_{i=1}^{cs} \vec{\Phi}_{PQ_i}^{it,k} \\ + [diag]_P^{it,k} \Delta \vec{U}_P^{it,k+1} + \sum_{i=1}^{cs} [zm]_{Q_i}^{it,k} \Delta \vec{U}_{Q_i}^{it,k+1} = 0 \end{aligned} \quad (4.5.3)$$

Στην εξίσωση 4.5.3 δεν ισχύει η συνθήκη άθροισης για αυτό τον λόγο τοποθετήθηκε και το σύμβολο του αθροίσματος. Ορίζεται ακόμη η ποσότητα

$$\vec{R}_P^{it,k} = - \left[\omega \sum_{jt=1}^{N_T} D_{it,jt} \cdot \vec{U}^k(\vec{X}_P, t_{jt}) A_\Omega + \sum_{i=1}^{cs} \vec{\Phi}_{PQ_i}^{it,k} \right] \quad (4.5.4)$$

και συνδυάζοντας τις 4.5.3 και 4.5.4 προκύπτει

$$\frac{\Delta \vec{U}_P^{it,k+1}}{\Delta t_{ps}} A_\Omega + \omega \sum_{jt=1}^{N_T} D_{it,jt} \cdot \Delta \vec{U}_P^{jt,k+1} A_\Omega + [diag]_P^{it,k} \Delta \vec{U}_P^{it,k+1} + \sum_{i=1}^{cs} [zm]_{Q_i}^{it,k} \Delta \vec{U}_{Q_i}^{it,k+1} = \vec{R}_P^{it,k+1} \quad (4.5.5)$$

Το δεξί μέλος εκφράζει τη φυσική του προβλήματος και όταν μηδενιστεί συνεπάγεται ότι έχει επιλυθεί το πρόβλημα. Η εξίσωση 4.5.5 αν διατυπωθεί $\forall it$ προκύπτει η εξίσωση που ακόλουθι και εκφράζει πιο παραστατικά τη σύνδεση των μεταβλητών του συστήματος.

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{\mathbf{I}}{\Delta t_{ps}} A_{\Omega} + \omega A_{\Omega} \begin{bmatrix} D_{1,1} & \cdots & D_{1,jt} & \cdots & D_{1,N_T} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ D_{it,1} & \cdots & D_{it,jt} & \cdots & D_{it,N_T} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ D_{N_T,1} & \cdots & D_{N_T,jt} & \cdots & D_{N_T,N_T} \end{bmatrix} + \right. \\
 & \left. \begin{bmatrix} [diag]_P^{1,k} & \cdots & 0 & \cdot & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & [diag]_P^{it,k} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & [diag]_P^{N_T,k} \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} \Delta \vec{U}_P^{1,k+1} \\ \vdots \\ \Delta \vec{U}_P^{jt,k+1} \\ \vdots \\ \Delta \vec{U}_P^{N_T,k+1} \end{bmatrix} + \\
 & + \sum_{i=1}^{cs} \begin{bmatrix} [zm]_{Q_i}^{1,k} & \cdots & 0 & \cdot & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & [zm]_{Q_i}^{jt,k} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & [zm]_{Q_i}^{N_T,k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \vec{U}_{Q_i}^{1,k+1} \\ \vdots \\ \Delta \vec{U}_{Q_i}^{jt,k+1} \\ \vdots \\ \Delta \vec{U}_{Q_i}^{N_T,k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{R}_P^{1,k+1} \\ \vdots \\ \vec{R}_P^{it,k+1} \\ \vdots \\ \vec{R}_P^{N_T,k+1} \end{bmatrix} \\
 & \hspace{15em} (4.5.6)
 \end{aligned}$$

Απο την εξίσωση 4.5.6 προκύπτουν τα ακόλουθα συμπεράσματα

- Το μητρώο \mathbf{D} συνδέει τις μεταβλητές του διανύσματος $\Delta \vec{U}_P$ για μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή με τις ίδιες μεταβλητές για τις υπόλοιπες χρονικές στιγμές μέσα στην περίοδο.
- Το μητρώο $[diag]_P$ συνδέει τις μεταβλητές του διανύσματος $\Delta \vec{U}_P$ για μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή μεταξύ τους.
- Το μητρώο $[zm]_{Q_i}$ συνδέει τις μεταβλητές του διανύσματος $\Delta \vec{U}_{Q_i}$ για μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή μεταξύ τους.

4.6 ΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ

Οι χωρικές οριακές συνθήκες στα τοιχώματα και στα σύνορα του υπολογίζονται με τον ίδιο τρόπο που παρουσιάστηκε στο υποκεφάλαιο 3.6. Οι αρχικές συνθήκες στον ψευδοχρόνο υπολογίζονται σε κάθε κόμβο is του πλέγματος με βάση τον τύπο

$$\vec{U}^{k=1}(X_{is}, it) = \begin{bmatrix} \varrho_{\infty} \\ \varrho_{\infty} |\vec{V}_{\infty}| \cos(a_{\infty}(it)) \\ \varrho_{\infty} |\vec{V}_{\infty}| \sin(a_{\infty}(it)) \\ \frac{p_{out}}{\gamma-1} + \frac{1}{2} \varrho_{\infty} |\vec{V}_{\infty}|^2 \end{bmatrix}$$

4.7 ΣΧΗΜΑ ΕΠΙΛΥΣΗΣ

Αν διατυπωθεί η 4.5.5 για κάθε κόμβο και για κάθε χρονική στιγμή εσωτερικά της περιόδου τότε θα προκύψει ένα γραμμικό σύστημα της μορφής

$$[\mathbf{B}]\Delta\vec{U} = \vec{C}$$

Οι διαστάσεις του μητρώου \mathbf{B} είναι $(4N_s N_T) \times (4N_s N_T)$ και των διανυσμάτων $\Delta\vec{U}$ και \vec{C} είναι $(4N_s N_T)$, αφού σε κάθε κόμβο αντιστοιχούν 4 μεταβλητές για τη διδι-άστατη περίπτωση, για όλες τις N_T χρονικές στιγμές. Η επίλυση του παραπάνω συστήματος είναι ασύμφορη από πλευράς υπολογιστικού κόστους και επιπρόσθετα ισχύει το γεγονός, ότι το μητρώο είναι εξαιρετικά αραιό, αφού οι τιμές ενός κόμβου συνδέονται με τις τιμές μόνο των γειτονικών κόμβων για μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή. Ακόμη σε κάθε κόμβο, όπως φαίνεται από την εξίσωση 4.5.6, οι μεταβλητές στις διάφορες χρονικές στιγμές συνδέονται μεταξύ τους μόνο μέσω του μητρώου D και οι θέσεις στο μητρώο που περιέχει τα $[zm]_{Q_i}$ είναι μηδενικές για τα μη διαγώνια στοιχεία. Επομένως, παρόμοια με την μέθοδο την χρονοπροέλασης είναι προτιμότερη η επαναληπτική επίλυση του συστήματος μέσω ενός σχήματος Jacobi.

Για το σκοπό αυτόν ξαναγράφεται η εξίσωση 4.5.5

$$\frac{\Delta\vec{U}_P^{it,k+1}}{\Delta t_{ps}} A_\Omega + [diag]_P^{it,k} \Delta\vec{U}_P^{it,k+1} = \vec{R}_P^{it,k+1} - \omega \sum_{jt=1}^{N_T} D_{it,jt} \cdot \Delta\vec{U}_P^{jt,k+1} A_\Omega - \sum_{i=1}^{cs} [zm]_{Q_i}^{it,k} \Delta\vec{U}_{Q_i}^{it,k+1}$$

Στη συνέχεια τίθεται

$$[DIAG]^{it,k} = [diag]_P^{it,k} + \frac{A_\Omega}{\Delta t_{ps}} \mathbf{I}$$

και αντικαθιστώντας στην 4.5.5 προκύπτει

$$\begin{aligned} [DIAG]^{it,k} \Delta\vec{U}_P^{it,k+1} &= \vec{R}_P^{it,k} - \omega \sum_{jt=1}^{N_T} D_{it,jt} \cdot \Delta\vec{U}_P^{jt,k+1} A_\Omega - \sum_{i=1}^{cs} [zm]_{Q_i}^{it,k} \Delta\vec{U}_{Q_i}^{it,k+1} \Leftrightarrow \\ \Delta\vec{U}_P^{it,k+1} &= ([DIAG]^{it,k})^{-1} \left[\vec{R}_P^{it,k+1} - \omega \sum_{jt=1}^{N_T} D_{it,jt} \cdot \Delta\vec{U}_P^{jt,k+1} A_\Omega - \sum_{i=1}^{cs} [zm]_{Q_i}^{it,k} \Delta\vec{U}_{Q_i}^{it,k+1} \right] \end{aligned} \quad (4.7.1)$$

Επίσης, ορίζονται δύο διανύσματα που περιέχουν τις μεταβλητές της ροής σε κάθε κόμβο και για κάθε χρονική στιγμή, τα \vec{U}^{old} και \vec{U}^{new} και ισχύει

$$\vec{U}_P^{it,old} = \vec{U}^k(\vec{X}_P, it) \text{ και } \vec{U}_P^{it,new} = \vec{U}^{k+1}(\vec{X}_P, it)$$

Ακόμη, ορίζονται τα διανύσματα $\Delta\vec{U}^{old}$ και $\Delta\vec{U}^{new}$ για τα οποία ισχύει

$$\Delta\vec{U}_P^{it,old} = \Delta\vec{U}_P^{it,k+1} \text{ και } \Delta\vec{U}_{Q_i}^{it,old} = \Delta\vec{U}_{Q_i}^{it,k+1}$$

και το $\Delta \vec{U}^{new}$ υπολογίζεται χρησιμοποιώντας την 4.7.1

$$\Delta \vec{U}_P^{it,new} = ([DIAG]^{it,k})^{-1} \left[\vec{R}_P^{it,k+1} - \omega \sum_{jt=1}^{N_T} D_{it,jt} \cdot \Delta \vec{U}_P^{jt,old} A_\Omega - \sum_{i=1}^{cs} [zm]_{Q_i}^{it,k} \Delta \vec{U}_{Q_i}^{it,old} \right] \quad (4.7.2)$$

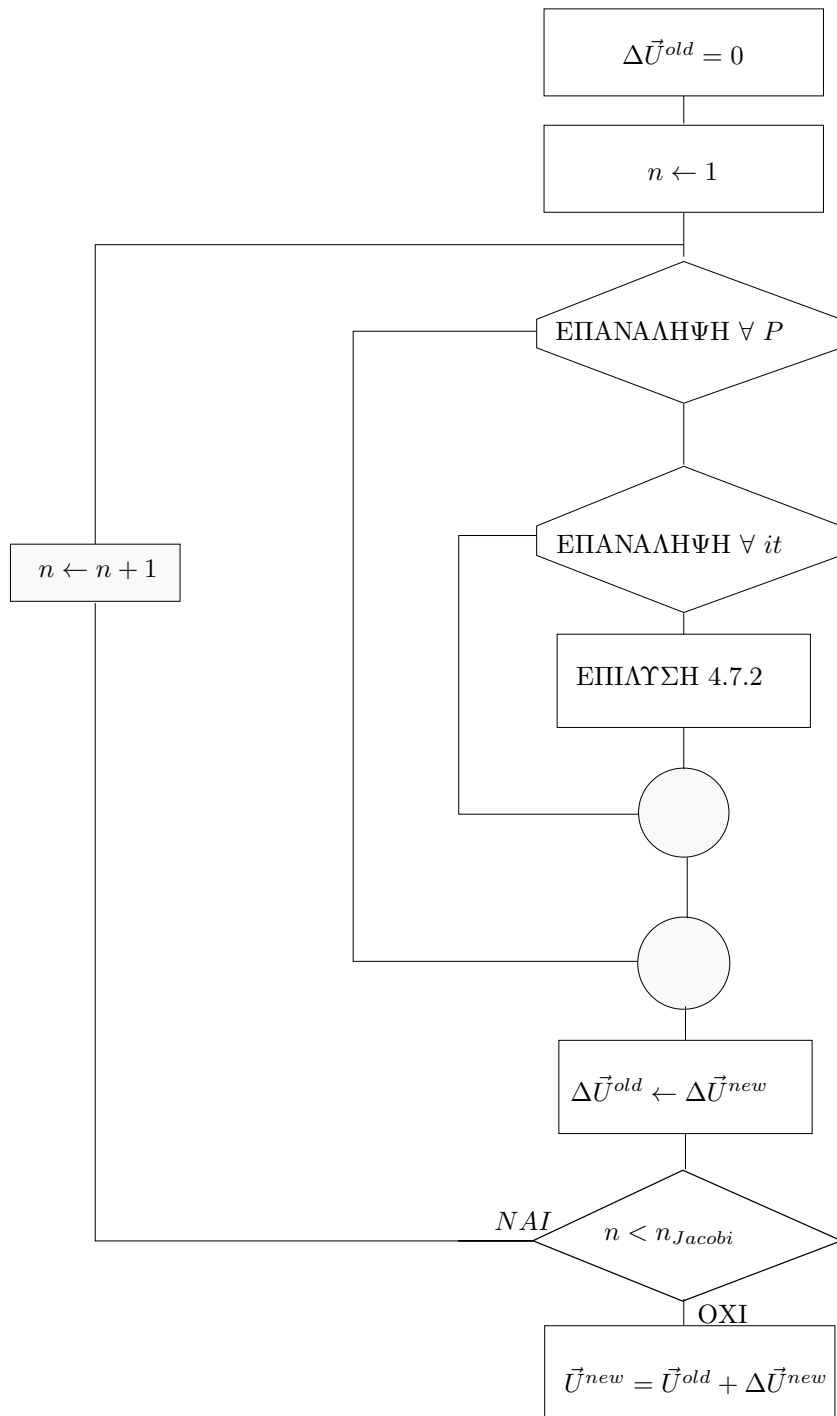
Η 4.7.2 επιλύεται για κάθε κόμβο P , για κάθε χρονική στιγμή it και αφού υπολογιστεί το $\Delta \vec{U}^{new}$ τοποθετούνται οι τιμές του στο $\Delta \vec{U}^{old}$. Έπειτα η διαδικασία επαναλαμβάνεται για προκαθορισμένο αριθμό επαναλήψεων n_{Jacobi} , που ορίζεται από τον χρήστη. Ο επιλύτης Jacobi παρουσιάζεται στο σχήμα 4.2.

4.8 ΔΟΜΗ ΤΟΥ ΚΩΔΙΚΑ ΕΠΙΛΥΣΗΣ

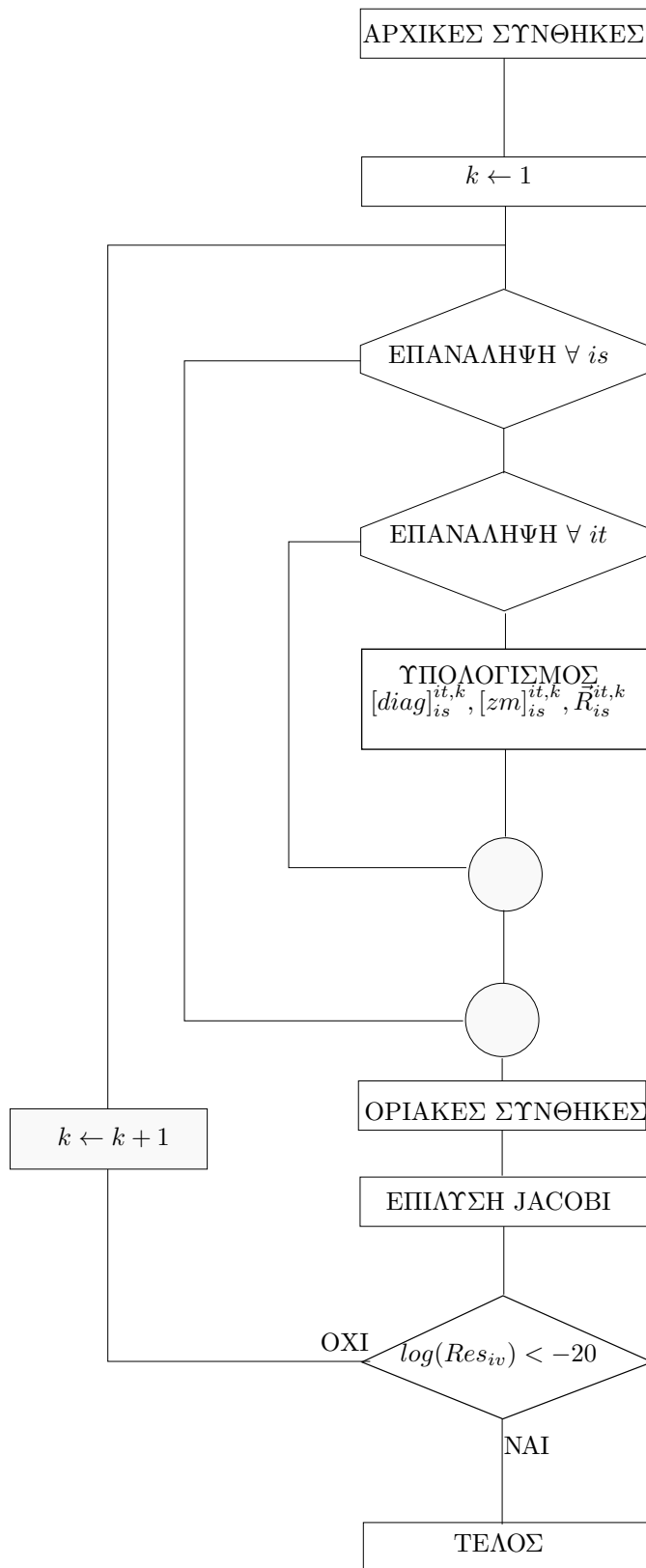
Όπως προαναφέρθηκε, σε κάθε ψευδοχρονική στιγμή k υπολογίζονται τα μητρώα $[diag]_{is}^{it,k}$, $[zm]_{is}^{it,k}$, $\vec{R}_{is}^{it,k}$ όπου is ο αριθμός του κόμβου. Στη συνέχεια διαμορφώνεται το σύστημα 4.7.1 και επιλύεται, προκειμένου να υπολογιστούν οι τιμές την ψευδοχρονική στιγμή $k + 1$. Με βάση τις τιμές του διανύσματος \vec{U}^{new} διαμορφώνεται το διάνυσμα $\vec{R}_{is}^{it,k+1}$. Με βάση το \vec{R} υπολογίζεται η ποσότητα

$$Res_{iv} = \frac{1}{N_T} \sum_{it=1}^{N_T} \sum_{is=1}^{N_s} R_{is}^{iv,it,k+1}$$

όπου iv είναι ο δείκτης που αντιστοιχεί στις μεταβλητές της ροής. Αν η τιμή του R_{iv} είναι μεγαλύτερη ενός ορίου, τότε η διαδικασία επαναλαμβάνεται από την αρχή για να υπολογιστούν τα μεγέθη την ψευδοχρονική στιγμή $k + 1$. Η διαδικασία αναπαρίσταται γραφικά στο σχήμα 4.3.



Σχήμα 4.2: Γραφική αναπαράσταση επίλυσης με σχήμα Jacobi.



Σχήμα 4.3: Γραφική αναπαράσταση αλγόριθμου επίλυσης.

Κεφάλαιο 5

ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΣΕ ΣΤΡΩΤΕΣ ΡΟΕΣ

Σε αυτό το κεφάλαιο γίνεται σύγκριση των αποτελεσμάτων μεταξύ της μεθόδου της ισορροπίας των αρμονικών και της μεθόδου χρονοπροέλασης. Η εξαγωγή των αποτελεσμάτων γίνεται από τον υπολογισμό του πεδίου ροής περιμετρικά μιας μεμονωμένης αεροτομής τύπου $NACA0012$, με γωνία προσβολής περιοδικά μεταβαλλόμενης με τον χρόνο και σταθερό αριθμό $Mach = 0.5$. Εξετάστηκαν συνολικά τέσσερις περιπτώσεις, στη πρώτη περίπτωση χρησιμοποιήθηκε ημιτονοειδής συνάρτηση διέγερσης με ανηγμένη συχνότητα $f_r = 0.1$, στη δεύτερη περίπτωση χρησιμοποιήθηκε η ίδια συνάρτηση αλλά η ανηγμένη συχνότητα αυξήθηκε σε $f_r = 0.5$ προκειμένου να ελεγχθεί με ποιον τρόπο η αύξηση της συχνότητας επηρεάζει την ταύτιση των αποτελεσμάτων. Στην τρίτη και στην τέταρτη περίπτωση χρησιμοποιήθηκαν πιο σύνθετες συναρτήσεις διέγερσης που απαιτούνται περισσότερες από μία αρμονικές για την αναδόμηση τους. Οι δύο τελευταίες συναρτήσεις είναι παρόμοιες με αυτές που χρησιμοποιούνται και στη διπλωματική του Καννέλη. Για τη σύγκριση επιλέγονται δύο χαρακτηριστικά μεγέθη της αεροτομής, ο συντελεστής άνωσης C_L και οπισθέλκουσας C_D . Ακόμη, όπως προαναφέρθηκε οι εξισώσεις επιλύονται στην αδιάστατη μορφή τους και ως μεγέθη αδιαστατοποίησης επιλέγονται η ταχύτητα του ελεύθερου ρεύματος V_∞ και η χορδή της αεροτομής C . Με βάση αυτά τα μεγέθη η ανηγμένη συχνότητα δίνεται από τον τύπο

$$f_r = \frac{\omega C}{2V_\infty}$$

. Η περίοδος αδιαστατοποιείται με την ποσότητα $t_{ref} = \frac{C}{V_\infty}$ και γράφεται

$$\bar{T} = \frac{T}{t_{ref}} = C \frac{T}{V_\infty}$$

Επομένως, η ανηγμένη συχνότητα εκφράζεται με βάση την αδιαστατοποιημένη περίοδο

$$f_r = \frac{\pi}{\bar{T}}$$

Ισχύει ακόμη η παρακάτω σχέση που είναι απαραίτητη στους τύπους που θα ακολουθήσουν

$$\omega t = \bar{\omega} \bar{t} = \frac{2\pi}{T} \bar{t} = 2f_r \bar{t}$$

Απο αυτό το σημείο και έπειτα τα αδιάστατα μεγέθη θα συμβολίζονται δίχως την άνω παύλα. Παρακάτω παρουσιάζονται οι συναρτήσεις που περιγράφουν την χρονική μεταβολή της γωνίας (σε μοίρες) και τα δεδομένα που χρησιμοποιούνται σε κάθε περίπτωση.

