



Βελτιστοποίηση Τοπολογίας
στη Μηχανική των Ρευστών με
χρήση της Συνεχούς Συζυγούς
Μεθόδου. Παραμετρική Μελέτη
& Εφαρμογές

*«Topology Optimization in Fluid Mechanics using Continuous
Adjoint Method. Parametric Studies & Applications»*

Δημήτριος Γ. Αγγέλης

ΜΟΝΑΔΑ ΠΑΡΑΛΛΗΛΗΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ
ΡΕΥΣΤΟΔΥΝΑΜΙΚΗΣ & ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ |
ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΡΕΥΣΤΩΝ

ΜΟΝΑΔΑ ΠΑΡΑΛΛΗΛΗΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ
ΡΕΥΣΤΟΔΥΝΑΜΙΚΗΣ & ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ

**Βελτιστοποίηση Τοπολογίας στη Μηχανική των Ρευστών με
χρήση της Συνεχούς Συζυγούς Μεθόδου. Παραμετρική
Μελέτη & Εφαρμογές**

Topology Optimization in Fluid Mechanics using Continuous Adjoint Method.
Parametric Studies & Applications

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΔΗΜΗΤΡΙΟΣ Γ. ΑΓΓΕΛΗΣ

Επιβλέπων: ΚΥΡΙΑΚΟΣ Χ. ΓΙΑΝΝΑΚΟΓΛΟΥ

Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Οκτώβρης 2012

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΡΕΥΣΤΩΝ

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΘΕΡΜΙΚΩΝ ΣΤΡΟΒΙΛΟΜΗΧΑΝΩΝ

ΜΟΝΑΔΑ ΠΑΡΑΛΛΗΛΗΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ ΡΕΥΣΤΟΔΥΝΑΜΙΚΗΣ &
ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ

Βελτιστοποίηση Τοπολογίας στη Μηχανική των Ρευστών με χρήση της Συνεχούς Συζυγούς Μεθόδου. Παραμετρική Μελέτη & Εφαρμογές

Διπλωματική Εργασία

Δημητρίου Γ. Αγγέλη

Επιβλέπων: ΚΥΡΙΑΚΟΣ Χ. ΓΙΑΝΝΑΚΟΓΛΟΥ, Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Οκτώβριος 2012

Στην παρούσα διπλωματική εργασία αναλύεται και εφαρμόζεται η βελτιστοποίηση τοπολογίας σε προβλήματα που διέπονται από τις εξισώσεις Navier – Stokes για στρωτές ροές. Η βελτιστοποίηση πραγματοποιείται με τη μέθοδο της απότομης καθόδου για την οποία απαιτούνται οι παράγωγοι ευαισθησίας της αντικειμενικής συνάρτησης ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού ή πορώδες σε κάθε κόμβο του αριθμητικού πλέγματος. Για τον υπολογισμό των παραγώγων ευαισθησίας χρησιμοποιείται η συνεχής συζυγής μέθοδος έναντι της διακριτής. Αφού προστεθούν στις εξισώσεις ροής όροι που περιέχουν τις τοπολογικές μεταβλητές ή πορώδες, ο αλγόριθμος βελτιστοποίησης βασίζεται στην επίλυση του ευθέος και του συζυγούς προβλήματος και την ανανέωση των μεταβλητών σχεδιασμού μέχρι τη σύγκλιση της συνάρτησης κόστους. Σημαντική επιδίωξη αποτελεί η ανάλυση της συμπεριφοράς του αλγορίθμου ως προς συγκεκριμένες παραμέτρους που υπεισέρχονται στις εξισώσεις και για το σκοπό αυτό πραγματοποιείται παραμετρική μελέτη. Τα παραπάνω εφαρμόζονται σε 2D απλοποιημένα προβλήματα στο ανοικτό λογισμικό OpenFOAM, όπου μπορεί να γίνει αντιληπτή η ευαισθησία της μεθόδου στις αλλαγές των παραμέτρων. Η σύγκλιση επιτυγχάνεται με τέτοιο τρόπο ώστε κριτήριο βελτιστοποίησης να αποτελεί το σταθμισμένο γραμμικό άθροισμα των απωλειών ολικής πίεσης, που πρέπει να ελαχιστοποιηθούν και της θερμοκρασιακής διαφοράς εξόδου – εισόδου, που πρέπει να μεγιστοποιηθεί. Τα αποτελέσματα που προέκυψαν οδήγησαν στη διεξαγωγή συμπερασμάτων για την αξιοπιστία της μεθόδου.

NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY OF ATHENS

SCHOOL OF MECHANICAL ENGINEERING

DEPARTMENT OF FLUIDS

LABORATORY OF THERMAL TURBOMACHINES

PARALLEL CFD & OPTIMIZATION UNIT

Topology Optimization in Fluid Mechanics using Continuous Adjoint
Method. Parametric Studies & Applications

Diploma Thesis

Dimitrios G. Angelis

Supervisor: K.C. Giannakoglou, Professor NTUA

October 2012

In this diploma thesis, the topology optimization method is analyzed and applied in laminar flow cases governed by Navier – Stokes equations. Optimization is carried out through the steepest descent method, where the sensitivity derivatives of the objective function with respect to the design variables or porosity at each grid node are computed. To compute the sensitivity derivatives, the continuous adjoint method is used. Once terms containing the topological variables or porosity are added to the flow equations, the optimization algorithm relies on solving the primal (flow) and the adjoint problem and updating the design variables until convergence of the cost function. Important goal is to analyze the behavior of the algorithm for specific parameters involved in the equations and for this purpose parametric study shall take place. These are applied to 2D simplified cases and solved by the existing code on the free package OpenFOAM. Convergence is achieved so that the optimization criterion corresponds to the weighted linear sum of the volume-averaged total pressure losses, to be minimized and the temperature difference between the outlet and the inlet to the flow domain, to be maximized. The output results led to conclusions for the reliability of topology optimization and its advantages.

Ευχαριστίες

Με την εκπόνηση της διπλωματικής μου εργασίας στη Μονάδα Παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής & Βελτιστοποίησης του Εργαστηρίου Θερμικών Στροβιλομηχανών του Τμήματος Μηχανολόγων Μηχανικών του Εθνικού Μετσοβίου Πολυτεχνείου, ολοκληρώνονται οι σπουδές μου ως προπτυχιακός φοιτητής.

Αρχικά, θα ήθελα να εκφράσω την ευγνωμοσύνη μου προς τον Καθηγητή Κ.Χ. Γιαννάκογλου για την ευκαιρία που μου έδωσε να ασχοληθώ με το παρόν ενδιαφέρον τεχνολογικό θέμα, την βοήθειά του σε θέματα κατανόησης ακόμα κι αν αυτά ήταν προαπαιτούμενα και την αφιέρωση χρόνου για την όσο το δυνατόν ορθότερη εκπόνησή του. Ακόμα, είμαι ειλικρινά ευγνώμων σε όλη την ερευνητική ομάδα της ΜΠΥΡΔ&Β/Ε.Μ.Π. για τη διάθεση βοήθειας σε οποιαδήποτε απορία μου διατυπωνόταν και ιδιαίτερα τον υποψήφιο Διδάκτορα Ε. Παπουτσή ο οποίος ήταν πρόθυμος να βοηθήσει σε κάθε μου δυσκολία, να με καθοδηγήσει, να μου εξηγήσει δυσνόητα κατ' εμέ κομμάτια της εργασίας μου και να συμβάλει σε αυτή.

Με ζωντανές ακόμα τις μνήμες στα φοιτητικά έδρανα θέλω, επίσης, να ευχαριστήσω τους συμφοιτητές μου Χάρη, Θέμη, Σοφία και Γιάννα για τη συνεργασία που είχαμε αυτά τα χρόνια κατά τη φοίτησή μας στο Ε.Μ.Π. Επιπλέον, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους γονείς μου, Γεώργιο και Ευανθία, και τον αδερφό μου, Κωνσταντίνο, για την υπομονή τους σε όλη τη διάρκεια φοίτησής μου, καθώς και τους συνεταιίρους μου για την κατανόησή τους σε θέματα του ωραρίου μου. Τέλος, ευχαριστώ τη φίλη μου Ντίνα και τους 12us.

Δημήτριος Γ. Αγγέλης

Οκτώβρης 2012

*Αφιερώνω αυτήν την εργασία
στον ξάδερφό μου, Δημήτρη
και στην οικογένειά μου.*

Περιεχόμενα

Περίληψη	iii
Abstract	iv
Ευχαριστίες	vi
Περιεχόμενα	ix
Κεφάλαιο 1	1
Εισαγωγή	1
1.1 Γενικά για τη Βελτιστοποίηση	1
1.2 Μέθοδος Βελτιστοποίησης της Τοπολογίας	2
1.3 Συζυγής Μέθοδος Υπολογισμού της Παραγώγου	4
1.4 Δομή της Διπλωματικής Εργασίας	5
Κεφάλαιο 2	7
Ευθύ Πρόβλημα - Επίλυση των Εξισώσεων Ροής	7
2.1 Εξισώσεις Ροής	7
2.2 Εξίσωση Μετάδισης Θερμότητας	8
2.3 Εισαγωγή του Πορώδους	9
2.4 Διακριτοποίηση των Εξισώσεων	11
2.4.1 Αλγόριθμος SIMPLE	11
2.4.2 Ανοικτό Πακέτο OpenFOAM	13
2.4.3 Σχήματα Διακριτοποίησης	14
Κεφάλαιο 3	16
Η Συνεχής Συζυγής Μέθοδος για Στρωτές Ροές Ασυμπίεστου Ρευστού	16
3.1 Εξισώσεις Ροής	16
3.1.1 Οριακές Συνθήκες Εισόδου	17

3.1.2 Οριακές Συνθήκες Εξόδου	18
3.1.3 Οριακές Συνθήκες Στερεών Τοιχωμάτων.....	18
3.2 Εισαγωγή των Συζυγών Μεταβλητών & Διατύπωση των Συζυγών Εξισώσεων.....	19
3.2.1 Συζυγείς Συνθήκες Εισόδου.....	21
3.2.2 Συζυγείς Συνθήκες Εξόδου.....	22
3.2.3 Συζυγείς Συνθήκες Στερεών Τοιχωμάτων.....	22
3.3 Ελαχιστοποίηση Απωλειών Ολικής Πίεσης.....	23
3.4 Μεγιστοποίηση Θερμοκρασιακής Διαφοράς Εξόδου – Εισόδου	24
3.5 Επαυξημένη Αντικειμενική Συνάρτηση	25
Κεφάλαιο 4	27
Βελτιστοποίηση Διαδρομών εντός 2Δ Τετραγωνικού Χωρίου	27
4.1 Αλγόριθμος Βελτιστοποίησης.....	28
4.2 Παραμετρική Μελέτη.....	32
4.2.1 2Δ Χωρίο με μια Είσοδο και μια Έξοδο	33
4.2.2 Μέγεθος Βήματος Απότομης Καθόδου	36
4.2.3 Αριθμοί Reynolds & Prandtl	39
4.2.4 Παράγοντες Βαρύτητας Σταθμισμένης Αντικειμενικής Συνάρτησης	41
4.2.5 Αρχικοποίηση του Εσωτερικού του Διευρυμένου Πεδίου.....	43
4.3 Στρογή της Ροής κατά 90°	45
4.4 Πολλές Είσοδοι και Έξοδοι.....	47
Κεφάλαιο 5	52
Ομαλοποίηση της Βέλτιστης Γεωμετρίας και Επίλυση της Εισερχόμενης Ροής...52	
5.1 Ομαλοποίηση & Γένεση Πλέγματος.....	53
5.1.1 Παραμετροποίηση με Σημεία Ελέγχου Bezier	53
5.1.2 Γένεση Πλέγματος	55
5.2 Επίλυση της Ροής	58

Κεφάλαιο 6	62
Βελτιστοποίηση Διαδρομής 2Δ Χωρίου με Ορθογωνικές Πηγές Θερμότητας.....	62
6.1 Πλέγμα και Σταθερές της Ροής.....	62
6.2 Αποτελέσματα Βελτιστοποίησης	64
6.3 2Δ Χωρίο με τέσσερις Πηγές Θερμότητας, δύο Εισόδους και δύο Εξόδους....	69
Κεφάλαιο 7	72
Ανακεφαλαίωση & Συμπεράσματα.....	72
Παράρτημα Α΄	75
Λειτουργία OpenFOAM - Πλέγμα blockMesh	75
Α΄.1 Λειτουργία OpenFOAM	75
Α΄.2 Πλέγμα blockMesh	77
Παράρτημα Β΄	79
Πλεγματοποιητής front5.exe.....	79
Βιβλιογραφία	80

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

«Πήγαινε όσο πιο μακριά μπορείς να δεις. Όταν φτάσεις εκεί, θα μπορείς να δεις ακόμη μακρύτερα.»

~Thomas Carlyle~

1.1 Γενικά για τη Βελτιστοποίηση

Ανέκαθεν, οι μηχανικοί ανέπτυσαν νέες τεχνολογικές λύσεις στα εκάστοτε προβλήματα που αποσχολούν κατά καιρούς τους ανθρώπους. Κατά τη διαδικασία του μηχανολογικού σχεδιασμού, οι ευθύνες του μηχανικού δύναται να περιλαμβάνουν τη διατύπωση προβλημάτων, τη διενέργεια έρευνας, την ανάλυση κριτηρίων, την εύρεση λύσεων και την ανάληψη αποφάσεων. Ένας από τους βασικότερους στόχους για το σύγχρονο μηχανικό είναι η βελτίωση των χαρακτηριστικών ενός ήδη υπάρχοντος προϊόντος ενός μεγάλου εύρους εφαρμογών, είτε πρόκειται για ένα κινητό τηλέφωνο είτε για ένα αεροπλάνο. Συγκεκριμένοι παράγοντες μπορούν να κάνουν τα προβλήματα βελτιστοποίησης ιδιαίτερα πολύπλοκα και δύσκολα στην επίλυση. Ένας τέτοιος παράγοντας είναι η παρουσία πολλών κριτηρίων βελτιστοποίησης. Από τη μία, η κατασκευή ενός υδραυλικού αγωγού μικρού μήκους αποτελεί μία σχετικά απλή διαδικασία, στόχος της οποίας είναι η άρτια μεταφορά του ρευστού από ένα σημείο σε ένα άλλο με όσο το δυνατόν λιγότερες απώλειες. Από την άλλη, ωστόσο, τα τυπικά προβλήματα του μηχανικού διέπονται από πεπλεγμένες σχέσεις μεταξύ των στόχων, που άλλοτε είναι ασύμβατοι και άλλοτε

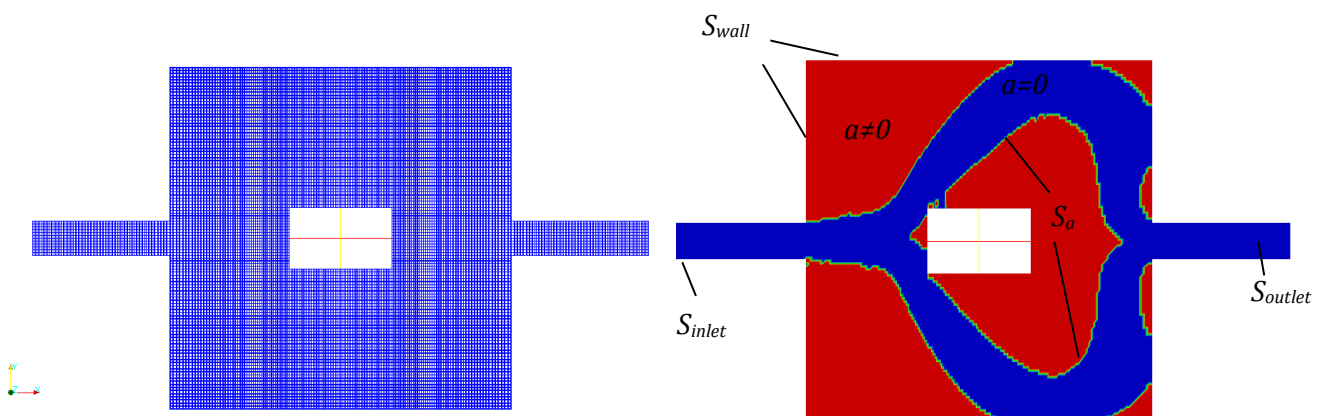
αντικρουόμενοι, λ.χ. η διαδικασία βελτιστοποίησης μίας μηχανής εσωτερικής καύσεως πρέπει να λαμβάνει υπόψη της τις απώλειες τριβής του εμβόλου, την αυξημένη απόδοση της μηχανής, το μειωμένο κόστος καυσίμου, την ευκολία συντήρησης των εξαρτημάτων κ.ο.κ. Καθένα από τα κριτηρία αυτά, αποτελεί και μια συνάρτηση κόστους για το πρόβλημα, παρόλο που κάποιο ενδέχεται να μην εκφράζεται ρητά με μια μαθηματική έκφραση. Σκοπός είναι η κατασκευή εκείνης της 'βέλτιστης' μηχανής, η οποία παρόλο που δεν θα είναι η καλύτερη για κάθε στόχο ξεχωριστά, θα έχει βρει τη 'χρυσή τομή' μεταξύ των κριτηρίων και θα ταιριάζει απόλυτα σε εκείνη την εφαρμογή, για την οποία βελτιστοποιήθηκε. Για την επίλυση των προβλημάτων βελτιστοποίησης αναπτύχθηκαν διαφορετικές μέθοδοι, κάθε μία με τα δικά της πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα ως προς την ταχύτητα επίλυσης, τον εντοπισμό καθολικών ή τοπικών βέλτιστων λύσεων κλπ. Μία διάκριση των μεθόδων βελτιστοποίησης είναι σε αιτιοκρατικές (deterministic) και στοχαστικές (stochastic)^[1], με τις τελευταίες να χαρακτηρίζονται από την τυχαιότητα αναζήτησης της βέλτιστης λύσης, π.χ. εξελικτικοί αλγόριθμοι. Οι αιτιοκρατικές μέθοδοι, οι οποίες δεν έχουν καθόλου στοχαστικά στοιχεία, βρίσκουν το ολικό ελάχιστο εφαρμόζοντας μια εξαντλητική αναζήτηση σε όλο το πεδίο ορισμού των μεταβλητών της συνάρτησης κόστους. Τα αποτελέσματα αυτών των μεθόδων είναι εγγυημένα αλλά για να εφαρμοστούν πρέπει η συνάρτηση κόστους να πληρεί κάποιες προϋποθέσεις λ.χ. σταθερά Lipschitz^[15]. Δυστυχώς, όμως, η εξέταση αυτών των προϋποθέσεων σε επίπεδο υλοποίησης δεν είναι πάντα εύκολη και εφικτή. Οι αιτιοκρατικές μέθοδοι βασίζονται στον υπολογισμό της παραγώγου της αντικειμενικής συνάρτησης. Όλα τα κριτηρία, λοιπόν, ως προς τα οποία θα πραγματοποιηθεί η βελτιστοποίηση εκφράζονται σε μία μαθηματική έκφραση που αποτελεί αυτήν την αντικειμενική συνάρτηση, με τέτοιο τρόπο ώστε το φυσικώς πολυκριτηριακό πρόβλημα να ανάγεται σε ένα μαθηματικά μονοκριτηριακό πρόβλημα. Στην παρούσα διπλωματική εργασία αναλύεται και εφαρμόζεται η μέθοδος βελτιστοποίησης τοπολογίας που προτάθηκε πρώτα για προβλήματα που διέπονται από τις εξισώσεις ροής, από τον Othmer^[2] και αποτελεί μία αιτιοκρατική μέθοδο βελτιστοποίησης.