- Περίπτωση 1

$$a(t) = a_o + amp \cdot \sin(2f_r t)$$

$$a_o = 0, f_r = 0.1, amp = 3$$

- Περίπτωση 2

$$a(t) = a_o + amp \cdot \sin(2f_r t)$$

$$a_o = 0, f_r = 0.5, amp = 3$$

- Περίπτωση 3

$$a(\hat{t}) = a_o + B_4 \hat{t}^4 + B_3 \hat{t}^3 + B_2 \hat{t}^2 + B_1 \hat{t}$$

με το σύμβολο \hat{t} συμβολίζεται ο χρόνος ανηγμένος ως προς την περίοδο $\hat{t} = \frac{t}{T}$ και προφανώς οι τιμές του κυμαίνονται στο διάστημα $0 \leq \hat{t} \leq 1$. Ακόμη, προκειμένου να ισχύει $a(0) = a(1)$ και $a'(0) = a'(1)$ πρέπει οι συντελεστές να πληρούν τις ισότητες

$$B_3 = 2B_1 - 2B_4$$

$$B_2 = B_4 - 3B_1$$

Οι τιμές των συντελεστών B_1 και B_4 προκύπτουν από τις σχέσεις

$$B_1 = \beta_1 \cdot T$$

$$B_4 = \beta_4 \cdot T^4$$

Επομένως, τα απαραίτητα δεδομένα για αυτήν την περίπτωση είναι

$$a_o = 0, f_r = 0.1, \beta_4 = 3 \cdot 10^{-5}, \beta_1 = 3 \cdot 10^{-1}$$

- Περίπτωση 4

$$a(\hat{t}) = a_o + (B_4 \hat{t}^4 + B_3 \hat{t}^3 + B_2 \hat{t}^2 + B_1 \hat{t})C$$

όπου

$$C = \frac{(e^{\hat{t}} \cos(2\pi \hat{t}) + e^{(1-\hat{t})} \cos(2\pi \hat{t}))}{6}$$

$$a_o = 0 \text{ και } f_r = 0.1$$

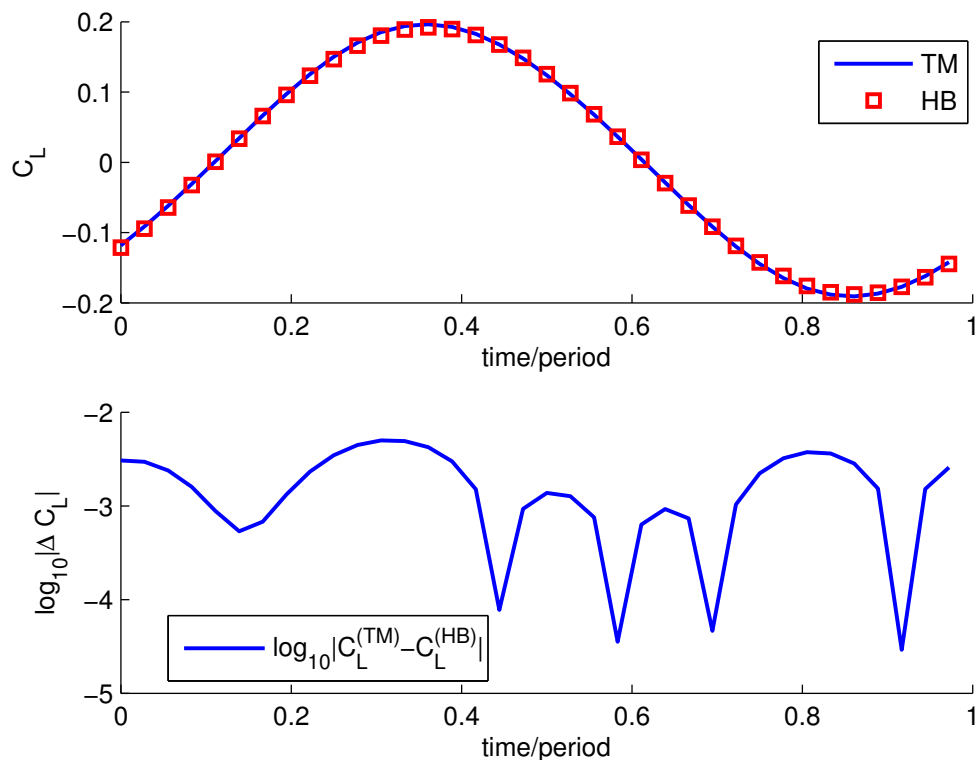
Σε αυτήν την περίπτωση χρησιμοποιείται το ίδιο πολυώνυμο με την προηγούμενη με τη διαφορά του συντελεστή C που περιπλέκει τη συνάρτηση διέγερσης. Ακόμη επειδή $C = 1$ για $\hat{t} = 0$ ή $\hat{t} = 1$ πληρούνται ακριβώς οι ίδιες ιδιότητες με την προηγούμενη συνάρτηση. Τα δεδομένα παραμένουν επίσης αυτούσια με την περίπτωση 3.

Τέλος, η ροή σε κάθε περίπτωση θεωρείται στρωτή με αριθμό $Re = 1000$.

5.1 ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 1

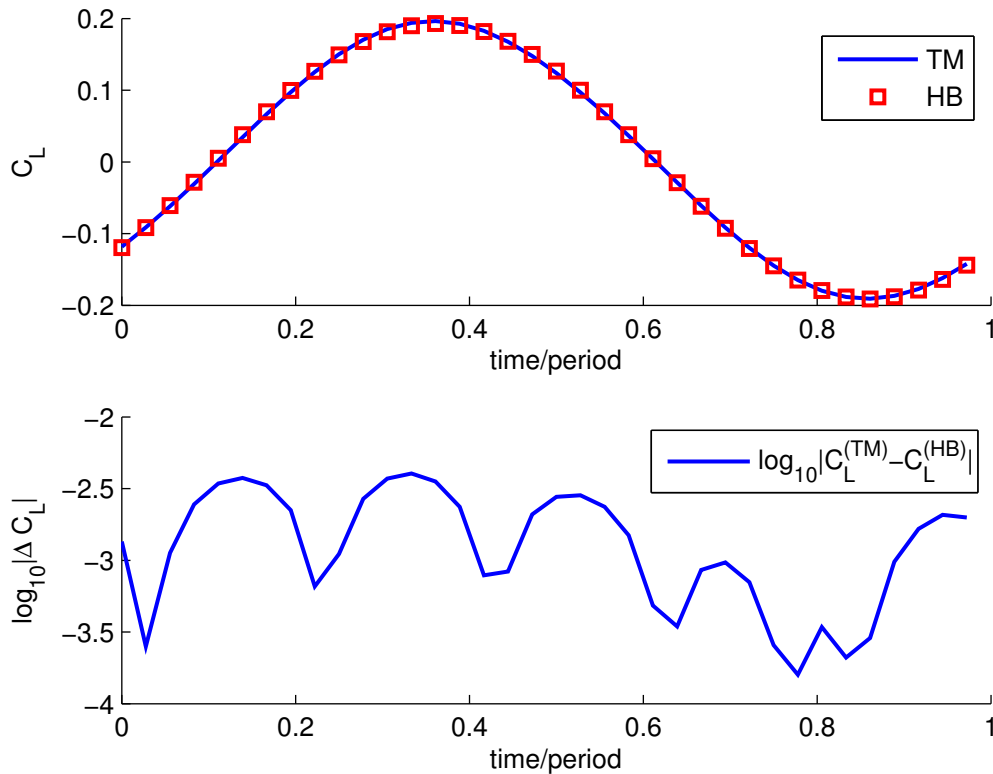
5.1.1 ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΑΝΩΣΗΣ

Σε αυτήν την υποενότητα συγκρίνονται οι τιμές των συντελεστών άνωσης, που προέκυψαν από την εφαρμογή της κάθε μεθόδου για ημιτονοειδή μεταβολή της γωνίας πρόσπτωσης με συχνότητα 0.1.



Σχήμα 5.1: Άνω σχήμα: Συντελεστής άνωσης C_L υπολογισμένος με την μέθοδο της χρονοπροέλασης με χρονική διακριτοποίηση 360 σημείων ανά περίοδο και με την μέθοδο της ισορροπίας των αρμονικών με μία αρμονική, εφόσον έγινε αναδόμηση του συντελεστή με την χρήση τριγωνομετρικής σειράς Fourier $N_T = 3$ συντελεστών. Συνάρτηση διέγερσης $a(t) = 3^\circ \sin(2f_r t)$ με $f_r = 0.1$.

Κάτω σχήμα: Δεκαδικός λογάριθμος της απολύτου διαφοράς μεταξύ των τιμών του συντελεστή άνωσης, που υπολογίστηκαν από τις δύο μεθόδους.

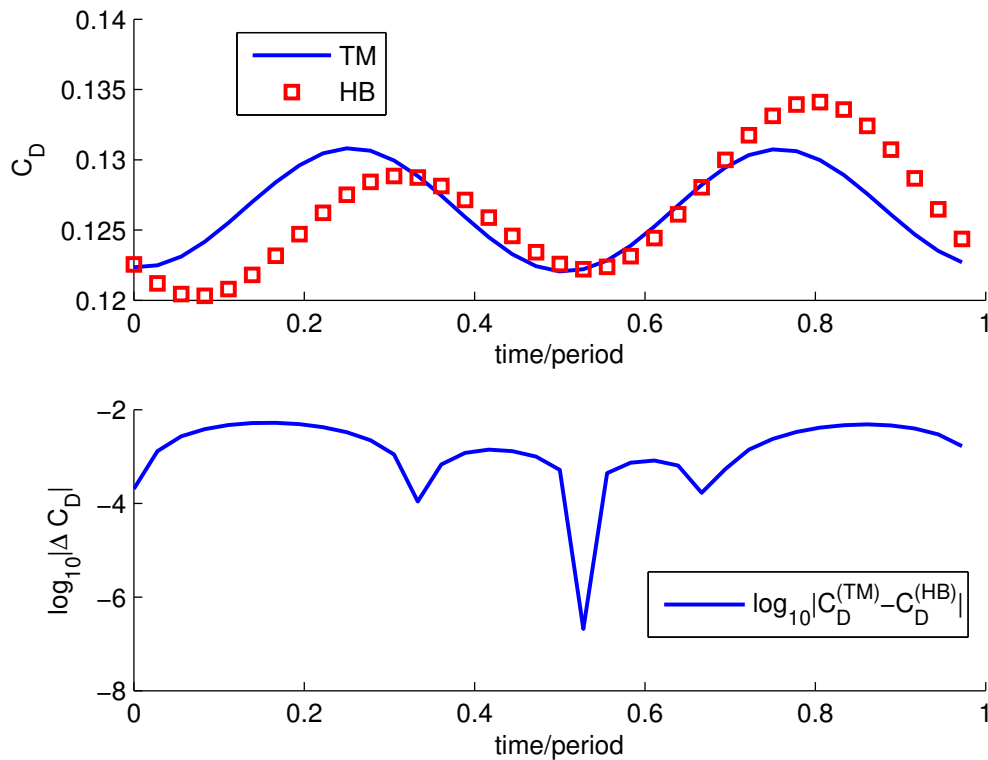


Σχήμα 5.2: Άνω σχήμα: Συντελεστής άνωσης C_L υπολογισμένος με την μέθοδο της χρονοπροέλασης με χρονική διακριτοποίηση 360 σημείων ανά περίοδο και με την μέθοδο της ισορροπίας των αρμονικών με $N_H = 2$ αρμονικές, εφόσον έγινε αναδόμηση του συντελεστή με την χρήση τριγωνομετρικής σειράς Fourier $N_T = 5$ συντελεστών. Συνάρτηση διέγερσης $a(t) = 3^\circ \sin(2f_r t)$ με $f_r = 0.1$. Κάτω σχήμα: Δεκαδικός λογάριθμος της απολύτου διαφοράς μεταξύ των τιμών του συντελεστή άνωσης, που υπολογίστηκαν από τις δύο μέθοδους.

Στο σχήμα 5.1 φαίνεται ότι ακόμα και με μια αρμονική, η προσέγγιση του συντελεστή άνωσης είναι πολύ ικανοποιητική με προσέγγιση στο δεύτερο δεκαδικό ψηφίο, που είναι και αναμενόμενο λόγω της απλότητας της κυματομορφής του C_L . Στο σχήμα 5.2 η ακρίβεια αυξάνεται ακόμη περισσότερο αλλά είναι εμφανής μόνο από τη γραφική παράσταση των δεκαδικών λογαρίθμων των διαφορών.

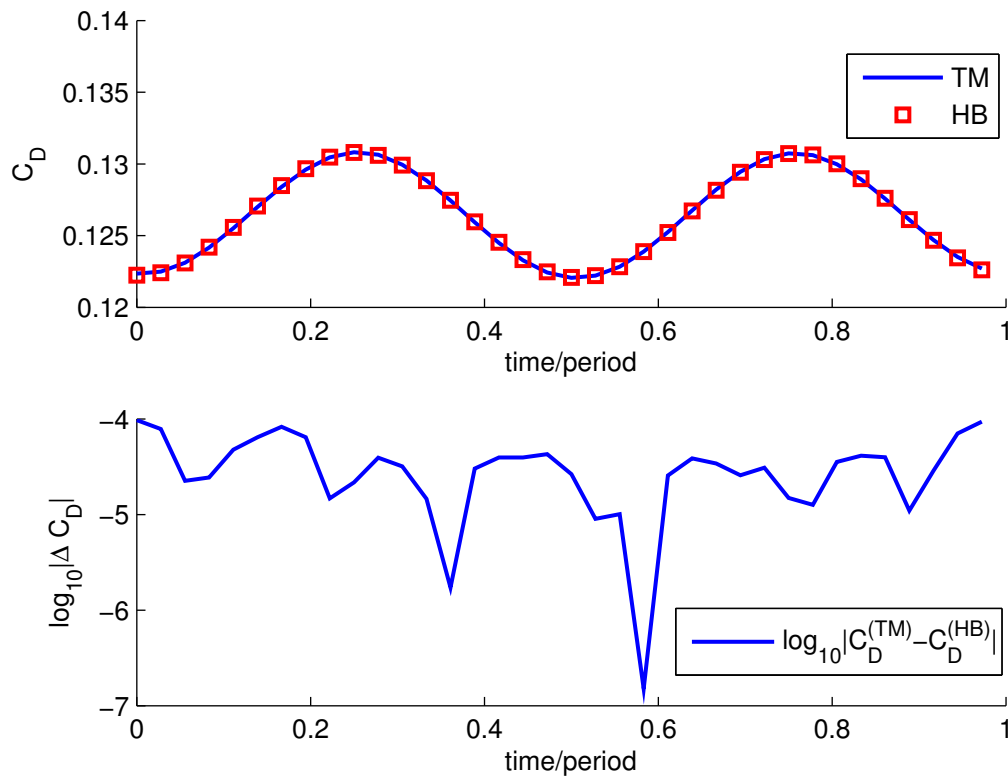
5.1.2 ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΟΠΙΣΘΕΛΚΟΥΣΑΣ

Στη συνέχεια, θα συγκριθούν οι τιμές των συντελεστών της οπισθέλκουσας παρόμοια με την προηγούμενη υποενότητα για την ίδια συνάρτηση διέγερσης.



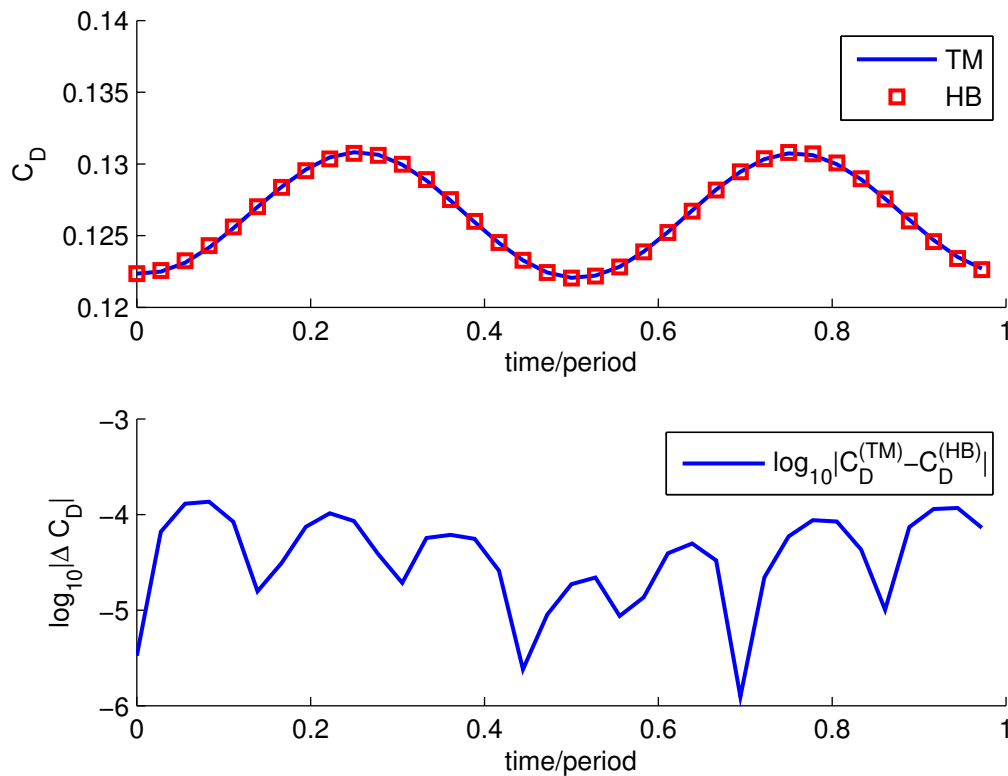
Σχήμα 5.3: Άνω σχήμα: Συντελεστής οπισθέλκουσας C_D υπολογισμένος με την μέθοδο της χρονοπροέλασης με χρονική διακριτοποίηση 360 σημείων ανά περίοδο και με την μέθοδο της ισορροπίας των αρμονικών με μία αρμονική, εφόσον έγινε αναδόμηση του συντελεστή με την χρήση τριγωνομετρικής σειράς Fourier $N_T = 3$ συντελεστών. Συνάρτηση διέγερσης $a(t) = 3^\circ \sin(2f_r t)$ με $f_r = 0.1$. Κάτω σχήμα: Δεκαδικός λογάριθμος της απολύτου διαφοράς μεταξύ των τιμών του συντελεστή οπισθέλκουσας, που υπολογίστηκαν από τις δύο μεθόδους.

Για το συντελεστή οπισθέλκουσας με την χρήση μιας αρμονικής (σχήμα 5.3), η ακρίβεια των αποτελεσμάτων δεν είναι καθόλου ικανοποιητική. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι η καμπύλη του συντελεστή οπισθέλκουσας είναι συνθετότερη σε αντίθεση με την απλούστερη ημιτονοειδή μορφή του συντελεστή άνωσης.



Σχήμα 5.4: Άνω σχήμα: Συντελεστής οπισθέλκουσας C_D υπολογισμένος με την μέθοδο της χρονοπροέλασης με χρονική διακριτοποίηση 360 σημείων ανά περίοδο και με την μέθοδο της ισορροπίας των αρμονικών με $N_H = 2$ αρμονικές, εφόσον έγινε αναδόμηση του συντελεστή με την χρήση τριγωνομετρικής σειράς Fourier $N_T = 5$ συντελεστών. Συνάρτηση διέγερσης $a(t) = 3^\circ \sin(2f_r t)$ με $f_r = 0.1$. Κάτω σχήμα: Δεκαδικός λογάριθμος της απολύτου διαφοράς μεταξύ των τιμών του συντελεστή οπισθέλκουσας, που υπολογίστηκαν από τις δύο μεθόδους.

Με την χρήση δυο αρμονικών (σχήμα 5.4), η τριγωνομετρική σειρά προσεγγίζει την καμπύλη του συντελεστή με πολύ ικανοποιητική ακρίβεια. Ο συντελεστής C_D είναι και η πρώτη ένδειξη ότι ακόμα και με την απλή ημιτονοειδή διέγερση εμφανίζονται φαινόμενα που περιγράφονται με περισσότερες απο μία συχνότητες.



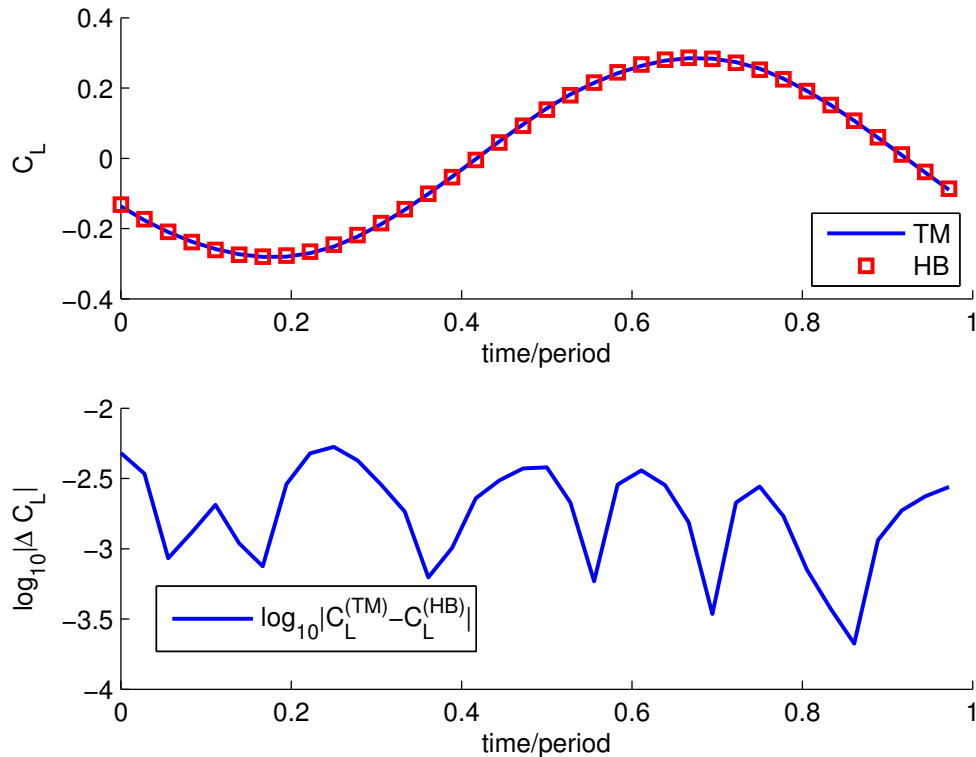
Σχήμα 5.5: Άνω σχήμα: Συντελεστής οπισθέλκουσας C_D υπολογισμένος με την μέθοδο της χρονοπροέλασης με χρονική διακριτοποίηση 360 σημείων ανά περίοδο και με την μέθοδο της ισορροπίας των αρμονικών με $N_H = 3$ αρμονικές, εφόσον έγινε αναδόμηση του συντελεστή με την χρήση τριγωνομετρικής σειράς Fourier $N_T = 7$ συντελεστών. Συνάρτηση διέγερσης $a(t) = 3^\circ \sin(2f_r t)$ με $f_r = 0.1$. Κάτω σχήμα: Δεκαδικός λογάριθμος της απολύτου διαφοράς μεταξύ των τιμών του συντελεστή οπισθέλκουσας, που υπολογίστηκαν από τις δύο μεθόδους.