1.2 Μέθοδος Βελτιστοποίησης της Τοπολογίας

Περισσότερο από 20 χρόνια πριν, η βασική ιδέα της βελτιστοποίησης της τοπολογίας προτάθηκε, για πρώτη φορά, σε δομικά προβλήματα μηχανικής όπου η διατύπωση και η αριθμητική επίλυση των εξισώσεων βασίστηκε σε όρους πυκνότητας των υλικών, με σκοπό να εντοπισθούν οι περιοχές που πρέπει να ενισχυθούν με υλικό ώστε να επιτευχθεί μεγαλύτερη δομική

3 Εισαγωγή

στιβαρότητα^{[2],[3],[16]}. Αργότερα, η επιτυχία της μεθόδου στα δομικά προβλήματα γέννησε την ιδέα εφαρμογής της και σε προβλήματα υπολογιστικής ρευστοδυναμικής τόσο για στρωτές όσο και για τυρβώδεις ροές. Η μέθοδος βελτιστοποίησης τοπολογίας (topology optimization) στη μηχανική των ρευστών, αποτελεί μία σχετικά νέα μέθοδο, βασικό χαρακτηριστικό της οποίας είναι η προσθήκη όρων στις εξισώσεις της ροής που βασίζονται σε μία τοπολογική μεταβλητή - το πορώδες α - και στον υπολογισμό της ευαισθησίας της αντικειμενικής συνάρτησης ως προς το πεδίο του πορώδους. Σημείο εκκίνησης της συγκεκριμένης μεθόδου βελτιστοποίησης είναι ένα υπολογιστικό πλέγμα που περιλαμβάνει το σύνολο του χώρου εγκατάστασης. Μέσα σε αυτό το διευρυμένο χωρίο επιδιώκεται να βρεθεί η βέλτιστη λύση, βάσει κριτηρίων που θέτει η αντικειμενική συνάρτηση ή συνάρτηση κόστους. Σε κάθε κύκλο της βελτιστοποίησης υπολογίζεται η τιμή του πορώδους σε καθέναν από τους κόμβους του ευρύτερου χωρίου, έτσι ώστε να ξεχωρίσουν οι κόμβοι, τους οποίους περνά το ρευστό, από εκείνους στους οποίους δεν υπάρχει ροή και άρα αποτελούν τα στερεά τοιχώματα που την περιβάλλουν. Και αυτό με κριτήριο πάντα την επιλεγμένη συνάρτηση κόστους.



Σχήμα 1.2.1: Σχηματική απεικόνιση του διευρυμένου πεδίου και των ορίων του, στο οποίο φαίνεται η κατανομή του πορώδους. Με S_{inlet} , S_{outlet} , S_{wall} συμβολίζονται η είσοδος, η έξοδος και τα στερεά τοιχώματα του χωρίου. Ο αλγόριθμος βελτιστοποίησης της τοπολογίας αναζητά τη βέλτιστη κατανομή του πορώδους με στόχο την ελαχιστοποίηση της αντικειμενικής συνάρτησης που έχει επιλεχθεί. Με το πέρας των κύκλων βελτιστοποίησης, καθορίζονται οι κόκκινες περιοχές με μη-μηδενικό πορώδες ($\alpha \neq 0$) που ανήκουν στο στερεό τμήμα του χωρίου όπου πρακτικά υπάρχει μηδενική ροή. Οι μπλε περιοχές δείχνουν τη διαδρομή του ρευστού ($\alpha = 0$). Τα νέα στερεά τοιχώματα, S_a , είναι οι επαφές μεταξύ των δύο προαναφερθεισών περιοχών. Αριστερά παρουσιάζεται το υπολογιστικό πλέγμα του ευρύτερου χωρίου.

Προφανώς, η μέθοδος βελτιστοποίησης τοπολογίας φαντάζει ιδανική για το σχεδιασμό γεωμετριών ελεύθερης μορφής, για τις οποίες δεν είναι αρχικά γνωστή μια συγκεκριμένη παραμετροποίηση, με την οποία το αποτέλεσμα πρέπει να είναι συμβατό. Αντίθετα, παρέχει τη δυνατότητα σχεδιασμού από το μηδέν και ξεκινά από ένα πλέγμα ενός διευρυμένου χωρίου και μόνο αφαιρεί

κόμβους. Αρχικοποιώντας με συγκεκριμένες τιμές τις τοπολογικές μεταβλητές στους κόμβους του ευρύτερου χωρίου, ο αλγόριθμος βελτιστοποίησης τοπολογίας αφού λύσει τις εξισώσεις ροής για το ευθύ και το συζυγές πρόβλημα, ανανεώνει τις τιμές του πορώδους α με τη μέθοδο της απότομης καθόδου (steepest descent). Η βελτιστοποίηση στοχεύει στον υπολογισμό της κατανομής του πορώδους στο σύνολο του χώρου εγκατάστασης, η οποία ελαχιστοποιεί τη συνάρτηση κόστους. Ανάλογα με τις τοπικές τιμές του πορώδους, αναγνωρίζονται οι περιοχές οι οποίες ανταποκρίνονται στη ροή του ρέοντος ρευστού, ενώ οι εναπομείνουσες περιοχές καθορίζουν τον περιβάλλοντα στερεό χώρο (σχήμα 1.2.1).

Ωστόσο, για να υπολογισθεί το πεδίο του πορώδους, πρέπει να βρεθούν οι παράγωγοι ευαισθησίας της αντικειμενικής συνάρτησης ως προς αυτό. Για το σκοπό αυτό, χρησιμοποιείται η συνεχής συζυγής μέθοδος (continuous adjoint method)^[1], έτσι ώστε να υπολογισθούν οι απαιτούμενες παράγωγοι ευαισθησίας και μέσω αυτών να γίνει δυνατή η δημιουργία χαρτών ευαισθησίας του χωρίου ροής στις μεταβολές του πορώδους, ώστε τελικά να προκύψει η βέλτιστη κατανομή του πορώδους και άρα η βέλτιστη γεωμετρία.

1.3 Συζυγής Μέθοδος Υπολογισμού της Παραγώγου

Σε φυσικά προβλήματα, τα οποία διέπονται από συστήματα μερικών διαφορικών εξισώσεων (μ.δ.ε.) και έχει επιλεγεί μια αιτιοκρατική μέθοδος βελτιστοποίησης απαιτείται ο υπολογισμός των παραγώγων ευαισθησίας ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού. Η αναλυτική λύση των εξισώσεων με τις οποίες περιγράφονται τα διάφορα τεχνικά προβλήματα είναι δυνατή μόνο σε ειδικές περιπτώσεις, όπου οι καταπονήσεις και τα γεωμετρικά σχήματα είναι πάρα πολύ απλά. Όμως, υπήρχε η ανάγκη να λυθούν και πιο σύνθετα προβλήματα και γι' αυτό το λόγο αναπτύχθηκαν διάφορες προσεγγιστικές μέθοδοι. Μια από τις κλασικές μεθόδους υπολογισμού της γενικευμένης έννοιας της παραγώγου της αντικειμενικής συνάρτησης είναι η μέθοδος των πεπερασμένων διαφορών. Αυτή η μέθοδος είναι μεν προσεγγιστική, αλλά μπορεί να δώσει αξιόπιστα αποτελέσματα και έχει το πλεονέκτημα ότι μπορεί να εφαρμοστεί σε όλα τα προβλήματα. Το μειονέκτημά της είναι οι αυξημένες απαιτήσεις σε υπολογιστική ισχύ, ιδίως όταν εφαρμόζεται σε σύνθετα μοντέλα. Ωστόσο, σε αντικατάσταση της μεθόδου των πεπερασμένων διαφορών για τον υπολογισμό της κλίσης, χρησιμοποιείται μία θεωρία βέλτιστου ελέγχου, η

συζυγής μέθοδος (adjoint method)^{[4],[13],[14],[18]}, η οποία μειώνει δραστικά την εξάρτηση του συστήματος από τον αριθμό των παραμέτρων ελέγχου. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα την υπεροχή της συζυγούς μεθόδου σε σχέση με τις άλλες μεθόδους υπολογισμού παραγώγων. Οι συζυγείς μέθοδοι χωρίζονται σε δύο κατηγορίες: τις διακριτές και τις συνεχείς συζυγείς μεθόδους. Στη διακριτή συζυγή μέθοδο (discrete adjoint method), πρώτα διακριτοποιούνται και γραμμικοποιούνται (αν είναι μη γραμμικές) η αντικειμενική συνάρτηση και οι εξισώσεις ροής και, στη συνέχεια, παράγεται η προς επίλυση συζυγής εξίσωση από τις διακριτοποιημένες εξισώσεις της ροής. Η τελευταία προκύπτει σε μητρική μορφή και είναι έτοιμη προς αριθμητική επίλυση. Αντίθετα, η συνεχής συζυγής μέθοδος (continuous adjoint method), πρώτα γραμμικοποιείται και μετά διακριτοποιείται. Η μέθοδος βασίζεται σε μια επαυξημένη μορφή της αντικειμενικής συνάρτησης, η οποία συντίθεται από την αναλυτική έκφραση της αντικειμενικής συνάρτησης λ.χ. μια ολοκληρωματική ποσότητα, και από το ολοκλήρωμα στο σύνολο του χωρίου, των εξισώσεων κατάστασης πολλαπλασιασμένων με τη συνάρτηση των συζυγών μεταβλητών. Στη συνέχεια, προσπαθώντας να καταστεί η μεταβολή της επαυξημένης αντικειμενικής συνάρτησης ανεξάρτητη κάθε μεταβολής των μεγεθών της ροής εντοπίζονται οι ποσότητες που πρέπει να μηδενισθούν και αυτή η διαδικασία μας οδηγεί στις συνεχείς συζυγείς εξισώσεις και τις αντίστοιχες οριακές συνθήκες.

Η παρούσα διπλωματική εργασία ασχολείται με προβλήματα βελτιστοποίησης που διέπονται από τις εξισώσεις Navier – Stokes για ασυμπίεστες ροές, στα οποία είναι απαραίτητος ο υπολογισμός των παραγώγων ευαισθησίας. Η συνεχής συζυγής μέθοδος στηρίζεται στη διατύπωση και επίλυση ενός συστήματος μ.δ.ε., το οποίο αποτελεί το συζυγές πρόβλημα των εξισώσεων κατάστασης. Το μεγαλύτερο, ίσως, πλεονέκτημα των συζυγών μεθόδων είναι ο υπολογιστικός χρόνος, καθώς για τον υπολογισμό των παραγώγων ευαισθησίας απαιτούνται ανεξαρτήτως του πλήθους των μεταβλητών ελέγχου του προβλήματος, δύο επιλύσεις, μία των εξισώσεων κατάστασης και μία των συζυγών εξισώσεων. Γενικά, στόχος είναι η αντικατάσταση των κλασικών μεθόδων υπολογισμού παραγώγων ευαισθησίας, οι οποίες ήταν ιδιαίτερα δαπανηρές σε υπολογιστικό κόστος, με τις πιο γρήγορες και ακριβείς συζυγείς μεθόδους στους αυτοματοποιημένους αλγόριθμους βελτιστοποίησης.

1.4 Δομή της Διπλωματικής Εργασίας

Η δομή της διπλωματικής ως εξής:

- Στο **Κεφάλαιο 2** αναλύονται οι εξισώσεις κατάστασης του ευθέως προβλήματος που διέπουν όλες τις εφαρμογές και η προσθήκη των όρων που περιέχουν τις τοπολογικές μεταβλητές ή πορώδες και περιγράφεται ο αλγόριθμος SIMPLE για την αριθμητική επίλυση των εξισώσεων Navier – Stokes, όπως αυτός υλοποιείται στο ανοικτό πακέτο OpenFOAM.
- Στο **Κεφάλαιο 3** αναλύεται το μαθηματικό υπόβαθρο της συνεχούς συζυγούς μεθόδου που χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό της παραγώγου ευαισθησίας. Επιπλέον, το συγκεκριμένο κεφάλαιο περιλαμβάνει την περιγραφή της αντικειμενικής συνάρτησης που χρησιμοποιείται ως κριτήριο βελτιστοποίησης.
- Στο **Κεφάλαιο 4** εφαρμόζεται η μέθοδος βελτιστοποίησης της τοπολογίας σε τετραγωνικό 2D χωρίο ροής με μια είσοδο και μια έξοδο, για το οποίο αναμένεται μία συγκεκριμένη μορφή της βέλτιστης διαδρομής και αναλύεται η διαδικασία και ο αλγόριθμος βελτιστοποίησης. Επιπλέον, πραγματοποιείται παραμετρική μελέτη ως προς συγκεκριμένες σταθερές του αλγόριθμου. Συγκεκριμένα, μελετάται η συμπεριφορά και η σύγκλιση της συνάρτησης κόστους στις αλλαγές του βήματος απότομης καθόδου, των παραγόντων βαρύτητας, την αρχικοποίηση του εσωτερικού του πεδίου και τους αριθμούς Re και Pr .
- Στο **Κεφάλαιο 5** επιλέγεται μία εύκολη κατασκευαστικά βέλτιστη λύση από αυτές που προέκυψαν στο κεφάλαιο 4, παραμετροποιείται γεωμετρικά με σημεία ελέγχου Bezier και επιλύεται η εισερχόμενη ροή. Στόχος αυτού του κεφαλαίου είναι η επιβεβαίωση των αποτελεσμάτων.
- Στο **Κεφάλαιο 6** βελτιστοποιείται η διαδρομή 2D χωρίου ροής μίας εισόδου και μίας εξόδου με εσώκλειστες ορθογωνικές γεωμετρίες σταθερής θερμοκρασίας και συγκρίνονται τα αποτελέσματα για διαφορετικού είδους συναρτήσεων κόστους. Επιπλέον, η βελτιστοποίηση τοπολογίας εφαρμόζεται σε μια ακόμη περίπτωση με μια είσοδο, τέσσερις πηγές θερμότητας στο εσωτερικό του χωρίου και δύο εξόδους.
- Στο **Κεφάλαιο 7** συνοψίζονται τα συμπεράσματα.

Κεφάλαιο 2

Ευθύ Πρόβλημα – Επίλυση των Εξισώσεων Ροής

2.1 Εξισώσεις Ροής

Στην παρούσα διπλωματική εργασία, το πρωτεύον πρόβλημα διέπεται από τις εξισώσεις μόνιμης στρωτής ροής ασυμπίεστου ρευστού. Άρα, οι εξισώσεις κατάστασης για το ευθύ πρόβλημα είναι οι εξισώσεις Navier – Stokes για 2Δ/3Δ ροές. Ο ισολογισμός μάζας σε έναν όγκο ελέγχου και ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα^{[11],[12]} ορίζουν την εξίσωση της συνέχειας και το θεώρημα διατήρησης της ορμής, αντίστοιχα, στη διαφορική τους διατύπωση:

$$\operatorname{div} \vec{u} = 0 \Leftrightarrow \boxed{\nabla \cdot \vec{u} = 0} \quad (2.1\alpha)$$

$$\operatorname{div}(\vec{u}\vec{u}) - \operatorname{div}(\nu \cdot \operatorname{grad} \vec{u}) = -\operatorname{grad} p \Leftrightarrow \boxed{\nabla \cdot (\vec{u}\vec{u}) - \nabla \cdot (\nu \nabla \vec{u}) = -\nabla p} \quad (2.1\beta)$$

όπου με p, \vec{u} συμβολίζονται η κινηματική στατική πίεση (στατική πίεση διαιρεμένη με την πυκνότητα $\rho, p/\rho$) και το διάνυσμα της, αντίστοιχα. Επίσης, ν είναι η κινηματική συνεκτικότητα του ρευστού ίση με το πηλίκο της δυναμικής συνεκτικότητας μ προς την πυκνότητα, μ/ρ .

Στη στρωτή ροή τα σωματίδια του ρευστού κινούνται κατά μήκος παραλλήλων τροχιών, σε στρώματα. Τα μεγέθη των ταχυτήτων γειτονικών στρωμάτων δεν είναι ίσα ενώ οι διατμητικές δυνάμεις υπερिशύουν. Ο αριθμός

Reynolds, είναι ένα αδιάστατο μέγεθος που δείχνει το λόγο των δυνάμεων αδρανείας ως προς τις δυνάμεις της διάτμησης. Ο τύπος ορισμού του είναι:

$$Re = \frac{\rho U^2}{\frac{\mu}{L}} = \frac{\rho UL}{\mu} = \frac{UL}{\nu} \quad (2.2)$$

όπου ο αριθμητής αντιπροσωπεύει τις δυνάμεις αδρανείας και ο παρονομαστής τις δυνάμεις διάτμησης λόγω τριβών. Τα σημαντικά μεγέθη είναι το κινηματικό ιξώδες ν , η μέση ταχύτητα U και ένα χαρακτηριστικό μήκος της ροής L . Στην περίπτωση της ροής μέσα από αγωγό κυκλικής διατομής, το L είναι η διάμετρος του αγωγού. Σε άλλες ροές, το L είναι ένα χαρακτηριστικό μήκος της ροής. Για παράδειγμα, για την ροή γύρω από μία σφαίρα, το μήκος αυτό θα ήταν η διάμετρος της σφαίρας. Η κρίσιμη τιμή του αριθμού Re , είναι αυτή που διαχωρίζει τη στρωτή ροή από την τυρβώδη, για τις συγκεκριμένες συνθήκες. Η γενικά παραδεκτή τιμή του κρίσιμου Re , δηλαδή για τη μετάβαση από τη στρωτή στην τυρβώδη ροή για την περίπτωση της ροής σε αγωγό είναι 2000. Εφόσον τα προβλήματα που θα μελετηθούν στην παρούσα εργασία χαρακτηρίζονται από στρωτή ροή, ο αριθμός Re πρέπει να κρατηθεί σε χαμηλές τιμές, χωρίς όμως αυτό ποτέ να εξασφαλίζει ότι βρίσκεται κάτω από την κρίσιμη τιμή στην εκάστοτε εφαρμογή.

2.2 Εξίσωση Μετάδοσης Θερμότητας

Στο Σχήμα 2.2.1 διακρίνονται τα ρεύματα θερμότητας τα οποία μεταφέρονται με αγωγή (διάχυση) και συναγωγή σε έναν όγκο ελέγχου^[12]. Ο ισολογισμός ενέργειας σε αυτόν ορίζει την εξίσωση μετάδοσης θερμότητας, η οποία σε διαφορική μορφή διατυπώνεται ως εξής:

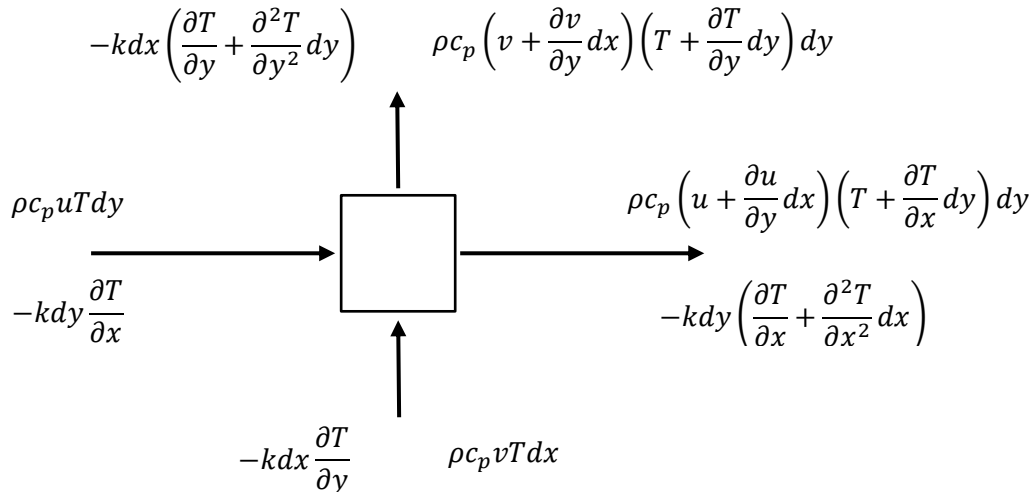
$$\operatorname{div}(\vec{u}T) = \operatorname{div}\left(\frac{\nu}{Pr} \operatorname{grad}T\right) \Leftrightarrow \nabla \cdot (\vec{u}T) = \nabla \cdot \left(\frac{\nu}{Pr} \nabla T\right) \quad (2.3)$$

όπου με T συμβολίζεται η στατική θερμοκρασία και Pr ο αριθμός Prandtl της ροής. Ο αριστερός όρος της εξίσωσης (2.3) ή όρος συναγωγής (convection) υποδεικνύει τη μεταφορά θερμότητας μέσω του ρευστού λόγω της μοριακής κίνησης ενώ ο δεξιός όρος ή όρος διάχυσης (diffusion) τη διάχυση της ενέργειας μέσω των σωματιδιακών αλληλεπιδράσεων.

Ο αριθμός Prandtl είναι ένα αδιάστατο μέγεθος που εκφράζει τη μοριακή ορμή προς τη θερμική αγωγή. Ο τύπος ορισμού του είναι:

$$Pr = \frac{c_p \mu}{k} \quad (2.4)$$

όπου c_p η ειδική θερμοχωρητικότητα και k η ειδική θερμική αγωγιμότητα του ρευστού.



Σχήμα 2.2.1: Διαφορικός όγκος ελέγχου $dx \cdot dy$ για την διατύπωση της εξίσωσης ενέργειας ή μετάδοσης θερμότητας.

Η θερμική αγωγιμότητα αποτελεί μια ιδιαίτερα σημαντική ιδιότητα του ρευστού, έτσι ώστε η τιμή του συντελεστή k να αποτελεί κατά ένα μεγάλο ποσοστό και κριτήριο της καταλληλότητας του ρευστού για δεδομένη χρήση. Ο αριθμός Prandtl είναι αντιστρόφως ανάλογος με το συντελεστή k και, κατά συνέπεια, το κριτήριο αυτό καταλληλότητας αντικατοπτρίζεται στον Pr και τελικά εκφράζεται από αυτόν, όταν τα μεγέθη c_p και μ είναι σταθερές ποσότητες. Στις εφαρμογές που μελετώνται στην παρούσα εργασία, τα μεγέθη αυτά θεωρούνται σταθερά και άρα η τιμή του Pr καθίσταται υπεύθυνη για το επίπεδο (υψηλό ή χαμηλό) της θερμικής αγωγιμότητας του ρευστού. Έτσι, χαμηλές τιμές του Pr θα χαρακτηρίζουν την υψηλή αγωγή συμπεριφορά του ρευστού ενώ οι υψηλές τιμές την χαμηλή αγωγή συμπεριφορά.

2.3 Εισαγωγή του Πορώδους

Σε καθεμιά από τις εξισώσεις ορμής και μετάδοσης θερμότητας, εισάγεται τεχνητά όρος που εξαρτάται από την τοπολογική μεταβλητή α ή πορώδες, όρος που αποτελεί την κεντρική ιδέα της συγκεκριμένης μεθόδου^[2]. Αντίστοιχα με τη

βελτιστοποίηση της τοπολογίας σε δομικά προβλήματα μηχανικής^[3], το ρευστοδυναμικό 'ισοδύναμό' της είναι και αυτό ένα διακριτό πρόβλημα, 0 - 1. Δηλαδή, ένα κελί του πλέγματος είτε ανήκει στη ροή (0) είτε όχι (1). Προκειμένου να καταστεί η μετάβαση μεταξύ των δύο αυτών ακραίων καταστάσεων συνεχής, το διευρυμένο πεδίο σχεδιασμού αντιμετωπίζεται ως ένα πορώδες μέσο. Σε κάθε κελί αποδίδεται μία διαφορετική τοπολογική μεταβλητή ή πορώδες α_{ij} , η οποία μοντελοποιείται μέσω του νόμου του Darcy (Darcy's Law)^[5]. Η τιμή αυτή της μεταβλητής καθορίζει εάν το κελί διαρρέεται από ρευστό (μηδενικές τιμές του πορώδους) ή αντίθετα στερεοποιείται (μη μηδενικές τιμές). Με άλλα λόγια, το πεδίο του πορώδους ελέγχει τη γεωμετρία και οι όροι α_{ij} είναι οι πραγματικές μεταβλητές σχεδιασμού. Τελικά, οι εξισώσεις ροής (2.1) σε συνδυασμό με την εξίσωση μετάδοσης θερμότητας (2.3) που θα χρησιμοποιηθούν στο πρόβλημα βελτιστοποίησης τοπολογίας, σύμφωνα με την παραπάνω λογική παίρνουν την εξής μορφή:

$$\text{Εξ. Συνέχειας:} \quad \nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad (2.5\alpha)$$

$$\text{Εξ. Ορμής:} \quad \nabla \cdot (\vec{u}\vec{u}) - \nabla \cdot (\nu \nabla \vec{u}) + \alpha \vec{u} = -\nabla p \quad (2.5\beta)$$

$$\text{Εξ. Μετάδοσης Θερμότητας:} \quad \nabla \cdot (\vec{u}T) - \nabla \cdot \left(\frac{\nu}{Pr} \nabla T \right) + \alpha(T - T_{wall}) = 0 \quad (2.5\gamma)$$

όπου T_{wall} είναι η επιθυμητή σταθερή θερμοκρασία κάθε στερεού τοιχώματος, θεωρούμενη γνωστή κατά μήκος των στερεών τοιχωμάτων.

Οι εξισώσεις (2.5) λύνονται αριθμητικά σε ένα διευρυμένο χωρίο με συγκεκριμένες εισόδους και εξόδους στα όριά του. Για το σκοπό αυτό, το χωρίο πλεγματοποιείται με την κατάλληλη πύκνωση στα όρια ή γύρω από τις εσώκλειστες γεωμετρίες που συχνά απαντώνται στο εσωτερικό του ευρύτερου πεδίου. Η βελτιστοποίηση στοχεύει στον υπολογισμό του πορώδους πεδίου (porosity field) που ελαχιστοποιεί την αντικειμενική συνάρτηση. Σε εκείνους τους κόμβους του πλέγματος, στους οποίους συναντάται μηδενικό πορώδες, οι όροι αu_i και $\alpha(T - T_{wall})$ απαλείφονται και αυτοί οι κόμβοι ανήκουν στη ροή του ρευστού, αφού οι τοπικές μεταβλητές ροής ικανοποιούν τις εξισώσεις ροής. Αντίθετα, απαιτείται μηδενική ταχύτητα στους κόμβους με πορώδες διαφορετικό του μηδενός, έτσι ώστε από την εξίσωση ορμής να απαλειφθεί ο όρος αu_i και θερμοκρασία ίση με την θερμοκρασία τοιχώματος T_{wall} , έτσι ώστε να συμβεί το αντίστοιχο για τον όρο $\alpha(T - T_{wall})$ της εξίσωσης μετάδοσης θερμότητας, κόμβοι οι οποίοι ορίζουν περιοχές στερεού. Με άλλα λόγια, οι δυο αυτοί όροι επιτρέπουν την 'τιμωρία' των αντιπαραγωγικών κελιών.

2.4 Διακριτοποίηση των Εξισώσεων

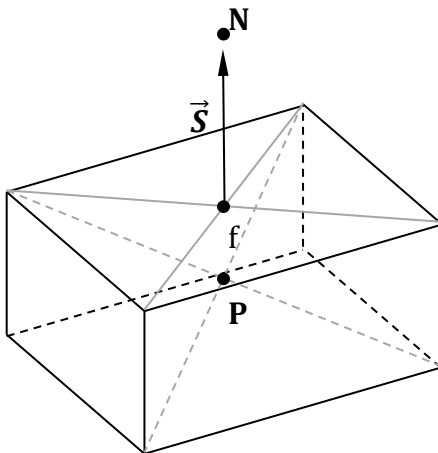
2.4.1 Αλγόριθμος SIMPLE

Ο αλγόριθμος SIMPLE (Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations)^[6] είναι μία αριθμητική μέθοδος για την επίλυση των εξισώσεων Navier - Stokes ασυμπίεστου ρευστού. Οι εξισώσεις συνέχειας και ορμής δεν μπορούν να λυθούν αναλυτικά εφόσον είναι μη-γραμμικές. Επιπλέον, δεν είναι διαθέσιμη μία ρητή εξίσωση για την πίεση. Ο αλγόριθμος SIMPLE δημιουργεί μία τέτοια εξίσωση μέσω της μερικής διαφορίσης της εξίσωσης της ορμής και αντικατάστασή της σε αυτήν της συνέχειας. Η εξίσωση της ορμής μπορεί να ξαναγραφτεί στην εξής μερική διακριτοποιημένη κεντροκυψελική διατύπωση:

$$\gamma_P \bar{u}_P = H(\bar{u}) - \nabla p \Leftrightarrow \bar{u}_P = \frac{H(\bar{u})}{\gamma_P} - \frac{\nabla p}{\gamma_P} \quad (2.6)$$

$$H(\bar{u}) = - \sum_N \gamma_N \bar{u}_N \quad (2.7)$$

όπου με \bar{u}_P, \bar{u}_N συμβολίζονται η ταχύτητα στο κέντρο του υπό εξέταση κελιού P και στα κέντρα των γειτονικών του κελιών N , αντίστοιχα, (σχήμα 2.3.2). Με γ_P, γ_N συμβολίζονται οι βαθμωτοί συντελεστές των ταχυτήτων στον κεντρικό κόμβο, οι οποίοι υπολογίζονται συναρτήσει της ταχύτητας,



Σχήμα 2.4.1: Πεπερασμένος όγκος κελιού. Με P συμβολίζεται το κέντρο του κελιού, N το κέντρο ενός γειτονικού κελιού, \vec{S} το διάνυσμα κάθετο στην επιφάνεια επαφής με μέτρο το εμβαδόν της επιφάνειας σε m^2 .

Σε ένα ορθογωνικό πλέγμα, τα κελιά είναι εξαέδρα και οι κυψέλες ορθογωνικές. Ως πεπερασμένος όγκος ενός κελιού ορίζεται ο όγκος που περικλείεται από τους κόμβους που το αποτελούν, ενώ το σημείο τομής των διαγωνίων του είναι το κέντρο του - τυπικό κέντρο εξαέδρου. Η εξίσωση της συνέχειας διακριτοποιείται ως:

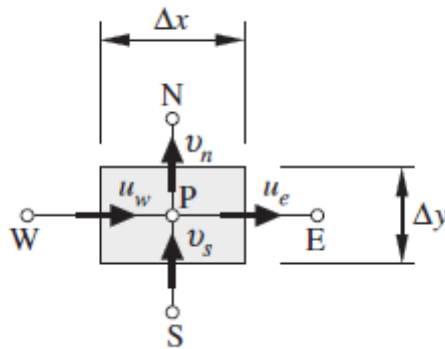
$$\nabla \cdot \vec{u} = \sum_f \vec{S} \vec{u}_f \quad (2.8)$$

όπου \vec{S} είναι το κάθετο διάνυσμα στην κοινή επιφάνεια των γειτονικών κελιών P και N , με μέτρο ίσο με το εμβαδό της επιφάνειας αυτής και φορά από το σημείο P στο σημείο N και \vec{u}_f είναι η ταχύτητα πάνω στην επιφάνεια. Η εξίσωση (2.6) με παρεμβολή στις επιφάνειες των κελιών παίρνει τη μορφή:

$$\vec{u}_f = \left(\frac{H(\vec{u})}{\gamma_P} \right)_f - \frac{(\nabla p)_f}{(\gamma_P)_f} \quad (2.9)$$

Αντικαθιστώντας αυτή την έκφραση στη διακριτοποιημένη εξίσωση της συνέχειας (2.8), προκύπτει η τελική μορφή της εξίσωσης πίεσης:

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{\gamma_P} \nabla p \right) = \nabla \cdot \left(\frac{H(\vec{u})}{\gamma_P} \right) = \sum_f \vec{S} \left(\frac{H(\vec{u})}{\gamma_P} \right)_f \quad (2.10)$$



Σχήμα 2.4.2: Απεικόνιση κελιού ορθογωνικού πλέγματος με κέντρο το σημείο P . Οι ταχύτητες υπολογίζονται στις επιφάνειες ενώ η πίεση στα κέντρα των κελιών.

Αφού επιβληθεί αρχική συνθήκη για την πίεση, που στην ουσία είναι μία τυχαία αρχική τιμή, ο αλγόριθμος SIMPLE επιτρέπει την επίλυση των εξισώσεων Navier – Stokes με μία επαναληπτική διαδικασία, που συνοψίζεται ως:

- Επίλυση – μια φορά – της διακριτοποιημένης μορφής της εξίσωσης ορμής (2.9) για τον υπολογισμό του ενδιαμέσου πεδίου ταχύτητας,
- Υπολογισμός των παροχών μάζας στις επιφάνειες των κελιών, Επίλυση – μια φορά – της εξίσωσης πίεσης, όπως αυτή διατυπώθηκε στην εξίσωση (2.10) και εφαρμογή υποχαλάρωσης στις παροχές μάζας (under – relaxation),
- Διόρθωση των παροχών μάζας στις επιφάνειες των κελιών,

- Διόρθωση των ταχυτήτων στις επιφάνειες των κελιών σύμφωνα με το νέο πεδίο πίεσης,
- Ανανέωση της τιμής για την πίεση στα κεντρικά σημεία και
- Επανάληψη μέχρι ικανοποίησης του κριτηρίου σύγκλισης.

όπου ως παροχή μάζας αναφέρεται $\Phi = \vec{u}\vec{S}$.

2.4.2 Ανοικτό Λογισμικό OpenFOAM

Το λογισμικό **Open Field Operation and Manipulation** ή, εν συντομία, **OpenFOAM**^[9] είναι μία C++ εργαλειοθήκη που δημιουργήθηκε για την ανάπτυξη προσαρμοσμένων αριθμητικών λυτών και την επεξεργασία των αποτελεσμάτων τους, για την επίλυση των συνεχών προβλημάτων μηχανικής, συμπεριλαμβανομένης και της υπολογιστικής ρευστοδυναμικής (CFD). Βασικό χαρακτηριστικό του που το ξεχωρίζει από τους άλλους λύτες αυτού του είδους είναι ότι αποτελεί ελεύθερο και ανοικτό λογισμικό υπό την άδεια **GNU General Public**. Η C++ είναι η γλώσσα ανάπτυξης που επιλέγουν οι περισσότεροι επαγγελματίες προγραμματιστές, επειδή προσφέρει γρήγορα, μικρά προγράμματα που αναπτύσσονται σε ένα σταθερό περιβάλλον και με τη δυνατότητα μεταφοράς τους. Τα σημερινά εργαλεία της, επιτρέπουν τη δημιουργία περίπλοκων επαγγελματικών εφαρμογών με μία απλοποιημένη διαδικασία. Ως γλώσσα που υποστηρίζει πλήρως τον αντικειμενοστραφή προγραμματισμό, τα πλέον βασικά της χαρακτηριστικά είναι ο εμφωλιασμός (encapsulation), η απόκρυψη δεδομένων (encryption), η κληρονομικότητα (inheritance) και ο πολυμορφισμός (polymorphism)^[7].

Το OpenFOAM είναι ένα αντικειμενοστραφές λογισμικό, σχεδιασμένο για την ανάλυση ενός μεγάλου φάσματος προβλημάτων μηχανικής, λ.χ. ροές, χημικές αντιδράσεις, τύρβη, μεταφορά θερμότητας, δυναμική του στερεού και ηλεκτρομαγνητική. Συγκεκριμένα, το πακέτο αυτό βασίζεται στη μέθοδο των πεπερασμένων όγκων, που επιτρέπει τη διακριτοποίηση των συνεχών εξισώσεων που διέπουν το εκάστοτε πρόβλημα, σε ένα σύνολο αλγεβρικών εξισώσεων το οποίο μπορεί να επιλυθεί στον υπολογιστή μέσω υπολογισμών σε διανύσματα και πίνακες. Στη μέθοδο των πεπερασμένων όγκων, οι τιμές των αντίστοιχων μεταβλητών ροής υπολογίζονται σε συγκεκριμένα σημεία, λ.χ. στους κόμβους ή στα κέντρα των κελιών όπως στην παρούσα εργασία, μικρών σε μέγεθος όγκων ελέγχου, το σύνολο των οποίων αποτελεί το διακριτοποιημένο υπολογιστικό χωρίο. Η ολοκληρωτική μορφή των εξισώσεων αξιολογείται, στη συνέχεια, σε κάθε ογκικό στοιχείο για να δημιουργηθεί τελικά η λύση για το πρόβλημα. Ένα βασικό πλεονέκτημα της τεχνικής των πεπερασμένων όγκων είναι η εύκολη εφαρμογή της σε μη δομημένα πλέγματα.