Με την χρήση τριών αρμονικών (σχήμα 5.5), δεν υπάρχει βελτίωση της ακρίβειας. Ωστόσο, πρέπει να σημειωθεί ότι το φαινόμενο έχει ήδη προσεγγιστεί με υψηλή ακρίβεια με την χρήση δύο αρμονικών.

5.2 ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 2

Σε αυτήν την ενότητα εξετάζεται η ακρίβεια των αποτελεσμάτων της μεθόδου ισορροπίας των αρμονικών για πενταπλάσια συχνότητα.

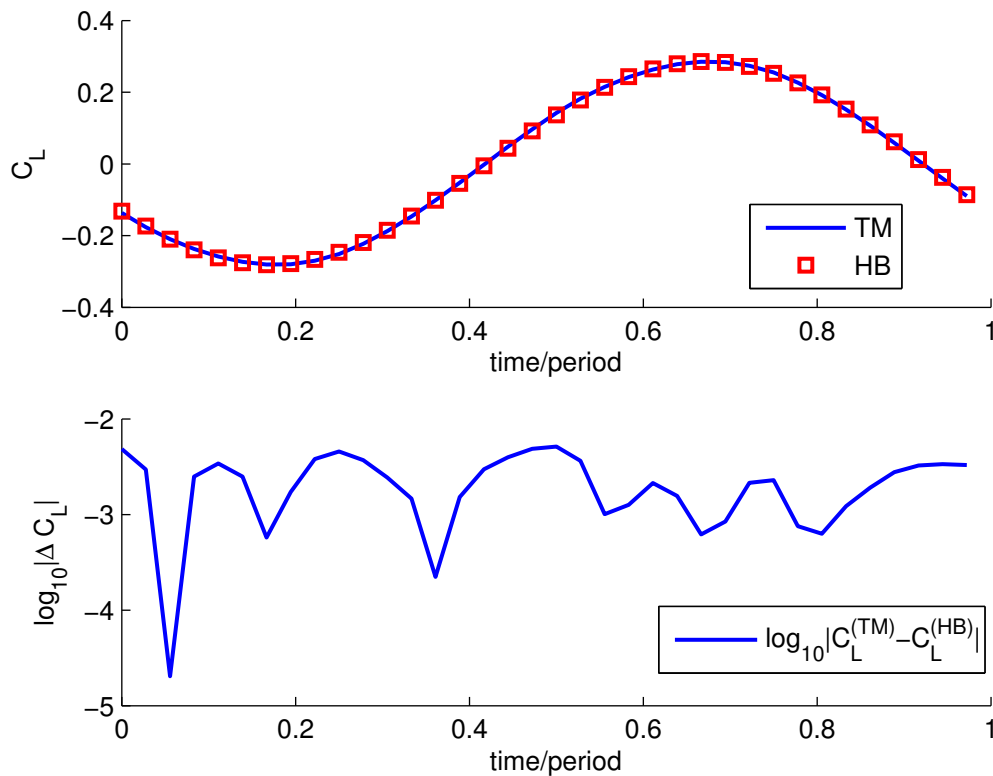
5.2.1 ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΑΝΩΣΗΣ



Σχήμα 5.6: Άνω σχήμα: Συντελεστής άνωσης C_L υπολογισμένος με την μέθοδο της χρονοπροέλασης με χρονική διακριτοποίηση 360 σημείων ανά περίοδο και με την μέθοδο της ισορροπίας των αρμονικών με μία αρμονική, εφόσον έγινε αναδόμηση του συντελεστή με την χρήση τριγωνομετρικής σειράς Fourier $N_T = 3$ συντελεστών. Συνάρτηση διέγερσης $a(t) = 3^\circ \sin(2f_r t)$ με $f_r = 0.5$.

Κάτω σχήμα: Δεκαδικός λογάριθμος της απολύτου διαφοράς μεταξύ των τιμών του συντελεστή άνωσης, που υπολογίστηκαν από τις δύο μεθόδους.

Η αυξημένη συχνότητα δεν επηρεάζει την απλή ημιτονοειδή μορφή του συντελεστή άνωσης (σχήμα 5.6) και είναι επόμενο μια αρμονική να επαρκεί για την προσέγγισή του.

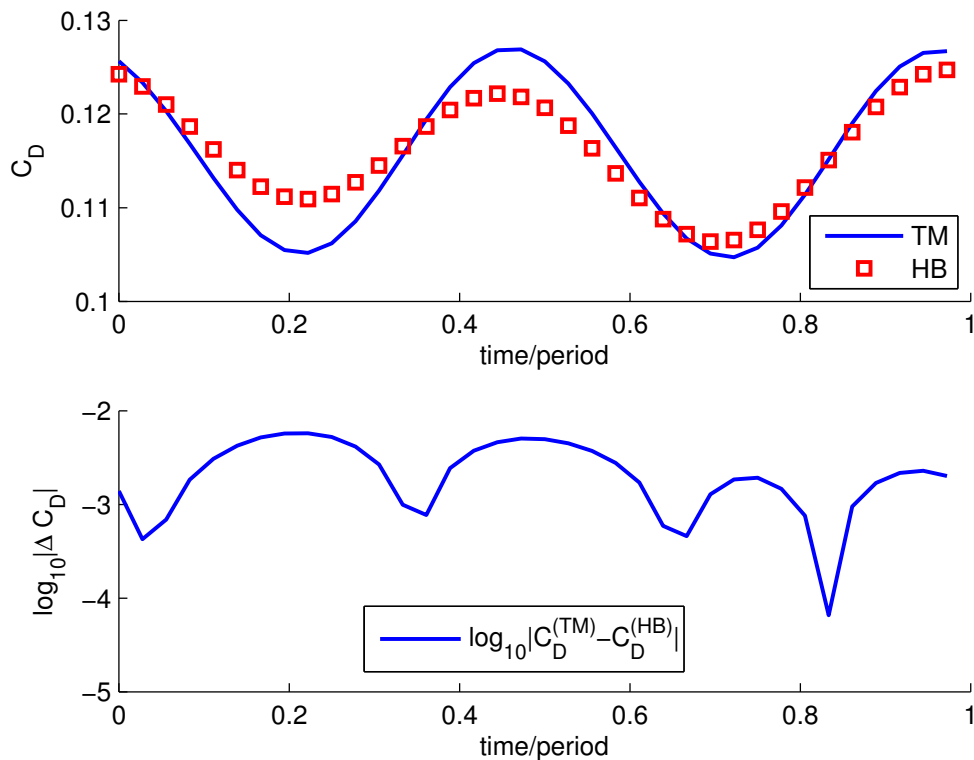


Σχήμα 5.7: Άνω σχήμα: Συντελεστής άνωσης C_L υπολογισμένος με την μέθοδο της χρονοπροέλασης με χρονική διακριτοποίηση 360 σημείων ανά περίοδο και με την μέθοδο της ισορροπίας των αρμονικών με $N_H = 2$ αρμονικές, εφόσον έγινε αναδόμηση του συντελεστή με την χρήση τριγωνομετρικής σειράς Fourier $N_T = 5$ συντελεστών. Συνάρτηση διέγερσης $a(t) = 3^{\circ} \sin(2f_r t)$ με $f_r = 0.5$.

Κάτω σχήμα: Δεκαδικός λογάριθμος της απολύτου διαφοράς μεταξύ των τιμών του συντελεστή άνωσης, που υπολογίστηκαν από τις δύο μεθόδους.

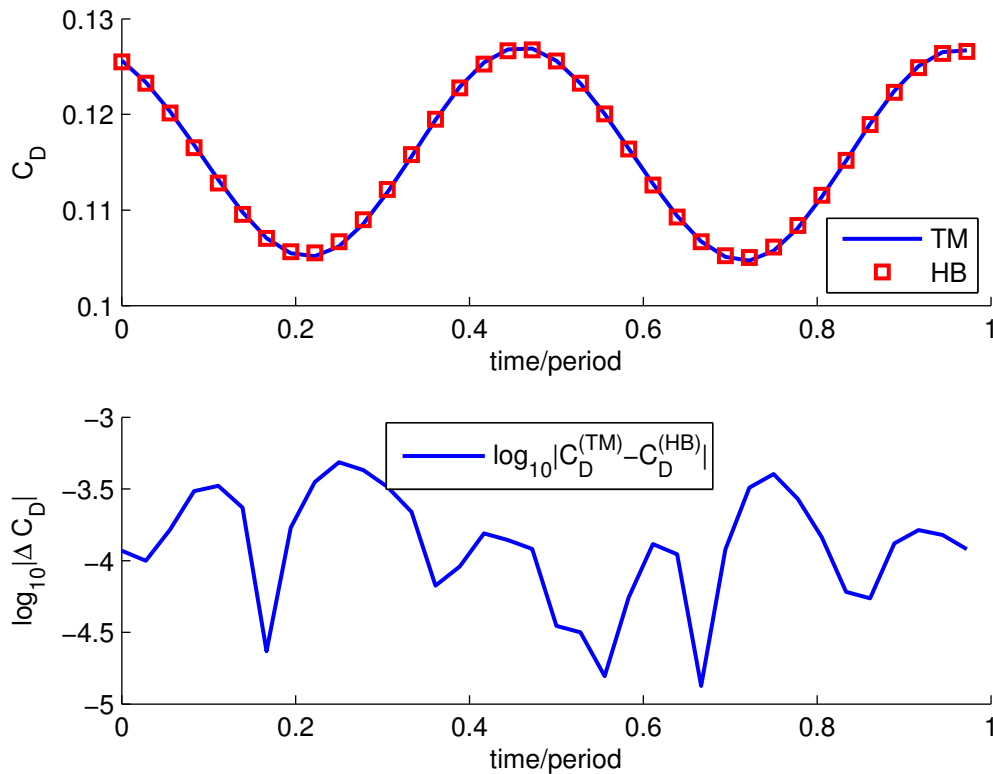
Με την χρήση δύο αρμονικών (σχήμα 5.7) η ακρίβεια γενικώς δε βελτιώνεται. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι η καμπύλη περιγράφεται επαρκώς από ένα ημίτονο και δεν υπάρχει λόγος να βελτιωθεί η σύγκλιση με περισσότερες αρμονικές.

5.2.2 ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΟΠΙΣΘΕΛΚΟΥΣΑΣ



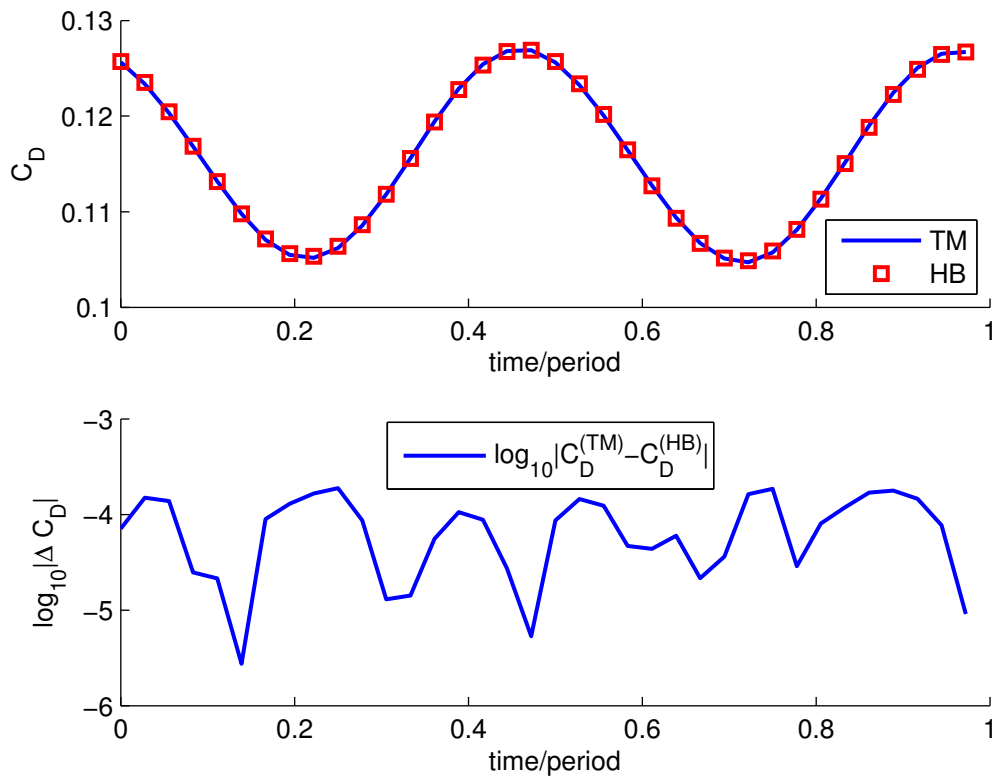
Σχήμα 5.8: Άνω σχήμα: Συντελεστής οπισθέλκουσας C_D υπολογισμένος με την μέθοδο της χρονοπροέλασης με χρονική διακριτοποίηση 360 σημείων ανά περίοδο και με την μέθοδο της ισορροπίας των αρμονικών με μία αρμονική, εφόσον έγινε αναδόμηση του συντελεστή με την χρήση τριγωνομετρικής σειράς Fourier $N_T = 3$ συντελεστών. Συνάρτηση διέγερσης $a(t) = 3^\circ \sin(2f_r t)$ με $f_r = 0.5$. Κάτω σχήμα: Δεκαδικός λογάριθμος της απολύτου διαφοράς μεταξύ των τιμών του συντελεστή οπισθέλκουσας, που υπολογίστηκαν από τις δύο μεθόδους.

Όπως και στην προηγούμενη υποενότητα, ο συντελεστής οπισθέλκουσας δεν προσεγγίζεται ικανοποιητικά με μία αρμονική.



Σχήμα 5.9: Άνω σχήμα: Συντελεστής οπισθέλκουσας C_D υπολογισμένος με την μέθοδο της χρονοπροέλασης με χρονική διακριτοποίηση 360 σημείων ανά περίοδο και με την μέθοδο της ισορροπίας των αρμονικών με $N_H = 2$ αρμονικές, εφόσον έγινε αναδόμηση του συντελεστή με την χρήση τριγωνομετρικής σειράς Fourier $N_T = 5$ συντελεστών. Συνάρτηση διέγερσης $a(t) = 3^\circ \sin(2f_r t)$ με $f_r = 0.5$.

Κάτω σχήμα: Δεκαδικός λογάριθμος της απολύτου διαφοράς μεταξύ των τιμών του συντελεστή οπισθέλκουσας, που υπολογίστηκαν από τις δύο μεθόδους.

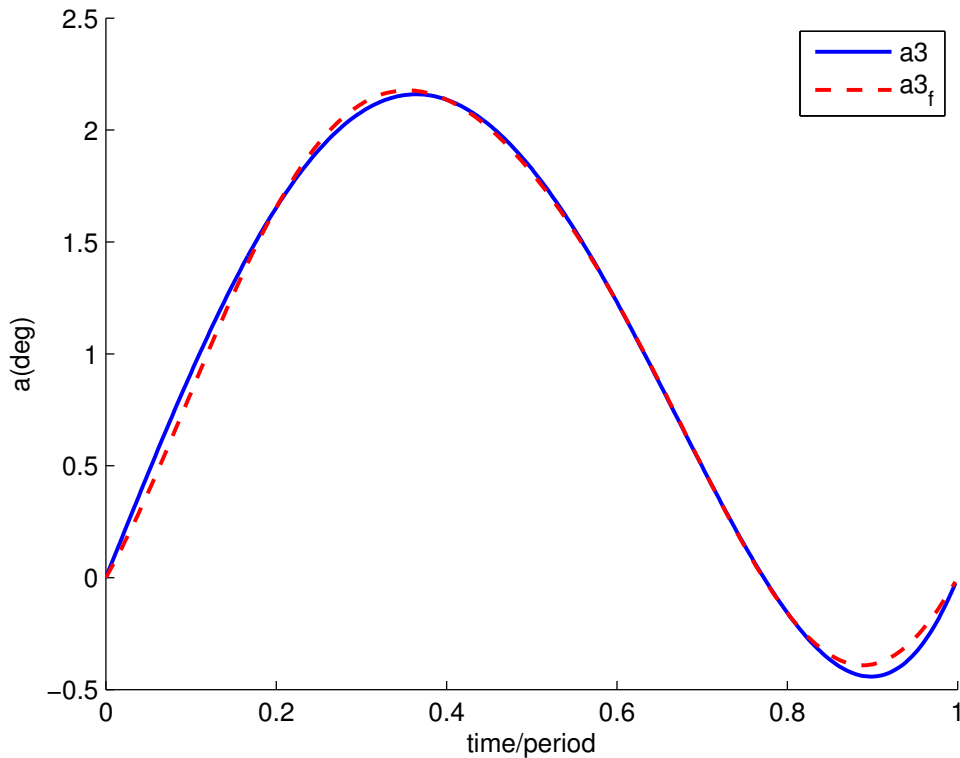


Σχήμα 5.10: Άνω σχήμα: Συντελεστής οπισθέλκουσας C_D υπολογισμένος με την μέθοδο της χρονοπροέλασης με χρονική διακριτοποίηση 360 σημείων ανά περίοδο και με την μέθοδο της ισορροπίας των αρμονικών με $N_H = 3$ αρμονικές, εφόσον έγινε αναδόμηση του συντελεστή με την χρήση τριγωνομετρικής σειράς Fourier $N_T = 7$ συντελεστών. Συνάρτηση διέγερσης $a(t) = 3^\circ \sin(2f_r t)$ με $f_r = 0.5$. Κάτω σχήμα: Δεκαδικός λογάριθμος της απολύτου διαφοράς μεταξύ των τιμών του συντελεστή οπισθέλκουσας, που υπολογίστηκαν από τις δύο μεθόδους.

Στο σχήμα 5.10 η ακρίβεια βελτιώνεται κατά μισή τάξη μεγέθους σε σχέση με την ακρίβεια του σχήματος 5.9, αυτή η διαφορά είναι εμφανής μόνο από τις λογαριθμικές διαφορές. Επομένως, εξάγεται το συμπέρασμα ότι η αύξηση του αριθμού των αρμονικών περισσότερο από το αναγκαίο δε συμβάλλει πρακτικά στην αύξηση της ακρίβειας.

5.3 ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 3

5.3.1 ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΓΩΝΙΑΣ ΕΙΣΟΔΟΥ



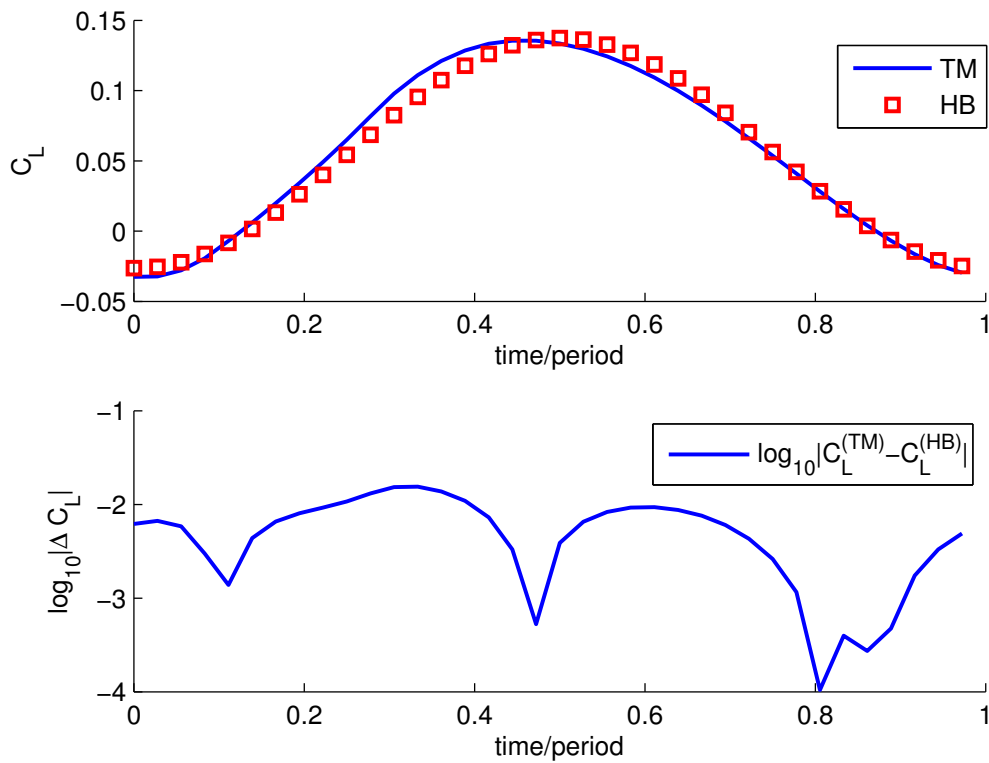
Σχήμα 5.11: Γραφική παράσταση της συνάρτησης γωνίας εισόδου για την περίπτωση 3. Με τη διακεκομμένη γραμμή φαίνονται οι τιμές της προσεγγιστικής συνάρτησης που δομήθηκε με την χρήση σειράς Fourier $N_H = 2$ αρμονικών. Συνάρτηση διέγερσης: $a(\hat{t})^\circ = (29.223\hat{t}^4 - 39.596\hat{t}^3 + 0.948\hat{t}^2 + 9.425\hat{t})C$.

$C = 1$ και $f_r = 0.1$

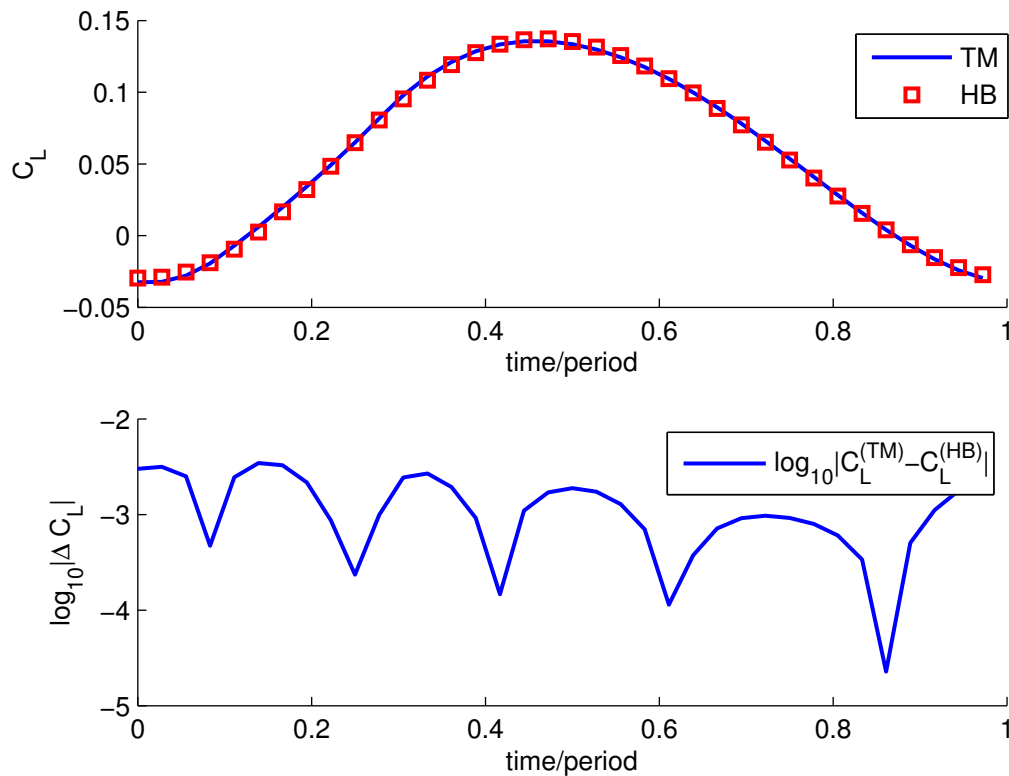
$\hat{t} = \frac{t}{T}$ ο χρόνος ανηγμένος ως προς την περίοδο

Στο σχήμα 5.11 φαίνεται η γραφική παράσταση (συνεχής γραμμή) της γωνίας πρόσπτωσης της αεροτομής για την περίπτωση 3. Με τη διακεκομμένη γραμμή φαίνεται η γραφική παράσταση της ίδια γωνίας, αφού προσεγγίστηκε με την χρήση δύο αρμονικών. Επομένως, η συνάρτηση χρονικής διέγερσης είναι κατά μία αρμονική συνθετότερη σε σύγκριση με τις απλές ημιτονοειδείς συναρτήσεις του προηγούμενου κεφαλαίου.

5.3.2 ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΑΝΩΣΗΣ



Σχήμα 5.12: Άνω σχήμα: Συντελεστής άνωσης C_L υπολογισμένος με την μέθοδο της χρονοπροέλασης με χρονική διακριτοποίηση 360 σημείων ανά περίοδο και με την μέθοδο της ισορροπίας των αρμονικών με μία αρμονική, εφόσον έγινε αναδόμηση του συντελεστή με την χρήση τριγωνομετρικής σειράς Fourier $N_T = 3$ συντελεστών. Συνάρτηση διέγερσης: $a(t)^o = (29.223\hat{t}^4 - 39.596\hat{t}^3 + 0.948\hat{t}^2 + 9.425\hat{t})C$. $C = 1$ και $f_r = 0.1$
 $\hat{t} = \frac{t}{T}$ ο χρόνος ανηγμένος ως προς την περίοδο
 Κάτω σχήμα: Δεκαδικός λογάριθμος της απολύτου διαφοράς μεταξύ των τιμών του συντελεστή άνωσης, που υπολογίστηκαν από τις δύο μεθόδους.



Σχήμα 5.13: Άνω σχήμα: Συντελεστής άνωσης C_L υπολογισμένος με την μέθοδο της χρονοπροέλασης με χρονική διακριτοποίηση 360 σημείων ανά περίοδο και με την μέθοδο της ισορροπίας των αρμονικών με $N_H = 2$ αρμονικές, εφόσον έγινε αναδόμηση του συντελεστή με την χρήση τριγωνομετρικής σειράς Fourier $N_T = 5$ συντελεστών. Συνάρτηση διέγερσης: $a(t)^o = (29.223t^4 - 39.596t^3 + 0.948t^2 + 9.425t)C$.

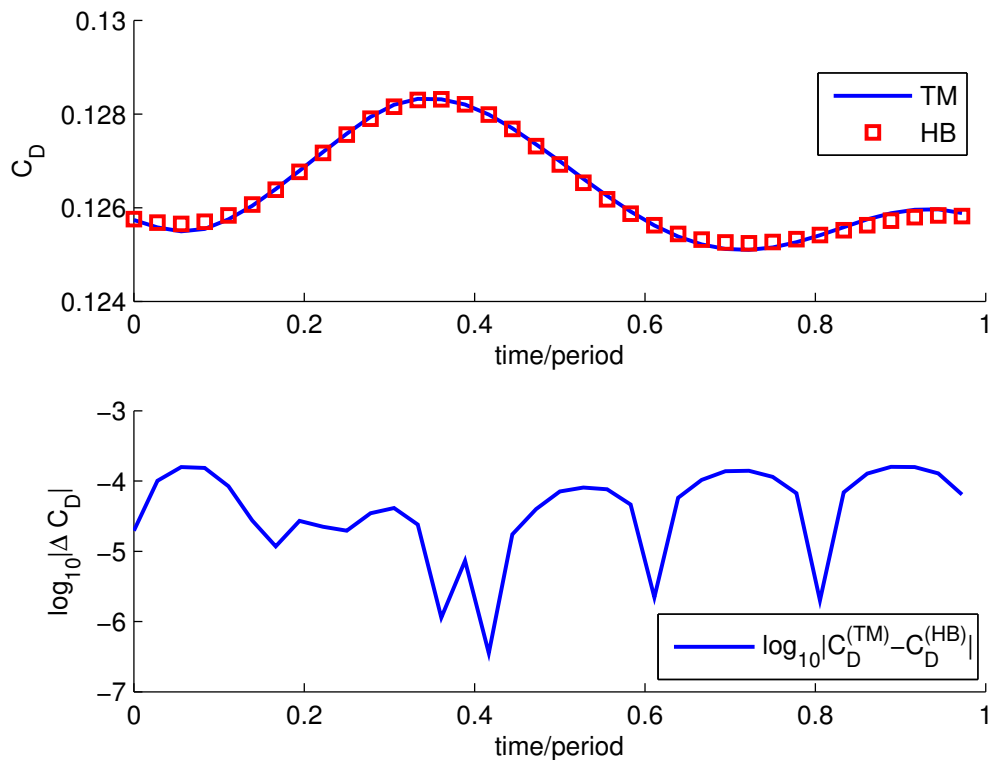
$C = 1$ και $f_r = 0.1$

$\hat{t} = \frac{t}{T}$ ο χρόνος ανηγμένος ως προς την περίοδο

Κάτω σχήμα: Δεκαδικός λογάριθμος της απολύτου διαφοράς μεταξύ των τιμών του συντελεστή άνωσης, που υπολογίστηκαν από τις δύο μεθόδους.

Από το σχήμα 5.12 είναι εμφανές ότι μία αρμονική δεν επαρκεί για την προσέγγιση του συντελεστή άνωσης. Στο σχήμα 5.13 φαίνεται ότι οι δυο αρμονικές συγκλίνουν με ικανοποιητική ακρίβεια.

5.3.3 ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΟΠΙΣΘΕΛΚΟΥΣΑΣ



Σχήμα 5.14: Άνω σχήμα: Συντελεστής οπισθέλκουσας C_D υπολογισμένος με την μέθοδο της χρονοπροέλασης με χρονική διακριτοποίηση 360 σημείων ανά περίοδο και με την μέθοδο της ισορροπίας των αρμονικών με δυο αρμονικές, εφόσον έγινε αναδόμηση του συντελεστή με την χρήση τριγωνομετρικής σειράς Fourier $N_T = 5$ συντελεστών.

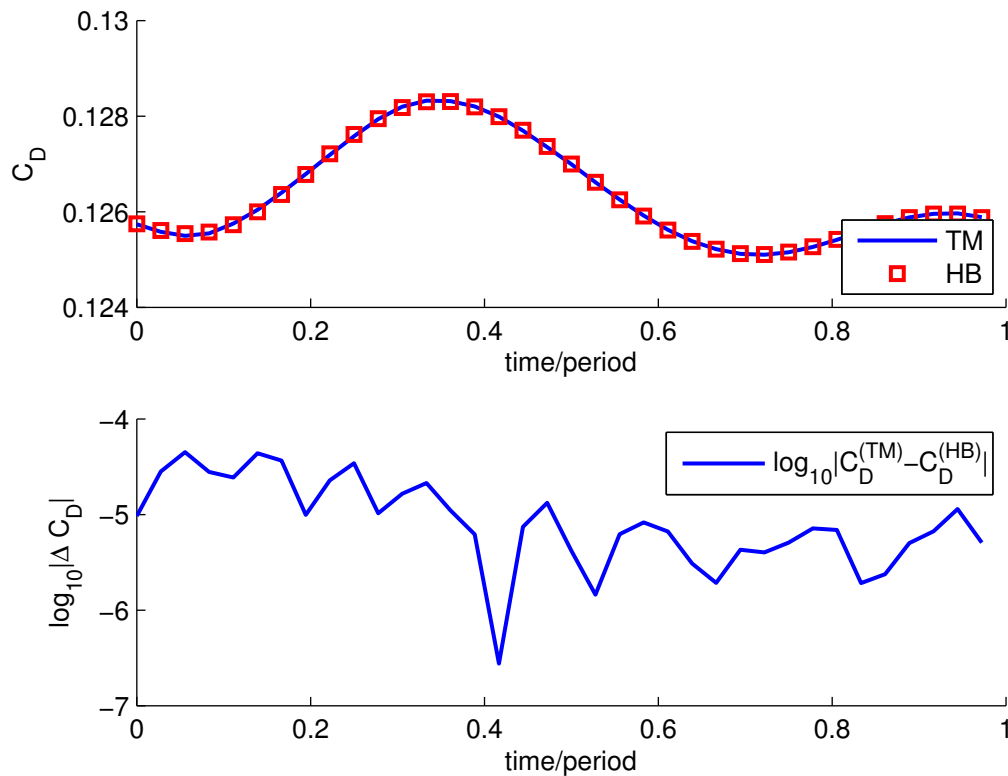
Συνάρτηση διέγερσης: $a(\hat{t})^o = (29.223\hat{t}^4 - 39.596\hat{t}^3 + 0.948\hat{t}^2 + 9.425\hat{t})C$.

$C = 1$ και $f_r = 0.1$

$\hat{t} = \frac{t}{T}$ ο χρόνος ανηγμένος ως προς την περίοδο

Κάτω σχήμα: Δεκαδικός λογάριθμος της απολύτου διαφοράς μεταξύ των τιμών του συντελεστή οπισθέλκουσας, που υπολογίστηκαν από τις δύο μεθόδους.

Λόγω της πολυπλοκότερης μορφής του συντελεστή αντίστασης το αρχικό σχήμα 5.14 αναπαριστά τα σημεία που υπολογίζονται από την χρήση της καμπύλης που αναδομείται με την χρήση δύο αρμονικών. Αν και η σύγκλιση γενικά είναι ικανοποιητική, σε κάποιες περιοχές φαίνονται μικρές αποκλίσεις και αυτό είναι μία ένδειξη, ότι με την αύξηση του αριθμού των αρμονικών, πιθανόν να υπάρχει βελτίωση.



Σχήμα 5.15: Άνω σχήμα: Συντελεστής οπισθέλκουσας C_D υπολογισμένος με την μέθοδο της χρονοπροέλασης με χρονική διακριτοποίηση 360 σημείων ανά περίοδο και με την μέθοδο της ισορροπίας των αρμονικών με $N_H = 3$ αρμονικές, εφόσον έγινε αναδόμηση του συντελεστή με την χρήση τριγωνομετρικής σειράς Fourier $N_T = 7$ συντελεστών. Συνάρτηση διέγερσης: $a(\hat{t})^o = (29.223\hat{t}^4 - 39.596\hat{t}^3 + 0.948\hat{t}^2 + 9.425\hat{t})C$.

$C = 1$ και $f_r = 0.1$

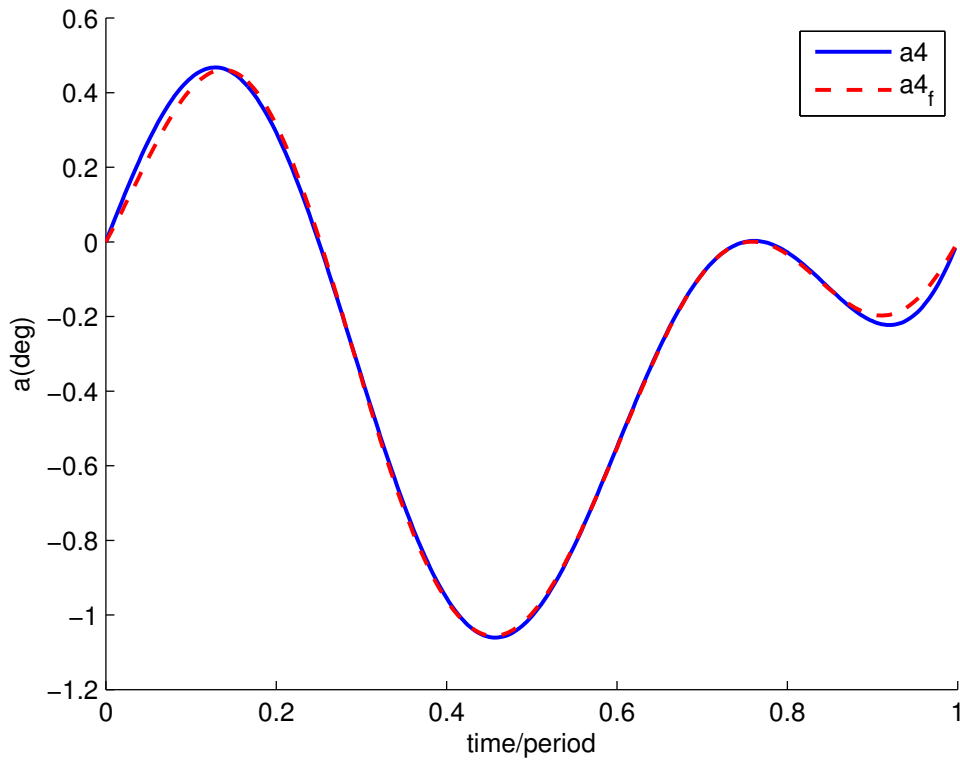
$\hat{t} = \frac{t}{T}$ ο χρόνος ανηγμένος ως προς την περίοδο

Κάτω σχήμα: Δεκαδικός λογάριθμος της απολύτου διαφοράς μεταξύ των τιμών του συντελεστή οπισθέλκουσας, που υπολογίστηκαν από τις δύο μεθόδους.

Από το σχήμα 5.15 φαίνεται ότι με την χρήση τριών αρμονικών υπάρχει βελτίωση των αποτελεσμάτων από μισή μέχρι μία τάξη μεγέθους.

5.4 ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 4

5.4.1 ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΓΩΝΙΑΣ ΕΙΣΟΔΟΥ



Σχήμα 5.16: Γραφική παράσταση της συνάρτησης γωνίας εισόδου για την περίπτωση 4. Με τη διακεκομμένη γραμμή φαίνονται οι τιμές της προσεγγιστικής συνάρτησης που δομήθηκε με την χρήση σειράς Fourier $N_H = 3$ αρμονικών. Συνάρτηση διέγερσης: $a(\hat{t})^o = (29.223\hat{t}^4 - 39.596\hat{t}^3 + 0.948\hat{t}^2 + 9.425\hat{t})C$.

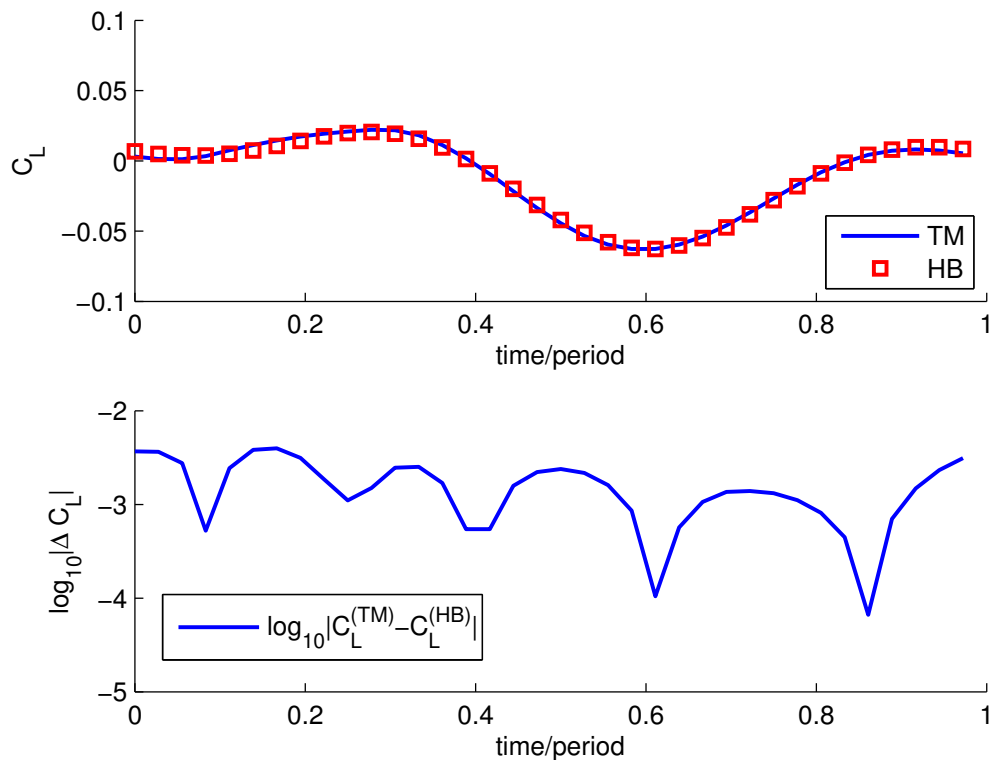
$$a(\hat{t})^o = (29.223\hat{t}^4 - 39.596\hat{t}^3 + 0.948\hat{t}^2 + 9.425\hat{t})C.$$

$$C = \frac{(e^{\hat{t}}\cos(2\pi\hat{t}) + e^{(1-\hat{t})}\cos(2\pi\hat{t}))}{6} \text{ και } f_r = 0.1$$

$\hat{t} = \frac{t}{T}$ ο χρόνος ανηγμένος ως προς την περίοδο

Στο σχήμα 5.16 φαίνεται η γραφική παράσταση (συνεχής γραμμή) της γωνίας πρόσπτωσης της αεροτομής για την περίπτωση 4. Με τη διακεκομμένη γραμμή φαίνεται η γραφική παράσταση της ίδια γωνίας, αφού προσεγγίστηκε με την χρήση τριών αρμονικών. Επομένως, η συνάρτηση χρονικής διέγερσης είναι κατά δύο αρμονικές συνθετότερη σε σύγκριση με τις απλές ημιτονοειδείς συναρτήσεις.