Το OpenFOAM λειτουργεί με υπορουτίνες, λεγόμενες και ως 'λύτες', που μπορούν να εφαρμοστούν για την επίλυση καύσης, οφειλόμενων στην άνωση, πολυφασικών, ασυμπίεστων ή συμπιεστών ροών. Αυτοί οι προκαθορισμένοι λύτες μπορούν εύκολα να τροποποιηθούν και να δηλωθούν έτσι ώστε να ταιριάζουν σε ειδικές περιπτώσεις. Όντας ανοικτό, το OpenFOAM παρέχει στους χρήστες την απόλυτη ελευθερία να προσαρμόσουν ή να επεκτείνουν την προεπιλεγμένη λειτουργία του, με τέτοιο τρόπο, που οι έμπειροι χρήστες να έχουν τη δυνατότητα να αναπτύξουν νέους λύτες. Το πακέτο είναι έτσι σχεδιασμένο που το σύνολο των λειτουργιών του συγκεντρώνονται στη δική τους βιβλιοθήκη και οι εκτελέσιμες εφαρμογές μπορούν, μετά, να συνδεθούν με αυτές τις βιβλιοθήκες κατά το χρόνο εκτέλεσης. Ακόμη, παρέχει ένα μεγάλο αριθμό από εκτελέσιμες εφαρμογές, λύτες, βιβλιοθήκες και εργαλεία γέννησης πλεγμάτων και προ-/μετα-επεξεργασίας, που μπορεί ο χρήστης να χρησιμοποιήσει για να προσομοιώσει κάποια από τα προβλήματα που απασχολούν τους μηχανικούς (engineering problems).

Ένα από τα κύρια χαρακτηριστικά της εργαλειοθήκης του OpenFOAM είναι η παράλληλη επεξεργασία, η οποία μπορεί να γίνει χρήσιμη κατά τη μελέτη μεγάλων και σύνθετης γεωμετρίας μοντέλων. Άλλο σημαντικό χαρακτηριστικό είναι ο αριθμός των αριθμητικών σχημάτων (numerical schemes), από τα οποία ο χρήστης μπορεί να επιλέξει για τους υπολογισμούς μιας συγκεκριμένης περίπτωσης. Αυτό του επιτρέπει να μελετήσει την επίδραση των διάφορων τεχνικών διακριτοποίησης, να εφαρμόσει διαφορετικά αριθμητικά σχήματα για το ίδιο πρόβλημα και συνεπώς να βελτιστοποιήσει το σύστημα.

2.4.3 Σχήματα Διακριτοποίησης

Οι διαφορικές εξισώσεις (2.5) δεν είναι απλής μορφής και δεν είναι δυνατό να επιλυθούν με τις γνωστές αναλυτικές μεθόδους. Όπως αναφέρθηκε παραπάνω, για το σκοπό αυτό χρησιμοποιείται ο αλγόριθμος SIMPLE ο οποίος λύνει αριθμητικά τις εξισώσεις ροής σε κάθε κόμβο. Μετασχηματίζοντας όλες τις διαφορικές εξισώσεις σε εξισώσεις πεπερασμένων διαφορών, εκφράζονται όλες οι παράγωγοι των μεταβλητών που εμφανίζονται στις εξισώσεις, ως συνδυασμό των τιμών των μεταβλητών σε διακριτές θέσεις στη γειτονιά του υπό εξέταση σημείου. Ο χώρος, συνεπώς, επίλυσης της διαφορικής εξίσωσης διακριτοποιείται με N το πλήθος αριθμητικά σημεία που καλούνται αριθμητικοί κόμβοι. Τα αριθμητικά αυτά σημεία ισαπέχουν συνήθως μεταξύ τους, απόσταση Δx κατά την κατεύθυνση x και Δy κατά y . Τα σημεία αυτά ορίζονται με τις συντεταγμένες τους π.χ. $x_{i,j}$ όπου οι δείκτες i και j ορίζουν τον αριθμητικό κόμβο και παίρνουν τιμές από τον πρώτο μέχρι τον τελευταίο κόμβο του χώρου

διακριτοποίησης, δηλαδή από 1 έως N ($i/j = 1, \dots, N$). Στον πίνακα 2.4.1, παρουσιάζονται τα σχήματα διακριτοποίησης που επιλέχθηκαν στην παρούσα διπλωματική εργασία, μεταξύ των πολλών που προσφέρει το OpenFOAM.

Είδος παραγώγου της συνάρτησης H ως προς τη μεταβλητή x	Σχήμα Διακριτοποίησης
Βαθμίδες ($gradH$ ή ∇H)	<p>Δεύτερης τάξεως ακρίβεια, κεντρικές διαφορές:</p> $\left. \frac{dH}{dx} \right _{i,j} = \frac{-H_{i-1,j} + H_{i+1,j}}{2\Delta x} + O(\Delta x^2)$
Αποκλίσεις ($divH$ ή $\nabla \cdot H$)	<p>Πρώτης τάξεως ακρίβεια, μπρος διαφορές:</p> $\left. \frac{dH}{dx} \right _{i,j} = \frac{-H_{i,j} + H_{i+1,j}}{\Delta x} + O(\Delta x)$
Λαπλασιανές ($laplacianH$ ή $\nabla^2 H$)	<p>Δεύτερης τάξεως ακρίβεια, κεντρικές διαφορές:</p> $\left. \frac{d^2H}{dx^2} \right _{i,j} = \frac{H_{i-1,j} - 2H_{i,j} + H_{i+1,j}}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2)$

Πίνακας 2.4.1: Σχήματα διακριτοποίησης που χρησιμοποιήθηκαν στις εφαρμογές για τις βαθμίδες ($grad$), τις αποκλίσεις (div) και τις λαπλασιανές ($laplacian$).

Κεφάλαιο 3

Η Συνεχής Συζυγής Μέθοδος για Στρωτές Ροές Ασυμπίεστου Ρευστού

3.1 Εξισώσεις Ροής

Οι εξισώσεις ροής που διατυπώνονται στην παρούσα διπλωματική εργασία, χαρακτηρίζουν προβλήματα μόνιμης στρωτής ροής για ασυμπίεστο ρευστό. Αυτές, για προβλήματα ροών με μετάδοση θερμότητας αλλά και με την προσθήκη των όρων που περιέχουν το πορώδες α , όπως αυτές διατυπώθηκαν στις εξισώσεις (2.5) του Κεφαλαίου 2, εκφράζονται υπό μορφή δεικτών ως εξής:

$$R_p = \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \quad (3.1\alpha)$$

$$R_{u_i} = u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] + \alpha u_i = 0 \quad (3.1\beta)$$

$$R_T = u_j \frac{\partial T}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{\nu}{Pr} \cdot \frac{\partial T}{\partial x_j} \right] + a(T - T_{wall}) = 0 \quad (3.1\gamma)$$

όπου:

- με u_i συμβολίζονται οι συνιστώσες του διανύσματος της ταχύτητας
- ν και Pr θεωρούνται σταθερές ποσότητες,
- R_p, R_{u_i}, R_T είναι τα υπόλοιπα των διακριτοποιημένων εξισώσεων.

Οι δείκτες που υπεισέρχονται στις εξισώσεις (3.1) μπορούν να λάβουν τις τιμές $i/j = 1,2$ για 2Δ ροές και $i/j = 1,2,3$ για 3Δ ροές. Στο πλαίσιο αυτής της εργασίας θα εξεταστούν 2Δ προβλήματα στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων οπότε εδώ υπονοείται πως οι δείκτες i και j λαμβάνουν μόνο τις τιμές 1 για την κατεύθυνση x και 2 για την κατεύθυνση y της ροής. Για την πλήρη διατύπωση των εξισώσεων κατάστασης των προβλημάτων εσωτερικών ροών, πρέπει να τεθούν οριακές συνθήκες κατά μήκος των επιφανειών της εισόδου, της εξόδου και των στερεών τοιχωμάτων του ευρύτερου χωρίου και οι οποίες συμπληρώνουν τις εξισώσεις (3.1) στο εσωτερικό του πεδίου. Οι οριακές αυτές συνθήκες περιγράφονται παρακάτω.

3.1.1 Οριακές Συνθήκες Εισόδου

Η ακρίβεια των υπολογισμών της μεθόδου τοπολογίας είναι ισχυρά ευαίσθητη στις σύνθηκες στα όρια, πόσο μάλλον εδώ που η ροή είναι στρωτή, ενώ ο αλγόριθμος βελτιστοποίησης μπορεί να αποκλίνει από την αριθμητική προσομοίωση οριακών συνθηκών που όμως δεν ανταποκρίνονται στη φυσική του προβλήματος. Στην είσοδο (S_I) του διευρυμένου πεδίου πρέπει να καθοριστούν οι οριακές συνθήκες για τις μεταβλητές της ταχύτητας, της θερμοκρασίας και της πίεσης. Η συνθήκη για το διάνυσμα της ταχύτητας μπορεί να πάρει διάφορες μορφές λ.χ. παραβολικό προφίλ ή σταθερή τιμή, ενδεχομένως ανάλογα με τις συνθήκες της ροής που επικρατούν πριν την είσοδο του ρευστού στο χωρίο. Στις εφαρμογές της παρούσας εργασίας η όλη διαδικασία της βελτιστοποίησης έγκειται στον υπολογισμό της βέλτιστης γεωμετρίας ενός αγωγού που συνδέει μια ή περισσότερες εισόδους με μια ή περισσότερες εξόδους. Επομένως, αν ο αγωγός αυτός συνδεόταν με έναν άλλο αγωγό πριν την είσοδο, αυτός πιθανότατα να ήταν ένας ευθύγραμμος αγωγός ο οποίος ομαλοποιεί τη ροή και αποτρέπει την ενδεχόμενη εμφάνιση φαινομένων τύρβης ή στροβιλισμού. Για το λόγο αυτό, η ροή στην είσοδο θεωρείται ομοιόμορφη και σταθερή, συνεπώς επιβάλλεται συνθήκη για καθεμιά από τις συνιστώσες της ταχύτητας κατά τους άξονες x και y με διεύθυνση διανύσματος κάθετη στην επιφάνεια εισόδου και φορά προς το εσωτερικό του χωρίου (Dirichlet). Η θερμοκρασία του εισερχόμενου ρευστού συνήθως λαμβάνεται ίση με τη θερμοκρασία περιβάλλοντος, πόσο μάλλον σε τέτοιου είδους προβλήματα που στόχος είναι η πρόσδοση θερμότητας στο ρευστό. Έτσι, επιβάλλεται Dirichlet συνθήκη για τη θερμοκρασία. Τέλος, για την πίεση τίθεται μηδενική Neumann συνθήκη (φυσική οριακή συνθήκη). Μαθηματικά αυτές οι συνθήκες εκφράζονται ως εξής:

$$\vec{u}|_{S_I} = -U_I \vec{n} \quad (3.2\alpha)$$

$$T|_{S_I} = T_I \quad (3.2\beta)$$

$$\left. \frac{\partial p}{\partial n} \right|_{S_I} = 0 \quad (3.2\gamma)$$

όπου U_I σταθερή τιμή, T_I σταθερή θερμοκρασία, \vec{n} το μοναδιαίο εξωτερικά κάθετο διάνυσμα στο σύνορο S .

3.1.2 Οριακές Συνθήκες Εξόδου

Η επίλυση της ροής στον τελικό αγωγό πρέπει να δίνει συγκεκριμένα δεδομένα στην έξοδο, ώστε η ροή να είναι ομοιόμορφη εκεί. Για το λόγο αυτό, στην έξοδο (S_O) του ευρύτερου πεδίου, επιβάλλεται μηδενική Neumann συνθήκη για καθεμία από τις συνιστώσες u_i και μηδενική Neumann συνθήκη για τη θερμοκρασία (φυσικές οριακές συνθήκες). Η πίεση εξόδου λαμβάνεται ως πίεση αναφοράς και έτσι της επιβάλλεται μηδενική Dirichlet συνθήκη. Οι παραπάνω οριακές συνθήκες εξόδου περιγράφονται μαθηματικά ως εξής:

$$\left. \frac{\partial u_i}{\partial n} \right|_{S_O} = 0 \quad (3.3\alpha)$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_{S_O} = 0 \quad (3.3\beta)$$

$$p|_{S_O} = 0 \quad (3.3\gamma)$$

3.1.3 Οριακές Συνθήκες Στερεών Τοιχωμάτων

Στα στερεά τοιχώματα του ευρύτερου πεδίου εφαρμόζεται η συνθήκη μη-ολίσθησης, στην οποία το ρευστό έχει την ίδια ταχύτητα με αυτή του τοίχου στα σημεία επαφής. Στα στερεά τοιχώματα (S_w), λοιπόν, του διευρυμένου πεδίου επιβάλλεται μηδενική Dirichlet συνθήκη για καθεμία από τις συνιστώσες u_i . Η θερμοκρασία των τοιχωμάτων θεωρείται σταθερή (Dirichlet συνθήκη) και μεγαλύτερη σε τιμή από την αντίστοιχη του ρευστού στην είσοδο (θερμοκρασία περιβάλλοντος). Για την πίεση εφαρμόζεται μηδενική Neumann συνθήκη (φυσική οριακή συνθήκη) και η μαθηματική έκφραση των παραπάνω συνθηκών είναι:

$$\vec{u}|_{S_w} = 0 \quad (3.4\alpha)$$

$$T|_{S_w} = T_w \quad (3.4\beta)$$

$$\left. \frac{\partial p}{\partial n} \right|_{S_w} = 0 \quad (3.4\gamma)$$

όπου T_w σταθερή θερμοκρασία των τοιχωμάτων. Αυτή τη θερμοκρασία τοιχωμάτων T_w θα έχει και κάθε περιοχή του ευρύτερου χωρίου που ο αλγόριθμος βελτιστοποίησης θα υποδείξει ως στερεό.

3.2 Εισαγωγή των Συζυγών Μεταβλητών & Διατύπωση των Συζυγών Εξισώσεων

Κάθε αιτιοκρατική μέθοδος βελτιστοποίησης, προϋποθέτει την ύπαρξη ενός κριτηρίου βελτιστοποίησης. Ακόμα και αν το πρόβλημα είναι πολυκριτηριακό, μαθηματικά εκφράζεται σε ένα και μοναδικό κριτήριο. Τα κριτήρια βελτιστοποίησης διατυπώνονται στη μορφή μιας αντικειμενικής συνάρτησης ή συνάρτησης κόστους F_{obj} . Σε προβλήματα τοπολογίας, η βελτιστοποίηση απαιτεί τον υπολογισμό των παραγώγων ευαισθησίας της F_{obj} ως προς τις τοπολογικές μεταβλητές ή πορώδη α σε κάθε κόμβο του αριθμητικού πλέγματος.

Για τη διατύπωση του συζυγούς προβλήματος, στη γενική του περίπτωση, η αντικειμενική συνάρτηση F_{obj} επαυξάνεται από τα χωρικά ολοκληρώματα των εξισώσεων κατάστασης R στο πεδίο ροής, πολλαπλασιασμένων με τις συζυγείς (adjoint) μεταβλητές $\vec{\psi}$ [4],[13],[14]. Επομένως, η επαυξημένη συνάρτηση κόστους ορίζεται ως:

$$F_{aug} = F_{obj} + \int_{\Omega} \psi_l R_l d\Omega \quad (3.5)$$

όπου ο 2^{ος} όρος του δεξιού μέλους της εξίσωσης (3.4) είναι ολοκλήρωμα στο ευρύτερο πεδίο Ω , του γινομένου των μηδενικών υπολοίπων των εξισώσεων ροής με τις συζυγείς μεταβλητές. Τα υπόλοιπα R_l είναι μηδενικά εφόσον πρέπει να ικανοποιούνται οι εξισώσεις κατάστασης και οι αντίστοιχες οριακές συνθήκες, ενώ το διάνυσμα των συζυγών μεταβλητών $\vec{\psi}$ είναι:

$$\vec{\psi} = [q, u_{a,i}, T_a]^T \quad (3.6)$$

όπου με $q, u_{a,i}$ και T_a συμβολίζονται, αντιστοίχως τα συζυγή ως προς την πίεση, ως προς το διάνυσμα της ταχύτητας και ως προς τη θερμοκρασία, πεδία. Αναλύοντας το χωρικό ολοκλήρωμα στις συνιστώσες του, η εξίσωση της επαυξημένης αντικειμενικής συνάρτησης (3.5) γράφεται εναλλακτικά χωριστά για τις εξισώσεις συνέχειας, ορμής και αυτήν της ενέργειας, ως:

$$F_{aug} = F_{obj} + \int_{\Omega} q R_p d\Omega + \int_{\Omega} u_{a,i} R_{u_i} d\Omega + \int_{\Omega} T_a R_T d\Omega \quad (3.7)$$

Η συζυγής μέθοδος στοχεύει στον υπολογισμό των παραγώγων ευαισθησίας της αντικειμενικής συνάρτησης F_{obj} ως προς τα πορώδη α_{ij} , $\frac{\delta F_{obj}}{\delta \alpha_{ij}}$. Γενικά, η ολική παράγωγος - με το συμβολισμό δ - μιας οποιασδήποτε ποσότητας Φ ως προς μία μεταβλητή σχεδιασμού b , εκφράζεται ως το άθροισμα της μερικής παραγώγου - με το συμβολισμό ∂ - με όρους βασισμένους στο πλέγμα του χωρίου ροής, δηλαδή,

$$\frac{\delta \Phi}{\delta b} = \frac{\partial \Phi}{\partial b} + \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial b} \quad (3.8)$$

Στα προβλήματα τοπολογίας, οι θέσεις των κόμβων του πλέγματος παραμένουν αμετάβλητες, άρα $\frac{\partial x_k}{\partial a} = 0$ και έτσι οι συμβολισμοί δ και ∂ μπορούν να χρησιμοποιηθούν αδιακρίτως $\left(\frac{\delta \Phi}{\delta a} = \frac{\partial \Phi}{\partial a}\right)$. Με βάση αυτό, οι παράγωγοι ευαισθησίας $\frac{\delta F_{obj}}{\delta \alpha_{ij}}$, εκφράζονται ως:

$$\frac{\delta F_{aug}}{\delta a} = \frac{\delta F_{obj}}{\delta a} + \int_{\Omega} q \frac{\partial R_p}{\partial a} d\Omega + \int_{\Omega} u_{a,i} \frac{\partial R_{u_i}}{\partial a} d\Omega + \int_{\Omega} T_a \frac{\partial R_T}{\partial a} d\Omega \quad (3.9)$$

όπου a το πεδίο των τοπολογικών μεταβλητών.

$$\begin{aligned} \frac{\delta F_{aug}}{\delta a} = & \frac{\delta F_{obj}}{\delta a} + \int_{\Omega} R_q \frac{\partial p}{\partial a} d\Omega + \int_{\Omega} R_{u_{a,i}} \frac{\partial u_i}{\partial a} d\Omega + \int_{\Omega} R_{T_a} \frac{\partial T}{\partial a} d\Omega \\ & + \int_{\Omega} u_i u_{a,i} d\Omega + \int_{\Omega} (T - T_{wall}) T_a d\Omega \\ & + \int_S \left(u_{a,j} n_j + \frac{\partial F_{obj}}{\partial p} \right) \frac{\partial p}{\partial a} dS + \int_S BC_{1,i} \frac{\partial u_i}{\partial a} dS \\ & + \int_S BC_2 \frac{\partial T}{\partial a} dS - \nu \int_S \frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) u_{a,i} n_j dS \\ & - \frac{\nu}{Pr} \int_S T_a \frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{\partial T}{\partial x_j} n_j \right) dS \end{aligned} \quad (3.10)$$

όπου $S = S_I \cup S_O \cup S_W$ είναι η ένωση των επιφανειών εισόδου, εξόδου και στερεών τοιχωμάτων του διευρυμένου χωρίου Ω . Η ανάπτυξη των χωρικών

ολοκληρωμάτων της εξίσωσης (3.9), σύμφωνα με το θεώρημα απόκλισης του Gauss, οδηγεί τελικά στην έκφραση (3.10) για την παράγωγο ευαισθησίας.