5.4.2 ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΑΝΩΣΗΣ



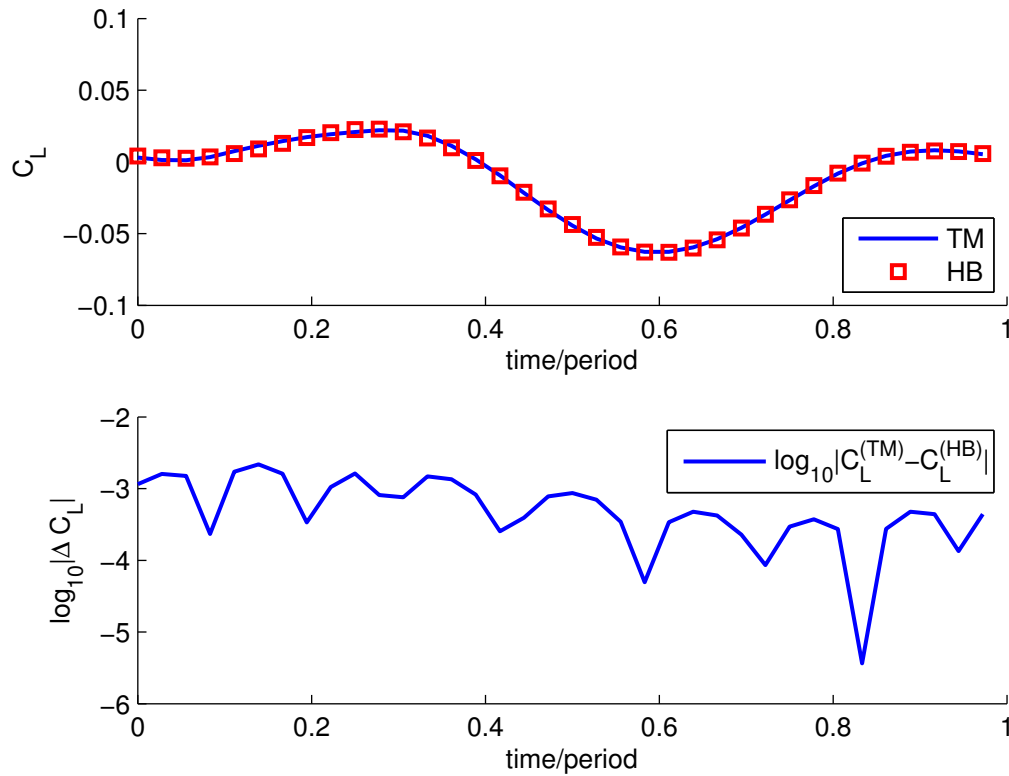
Σχήμα 5.17: Άνω σχήμα: Συντελεστής άνωσης C_L υπολογισμένος με την μέθοδο της χρονοπροέλασης με χρονική διακριτοποίηση 360 σημείων ανά περίοδο και με την μέθοδο της ισορροπίας των αρμονικών με $N_H = 2$ αρμονικές, εφόσον έγινε αναδόμηση του συντελεστή με την χρήση τριγωνομετρικής σειράς Fourier $N_T = 5$ συντελεστών. Συνάρτηση διέγερσης: $a(\hat{t})^o = (29.223\hat{t}^4 - 39.596\hat{t}^3 + 0.948\hat{t}^2 + 9.425\hat{t})C$.

$$C = \frac{(e^{\hat{t}}\cos(2\pi\hat{t}) + e^{(1-\hat{t})}\cos(2\pi\hat{t}))}{6} \text{ και } f_r = 0.1$$

$\hat{t} = \frac{t}{T}$ ο χρόνος ανηγμένος ως προς την περίοδο

Κάτω σχήμα: Δεκαδικός λογάριθμος της απολύτου διαφοράς μεταξύ των τιμών του συντελεστή άνωσης, που υπολογίστηκαν από τις δύο μεθόδους.

Στο σχήμα 5.17 ο συντελεστής προσεγγίζεται με την χρήση δυο αρμονικών, που όπως φαίνεται είναι και επαρκείς. Το εύρος του μεταβατικού φαινομένου είναι της τάξης του 10^{-1} , επομένως οι αποκλίσεις είναι τουλάχιστον μία τάξη μεγέθους κατώτερες, όπως φαίνεται και από τις λογαριθμικές διαφορές.



Σχήμα 5.18: Άνω σχήμα: Συντελεστής άνωσης C_L υπολογισμένος με την μέθοδο της χρονοπροέλασης με χρονική διακριτοποίηση 360 σημείων ανά περίοδο και με την μέθοδο της ισορροπίας των αρμονικών με $N_H = 3$ αρμονικές, εφόσον έγινε αναδόμηση του συντελεστή με την χρήση τριγωνομετρικής σειράς Fourier $N_T = 7$ συντελεστών. Συνάρτηση διέγερσης: $a(t)^o = (29.223t^4 - 39.596t^3 + 0.948t^2 + 9.425t)C$.

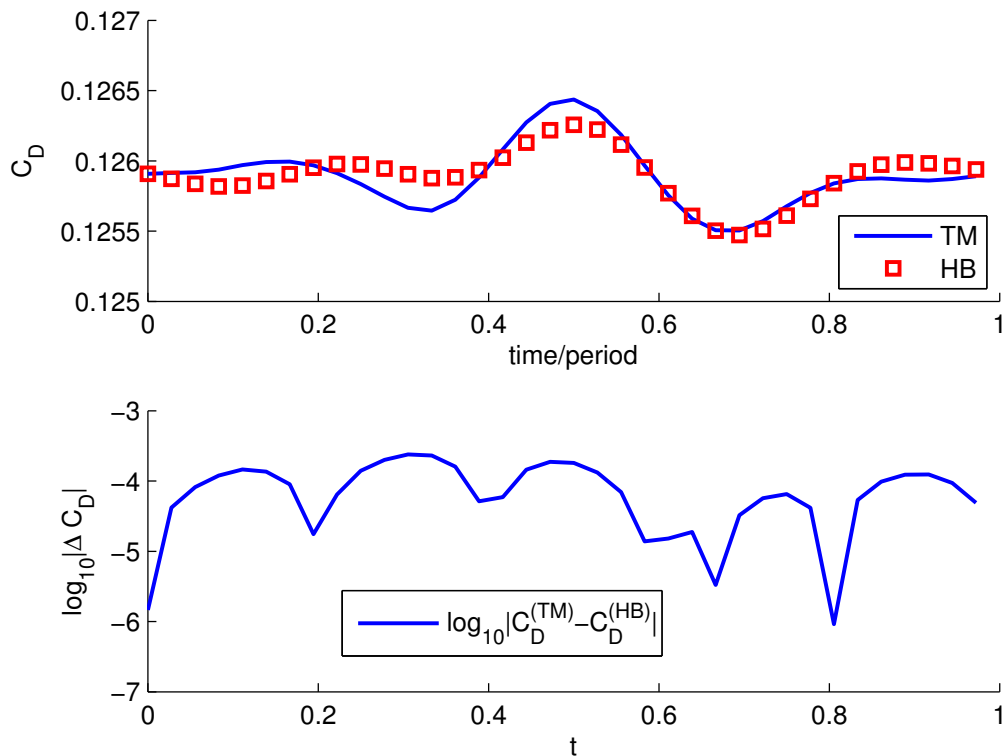
$$C = \frac{(e^{\hat{t}}\cos(2\pi\hat{t}) + e^{(1-\hat{t})}\cos(2\pi\hat{t}))}{6} \text{ και } f_r = 0.1$$

$\hat{t} = \frac{t}{T}$ ο χρόνος ανηγμένος ως προς την περίοδο

Κάτω σχήμα: Δεκαδικός λογάριθμος της απολύτου διαφοράς μεταξύ των τιμών του συντελεστή άνωσης, που υπολογίστηκαν από τις δύο μεθόδους.

Με τρεις αρμονικές (σχήμα 5.18) η σύγκλιση βελτιώνεται στο τρίτο δεκαδικό δεκαδικό ψηφίο, όπως φαίνεται και από τις λογαριθμικές διαφορές.

5.4.3 ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΟΠΙΣΘΕΛΚΟΥΣΑΣ



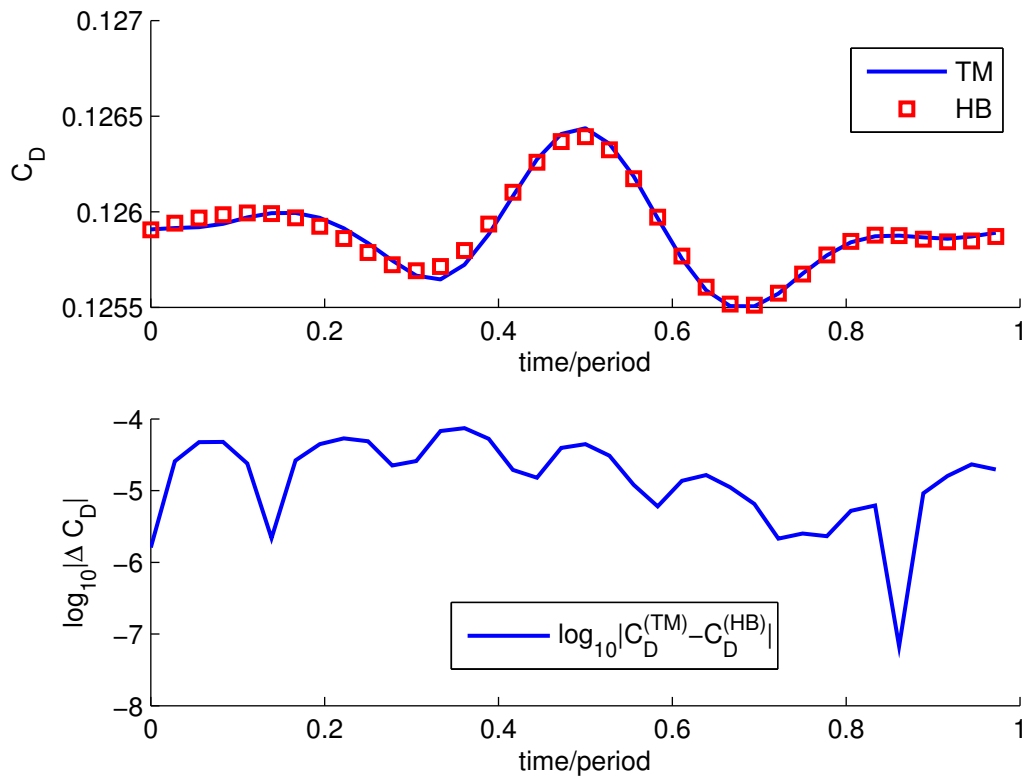
Σχήμα 5.19: Άνω σχήμα: Συντελεστής οπισθέλκουσας C_D υπολογισμένος με την μέθοδο της χρονοπροέλασης με χρονική διακριτοποίηση 360 σημείων ανά περίοδο και με την μέθοδο της ισορροπίας των αρμονικών με $N_H = 2$ αρμονικές, εφόσον έγινε αναδόμηση του συντελεστή με την χρήση τριγωνομετρικής σειράς Fourier $N_T = 3$ συντελεστών. Συνάρτηση διέγερσης: $a(\hat{t})^o = (29.223\hat{t}^4 - 39.596\hat{t}^3 + 0.948\hat{t}^2 + 9.425\hat{t})C$.

$$C = \frac{(e^{\hat{t}} \cos(2\pi\hat{t}) + e^{(1-\hat{t})} \cos(2\pi\hat{t}))}{6} \text{ και } f_r = 0.1$$

$\hat{t} = \frac{t}{T}$ ο χρόνος ανηγμένος ως προς την περίοδο

Κάτω σχήμα: Δεκαδικός λογάριθμος της απολύτου διαφοράς μεταξύ των τιμών του συντελεστή οπισθέλκουσας, που υπολογίστηκαν από τις δύο μεθόδους.

Ακόμη και με την χρήση δύο αρμονικών (σχήμα 5.19), τα σημεία που υπολογίστηκαν από την τριγωνομετρική σειρά απέχουν σημαντικά από τις πραγματικές τιμές. Αυτό εξηγείται από την πολυπλοκότητα της συνάρτησης διέγερσης, η οποία όπως προαναφέρθηκε, αποτελείται από τρεις αρμονικές.



Σχήμα 5.20: Άνω σχήμα: Συντελεστής οπισθέλκουσας C_D υπολογισμένος με την μέθοδο της χρονοπροέλασης με χρονική διακριτοποίηση 360 σημείων ανά περίοδο και με την μέθοδο της ισορροπίας των αρμονικών με $N_H = 3$ αρμονικές, εφόσον έγινε αναδόμηση του συντελεστή με την χρήση τριγωνομετρικής σειράς Fourier $N_T = 7$ συντελεστών. Συνάρτηση διέγερσης: $a(\hat{t})^o = (29.223\hat{t}^4 - 39.596\hat{t}^3 + 0.948\hat{t}^2 + 9.425\hat{t})C$.

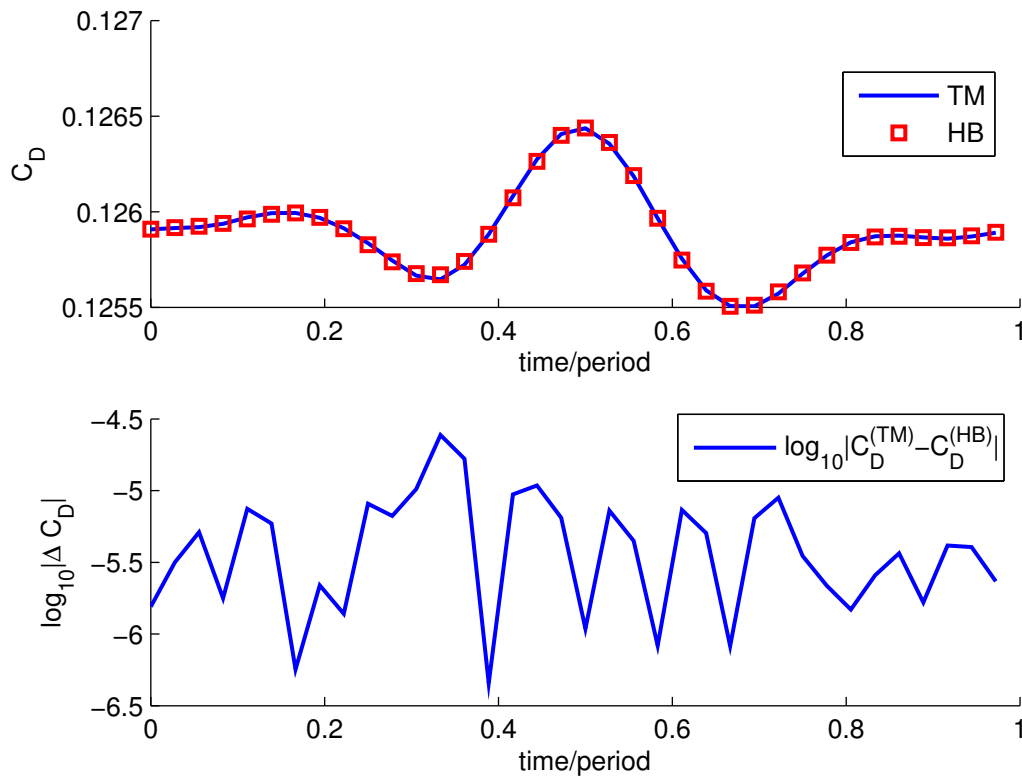
$$C = \frac{(e^{\hat{t}} \cos(2\pi\hat{t}) + e^{(1-\hat{t})} \cos(2\pi\hat{t}))}{6} \text{ και } f_r = 0.1$$

$\hat{t} = \frac{t}{T}$ ο χρόνος ανηγμένος ως προς την περίοδο

Κάτω σχήμα: Δεκαδικός λογάριθμος της απολύτου διαφοράς μεταξύ των τιμών του συντελεστή οπισθέλκουσας, που υπολογίστηκαν από τις δύο μεθόδους.

Στο σχήμα 5.20 παρατηρείται αύξηση της ακρίβειας, ωστόσο είναι εμφανείς κάποιες μικρές αποκλίσεις γι' αυτό ο αριθμός των αρμονικών αυξάνεται κατά μία μονάδα ακόμη.

5.5. ΕΙΚΟΝΕΣ ΤΟΥ ΠΕΔΙΟΥ ΡΟΗΣ ΣΕ 7 ΙΣΑΠΕΧΟΥΣΕΣ ΧΡΟΝΙΚΕΣ ΣΤΙΓΜΕΣ ΕΣΩΤΕΡΙΚΑ ΤΗΣ ΠΕΡΙΟΔΟΥ



Σχήμα 5.21: Άνω σχήμα: Συντελεστής οπισθέλκουσας C_D υπολογισμένος με την μέθοδο της χρονοπροέλασης με χρονική διακριτοποίηση 360 σημείων ανά περίοδο και με την μέθοδο της ισορροπίας των αρμονικών με $N_H = 4$ αρμονικές, εφόσον έγινε αναδόμηση του συντελεστή με την χρήση τριγωνομετρικής σειράς Fourier $N_T = 9$ συντελεστών.

Συνάρτηση διέγερσης: $a(\hat{t})^o = (29.223\hat{t}^4 - 39.596\hat{t}^3 + 0.948\hat{t}^2 + 9.425\hat{t})C$.

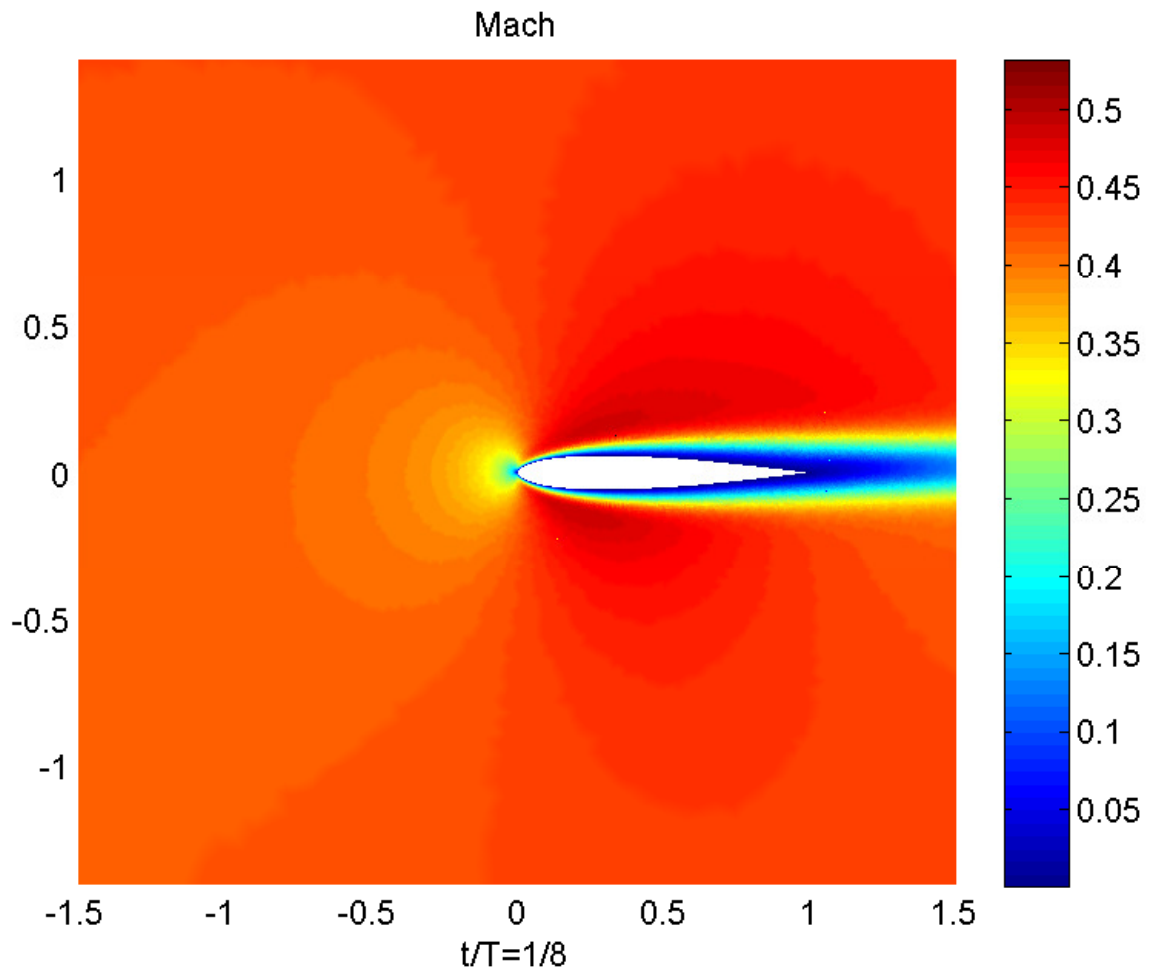
$C = \frac{(e^{\hat{t}}\cos(2\pi\hat{t}) + e^{(1-\hat{t})}\cos(2\pi\hat{t}))}{6}$ και $f_r = 0.1$

$\hat{t} = \frac{t}{T}$ ο χρόνος ανηγμένος ως προς την περίοδο

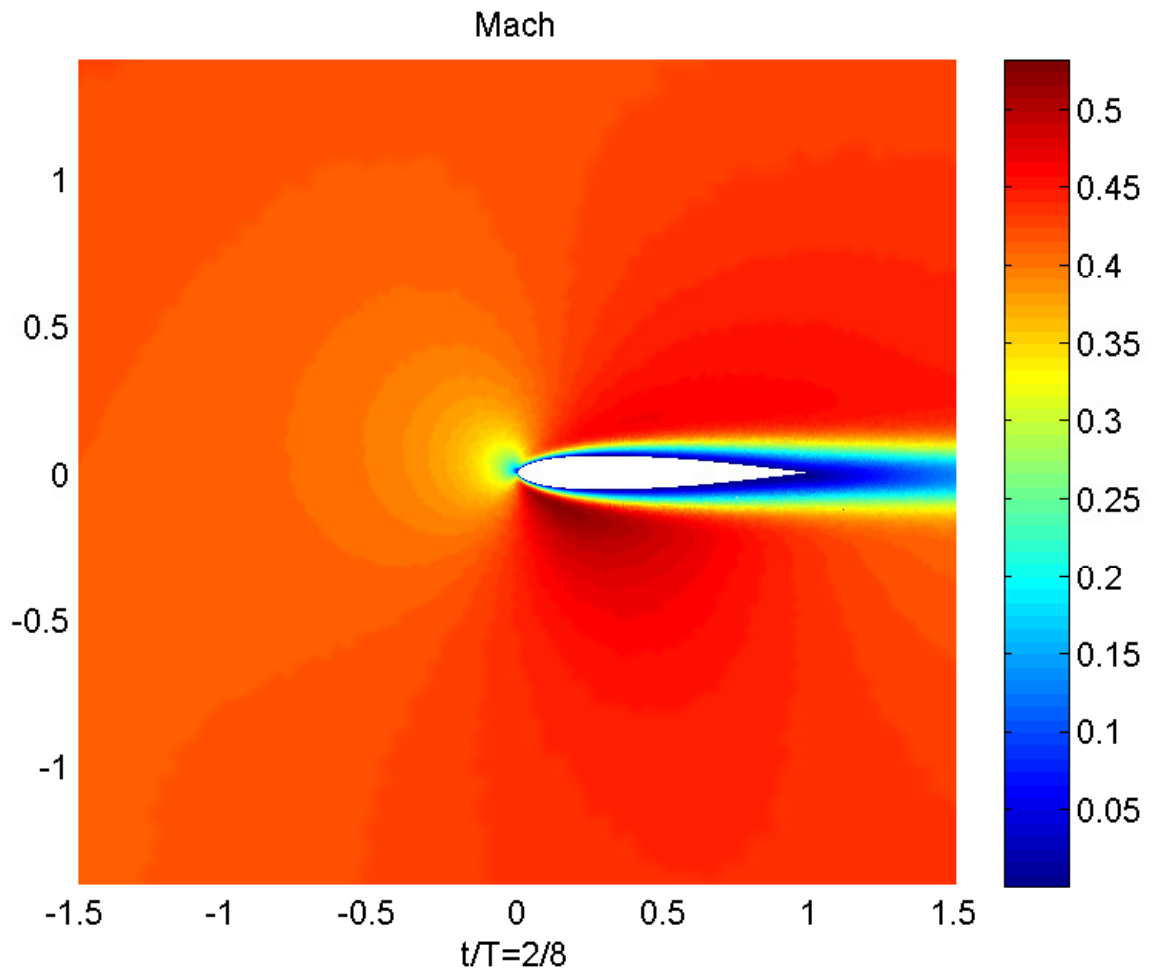
Κάτω σχήμα: Δεκαδικός λογάριθμος της απολύτου διαφοράς μεταξύ των τιμών του συντελεστή οπισθέλκουσας, που υπολογίστηκαν από τις δύο μεθόδους.