Σύμφωνα με την εξίσωση (3.10), οι συζυγείς εξισώσεις (adjoint equations) προέρχονται από την απαλοιφή των χωρικών ολοκληρωμάτων που είναι εξαρτώμενα από τις παραγώγους $\frac{\partial p}{\partial a}, \frac{\partial u_i}{\partial a}, \frac{\partial T}{\partial a}$. Αυτές, τελικά διατυπώνονται ως εξής:

$$R_q = 0, \quad R_{u_{a,i}} = 0, \quad R_{T_a} = 0 \quad (3.11)$$

όπου,

$$R_q = \frac{\partial u_{a,j}}{\partial x_j} \quad (3.11\alpha)$$

$$R_{u_{a,i}} = -u_j \left(\frac{\partial u_{a,i}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_{a,j}}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial q}{\partial x_i} - \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_{a,i}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_{a,j}}{\partial x_i} \right) + T \underbrace{\frac{\partial T_a}{\partial x_i}}_{M_1} + a u_{a,i} \quad (3.11\beta)$$

$$R_{T_a} = -u_j \frac{\partial T_a}{\partial x_j} - \frac{\nu}{Pr} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial T_a}{\partial x_j} \right) + a T_a \quad (3.11\gamma)$$

Στην εξίσωση (3.11β) ο όρος M_1 προέκυψε από τη διαφορίση της εξίσωσης ενέργειας. Επίσης, η απαλοιφή των ολοκληρωμάτων στα όρια S του ευρύτερου χωρίου Ω από την εξίσωση (3.10), που εξαρτώνται από τις μεταβλητές της ροής, οδηγεί στη διατύπωση των συζυγών οριακών συνθηκών. Αυτές περιγράφονται στις παρακάτω ενότητες.

3.2.1 Συζυγείς Συνθήκες Εισόδου

Πρέπει να γίνει κατανοητό πως το συζυγές πρόβλημα αποτελεί από μόνο του ένα ολοκληρωμένο πρόβλημα και για το λόγο αυτό χρειάζεται τις δικές του οριακές συνθήκες. Στην είσοδο του διευρυμένου πεδίου, επιβάλλονται Dirichlet συνθήκες για τις συνιστώσες της ταχύτητας u_i και τη θερμοκρασία T και έτσι οι παράγωγοι αυτών ως προς το πορώδες a μηδενίζονται. Για να γίνει το $\frac{\delta F_{aug}}{\delta a}$ ανεξάρτητο από τα μερικά διαφορικά $\frac{\partial p}{\partial a}, \frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{\partial u_{a,i}}{\partial x_j} n_j \right), \frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{\partial T_a}{\partial x_j} n_j \right)$ επιβάλλονται οι ακόλουθες συζυγείς οριακές συνθήκες στην είσοδο:

$$\vec{u} \cdot \vec{n}|_{S_I} = -\frac{\partial F_{obj}}{\partial p} \quad \text{και} \quad \vec{u} \cdot \vec{t}|_{S_I} = 0 \quad (3.12\alpha)$$

$$T_a|_{S_l} = 0 \quad (3.12\beta)$$

όπου \vec{t} είναι το εφαπτομενικό μοναδιαίο διάνυσμα στο σύνορο S , αντίστοιχα.

Εφόσον από την απαλοιφή κανενός εκ των ολοκληρωμάτων της εξίσωσης (3.10) δεν προκύπτει η οριακή συνθήκη για τη συζυγή πίεση q , επιβάλλεται μηδενική Neumann συνθήκη:

$$\left. \frac{\partial q}{\partial n} \right|_{S_l} = 0 \quad (3.12\gamma)$$

3.2.2 Συζυγείς Συνθήκες Εξόδου

Οι οριακές συνθήκες στην έξοδο για τις συζυγείς μεταβλητές q , $u_{a,i}$ και T_a προκύπτουν από το μηδενισμό των όρων:

$$BC_{1,i} = u_{a,i}u_j n_j + \nu \frac{\partial u_{a,i}}{\partial x_j} n_j + (u_{a,j}u_j + q)n_i + \frac{\partial F_{obj}}{\partial u_i} + TT_a n_i = 0 \quad (3.13\alpha)$$

$$BC_2 = u_i n_i + \frac{\nu}{Pr} \frac{\partial T_a}{\partial x_j} n_j + \frac{\partial F_{obj}}{\partial T} = 0 \quad (3.13\beta)$$

Επειδή ο αριθμός των αγνώστων ποσοτήτων στην εξίσωση (3.13α) είναι μεγαλύτερος από τον αριθμό των διαθέσιμων εξισώσεων κατά ένα, μία από τις συζυγείς μεταβλητές πρέπει να οριστούν αυθαίρετα, έτσι ώστε να προκύψουν οι υπόλοιπες οριακές συνθήκες. Ο τελευταίος όρος της εξίσωσης (3.13α) προέκυψε από την παραγωγή της εξίσωσης ενέργειας.

3.2.3 Συζυγείς Συνθήκες Στερεών Τοιχωμάτων

Με έναν παρόμοιο τρόπο, όπως και στις συζυγείς συνθήκες στην είσοδο, τα στερεά τοιχώματα του ευρύτερου πεδίου, ορίζονται με μηδενική Dirichlet συνθήκη για καθεμιά από τις συνιστώσες $u_{a,i}$, Dirichlet συνθήκη για τη θερμοκρασία T_a και μηδενική Neumann συνθήκη για τη συζυγή πίεση q . Μαθηματικά, αυτές οι συνθήκες εκφράζονται ως εξής:

$$\vec{u}_a|_{S_w} = 0 \quad (3.14\alpha)$$

$$T_a|_{S_w} = 0 \quad (3.14\beta)$$

$$\left. \frac{\partial q}{\partial n} \right|_{S_w} = 0 \quad (3.14\gamma)$$

3.3 Ελαχιστοποίηση Απωλειών Ολικής Πίεσης

Η συνάρτηση απωλειών ολικής πίεσης (total pressure losses) αποτελεί την πλέον συχνά απαντώμενη αντικειμενική συνάρτηση σε προβλήματα ρευστών και ειδικά εδώ συγκεκριμένα, σε προβλήματα βελτιστοποίησης τοπολογίας. Σκοπός είναι ο σχεδιασμός της βέλτιστης διαδρομής – αγωγός βέλτιστης μορφής – ώστε να επιτευχθούν ελάχιστες απώλειες της μαζικά ολοκληρωμένης ολικής πίεσης (στο εξής ‘απώλειες ολική πίεσης’) μεταξύ εισόδου (S_I) και εξόδου/ων (S_O). Η συνάρτηση κόστους που πρέπει να ελαχιστοποιηθεί αποτελείται μόνο από ολοκληρώματα στα όρια και εκφράζεται ως:

$$f_1 = \int_{S_{I,O}} F_{p_t} dS \quad (3.15\alpha)$$

όπου η συνάρτηση $F_{S_{I,O}}$ που θα ολοκληρωθεί στα όρια εισόδου και εξόδου του χωρίου δίνεται από την έκφραση:

$$F_{p_t} = -p_t u_i n_i = -\left(p + \frac{1}{2}u^2\right) u_i n_i \quad (3.15\beta)$$

όπου με $u = |\vec{u}|$ συμβολίζεται το μέτρο του διανύσματος της ταχύτητας. Η συνάρτηση $F_{S_{I,O}}$ αποτελεί το γινόμενο της κινηματικής ολικής πίεσης p_t με την παροχή όγκου $-u_i n_i$ του ασυμπίεστου ρευστού που διέρχεται από στοιχειώδη διατομή της εισόδου ή εξόδου του πεδίου ροής. Επειδή η φορά του μοναδιαίου διανύσματος, με συνιστώσες n_i , θεωρείται εξ ορισμού θετική όταν κατευθύνεται προς το εξωτερικό του πεδίου ροής, η παροχή μάζας λαμβάνει αρνητικό πρόσημο. Οι μονάδες μέτρησης της συνάρτησης απωλειών ολικής πίεσης είναι:

$$[F_{p_t}] = [F_{S_{I,O}}][dS] = \frac{[p_t]}{[\rho]} [u_i][dS] = \frac{m^2}{s^2} \cdot \frac{m}{s} \cdot m^2 = \frac{m^5}{s^3}$$

όπου οι αγκύλες $[\omega]$ συμβολίζουν τις μονάδες μέτρησης του μεγέθους ω .

3.4 Μεγιστοποίηση Θερμοκρασιακής Διαφοράς Εξόδου - Εισόδου

Ένα από τα πιο συχνά προβλήματα μεταφοράς θερμότητας, είναι ο σχεδιασμός γεωμετριών βέλτιστης μορφής που μεγιστοποιούν τη διαφορά θερμοκρασίας μεταξύ της εξόδου (S_O) και της εισόδου (S_I). Παραδείγματα τέτοιων εφαρμογών είναι:

- Η ψύξη μπαταριών υβριδικού οχήματος, όπου η βελτιστοποίηση επιτυγχάνει τη μέγιστη ανταλλαγή θερμότητας μεταξύ ρευστού και μπαταριών, έτσι ώστε τελικά η θερμοκρασία στις μπαταρίες να είναι ελάχιστη.
- Η αύξηση της θερμοκρασιακής στάθμης ρευστού, όπου τα στερεά τοιχώματα του αγωγού έχουν σταθερά υψηλή θερμοκρασία και στόχος είναι η επίτευξη μέγιστης πρόσδοσης θερμότητας των τοιχωμάτων στο ρευστό κατά τη διέλευσή του από ένα χωρίο ροής με συγκεκριμένα όρια (εναλλάκτης θερμότητας).

Η έκφραση της συνάρτησης θερμοκρασιακής διαφοράς εξόδου - εισόδου είναι η εξής:

$$f_2 = \int_{S_O} T dS - \int_{S_I} T dS \quad (3.16\alpha)$$

Σε αρκετές περιπτώσεις, το εμβαδόν της εισόδου είναι ίδιο με αυτό της εξόδου οπότε οι ποσότητες dS για την είσοδο και την έξοδο συμπίπτουν, ενώ στην είσοδο επικρατεί ομοιόμορφη θερμοκρασία, οπότε η F_T τελικά εκφράζεται ως:

$$F_T = \int_{S_O} T dS - \int_{S_I} T_I dS = \int_{S_O} T dS - T_I \int_{S_I} dS \xrightarrow{\int_{S_I} dS = \int_{S_O} dS} \quad (3.16\beta)$$

$$\Rightarrow F_T = \int_{S_O} (T - T_I) dS$$

όπου T_I είναι η ομοιόμορφη σταθερή θερμοκρασία στην είσοδο. Η T_I αποτελεί και την οριακή συνθήκη του προβλήματος για τη θερμοκρασία στις εφαρμογές της παρούσας εργασίας. Οι μονάδες μέτρησης της συνάρτησης θερμοκρασιακής διαφοράς εξόδου - εισόδου είναι:

$$[F_T] = [T][dS] = K \cdot m^2$$

3.5 Επαυξημένη Αντικειμενική Συνάρτηση

Μέχρι τώρα, η συζυγής μορφοποίηση του προβλήματος είναι γενικής μορφής και μπορεί να εισαχθεί σε αυτήν οποιαδήποτε αντικειμενική συνάρτηση. Στην παρούσα διπλωματική εργασία, οι χρησιμοποιούμενες συναρτήσεις κόστους f_i διατυπώνονται στις εξισώσεις (3.15) και (3.16) που ανταποκρίνονται στις απώλειες ολικής πίεσης, με στόχο την ελαχιστοποίηση, και τη θερμοκρασιακή διαφορά εξόδου – εισόδου, με στόχο τη μεγιστοποίηση, αντίστοιχα, όπως αναφέρθηκε και παραπάνω. Για τα εξεταζόμενα προβλήματα, οι προς υπολογισμό επαυξημένες αντικειμενικές συναρτήσεις κατατάσσονται σε 2 κατηγορίες:

- A. Η διαδρομή μεταξύ εισόδου – εξόδου βελτιστοποιείται με μοναδική επιδίωξη την ελαχιστοποίηση των απωλειών ολικής πίεσης οπότε η F_{obj} εκφράζεται ως:

$$F_{obj} = f_1 \quad (3.17)$$

- B. Η διαδρομή μεταξύ εισόδου – εξόδου βελτιστοποιείται βάσει δύο στόχων, την ελαχιστοποίηση των απωλειών ολικής πίεσης και την μεγιστοποίηση της διαφοράς θερμοκρασίας εξόδου – εισόδου, άρα η F_{obj} αποτελεί το σταθμισμένο άθροισμα των f_i και εκφράζεται ως:

$$F_{obj} = \omega_1 f_1 - \omega_2 f_2 \quad (3.18)$$

όπου ω_1, ω_2 είναι παράγοντες βαρύτητας που εισάγει ο χρήστης ανάλογα με το πόσο πολύ θέλει να επηρεάζει κάθε μία από τις συναρτήσεις, την επαυξημένη. Το αρνητικό πρόσημο για τον όρο $\omega_2 f_2$ της θερμοκρασιακής διαφοράς εξόδου – εισόδου οφείλεται στο γεγονός ότι στόχος για αυτόν τον όρο αυτούσιο είναι η μεγιστοποίηση ενώ για την επαυξημένη αντικειμενική συνάρτηση F_{obj} η ελαχιστοποίηση. Έτσι κι αλλιώς, το πρόβλημα μεγιστοποίησης μίας συνάρτησης f είναι ταυτόσημο με το πρόβλημα ελαχιστοποίησης της αντίθετής της, $-f$.

Για τις μονάδες μέτρησής τους υπολογίζεται ο λόγος $\frac{\omega_2}{\omega_1}$. Όπως έγινε γνωστό από τα προηγούμενα, οι μονάδες μέτρησεις υπολογίζονται με βάση τις απώλειες ολικής πίεσης, άρα ισχύουν τα παρακάτω:

$$\begin{aligned} [F_{obj}] &= [f_1] = \frac{m^5}{s^3} \\ [f_2] &= K \cdot m^2 \end{aligned}$$

Αν, λοιπόν, ο παράγοντας βαρύτητας ω_1 είναι καθαρός αριθμός για το βάρος ω_2 ισχύει:

$$[\omega_2] \cdot [f_2] = [F_{obj}] \Rightarrow [\omega_2] = \frac{[F_{obj}]}{[f_2]} = \frac{\frac{m^5}{s^3}}{K \cdot m^2} = \frac{m^3}{K \cdot s^3}$$

Τελικά, ο λόγος βαρών εκφράζεται ως εξής:

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{\langle \omega_2 \rangle}{\langle \omega_1 \rangle} \frac{m^3}{K \cdot s^3}$$

όπου $\langle \omega_2 \rangle, \langle \omega_1 \rangle$ είναι οι καθαρές τιμές των βαρών της θερμοκρασιακής διαφοράς εξόδου - εισόδου και των απωλειών ολικής πίεσης, αντίστοιχα.

Πρακτικά η πρώτη περίπτωση με $F_{obj} = f_1$ υπάγεται στην 2^η κατηγορία με $\omega_2 = 0$.

Ανακεφαλαιώνοντας όλα τα παραπάνω, η επαυξημένη συνάρτηση παίρνει την τελική της μορφή:

$$\begin{aligned} F_{aug} &= F_{obj} + \int_{\Omega} q R_p d\Omega + \int_{\Omega} u_{a,i} R_{u_i} d\Omega + \int_{\Omega} T_a R_T d\Omega \Rightarrow \\ \Rightarrow F_{aug} &= \overbrace{-\omega_1 \int_{S_{i,o}} \left(p + \frac{1}{2} u^2 \right) u_i n_i dS - \omega_2 \left(\int_{S_o} T dS - \int_{S_i} T dS \right)}^{F_{obj}} \\ &\quad + \int_{\Omega} q R_p d\Omega + \int_{\Omega} u_{a,i} R_{u_i} d\Omega + \int_{\Omega} T_a R_T d\Omega \end{aligned} \quad (3.19)$$

ενώ για την παράγωγο ευαισθησίας ως προς το πορώδες α , ισχύει:

$$\frac{\delta F_{aug}}{\delta \alpha} = \frac{\delta F_{obj}}{\delta \alpha} + \int_{\Omega} u_i u_{a,i} d\Omega + \int_{\Omega} (T - T_{wall}) T_a d\Omega \quad (3.20)$$

Κεφάλαιο 4

Βελτιστοποίηση Διαδρομών εντός 2Δ Τετραγωνικού Χωρίου

Η μέθοδος βελτιστοποίησης τοπολογίας σε συνδυασμό με τη συνεχή συζυγή μέθοδο υπολογισμού της παραγώγου εφαρμόστηκε για τη βελτιστοποίηση της διαδρομής της ροής ενός απλοποιημένου χωρίου. Το συγκεκριμένο αυτό χωρίο είναι διδιάστατο πεδίο τετραγωνικό με εισόδους και εξόδους ίδιου πλάτους. Η βελτιστοποίηση της διαδρομής με στόχο είτε τη μείωση των απωλειών ολικής πίεσης (f_1) είτε την ελαχιστοποίηση του σταθμισμένου αθροίσματος των f_1 και f_2 , οδηγεί στη δημιουργία αγωγού βέλτιστης μορφής. Η επιλογή εφαρμογής της μεθόδου της τοπολογίας σε αυτήν την απλοποιημένη 2Δ περίπτωση, δικαιολογείται από το γεγονός πως ο μηχανικός σε ένα τέτοιο πρόβλημα αναμένει ένα συγκεκριμένο αποτέλεσμα κυρίως λόγω εμπειρικών γνώσεων. Αν αντί της μεθόδου βελτιστοποίησης, καλούταν ο μηχανικός να κατασκευάσει εκείνη τη διαδρομή ροής μεταξύ μιας εισόδου και μιας εξόδου ίδιου πλάτους μέσα σε αυτό το διευρυμένο χωρίο, που ελαχιστοποιεί τις απώλειες ολικής πίεσης τότε η απόφασή του θα ήταν ένας ευθύγραμμος αγωγός ίδιου πλάτους με αυτό της εισόδου. Άλλωστε, είναι γνωστό από τη Μηχανική των Ρευστών πως οι απώλειες ενός ευθύγραμμου αγωγού υπολογίζονται βάσει μιας μαθηματικής διατύπωσης που εκφράζει την αναλογία των απωλειών με το μήκος του αγωγού. Κάθε ενδεχόμενη στένωση, πλάτυνση ή στροφή της ροής προσθέτει έναν όρο στις απώλειες ευθύγραμμου αγωγού, αυξάνοντας με αυτόν τον τρόπο τις συνολικές απώλειες του αγωγού οποιασδήποτε άλλης γεωμετρίας. Αντίθετα, η επιλογή του μηχανικού ως προς τη μεγιστοποίηση της θερμοκρασιακής διαφοράς εξόδου – εισόδου, είναι ένας αγωγός που καλύπτει όσο το δυνατόν περισσότερο το ευρύτερο πεδίο έτσι ώστε να μεγιστοποιηθούν τα σημεία επαφής του ρευστού με τα τοιχώματα. Έτσι, τα

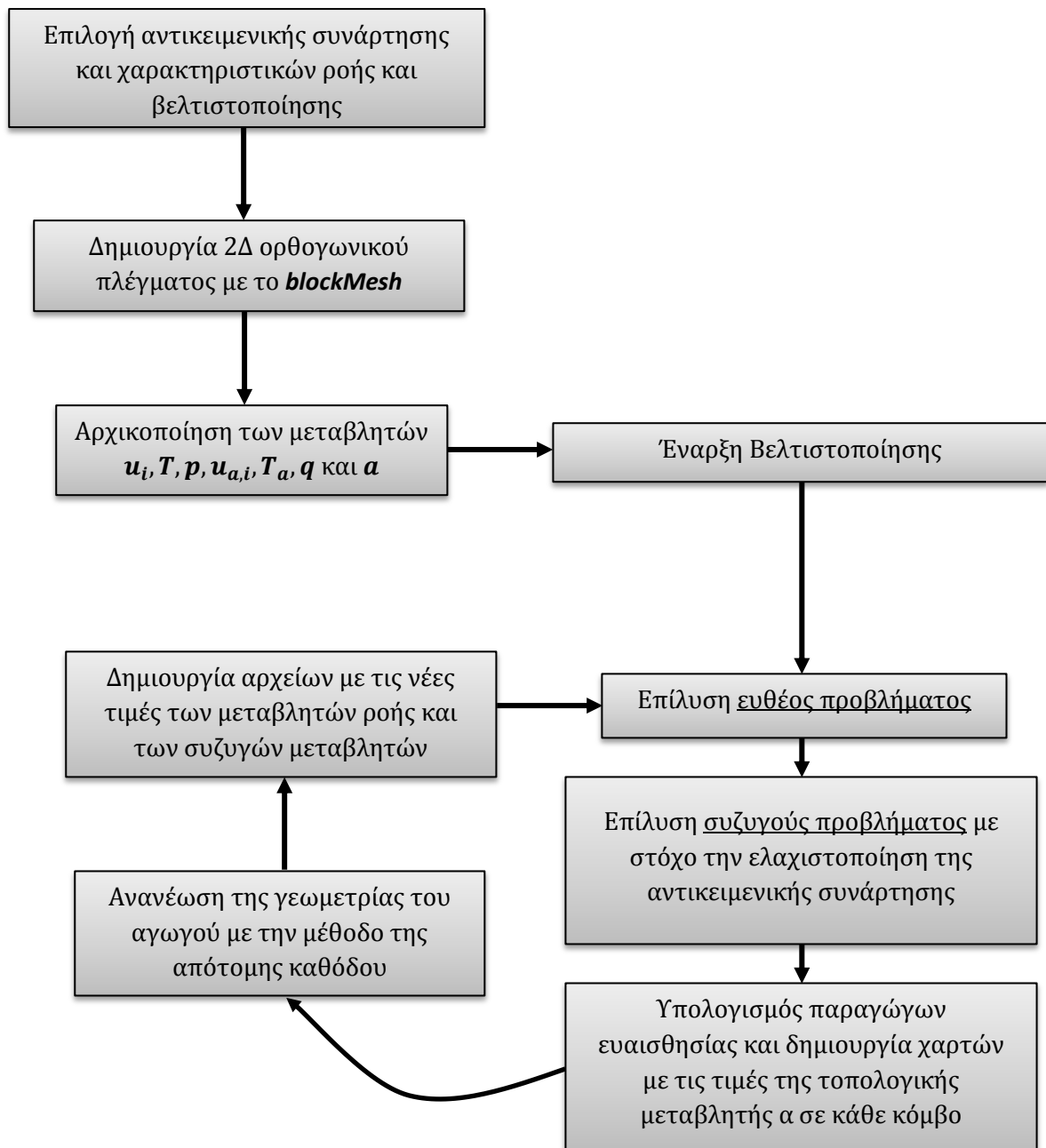
τοιχώματα, που έχουν υψηλότερη θερμοκρασία, προσδίδουν περισσότερη θερμότητα κατά τη ροή του ρευστού μέσα στον αγωγό. Ένας τέτοιος αγωγός έχει πολλές αλλαγές κατεύθυνσης και στροφές της ροής για να 'εκμεταλευτεί' όσο δυνατόν περισσότερο το χρόνο παραμονής του στο τετραγωνικό χωρίο. Βέβαια, αυτή είναι η επιλογή του μηχανικού στοχεύοντας στη μεγιστοποίηση της διαφοράς θερμοκρασίας και μόνο. Διότι, από άποψη απωλειών, αυτή η διαδρομή κοστίζει. Στην περίπτωση που ενδιέφερε το μηχανικό τόσο η ελαχιστοποίηση των απωλειών όσο και η μεγιστοποίηση της διαφοράς θερμοκρασίας μεταξύ εξόδου και εισόδου, τότε η επιλογή του είναι ένας αγωγός μορφής μεταξύ των δύο προαναφερθεισών ακραίων περιπτώσεων. Σίγουρα δεν επιλέγει έναν ευθύγραμμο αγωγό, αντίθετα 'θυσιάζει' μέρος των απωλειών για να μεγαλώσει τη διαδρομή και έτσι να αυξήσει τα σημεία επαφής τοιχωμάτων – ρευστού. Στόχος, λοιπόν, αυτού του κεφαλαίου είναι να ακουστεί η 'γνώμη' της μεθόδου βελτιστοποίησης τοπολογίας για το συγκεκριμένο πρόβλημα και, στη συνέχεια, να επιβεβαιωθούν αν τα αποτελέσματα είναι σωστά και ανταποκρίνεται στη φυσική που το διέπει.

Οι εξισώσεις τόσο για το ευθύ όσο και για το συζυγές πρόβλημα επιλύθηκαν στο ανοικτό πακέτο OpenFOAM με τον υπάρχοντα κώδικα του Εργαστηρίου Θερμικών Στροβιλομηχανών για στρωτές ροές (*adjointSimpleFoam-topo-thesis*). Στο πακέτο OpenFOAM, είναι διαθέσιμοι δύο πλεγματοποιητές: το *blockMesh* για απλά πλέγματα και το *snappyHexMesh* για πολύπλοκα μεν, όχι διδιάστατα δε, πλέγματα. Στη συγκεκριμένη εφαρμογή χρησιμοποιήθηκε το *blockMesh* για τη δημιουργία ορθογωνικού πλέγματος στο χωρίο ροής.

4.1 Αλγόριθμος Βελτιστοποίησης

Στο OpenFOAM για κάθε περίπτωση υπάρχει η δυνατότητα επιλογής των χαρακτηριστικών τόσο της ροής (στρωτή, τυρβώδης, ασυμπίεστη κλπ.) όσο και της βελτιστοποίησης (αριθμός κύκλων, σύγκλιση, αριθμός επαναλήψεων ευθέος και συζυγούς προβήματος κλπ.). Τα χαρακτηριστικά της ροής εισάγονται σε αρχεία με την ονομασία *...properties* στον κατάλογο *constant* ενώ τα χαρακτηριστικά της βελτιστοποίησης συγκεκριμενοποιούνται στα αρχεία *controlDict*, *fvSchemes* και *fvSolution* στον κατάλογο *system* (Παράρτημα Α').

Ακολουθεί το διάγραμμα 4.1 όπου παρουσιάζεται ο αλγόριθμος της ροής πληροφοριών κατά τη διαδικασία βελτιστοποίησης.

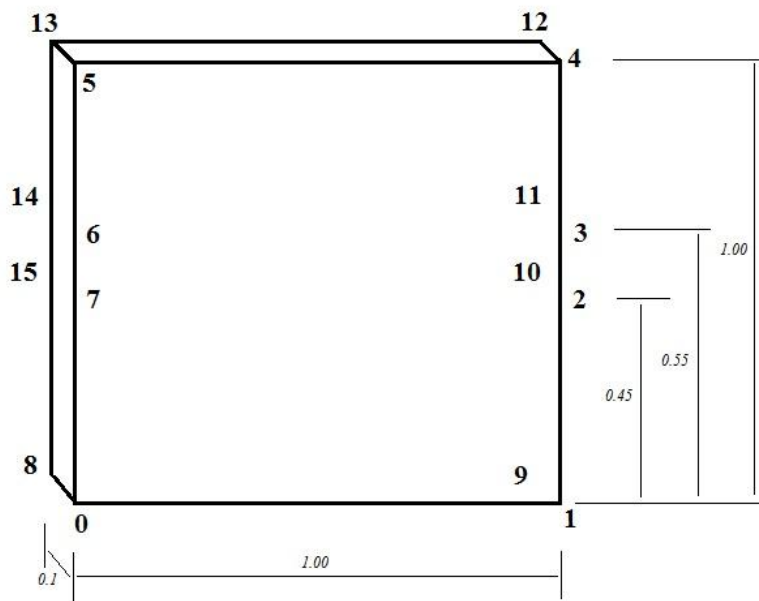


Σχήμα 4.1.1: Αλγόριθμος βελτιστοποίησης της διαδρομής μεταξύ εισόδου - εξόδου 2D χωρίου ροής με στόχο την επιλεγμένη συνάρτηση κόστους.

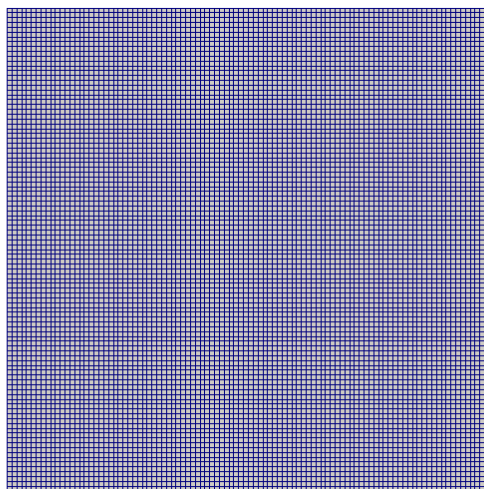
Στην παρούσα εργασία, η ροή θεωρείται στρωτή και το ρευστό νευτώνιο και συνεκτικό. Η κινηματική συνεκτικότητα ν του ρευστού που επιλέχθηκε για τις περιπτώσεις, θεωρήθηκε ίση με $5 \cdot 10^{-4} \frac{m^2}{s}$. Η θερμοκρασία τόσο των τοιχωμάτων του διευρυμένου χωρίου όσο και των περιοχών που ο αλγόριθμος θα υποδείξει ως τοίχωμα - T_{wall} , ισούται με $400 K$. Επιπλέον, καθορίζεται η μέγιστη τιμή για το πορώδες - α_{max} , ενώ υπάρχει η δυνατότητα να οριστούν περιοχές στις οποίες η τιμή της τοπολογικής μεταβλητής δεν θα αλλάζει και θα

παραμένει σταθερή – α_{fixed} , λ.χ. περιοχές από τις οποίες ο χρήστης δεν επιθυμεί να περάσει η ροή. Στο αρχείο *fvSolution* καταχωρούνται κάποια από τα χαρακτηριστικά της βελτιστοποίησης όπως οι επιλεγμένες αντικειμενικές συναρτήσεις και οι συντελεστές χαλάρωσης. Πιο συγκεκριμένα, καθορίζεται εάν θα επιλυθούν οι εξισώσεις του ευθέος και του συζυγούς προβλήματος και η εξίσωση ενέργειας καθώς και τα ονόματα των περιοχών με την καθορισμένη τιμή α_{fixed} . Επίσης ορίζονται οι ομαδοποιημένες επιφάνειες για τις οποίες είναι επιθυμητό να καταγράφεται η πίεση, εδώ η είσοδος και η έξοδος σε κάθε επανάληψη, ενώ επιλέγεται η ανανέωση ή μη της τοπολογικής μεταβλητής, ο αρχικός αριθμός επαναλήψεων του ευθέος και συζυγούς προβλήματος, ο μετέπειτα αριθμός επαναλήψεων και η τιμή συγκλίσεως για καθένα από τα δύο αυτά προβλήματα. Στο σημείο αυτό να σημειωθεί, πως λύνεται μία φορά το ευθύ πρόβλημα και μία φορά το συζυγές ολοκληρώνοντας έτσι έναν κύκλο βελτιστοποίησης. Η βελτιστοποίηση αυτή ονομάζεται και *one shot*^[8]. Τέλος, για την πλήρη περιγραφή της επίλυσης των εξισώσεων ροής και των χαρακτηριστικών της βελτιστοποίησης, καθορίζονται τα σχήματα διακριτοποίησης για κάθε όρο των εξισώσεων στο αρχείο *fvSchemes* όπως αυτά περιγράφηκαν στην ενότητα 2.4.3, ενώ στο *controlDict* επιλέγεται μεταξύ άλλων η αρχική 'χρονική' στιγμή και ο τελικός αριθμός κύκλων της βελτιστοποίησης.

Για τη γέννηση πλεγματος, αρχικά, δημιουργείται ένα αρχείο *blockMeshDict*, στο οποίο εισάγονται τα σημεία που διαμορφώνουν το επιθυμητό χωρίο. Εκεί θα ορισθούν, επίσης, τα εξάεδρα και οι επιφάνειες του ευρύτερου πεδίου, ενώ παρέχει την δυνατότητα ομαδοποίησης επιφανειών στις οποίες αργότερα θα δοθεί μία συγκεκριμένη ιδιότητα. Πρέπει να σημειωθεί πως παρόλο που στην παρούσα διπλωματική εργασία εφαρμόζονται 2D περιπτώσεις, στο OpenFOAM εισάγεται και η 3^η διάσταση, η οποία ωστόσο πλεγματοποιείται με 1 στοιχείο, ιδιότητα που καθορίζει τα 2D χωρία στο ανοικτό αυτό πακέτο. Η δομή του χωρίου της συγκεκριμένης εφαρμογής φαίνεται στο Σχήμα 4.1.1. Το *blockMesh* θα δημιουργήσει ένα δομημένο ορθογωνικό πλέγμα με τέτοιο αριθμό στοιχείων κατά τις 3 διαστάσεις που ορίζεται από την δήλωση των εξαέδρων στο *blockMeshDict* (Παράρτημα Α'). Με την εκτέλεση του *blockMesh* δημιουργείται ένα σύνολο αρχείων που ορίζουν πλήρως τη γεωμετρία του χωρίου (*faces, boundary, owners, points*) και τελικά δημιουργείται ένα πλέγμα με 100×100 στοιχεία (Σχήμα 4.1.2). Οι τιμές των μεταβλητών τόσο για το ευθύ όσο και για το συζυγές πρόβλημα αρχικοποιούνται σε αρχεία που βρίσκονται στον κατάλογο *0* και από αυτά ο κώδικας λαμβάνει τις αρχικές αλλά και οριακές συνθήκες. Τονίζεται πως το OpenFOAM ομαδοποιεί αυτόματα όλες τις εσωτερικές επιφάνειες με την ονομασία *internalField*.



Σχήμα 4.1.1: Χωρίο εγκατάστασης με τα κομβικά σημεία. Τα σημεία 6, 7, 14, 15 οριοθετούν την είσοδο ενώ τα 2, 3, 11 και 10 την έξοδο. Μονάδες μέτρησης σε μέτρα [m].



Σχήμα 4.1.2: Πλέγμα του διευρυμένου χωρίου που δημιουργήθηκε από την εκτέλεση του *blockMesh* με 100 στοιχεία κατά τον άξονα *x*, 100 κατά τον άξονα *y* και 1 κατά τον άξονα *z*.

Η μέθοδος βελτιστοποίησης της τοπολογίας μπορεί να ξεκινήσει με τη μέγιστη τιμή του πορώδους α για το εσωτερικό, δηλαδή αρχικά κλειστό χωρίο, ή με μηδενικό πορώδες για το εσωτερικό, δηλαδή αρχικά ανοικτό χωρίο. Την επίλυση του ευθέος και του συζυγούς προβλήματος πραγματοποιεί ο κώδικας με το όνομα *adjointSimpleFoam-topo-thesis*. Για την one shot βελτιστοποίηση λύνονται μία φορά οι εξισώσεις ροής και μία φορά οι συζυγείς εξισώσεις σε κάθε κύκλο βελτιστοποίησης. Προϋπόθεση για την εκτέλεση του κώδικα είναι τόσο η

αρχικοποίηση όλων των μεταβλητών που υπεισέρχονται στις εξισώσεις όσο και η επιλογή χαρακτηριστικών της ροής και της αντικειμενικής συνάρτησης, όπως αυτά περιγράφηκαν προηγουμένως. Μετά την επίλυση του ευθέος και του συζυγούς προβλήματος, σειρά έχει ο υπολογισμός των παραγώγων ευαισθησίας της συνάρτησης κόστους ως προς τις τοπολογικές μεταβλητές. Σύμφωνα με τις παραγώγους ευαισθησίας που έχουν υπολογισθεί σε κάθε κόμβο, γίνεται ανανέωση της γεωμετρίας με την μέθοδο της απότομης καθόδου. Προφανώς, με τον όρο «ανανέωση της γεωμετρίας» υποδηλώνεται η ανανέωση της τιμής του πορώδους α για κάθε κόμβο. Για την μέθοδο της απότομης καθόδου ισχύει:

$$\alpha_{ij}^{k+1} = \alpha_{ij}^k - \eta \left. \frac{\delta F_{obj}}{\delta \alpha_{ij}} \right|^k \quad (4.1)$$

όπου α_{ij}^{k+1} και α_{ij}^k οι τιμές του πορώδους στον κόμβο ij για τον κύκλο βελτιστοποίησης $k+1$ και k αντίστοιχα, η το βήμα απότομης καθόδου με μονάδες μέτρησης $\frac{s}{m^2}$ και $\left. \frac{\delta F_{obj}}{\delta \alpha_{ij}} \right|^k$ η παράγωγος ευαισθησίας ως την τοπολογική μεταβλητή στον κόμβο ij στον κύκλο βελτιστοποίησης k .