Η ακρίβεια αυξήθηκε στα περισσότερα σημεία κατά μία τάξη μεγέθους. Από τις προηγούμενες περιπτώσεις, παρατηρείται το συμπέρασμα ότι ο συντελεστής οπισθέλκουσας περιγράφεται από έναν αριθμό αρμονικών κατά μία μονάδα μεγαλύτερο σε σχέση με τον αριθμό των αρμονικών της συνάρτησης χρονικής διέγερσης. Επομένως, ο αριθμός των τεσσάρων αρμονικών θεωρείται αναμενόμενος.

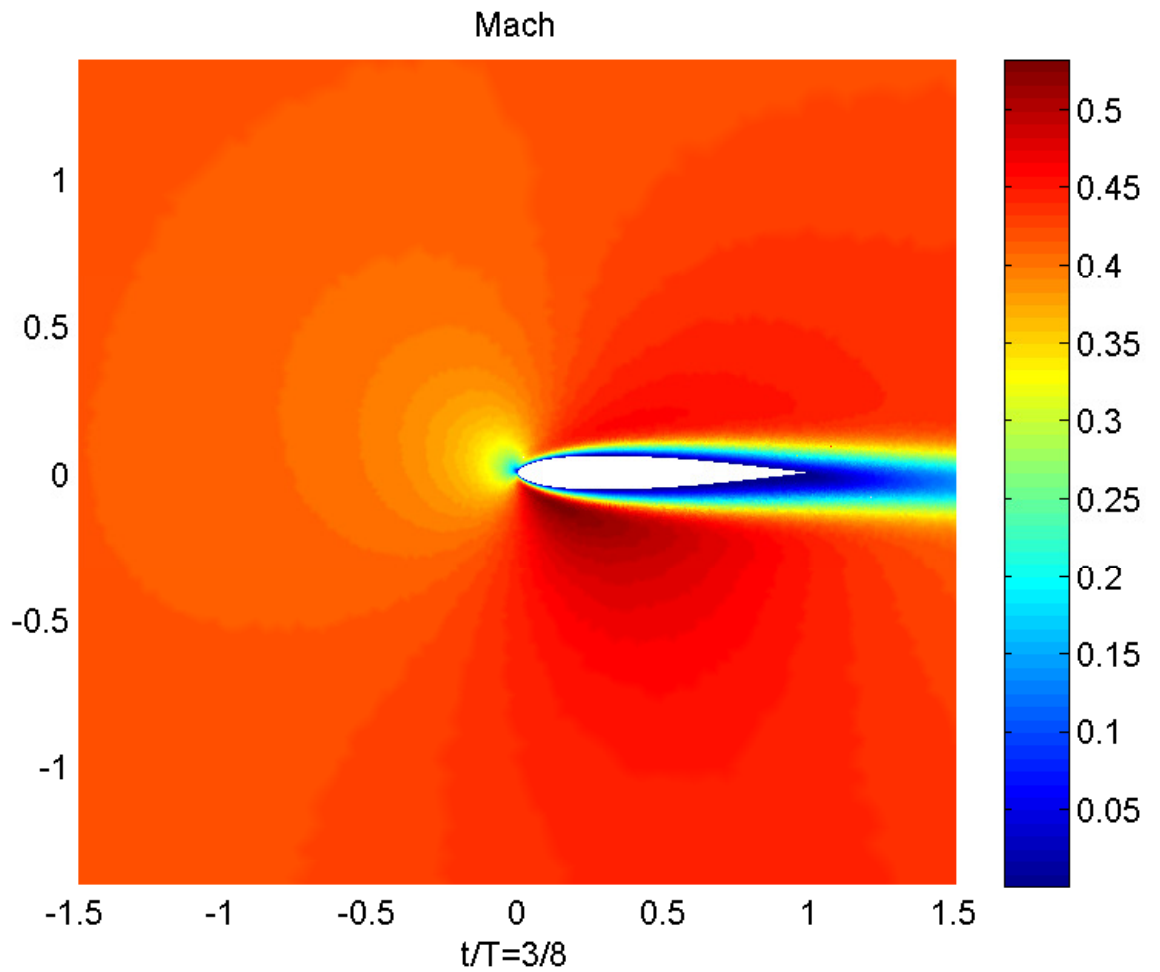
5.5 ΕΙΚΟΝΕΣ ΤΟΥ ΠΕΔΙΟΥ ΡΟΗΣ ΣΕ 7 ΙΣΑΠΕΧΟΥΣΕΣ ΧΡΟΝΙΚΕΣ ΣΤΙΓΜΕΣ ΕΣΩΤΕΡΙΚΑ ΤΗΣ ΠΕΡΙΟΔΟΥ



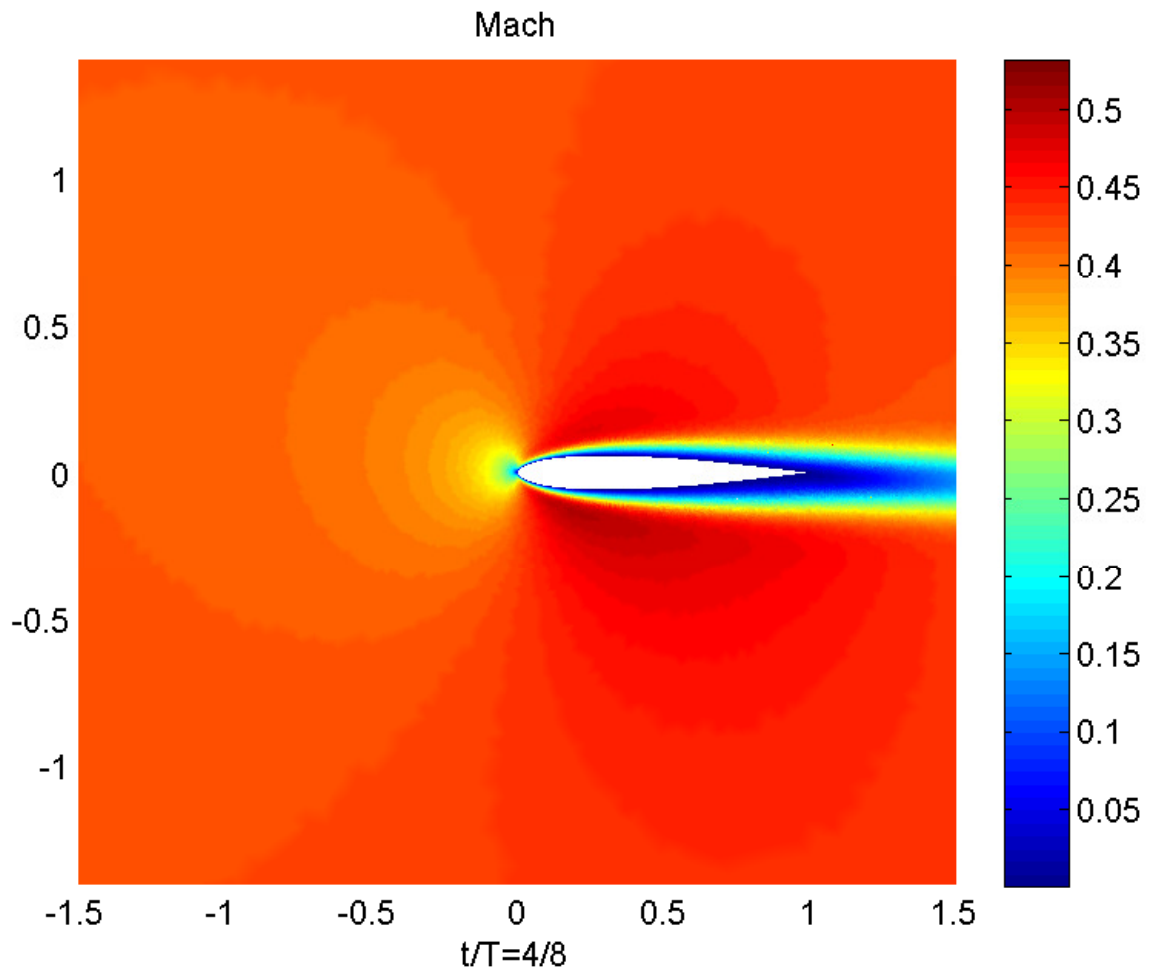
Σχήμα 5.22: Πεδίο τιμών αριθμού Mach γύρω από αεροτομή για πρώτη χρονική στιγμή εσωτερικά της περιόδου με γωνία πρόσπτωσης 0 μοίρες. Ημιτονοειδής μεταβολή της γωνίας διέγερσης με συχνότητα $f_r = 0.5$. Αριθμός $Mach = 0.5$ και $Re = 1000$.



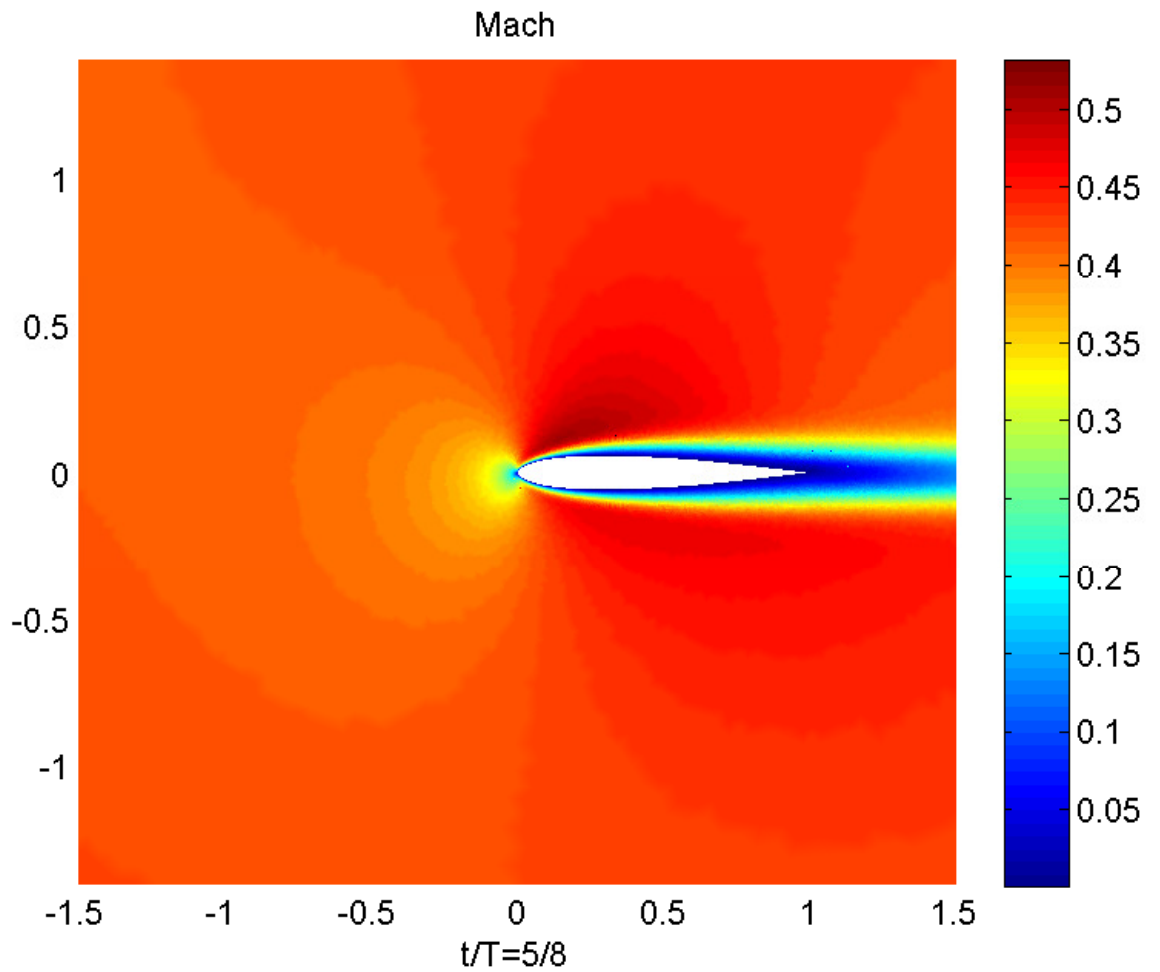
Σχήμα 5.23: Πεδίο τιμών αριθμού Mach γύρω από αεροτομή για δεύτερη χρονική στιγμή εσωτερικά της περιόδου με γωνία πρόσπτωσης 2.35 μοίρες. Ημιτονοειδής μεταβολή της γωνίας διέγερσης με συχνότητα $f_r = 0.5$. Αριθμός $Mach = 0.5$ και $Re = 1000$.



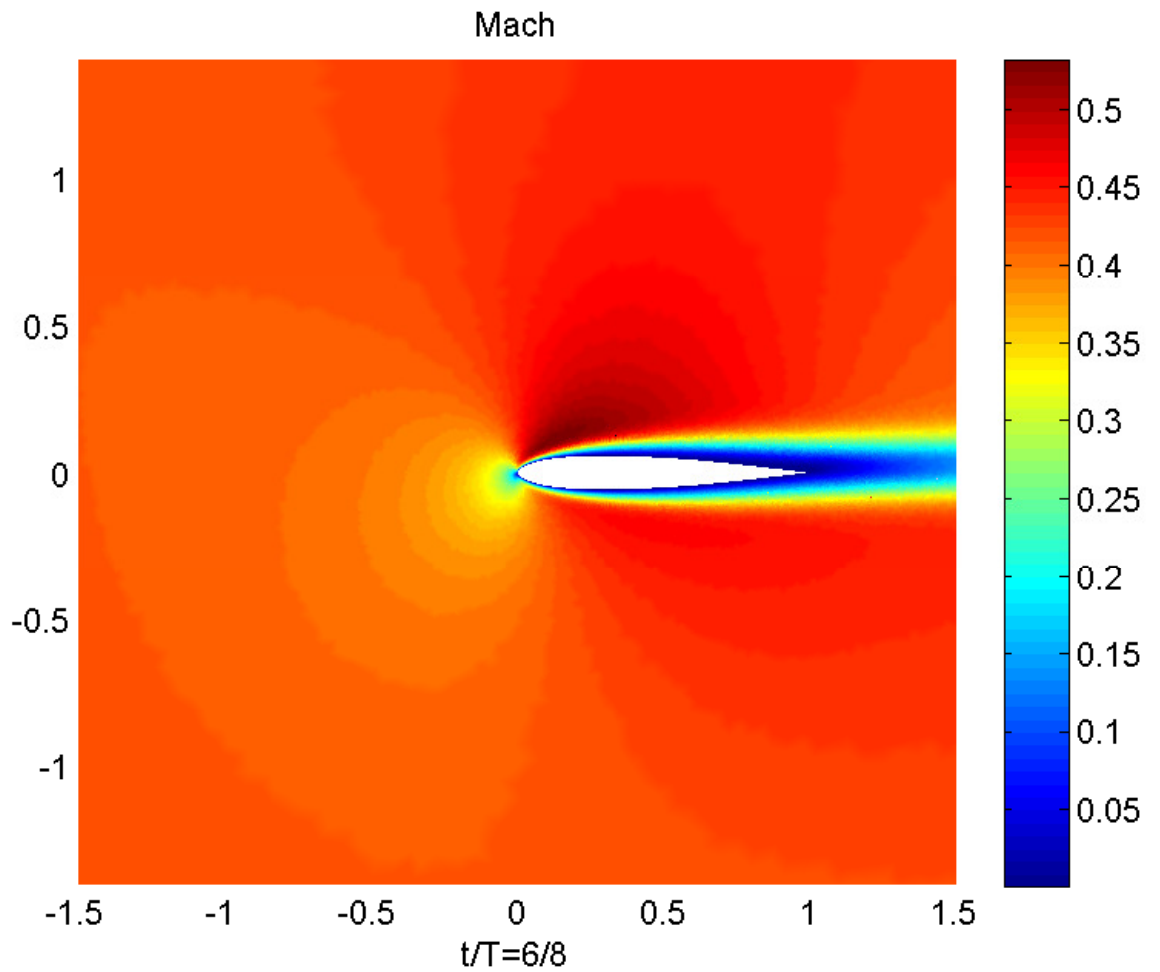
Σχήμα 5.24: Πεδίο τιμών αριθμού Mach γύρω από αεροτομή για τρίτη χρονική στιγμή εσωτερικά της περιόδου με γωνία πρόσπτωσης 2.92 μοίρες. Ημιτονοειδής μεταβολή της γωνίας διέγερσης με συχνότητα $f_r = 0.5$. Αριθμός $Mach = 0.5$ και $Re = 1000$.



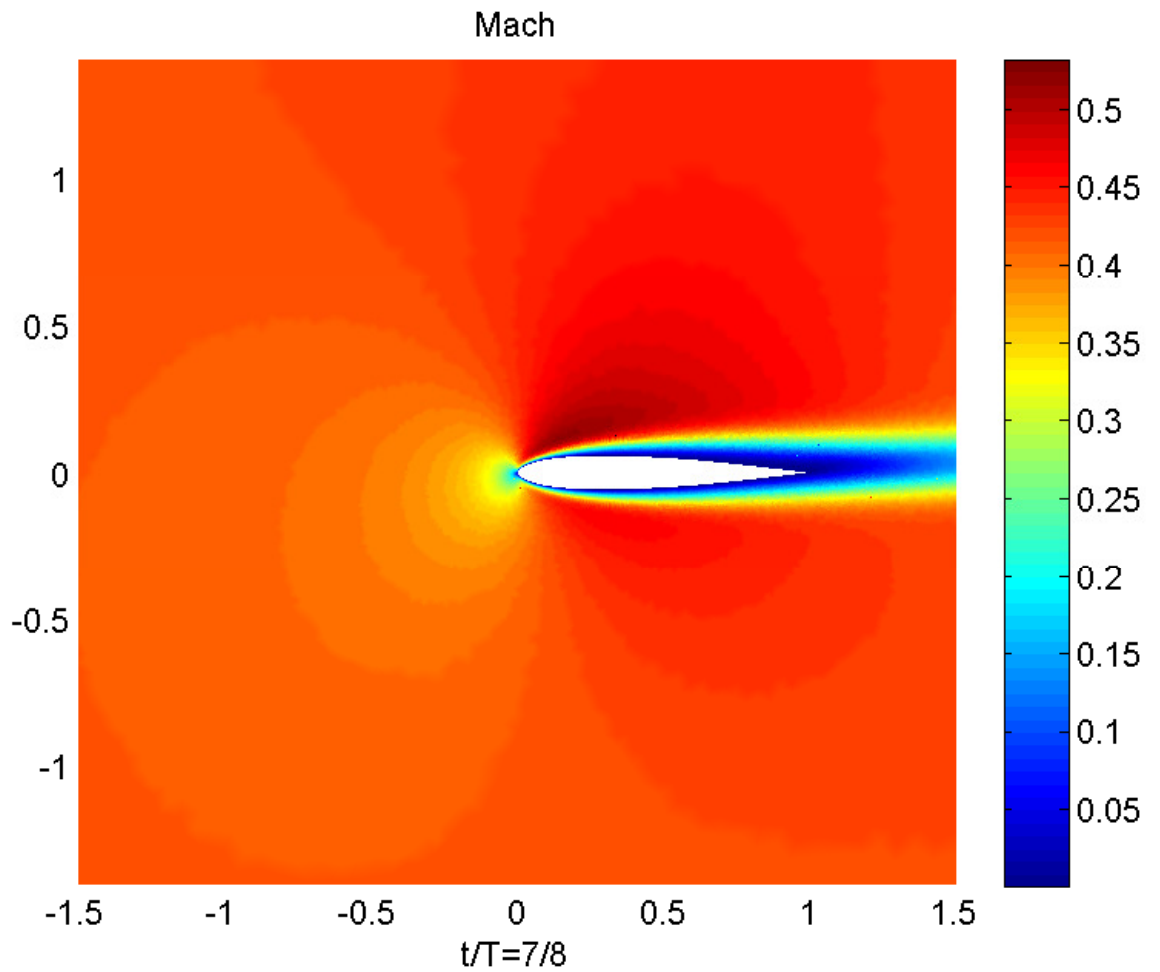
Σχήμα 5.25: Πεδίο τιμών αριθμού Mach γύρω από αεροτομή για τέταρτη χρονική στιγμή εσωτερικά της περιόδου με γωνία πρόσπτωσης 1.3 μοίρες. Ημιτονοειδής μεταβολή της γωνίας διέγερσης με συχνότητα $f_r = 0.5$. Αριθμός $Mach = 0.5$ και $Re = 1000$.



Σχήμα 5.26: Πεδίο τιμών αριθμού Mach γύρω από αεροτομή για πέμπτη χρονική στιγμή εσωτερικά της περιόδου με γωνία πρόσπτωσης -1.3 μοίρες. Ημιτονοειδής μεταβολή της γωνίας διέγερσης με συχνότητα $f_r = 0.5$. Αριθμός $Mach = 0.5$ και $Re = 1000$.