Ένας κύκλος βελτιστοποίησης τελειώνει με τη δημιουργία αρχείων με τις νέες τιμές των μεταβλητών ροής και των συζυγών μεταβλητών. Τα συγκεκριμένα αρχεία τοποθετούνται σε έναν κατάλογο με όνομα τον αριθμό της τρέχουσας επανάληψης. Η διαδικασία της βελτιστοποίησης διακόπτεται όταν ικανοποιηθεί το κριτήριο σύγκλισης για το ευθύ και για το συζυγές πρόβλημα, δηλαδή αν οι τιμές του πορώδους πρακτικά παραμένουν αμετάβλητες. Από τα παραπάνω συνεπάγεται πως στο πρόβλημα βελτιστοποίησης τοπολογίας υπεισέρχονται αρκετές παράμετροι, με τη καθεμιά ξεχωριστά να το επηρεάζει διαφορετικά: το βήμα απότομης καθόδου η , οι παράγοντες ω_1, ω_2 , οι αριθμοί Reynolds Re και Prandtl Pr και η αρχικοποίηση του εσωτερικού του ευρύτερου χωρίου για το πορώδες $\alpha_{internal}$. Η παραμετρική μελέτη για την αρχικοποίηση του πεδίου θα εξακριβώσει εάν η μέθοδος επηρεάζεται από τις αρχικές τιμές των μεταβλητών α_{ij} στο εσωτερικό, εάν δηλαδή η βέλτιστη διαδρομή είναι η ίδια για αρχικά κλειστό ($\alpha = \alpha_{max}$) και αρχικά ανοικτό ($\alpha = 0$) πεδίο.

4.2 Παραμετρική Μελέτη

Η αντικειμενική συνάρτηση για τις εφαρμογές αυτού του κεφαλαίου παίρνει τη μορφή του σταθμισμένου αθροίσματος των f_i , $i = 1, 2$ όπου f_1 οι απώλειες ολικής πίεσης και f_2 η θερμοκρασιακή διαφορά μεταξύ εξόδου – εισόδου (Εξίσωση 3.18). Επιλέγοντας ως παραμέτρους τα η , $\alpha_{internal}$ και ω_1, ω_2

και τροποποιώντας τις τιμές τους, γίνεται αντιληπτή η επιρροή που έχουν στη τελική βέλτιστη λύση που υποδεικνύει η μέθοδος βελτιστοποίησης τοπολογίας.

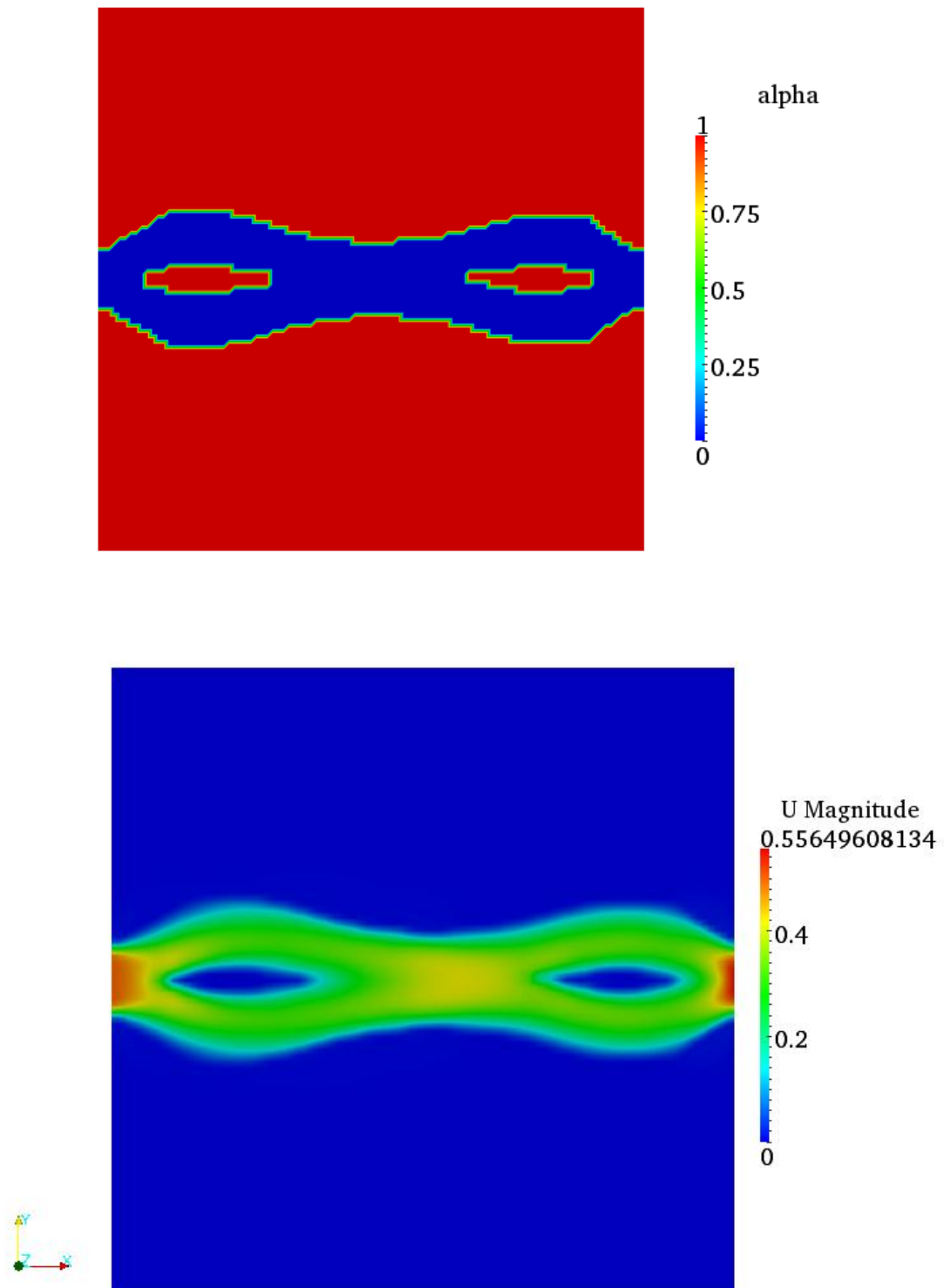
4.2.1 2Δ Χωρίο με μια Είσοδο και μια Έξοδο

Στη συγκεκριμένη ενότητα, το χωρίο θεωρείται με μια είσοδο και μια έξοδο ίδιου πλάτους, όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.1.1. Εδώ, επιλέγεται τιμή του βήματος απότομης καθόδου η ίση με 10^2 ενώ το χωρίο αρχικά είναι κλειστό. Η ταχύτητα εισόδου επιλέγεται ως $U_I = 0.5 \frac{m}{s}$ και έτσι ο αριθμός Reynolds της ροής, με κύρια διάσταση τη διάσταση εισόδου, διαμορφώνεται ως εξής:

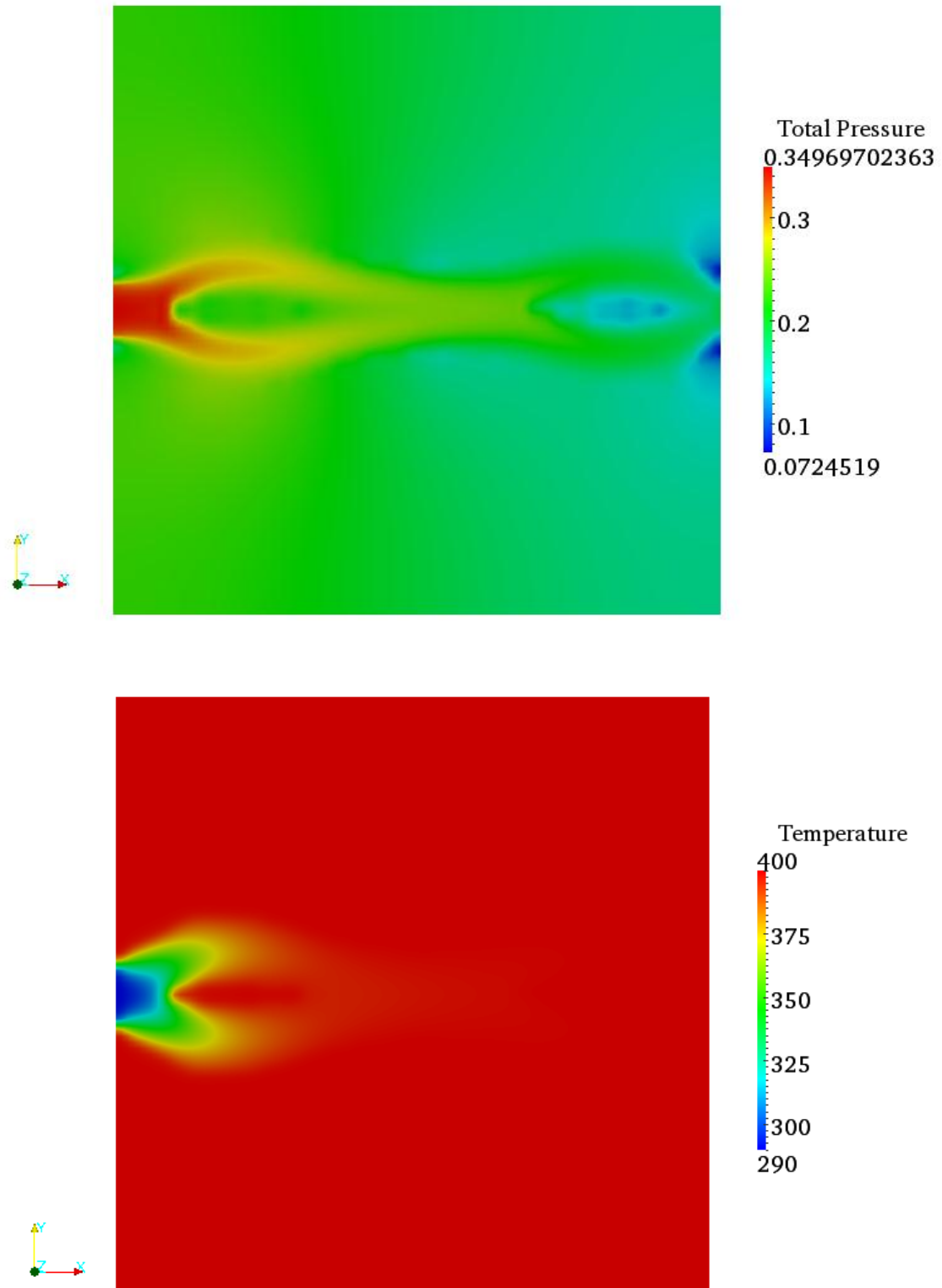
$$Re = \frac{U_I \cdot L_I}{\nu} = \frac{0.5 \frac{m}{s} \cdot 0.1m}{5 \cdot 10^{-4} \frac{m^2}{s}} = 100$$

όπου $L_I = 0.55m - 0.45m = 0.1m$ η διάσταση της εισόδου.

Ο αριθμός Prandtl λαμβάνεται ίσος με 0.1, τιμή η οποία είναι σχετικά χαμηλή συνεπώς το ρευστό χαρακτηρίζεται από υψηλή θερμική αγωγιμότητα. Στα Σχήματα 4.2.1&2 απεικονίζονται τα αποτελέσματα της βελτιστοποίησης για τα πεδία του πορώδους, της θερμοκρασίας, της ταχύτητας και της ολικής πίεσης. Από το πεδίο του πορώδους α είναι εμφανής η βέλτιστη γεωμετρία η οποία σύμφωνα με τη μέθοδο της τοπολογίας και με βάση αυτές τις τιμές των παραμέτρων ελαχιστοποιεί την αντικειμενική συνάρτηση, όπως αυτή δηλώθηκε παραπάνω. Παρατηρείται η δημιουργία δύο συμμετρικών νησίδων αεροδυναμικής μορφής, η παρουσία των οποίων αυξάνει τα τοιχώματα με τα οποία έχει επαφή το ρευστό για μέγιστη πρόσδοση θερμότητας. Η αεροδυναμική τους, ωστόσο, μορφή εξισορροπεί τη μεγιστοποίηση αυτή των σημείων επαφής του ρευστού με τοιχώματα, με την ελαχιστοποίηση των απωλειών ολικής πίεσης αντίθετα με οποιαδήποτε άλλη νησίδα διαφορετικής γεωμετρίας. Επίσης, αξιοσημείωτο είναι πως η θερμοκρασία του ρευστού φτάνει τη μέγιστη τιμή της πολύ νωρίς τοπικά, κιάλας από την πρώτη νησίδα, κάτι που ήταν αναμενόμενο εφόσον το ρευστό χαρακτηρίζεται από το συνδυασμό χαμηλής ταχύτητας και υψηλής θερμικής αγωγιμότητας. Το γεγονός αυτό οδηγεί στο συμπέρασμα πως ο σκοπός της δεύτερης νησίδας μάλλον είναι η εξομάλυνση της ροής από την όποια ανατάραξη προκάλεσε η πρώτη. Οι τιμές των απωλειών ολικής πίεσης και της θερμοκρασιακής διαφοράς εξόδου – εισόδου στη τελική και βέλτιστη γεωμετρία είναι $f_1 = 0.1007 m^2/s^2$ και $f_2 = 109.96 K$.



Σχήμα 4.2.1: Αποτελέσματα μεθόδου βελτιστοποίησης τοπολογίας σε τετραγωνικό χωρίο με το πέρασ 8000 επαναλήψεων και για $Re = 100$, $Pr = 0.1$, τιμή του βήματος απότομης καθόδου 10^2 και αρχικά κλειστό χωρίο με στόχο το σταθμισμένο άθροισμα των f_i . -**Πάνω:** Τοπολογική μεταβλητή ή πορώδες α (τελική γεωμετρία) [1/s] -**Κάτω:** Μέτρο της ταχύτητας [m/s]



Σχήμα 4.2.2: Αποτελέσματα μεθόδου βελτιστοποίησης τοπολογίας σε τετραγωνικό χωρίο με το πέρασ 8000 επαναλήψεων και για $Re = 100$, $Pr = 0.1$, τιμή του βήματος απότομης καθόδου 10^2 και αρχικά κλειστό χωρίο με στόχο το σταθμισμένο άθροισμα των f_i . -**Πάνω:** Ολική πίεση [m^2/s^2] -**Κάτω:** Θερμοκρασία [K]

4.2.2 Μέγεθος Βήματος Απότομης Καθόδου

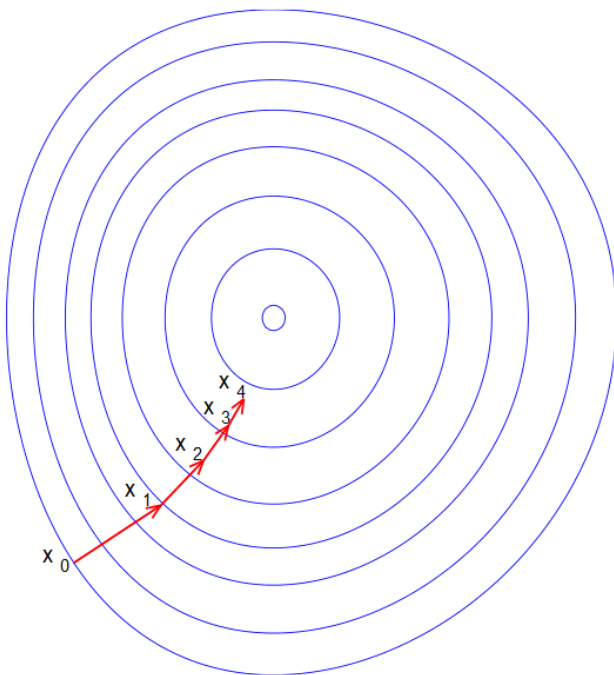
Η απότομη κάθοδος (steepest descent) είναι ένας αλγόριθμος βελτιστοποίησης πρώτης τάξης. Για τον εντοπισμό ενός τοπικού ακροτάτου συνάρτησης, ο χρήστης προχωρά με βήματα ανάλογα της αρνητικής κλίσης της συνάρτησης στο τρέχον σημείο. Η απότομη κάθοδος βασίζεται στην παρατήρηση πως εάν μία πολυπαραμετρική συνάρτηση $\Phi(x)$ είναι ορισμένη και διαφορίσιμη σε μια γειτονιά του σημείου λ , τότε η $\Phi(x)$ μειώνεται ταχύτερα αν κανείς πάει από το λ κατά την κατεύθυνση της αρνητικής κλίσης της Φ στο λ , $-\nabla\Phi(\lambda)$. Αυτό συνεπάγεται πως εάν:

$$\mu = \lambda - \eta \cdot \nabla\Phi(\lambda) \quad (4.2)$$

όπου $\eta \rightarrow 0$ ένας μικρός αριθμός, τότε $\Phi(\lambda) \geq \Phi(\mu)$. Με την παρατήρηση αυτή, ο χρήστης αρχίζει από ένα θεωρητικό ή τυχαίο σημείο x_0 για το τοπικό ελάχιστο της Φ και θεωρεί τη σειρά x_0, x_1, x_2, \dots τέτοια ώστε:

$$x_{n+1} = x_n - \eta_n \nabla\Phi(x_n), \quad n \geq 0 \quad (4.3)$$

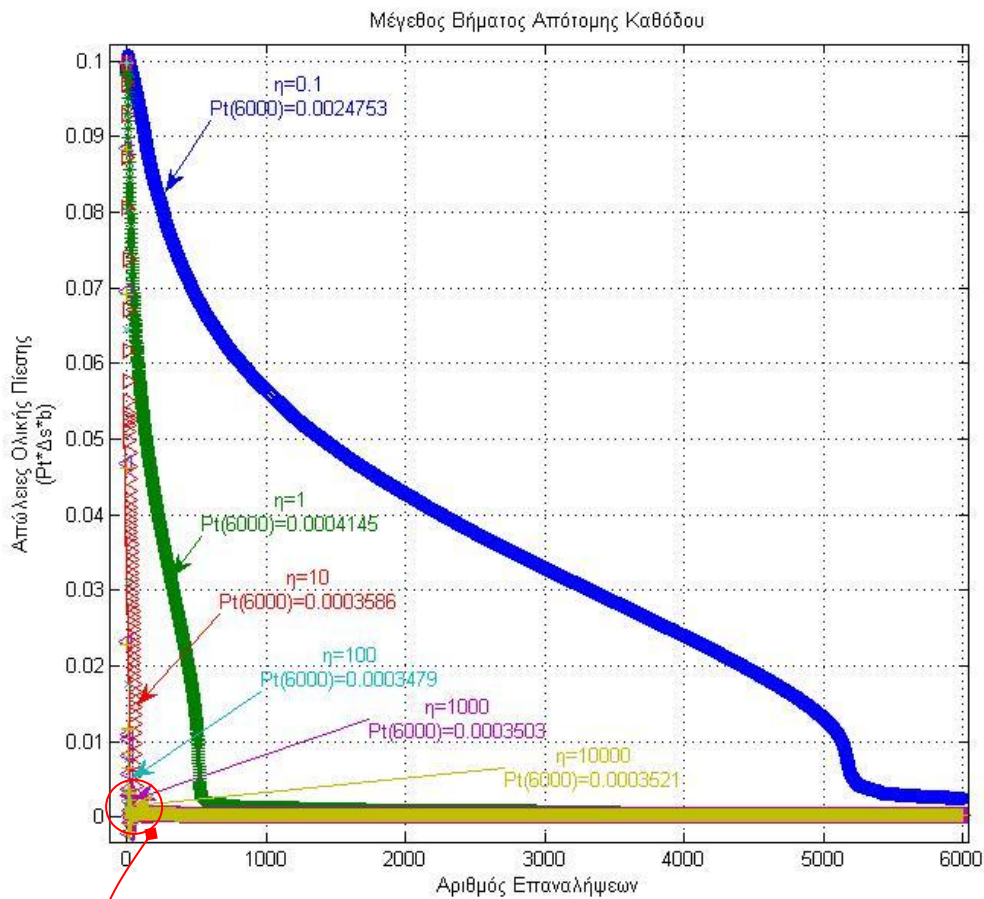
Τότε ισχύει $\Phi(x_0) \geq \Phi(x_1) \geq \Phi(x_2) \geq \dots$ και έτσι η σειρά x_n προσεγγίζει το επιθυμητό τοπικό ελάχιστο. Να σημειωθεί πως η τιμή του μεγέθους βήματος (step size) η επιτρέπεται να αλλάζει σε κάθε επανάληψη. Με συγκεκριμένες θεωρήσεις για τη συνάρτηση Φ και επιλογές για το η , η προσέγγιση σε τοπικό ελάχιστο μπορεί να εγγυηθεί. Αυτή η διαδικασία παρουσιάζεται στο Σχήμα 4.2.3.