Σχήμα 5.27: Πεδίο τιμών αριθμού Mach γύρω από αεροτομή για έκτη χρονική στιγμή εσωτερικά της περιόδου με γωνία πρόσπτωσης -2.93 μοίρες. Ημιτονοειδής μεταβολή της γωνίας διέγερσης με συχνότητα $f_r = 0.5$. Αριθμός $Mach = 0.5$ και $Re = 1000$.



Σχήμα 5.28: Πεδίο τιμών αριθμού Mach γύρω από αεροτομή για έβδομη χρονική στιγμή εσωτερικά της περιόδου με γωνία πρόσπτωσης -2.35 μοίρες. Ημιτονοειδής μεταβολή της γωνίας διέγερσης με συχνότητα $f_r = 0.5$. Αριθμός $Mach = 0.5$ και $Re = 1000$.

Κεφάλαιο 6

ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΧΡΟΝΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ

Στο προηγούμενο κεφάλαιο εξετάστηκε η αξιοπιστία των αποτελεσμάτων της μεθόδου των αρμονικών και αποδείχτηκε ότι ταυτίζονται με πολύ ικανοποιητική ακρίβεια με τα αποτελέσματα της προυπάρχουσας μεθόδου της χρονοπροέλασης. Το ζήτημα που τίθεται σε αυτό το σημείο είναι το μέγεθος του κέρδους σε υπολογιστικό χρόνο που επιτυγχάνεται με την εφαρμογή αυτής της εναλλακτικής μεθόδου και σκοπός αυτού του κεφαλαίου είναι η ποιοτική εκτίμηση αυτού του κέρδους.

6.1 ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΟΥ ΧΡΟΝΟΥ ΜΕ ΤΗΝ ΜΕΘΟΔΟ ΤΗΣ ΧΡΟΝΟΠΡΟΕΛΑΣΗΣ

Ο υπολογιστικός χρόνος με την μέθοδο της χρονοπροέλασης εξαρτάται από τους παρακάτω παράγοντες.

- Χρονική διακριτοποίηση του προβλήματος με επιλογή N σημείων εσωτερικά της περιόδου.
- Χρονική διάρκεια μεταβατικού φαινομένου.
Αυτός ο παράγοντας ποσοτικοποιείται με το σύμβολο C το οποίο αναπαριστά τον αριθμό των κύκλων που διαρκεί το μεταβατικό φαινόμενο. Όπως θα αποδειχτεί και στη συνέχεια υπάρχει άμεση εξάρτηση από τη συχνότητα διέγερσης.
- Αριθμός ψευδοχρονικών επαναλήψεων μεταξύ δύο διαδοχικών πραγματικών στιγμών $T_{ps}^{(tm)}$.
- Χρόνος μετάβασης από μία ψευδοχρονική στιγμή στην επόμενη.
Ο χρόνος αυτός σχετίζεται με την επίλυση του γραμμικού συστήματος, όπως περιγράφεται στο πρώτο κεφάλαιο με την μέθοδο Jacobi. Προφανώς, η ταχύτητα επίλυσης του μητρώου εξαρτάται από τον υπολογιστή που επιλύεται το πρόβλημα. Σε αυτήν την εργασία θα αναφέρεται με το σύμβολο T_M .

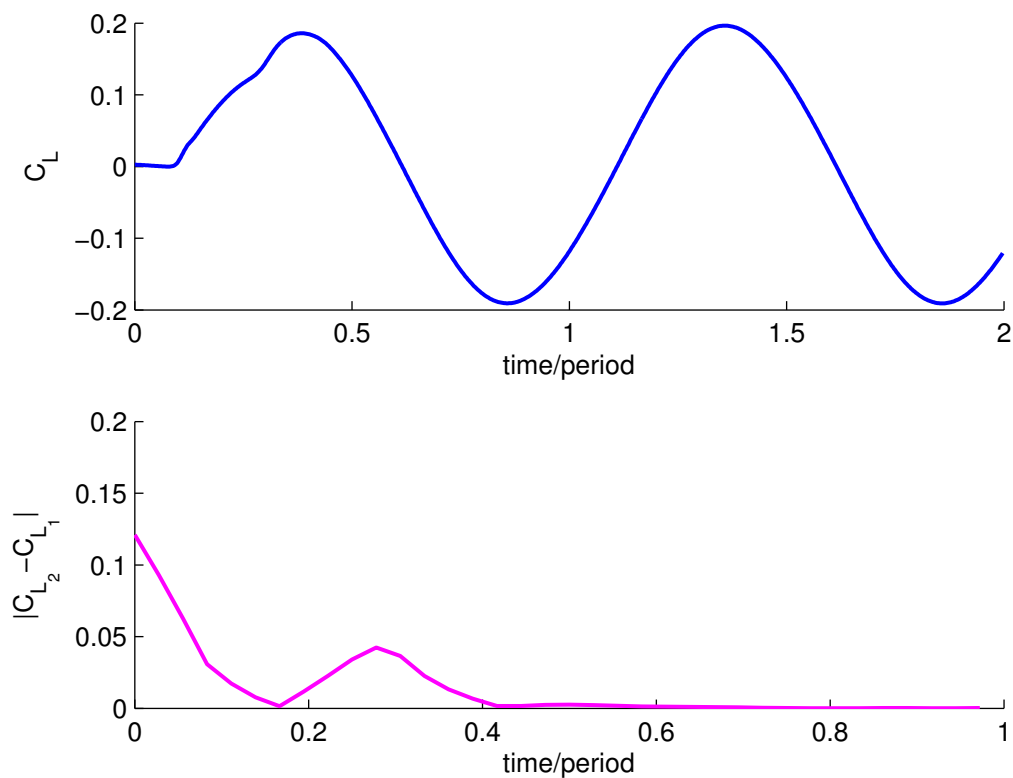
Επομένως, ο υπολογιστικός χρόνος $T_{tot}^{(tm)}$ υπολογίζεται από τον τύπο

$$T_{tot}^{(tm)} = N \cdot C \cdot T_{ps}^{(tm)} \cdot T_M \quad (6.1.1)$$

Η εξίσωση 6.1.1 είναι γενικής μορφής και είναι δυνατόν να χρησιμοποιηθεί γενικότερα. Στη συνέχεια θα γίνει μία λεπτομερέστερη εξέταση των παραγόντων N και C .

ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΜΕΤΑΒΑΤΙΚΟΥ ΦΑΙΝΟΜΕΝΟΥ

Στα παρακάτω σχήματα παρουσιάζονται οι συντελεστές άνωσης και αντίστασης, όπως υπολογίστηκαν με την μέθοδο της χρονοπροέλασης για τις ημιτονοειδείς συναρτήσεις διέγερσης. Ο σκοπός είναι η εκτίμηση της διάρκειας του μεταβατικού φαινομένου για ανηγμένες συχνότητες $f_r = 0.1$ και $f_r = 0.5$.

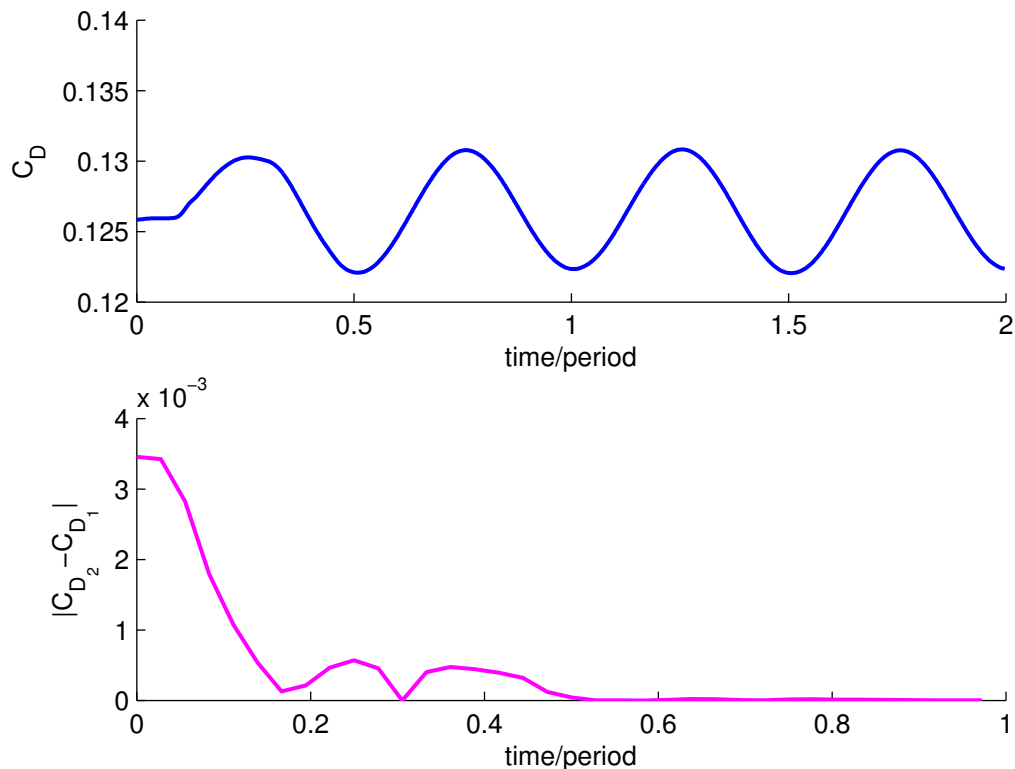


Σχήμα 6.1: Άνω σχήμα: Συντελεστής άνωσης C_L υπολογισμένος για $C = 2$ περιόδους με την μέθοδο της χρονοπροέλασης και με χρονική διακριτοποίηση 360 σημείων ανά περίοδο.

Συνάρτηση διέγερσης $a(t) = 3^\circ \sin(2f_r t)$ με $f_r = 0.1$.

Κάτω σχήμα: Απόλυτος διαφορά μεταξύ των τιμών του συντελεστή άνωσης μεταξύ πρώτης και δεύτερης περιόδου.

6.1. ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΟΥ ΧΡΟΝΟΥ ΜΕ ΤΗΝ ΜΕΘΟΔΟ ΤΗΣ ΧΡΟΝΟΠΡΟΕΛΑΣΗΣ



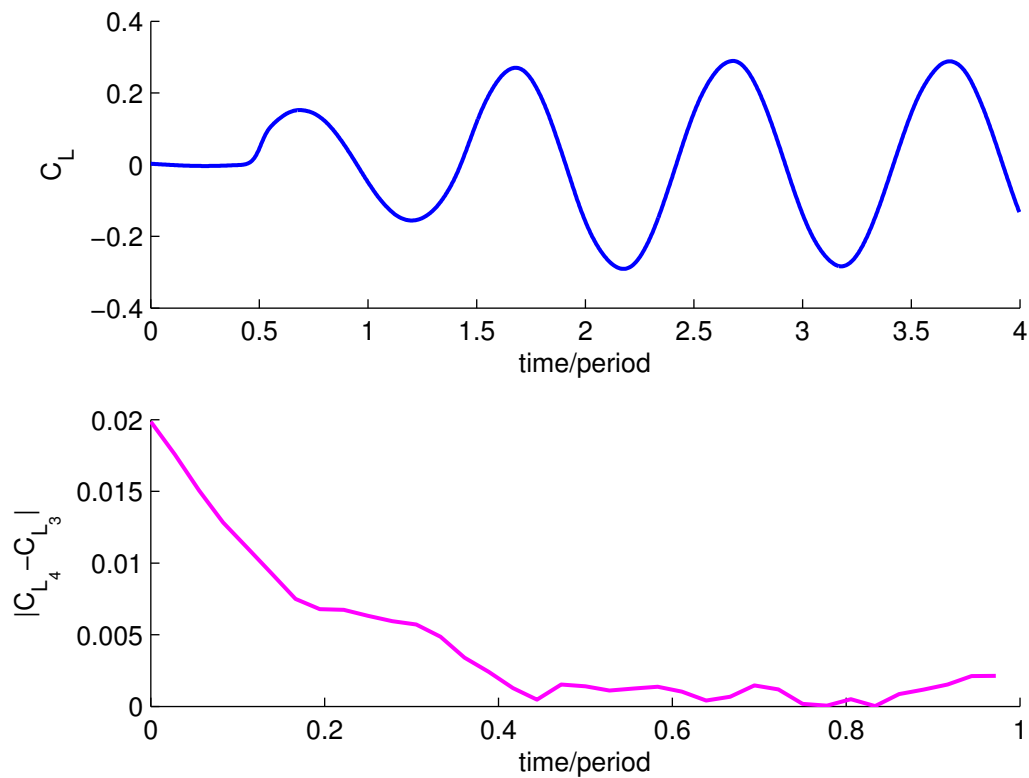
Σχήμα 6.2: Άνω σχήμα: Συντελεστής οπισθέλκουσας C_D υπολογισμένος για $C = 2$ περιόδους με την μέθοδο της χρονοπροέλασης και με χρονική διακριτοποίηση 360 σημείων ανά περίοδο.

Συνάρτηση διέγερσης $a(t) = 3^\circ \sin(2f_r t)$ με $f_r = 0.1$.

Κάτω σχήμα: Απόλυτος διαφορά μεταξύ των τιμών του συντελεστή οπισθέλκουσας μεταξύ πρώτης και δεύτερης περιόδου.

Απο τα σχήματα 6.1 και 6.2 είναι εμφανές ότι το περιοδικό φαινόμενο έχει αποκατασταθεί στο δεύτερο κύκλο και για τους δύο συντελεστές, όπως φαίνεται από τις απόλυτες τιμές των διαφορών τις τελευταίες χρονικές στιγμές μέσα στην περίοδο μεταξύ των δύο πρώτων κύκλων.

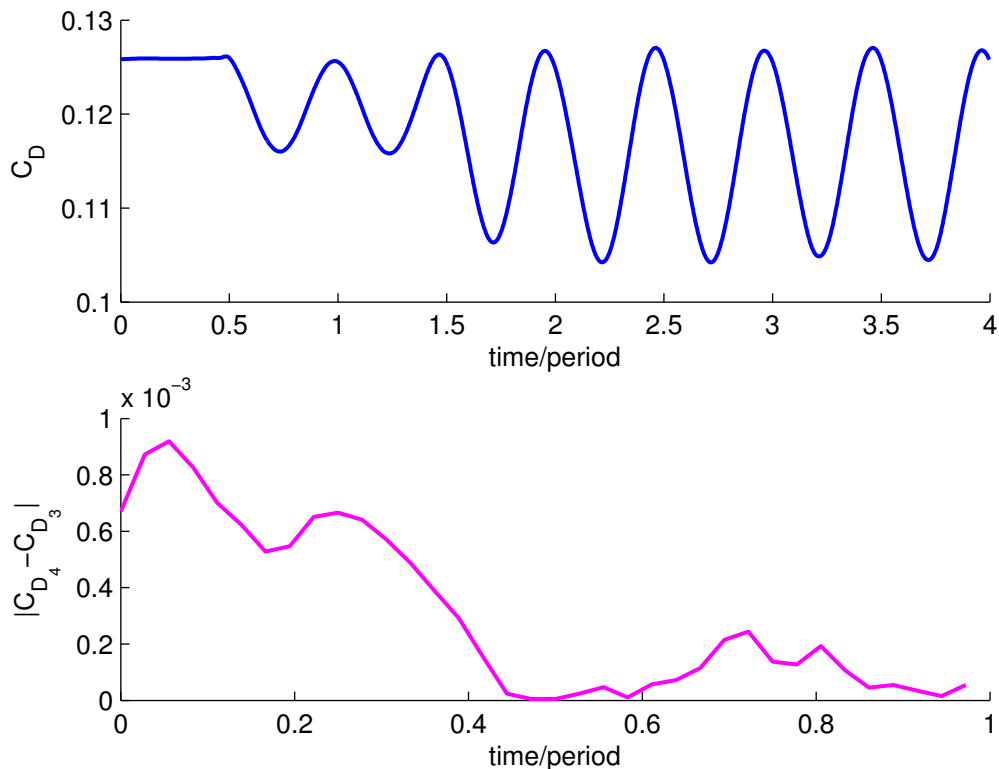
Στη συνέχεια πενταπλασιάζεται η ανηγμένη συχνότητα και οι τιμές των συντελεστών αναπαρίστανται στα διαγράμματα που ακολουθούν.



Σχήμα 6.3: Άνω σχήμα: Συντελεστής άνωσης C_L υπολογισμένος για $C = 4$ περιόδους με την μέθοδο της χρονοπροέλασης και με χρονική διακριτοποίηση 360 σημείων ανά περίοδο.

Συνάρτηση διέγερσης $a(t) = 3^\circ \sin(2f_r t)$ με $f_r = 0.5$.

Κάτω σχήμα: Απόλυτος διαφορά μεταξύ των τιμών του συντελεστή άνωσης μεταξύ τέταρτης και τρίτης περιόδου.



Σχήμα 6.4: Άνω σχήμα: Συντελεστής οπισθέλκουσας C_D υπολογισμένος για $C = 4$ περιόδους με την μέθοδο της χρονοπροέλασης και με χρονική διακριτοποίηση 360 σημείων ανά περίοδο.

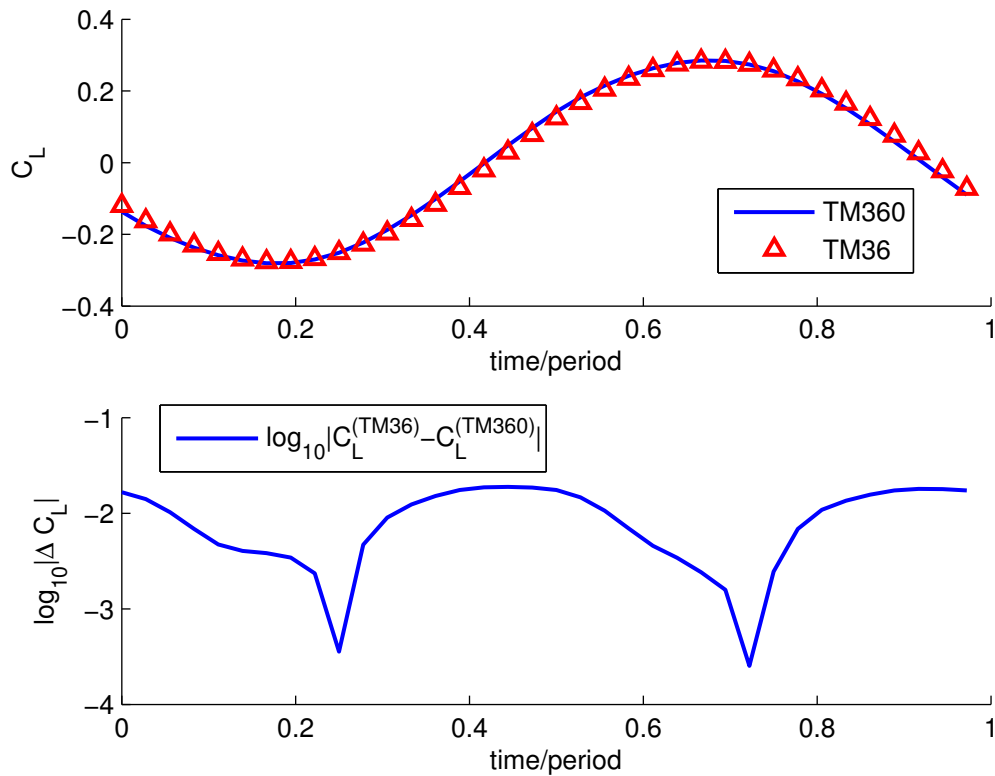
Συνάρτηση διέγερσης $a(t) = 3^\circ \sin(2f_r t)$ με $f_r = 0.5$.

Κάτω σχήμα: Απόλυτος διαφορά μεταξύ των τιμών του συντελεστή οπισθέλκουσας μεταξύ τέταρτης και τρίτης περιόδου.

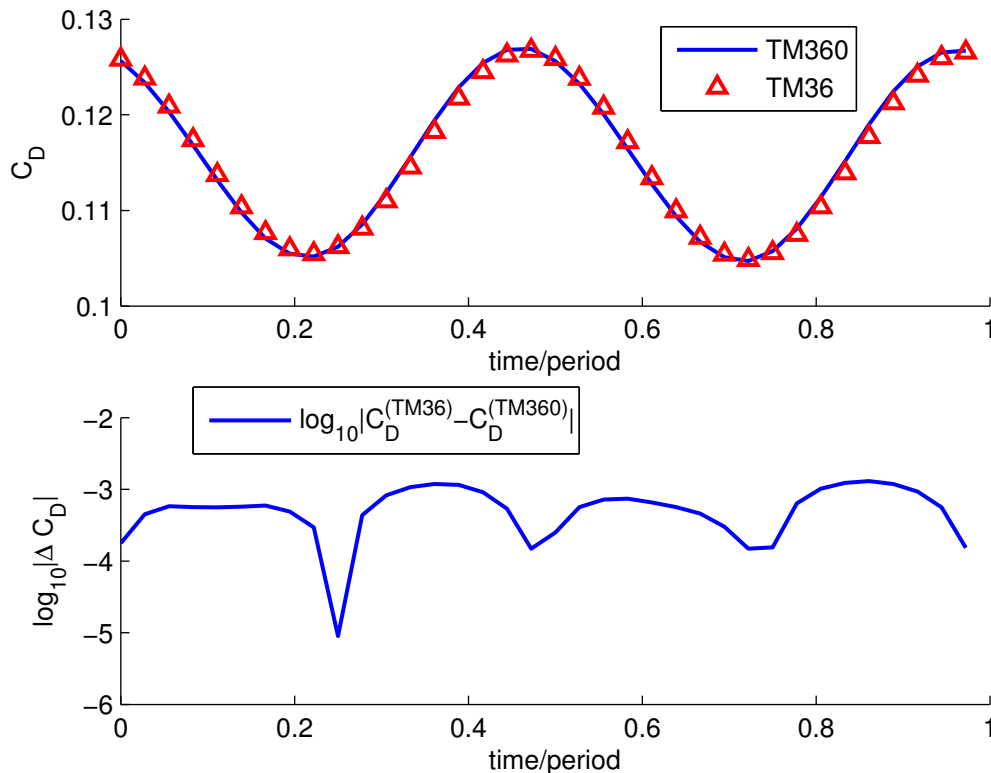
Απο τα σχήματα 6.3 και 6.4 φαίνεται ο διπλασιασμός της διάρκειας του μεταβατικού φαινομένου από δύο σε τέσσερις κύκλους. Επομένως, συμπεραίνεται ότι όσο πιο απότομες είναι οι μεταβολές, απαιτούνται μεγαλύτερα χρονικά διαστήματα για την μετάβαση σε μια σταθερή κατάσταση.

ΧΡΟΝΙΚΗ ΔΙΑΚΡΙΤΟΠΟΙΗΣΗ

Στο προηγούμενο κεφάλαιο χρησιμοποιήθηκαν τα αποτελέσματα της μεθόδου της χρονοπροέλασης με $N = 360$ σημεία ανά περίοδο, προκειμένου να υπάρχει όσο το δυνατόν μεγαλύτερη ακρίβεια. Στη συνέχεια, επιλέγεται η περίπτωση με ημιτονοειδή συνάρτηση διέγερσης και συχνότητα $f_r = 0.5$. Οι συντελεστές υπολογίζονται με χρονική διακριτοποίηση $N = 36$ σημείων ανά περίοδο και συγκρίνονται τα αποτελέσματα.



Σχήμα 6.5: Άνω σχήμα: Συντελεστής άνωσης C_L υπολογισμένος με την μέθοδο της χρονοπροέλασης και με χρονική διακριτοποίηση 360 σημείων ανά περίοδο (συνεχής γραμμή) και 36 σημείων ανα περίοδο (τρίγωνα) .
 Συνάρτηση διέγερσης $a(t) = 3^\circ \sin(2f_r t)$ με $f_r = 0.5$.
 Κάτω σχήμα: Δεκαδικός λογάριθμος της απολύτου διαφοράς μεταξύ των τιμών του συντελεστή άνωσης, που υπολογίστηκαν με τις δύο τάξεις χρονικής διακριτοποίησης .



Σχήμα 6.6: Άνω σχήμα: Συντελεστής οπισθέλκουσας C_D υπολογισμένος με την μέθοδο της χρονοπροέλασης και με χρονική διακριτοποίηση 360 σημείων ανά περίοδο (συνεχής γραμμή) και 36 σημείων ανά περίοδο (τρίγωνα).

Συνάρτηση διέγερσης $a(t) = 3^\circ \sin(2f_r t)$ με $f_r = 0.5$.

Κάτω σχήμα: Δεκαδικός λογάριθμος της απολύτου διαφοράς μεταξύ των τιμών του συντελεστή οπισθέλκουσας που υπολογίστηκαν με τις δυο τάξεις χρονικής διακριτοποίησης.

Στα σχήματα 6.5 και 6.5 φαίνεται ότι τα αποτελέσματα πρακτικά, δεν μεταβάλλονται αφού οι αποκλίσεις είναι μία τάξη μεγέθους κατώτερη από το εύρος μεταβολής του περιοδικού φαινομένου. Αξίζει όμως να σημειωθεί ότι οι αποκλίσεις των τιμών της μεθόδου της ισοροπίας των αρμονικών είναι της ίδιας τάξης μεγέθους και γενικότερα συγκλίνουν στις τιμές των αποτελεσμάτων της μεθόδου της χρονοπροέλασης με 360 σημεία ανά περίοδο.

ΑΡΙΘΜΟΣ ΨΕΥΔΟΧΡΟΝΙΚΩΝ ΕΠΑΝΑΛΗΨΕΩΝ

Ο αριθμός $T_{ps}^{(tm)}$ στο πρόβλημα που μελετήθηκε σε αυτήν την εργασία κυμαίνεται στις τιμές των 2000-3000 ψευδοχρονικών βημάτων, ανεξάρτητα από τη συνάρτηση χρονικής διέγερσης.

6.2 ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΟΥ ΧΡΟΝΟΥ ΜΕ ΤΗΝ ΜΕΘΟΔΟ ΤΗΣ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ ΤΩΝ ΑΡΜΟΝΙΚΩΝ

Παρακάτω, παρουσιάζονται οι παράγοντες που επιδρούν στο χρόνο υπολογισμού με τη χρησιμοποίηση αυτής της μεθόδου.

- Αριθμός απαιτούμενων ψευδοχρονικών επαναλήψεων για τη σύγκλιση $T_{ps}^{(hb)}$.
- Χρόνος μετάβασης απο μια ψευδοχρονική στιγμή στην επόμενη.
Όπως και στην μέθοδο της χρονοπροέλασης πρέπει να επιλυθεί ένα γραμμικό σύστημα με χρήση ενός σχήματος Jacobi. Ο χρόνος αυτός εξαρτάται προφανώς από την ταχύτητα του υπολογιστή και από τον αριθμό των αρμονικών που χρησιμοποιούνται. Αυτός ο χρόνος θα συμβολίζεται με το γράμμα T_M^{NH} και γίνεται η υπόθεση ότι ισούται με τον χρόνο T_M , πολλαπλασιασμένο με έναν συντελεστή f που εκφράζει την αύξηση του υπολογιστικού χρόνου λόγω των αρμονικών. Αυτή η αύξηση δικαιολογείται απο το γεγονός ότι με την μέθοδο της ισορροπίας των αρμονικών αυξάνεται ο αριθμός των αγνώστων μεταβλητών κατά ένα παράγοντα $N_T = 2N_H + 1$, με αποτέλεσμα να πρέπει να επιλυθεί ένα γραμμικό σύστημα με πολλαπλάσιους αγνώστους.

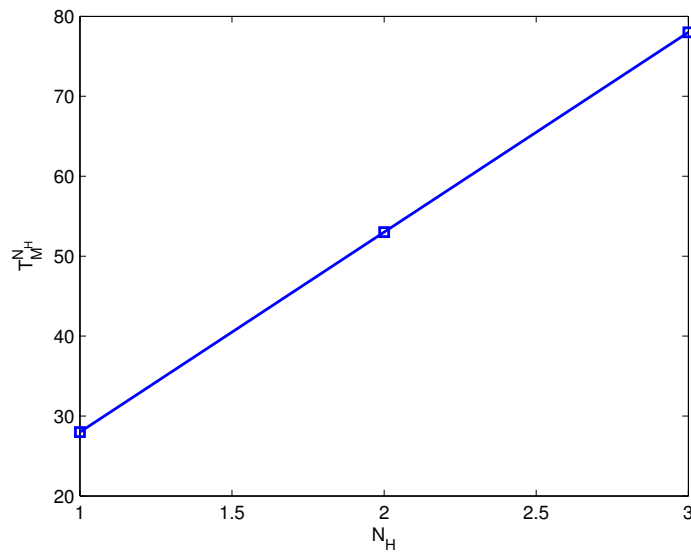
Επομένως, ο συνολικός χρόνος υπολογισμού δίνεται από τη σχέση

$$T_{tot}^{hb} = T_{ps}^{hb} \cdot T_M \cdot f \quad (6.2.1)$$

Το επόμενο βήμα είναι ο προσδιορισμός των συντελεστών T_{ps}^{hb} και f στο πρόβλημα που εξετάστηκε στην παρούσα εργασία.

ΣΥΣΧΕΤΙΣΗ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΟΥ ΚΟΣΤΟΥΣ ΜΕ ΤΟΝ ΑΡΙΘΜΟ ΤΩΝ ΑΡΜΟΝΙΚΩΝ

Σε αυτήν την υποενότητα θα γίνει εκτίμηση του παράγοντα f . Για να γίνει αυτό υπολογίστηκε ο χρόνος τερματισμού του προγράμματος για όλες τις περιπτώσεις που αναφέρθηκαν σε αυτή τη διπλωματική. Στη συνέχεια, διαιρέθηκε με το συνολικό αριθμό των ψευδοχρονικών βημάτων για κάθε περίπτωση και προσδιορίστηκε ο χρόνος μετάβασης απο μια ψευδοχρονική στιγμή στην επόμενη. Στο σχήμα 6.7 παρουσιάζεται ο συνολικός χρόνος υπολογισμού σε συνάρτηση με τον αριθμό των αρμονικών και παρατηρείται γραμμική συσχέτιση. Η περίπτωση που αντιστοιχεί στο συγκεκριμένο σχήμα είναι η πρώτη, με ημιτονοειδή χρονική διέγερση και συχνότητα 0.1. Η ίδια διαδικασία ακολουθήθηκε και για τις υπόλοιπες περιπτώσεις και οι χρόνοι υπολογισμού βρέθηκαν ταυτόσημοι. Αυτό το συμπέρασμα, είναι δυνατόν να θεωρηθεί αναμενόμενο, διότι ο χρόνος μετάβασης T_M εξαρτάται από το μέγεθος του γραμμικού συστήματος που επιλύεται με το σχήμα Jacobi. Το μέγεθος αυτού του συστήματος είναι ανεξάρτητο από την περίπτωση που επιλύεται κάθε φορά.



Σχήμα 6.7: Συσχέτιση απαιτούμενου χρόνου $T_M^{N_H}$ (σε δευτερόλεπτα) για τον υπολογισμό των μεγεθών της ροής σε δέκα συνεχόμενες ψευδοχρονικές στιγμές, με τον χρησιμοποιούμενο αριθμό αρμονικών.
Συνάρτηση διέγερσης $a(t) = 3^{\circ} \sin(2f_r t)$ με $f_r = 0.1$.

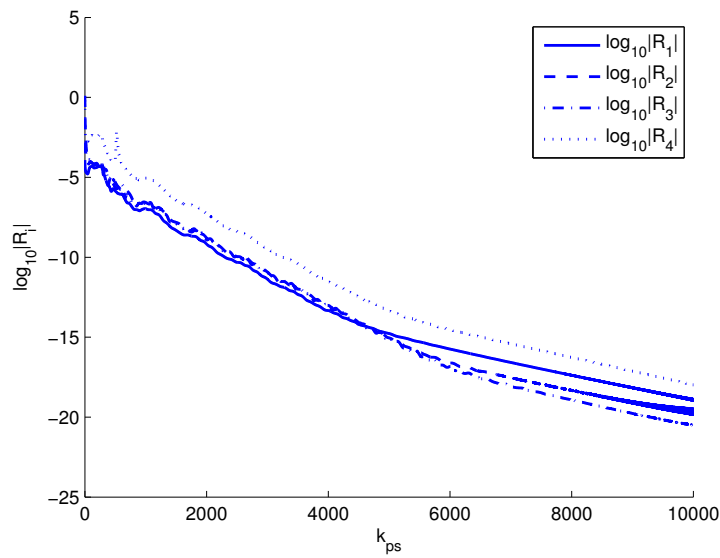
Με βάση αυτά τα συμπεράσματα ο παράγοντας f ορίζεται απο τη σχέση

$$f = 1 + \frac{N_H \cdot \Delta T}{T_M} \quad (6.2.2)$$

όπου ΔT η αύξηση του υπολογιστικού χρόνου.

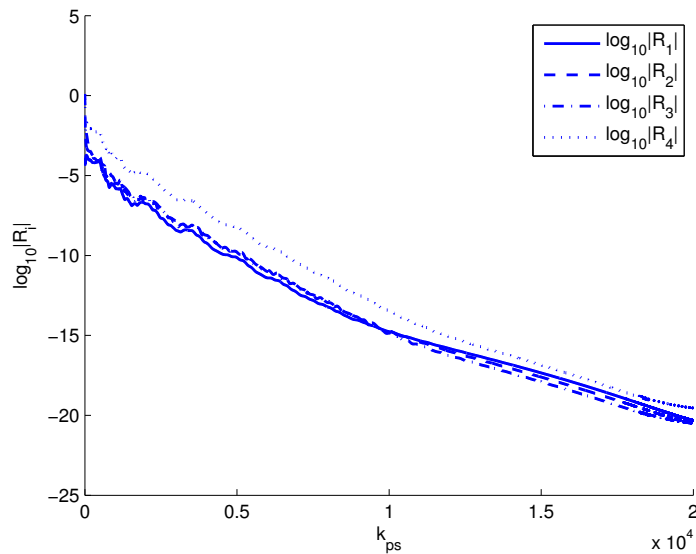
ΑΡΙΘΜΟΣ ΨΕΥΔΟΧΡΟΝΙΚΩΝ ΕΠΑΝΑΛΗΨΕΩΝ

Στα σχήματα 6.8 και 6.9 παρουσιάζονται οι ρυθμοί σύγκλισης για τις πρώτες δύο περιπτώσεις με ημιτονοειδείς συναρτήσεις διέγερσης και συχνότητες 0.1 και 0.5 αντίστοιχως. Είναι εμφανές, ότι με τον πενταπλασιασμό της συχνότητας απαιτείται διπλάσιος αριθμός επαναλήψεων για τη σύγκλιση. Με την αύξηση του αριθμού των αρμονικών πρακτικά, δεν παρατηρήθηκαν διαφορές στο ρυθμό σύγκλισης.



Σχήμα 6.8: Ρυθμός σύγκλισης της μεθόδου ισορροπίας των αρμονικών με $N_H = 1$ αρμονική. Στον κάθετο άξονα βρίσκεται ο δεκαδικός λογάριθμος της απολύτου τιμής, των συνιστωσών του διανύσματος του υπολοίπου. Στον οριζόντιο άξονα φαίνονται οι τιμές των ψευδοχρονικών βημάτων.

Συνάρτηση διέγερσης $a(t) = 3^{\circ} \sin(2f_r t)$ με $f_r = 0.1$.



Σχήμα 6.9: Ρυθμός σύγκλισης της μεθόδου ισορροπίας των αρμονικών με $N_H = 1$ αρμονική.

Συνάρτηση διέγερσης $a(t) = 3^{\circ} \sin(2f_r t)$ με $f_r = 0.5$.

6.3 ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΟΥ ΚΕΡΔΟΥΣ

Σε αυτήν την ενότητα με βάση τους τύπους 6.1.1 και 6.2.1 γίνεται εκτίμηση των χρόνων υπολογισμού για τις δύο μεθόδους και συγκρίνονται μεταξύ τους. Ορίζεται ο λόγος

$$Ef = \frac{T_{tot}^{hb}}{T_{tot}^{tm}} \Leftrightarrow$$

$$Ef = \frac{T_{ps}^{hb} \cdot f}{N \cdot C \cdot T_{ps}^{tm}} \quad (6.3.1)$$

- Περίπτωση με ημιτονοειδή συνάρτηση χρονικής διέγερσης και ανηγμένη συχνότητα $f_r = 0.1$.

Όπως προαναφέρθηκε, για την μέθοδο της χρονοπροέλασης ο αριθμός των ψευδοχρονικών επαναλήψεων παραμένει περίπου σταθερός και ίσος με $T_{ps}^{hb} = 2000$. Για συχνότητα 0.1 το μεταβατικό φαινόμενο έχει αποκατασταθεί στο δεύτερο κύκλο επομένως $C = 2$. Τέλος, θεωρείται χρονική διαμέριση $N = 36$ βημάτων ανά περίοδο που όπως αποδείχτηκε έχει ικανοποιητική ακρίβεια.

Για την μέθοδο της ισορροπίας των αρμονικών απαιτούνται $T_{ps}^{hb} = 10000$ ψευδοχρονικές επαναλήψεις. Ακόμη, από το σχήμα 6.7 φαίνεται ότι $\Delta T \approx 25$ άρα $f \approx 4.11$. Ο παράγοντας T_M ισούται με $1/3 \cdot \Delta T = 8.33$ αφού από το $N_H = 0$ στο $N_H = 1$ οι μεταβλητές τριπλασιάζονται. Επομένως, $f = 4$ και χρησιμοποιώντας τη σχέση 6.3.1 προκύπτει $E_f = 0.28$.

Για διπλάσιο αριθμό αρμονικών $N_H = 2$ η τιμή του συντελεστή f αυξάνεται στην τιμή 7 που συνεπάγεται ότι ο χρόνος υπολογισμού με τις αρμονικές αυξάνεται και ο λόγος E_f αυξάνεται στην τιμή 0.49.

- Περίπτωση με ημιτονοειδή συνάρτηση χρονικής διέγερσης και ανηγμένη συχνότητα $f_r = 0.5$.

Τα μεγέθη που μεταβάλλονται είναι ο αριθμός των κύκλων $C = 4$ και ο αριθμός των ψευδοχρονικών επαναλήψεων $T_{ps}^{hb} = 20000$, επειδή όμως και τα δύο μεγέθη διπλασιάζονται, οι λόγοι E_f δεν μεταβάλλονται.

Απο τα παραπάνω, είναι εμφανής η βαρύτητα του συντελεστή f στην αποδοτικότητα της μεθόδου των αρμονικών.

Κεφάλαιο 7

ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ- ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Σε αυτήν τη διπλωματική εφαρμόστηκε η μέθοδος της ισορροπίας των αρμονικών για την επίλυση χρονικά περιοδικών στρωτών ροών. Ο σκοπός της διπλωματικής είναι διττός, αφενός να συγκριθούν τα αποτελέσματα της νέας μεθόδου με τα αποτελέσματα της προυπάρχουσας μεθόδου της χρονοπροέλασης, αφετέρου να εξετασθεί το κέρδος που επιτυγχάνεται σε υπολογιστικό χρόνο. Στο πρόβλημα που μελετήθηκε εξετάστηκαν συνολικά τέσσερις περιπτώσεις, δύο με ημιτονοειδή χρονική μεταβολή της γωνίας και συχνότητες 0.1 και 0.5 και στις υπόλοιπες περιπτώσεις θεωρήθηκαν δύο συνθετότερες μεταβολές της γωνίας. Στο τελευταίο κεφάλαιο αναλύθηκαν λεπτομερέστερα οι παράγοντες που επηρεάζουν το υπολογιστικό κόστος και για τις δύο μεθόδους. Απο αυτήν την μελέτη προκύπτουν τα ακόλουθα συμπεράσματα

- Τα αποτελέσματα της μεθόδου της ισορροπίας των αρμονικών είναι πρακτικά ταυτόσημα με τα αποτελέσματα της μεθόδου της χρονοπροέλασης, αρκεί να χρησιμοποιηθεί επαρκής αριθμός αρμονικών. Όσο πολυπλοκότερη είναι η συνάρτηση χρονικής διέγερσης απαιτείται μεγαλύτερος αριθμός αρμονικών για την προσέγγιση των περιοδικών μεγεθών, όπως είναι άλλωστε και αναμενόμενο. Με την αύξηση της συχνότητας από 0.1 σε 0.5 δεν παρατηρήθηκε η ανάγκη χρησιμοποίησης περισσότερων αρμονικών για την προσέγγιση του φαινομένου.
- Παρατηρήθηκε μείωση του ρυθμού σύγκλισης της μεθόδου της ισορροπίας των αρμονικών με την αύξηση της συχνότητας. Ο καθοριστικότερος όμως παράγοντας που αυξάνει το υπολογιστικό κόστος είναι η αύξηση των αγνώστων μεταβλητών κατά ένα παράγοντα $N_T = 2N_H + 1$. Στην παρούσα εργασία, έγινε σειριακή επίλυση του προβλήματος και παρατηρήθηκε για δύο αρμονικές μείωση του υπολογιστικού χρόνου στο μισό, συγκριτικά με τη μέθοδο της χρονοπροέλασης. Πρέπει όμως να σημειωθεί, ότι με την μέθοδο της ισορροπίας των αρμονικών αυξάνονται οι δυνατότητες παράλληλου προγραμματισμού του προβλήματος, διότι οι διάφορες χρονικές στιγμές μέσα στην περίοδο επιλύονται όλες μαζί σε αντίθεση με την μέθοδο της χρονοπροέλασης, που η μετάβαση γίνεται σειριακά από ένα

χρονικό βήμα στο επόμενο. Το κέρδος σε υπολογιστικό χρόνο με παράλληλη επεξεργασία μπορεί να αποτελέσει αντικείμενο μιας επόμενης διπλωματικής.

Βιβλιογραφία

- [1] Γ.Κανέλλης:Θεμελίωση και προγραμματισμός της μεθόδου της Ισορροπίας των Αρμονικών στην αριθμητική επίλυση περιοδικών πεδίων ροής. Διπλωματική εργασία,Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο,Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών,Τομέας Ρευστών,Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών 2011.
- [2] Θ.Ζερβογιάννης: Μέθοδοι βελτιστοποίησης στην αεροδυναμική και τις στροβιλομηχανές με χρήση συζυγών τεχνικών, υβριδικών πλεγμάτων και του ακριβούς εσσιανού μητρώου, Διδακτορική διατριβή, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών, Τομέας Ρευστών, Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών. 2011.
- [3] Gilbert Strang:Γραμμική Άλγεβρα και Εφαρμογές. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης
- [4] Κ.Χ.Γιαννάκογλου: Συνεκτικές ροές στις στροβιλομηχανές, ΕΜΠ, 2004.
- [5] Eleuterio F.Toro:Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics.Springer
- [6] Culbert B.Laney:Computational Gas Dynamics.Cambridge
- [7] Ronals.E.Mickens:Truly Nonlinear Oscillations.World Scientific
- [8] Chad H. Custer:A Nonlinear Harmonic Balance Solver for an Implicit CFD Code: OVERFLOW 2
- [9] Kenneth C. Hall, Jeffrey P.Thomas and W.S. Clark: Computation of Unsteady Nonlinear Flows in Cascades Using a Harmonic Balance Technique. AIAA Journal, Vol. 40, No.5, May 2002.
- [10] Kivanc Ekici and Kenneth C. Hall. Nonlinear analysis of unsteady flows in multistage turbomachines using the harmonic balance technique. In 44th AIAA 133 Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, Reno, NV, January 2006. AIAA Paper 2006-0422
- [11] Vilmin, S., Lorrain E., and Hirsch, C.: Unsteady Flow Modeling Across the Rotor/Stator Interface Using the Nonlinear Harmonic Method, ASME Paper GT-2006-90210, (2006)

- [12] Frédéric Sicot, Guillaume Dufour, Nicolas Gourdain: A Time-Domain Harmonic Balance Method for Rotor/Stator Interactions.
- [13] Jeffrey P. Thomas, Earl H. Dowell and Kenneth C. Hall: A Harmonic Balance approach for modeling three-Dimensional Nonlinear Unsteady Aerodynamics and Aeroelasticity. 2002.
- [14] He, L. and Ning, W.: Efficient Approach for Analysis of Unsteady Viscous Flows in Turbomachines, AIAA Journal, Vol. 36, No. 11, (1998).