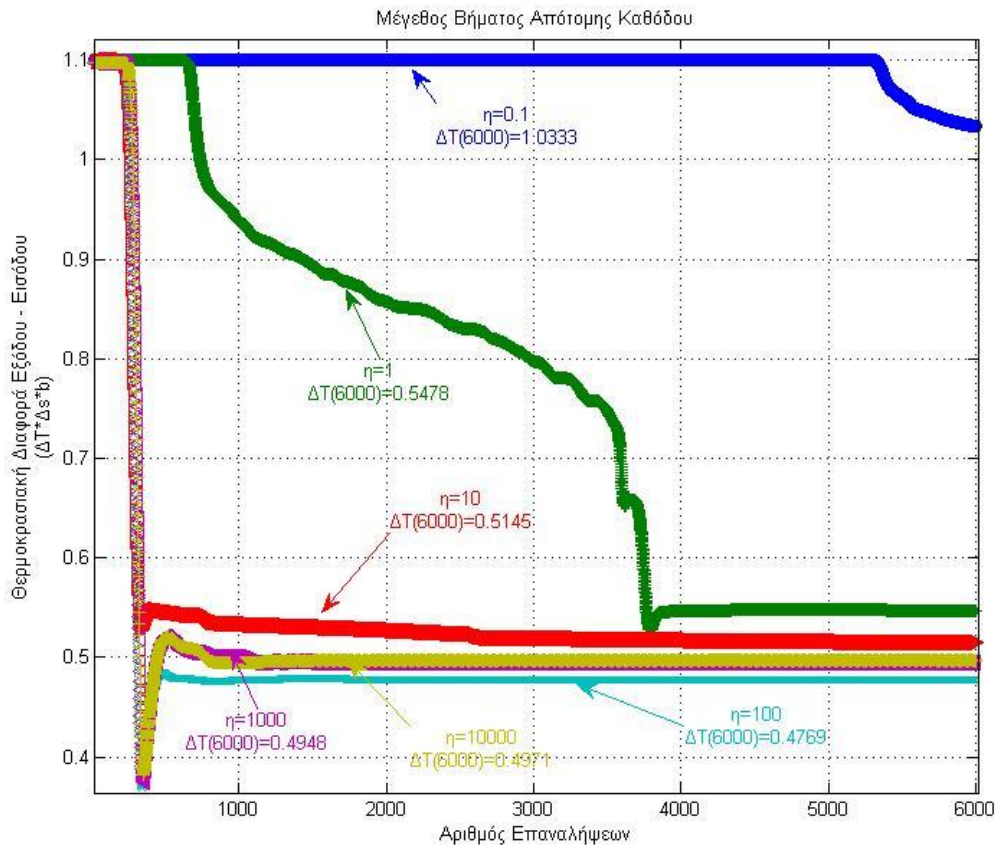
Σχήμα 4.2.3:

Σχηματική απεικόνιση της απότομης καθόδου. Εδώ η συνάρτηση Φ θεωρείται ότι είναι ορισμένη στο επίπεδο. Οι κλειστές καμπύλες είναι γραμμές σταθερής τιμής για τη Φ . Τα τόξα δείχνουν την κατεύθυνση της αρνητικής κλίσης σε κάθε σημείο, ξεκινώντας από ένα τυχαίο. Η αρνητική κλίση της Φ είναι κάθετη στις γραμμές σταθερής Φ .

Στην παρούσα διπλωματική εργασία, το βήμα απότομης καθόδου παρέμεινε σταθερό μέχρι το πέρας της διαδικασίας βελτιστοποίησης τοπολογίας, παρατηρώντας αλλαγή της συμπεριφοράς σύγκλισης της αντικειμενικής συνάρτησης για διαφορετικές τιμές του βήματος. Από ένα πρόχειρο 'τρέξιμο' του αλγορίθμου βελτιστοποίησης τοπολογίας, η τάξη μεγέθους της κλίσης της συναρτήσεως κόστους ως προς τις τοπολογικές μεταβλητές $a_{i,j}$ κυμαίνεται μεταξύ του διαστήματος εύρους 10^{-4} έως 10^{-10} . Επομένως, η τιμή του βήματος επιλέχθηκε στο διάστημα 10^{-1} έως $10^4 \text{ S}/\text{m}^2$, προκειμένου το γινόμενο $\eta \frac{\delta F_{obj}}{\delta a}$ της εξίσωσης (4.1) να παραμένει μικρό, δεδομένου πως το πορώδες α προσεγγίζεται με τιμές από 0 έως 200. Στα Σχήματα 4.2.4,5,6 παρουσιάζεται η σύγκλιση και η τελική τιμή των αντικειμενικών συναρτήσεων f_1 και f_2 για διαφορετικές τιμές του μεγέθους βήματος απότομης καθόδου η .



Σχήμα 4.2.4: Διάγραμμα σύγκλισης των απωλειών ολικής πίεσης 2Δ τετραγωνικού χωρίου με μια είσοδο και μια έξοδο με $Pr = 0.68$ και αρχικά κλειστό χωρίο, για διαφορετικές τιμές του βήματος απότομης καθόδου η . Για κάθε τιμή του η παρατίθεται και η τιμή που λαμβάνουν οι απώλειες στο τέλος της διαδικασίας βελτιστοποίησης. Μεγάλες τιμές του η προκαλούν ταλαντωτική συμπεριφορά στην αρχικές επαναλήψεις. Μονάδες μέτρησης m^4/s^2 .



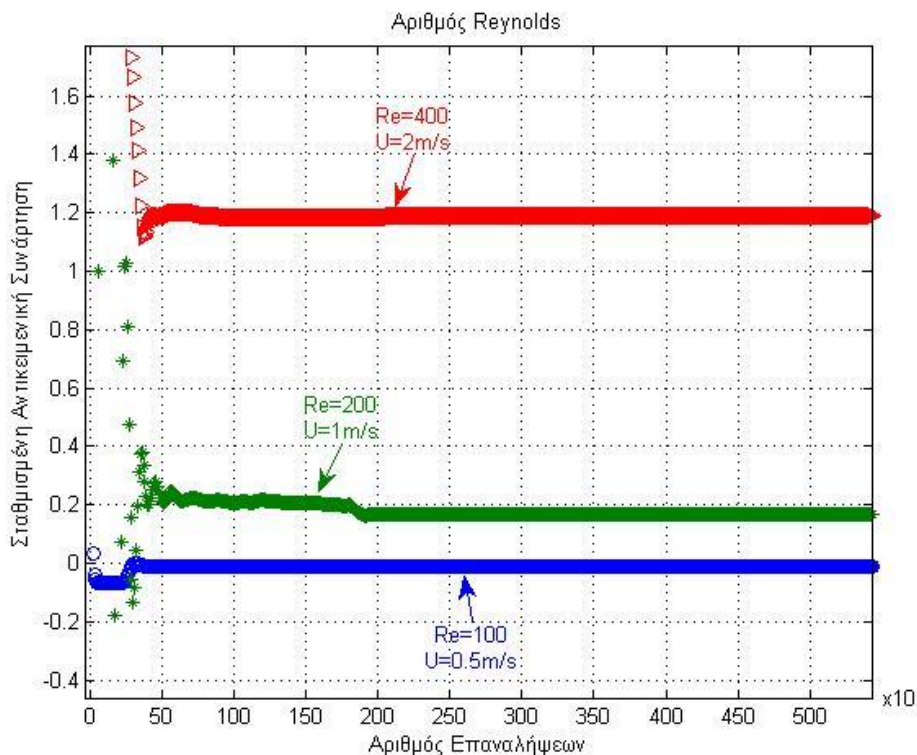
Σχήμα 4.2.5: Διάγραμμα σύγκλισης της θερμοκρασιακής διαφοράς εξόδου - εισόδου 2Δ τετραγωνικού χωρίου με μια είσοδο και μια έξοδο με $Pr = 0.68$ και αρχικά κλειστό χωρίο, για διαφορετικές τιμές του βήματος απότομης καθόδου η . Για κάθε τιμή του η παρατίθεται και η τιμή που λαμβάνει διαφορά θερμοκρασίας στο τέλος της διαδικασίας βελτιστοποίησης. Μονάδες μέτρησης Km^2 .

Αρχικά, να σημειωθεί πως ο υπολογισμός των Δp_t και ΔT από τον οικείο κώδικα, έχει δηλωθεί έτσι, που δεν υπολογίζει άμεσα τις τιμές τους αλλά το γινόμενο $f_i = \zeta \cdot \Delta s \cdot b$ με $\zeta = \Delta p_t$ για $i = 1$ και $\zeta = \Delta T$ για $i = 2$, όπου Δs το μήκος εισόδου ή εξόδου και b το βάθος πεδίου στο ψευδο-3Δ πλέγμα, εδώ κοινό για όλες τις επιφάνειες του ευρύτερου πεδίου και ίσο με $0.1m$. Εδώ, το Δs είναι κοινό για την είσοδο και την έξοδο και ίσο με $0.1m$ άρα οποιαδήποτε τιμή εξάγεται από τα διαγράμματα πρέπει να πολλαπλασιασθεί με $1/\Delta s \cdot b = 10^2 m^{-2}$ για να προκύψει το πραγματικό μέγεθος των f_i . Παρατηρείται πως το μέγεθος βήματος η επηρεάζει αρκετά το πόσο γρήγορα η μέθοδος βελτιστοποίησης θα υπολογίσει και τις απώλειες ολικής πίεσης στην αντικειμενική συνάρτηση καθώς επίσης η φύση των δύο προβλημάτων ελαχιστοποίησης των απωλειών και μεγιστοποίησης της θερμοκρασίας είναι αντίρροπη, δηλαδή σύγκλιση του ενός προκαλεί απόκλιση του άλλου. Οι τιμές $\eta = 1$ και $10^5/m^2$ δείχνουν ως οι πιο

ιδανικές εφόσον κατάφεραν με περίπου ίδιες απώλειες μεγαλύτερη θερμοκρασία απ'τις άλλες.

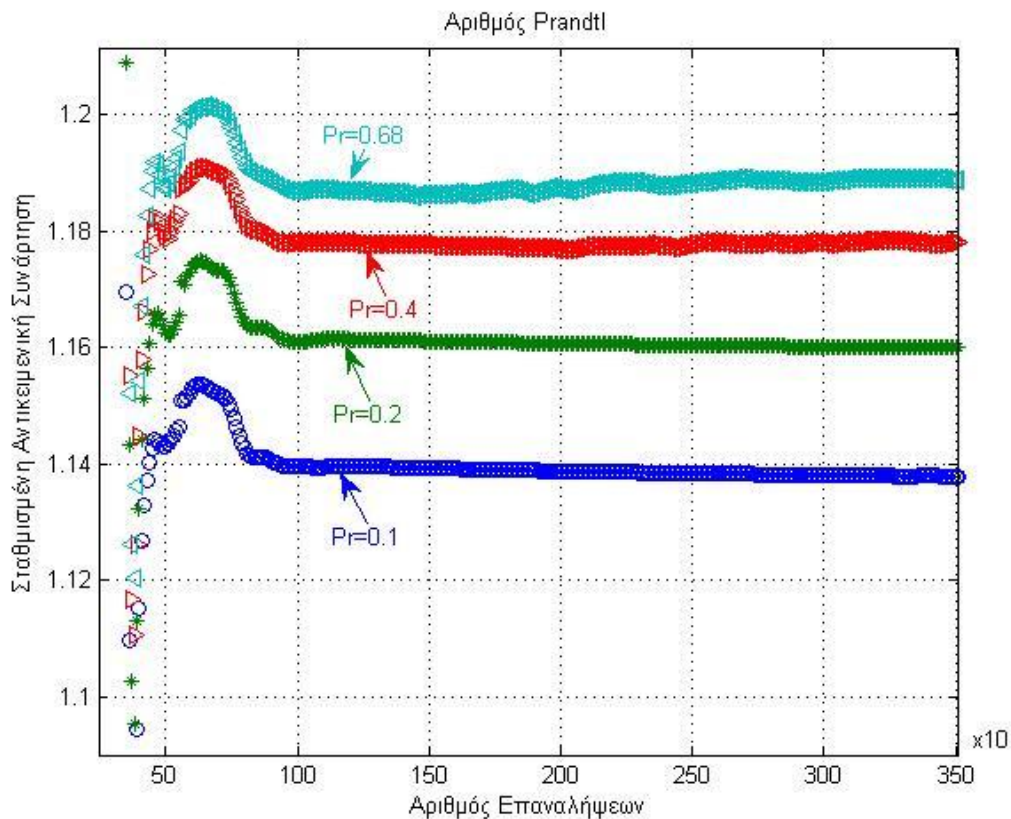
4.2.3 Αριθμοί Reynolds & Prandtl

Η ταχύτητα εισόδου τροποποιείται κάθε φορά ώστε να αλλάξει η τιμή του αριθμού Re και να διαπιστωθεί η επιρροή του στο πρόβλημα βελτιστοποίησης. Για ταχύτητες εισόδου μέχρι $3 \frac{m}{s}$ ($Re = 600$) η ροή παραμένει στρωτή σε όλο το ευρύτερο πεδίο, ενώ για μεγαλύτερες τιμές οι προκύπτουσες ροές παρουσιάζουν τεράστιες απώλειες με χαμηλές θερμοκρασιακές διαφορές, γεγονός που υποδηλώνει πως το χρησιμοποιούμενο από τον κώδικα μοντέλο για στρωτή ροή αδυνατεί να τη προσεγγίσει. Για το λόγο αυτό, στα προβλήματα που εφαρμόζονται στην παρούσα διπλωματική εργασία ο Re_c θεωρείται ίσος με 600. Στο Σχήμα 4.2.6 παρουσιάζεται το διάγραμμα σύγκλισης της F_{obj} για διαφορετικές τιμές της ταχύτητας εισόδου. Υψηλότερες ταχύτητες προκαλούν αύξηση της σταθμισμένης συνάρτησης κόστους αφενός λόγω του ότι η ολική πίεση συναρτάται του τετραγώνου της ταχύτητας, αφετέρου λόγω



Σχήμα 4.2.6: Διάγραμμα σύγκλισης της F_{obj} 2Δ τετραγωνικού χωρίου με μια είσοδο και μια έξοδο με $Pr = 0.68$, αρχικά κλειστό χωρίο και $\eta = 10^2 \frac{s}{m^2}$, με παράμετρο την ταχύτητα εισόδου που επηρεάζει τον αριθμό Reynolds.

της μικρότερης θερμοκρασιακής αύξησης του ρευστού εξαιτίας του λιγότερου χρόνου παραμονής του στον αγωγό. Από το Σχήμα 4.2.7 όπου παρουσιάζεται η σύγκλιση της F_{obj} για διαφορετικούς αριθμούς Pr , παρατηρείται πως ο αλγόριθμος έχει την ίδια συμπεριφορά κάτι που αποτυπώνεται στην ομοιότητα των καμπυλών. Προφανώς, οι μεγαλύτερες τιμές του Pr αυξάνουν την τιμή της F_{obj} , αφού προσεγγίζουν ρευστά με χαμηλότερη θερμική αγωγιμότητα.

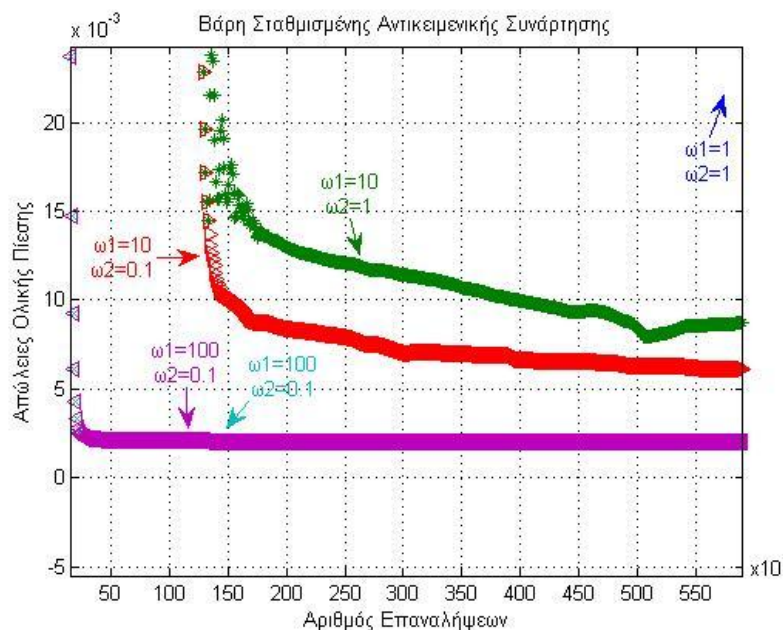


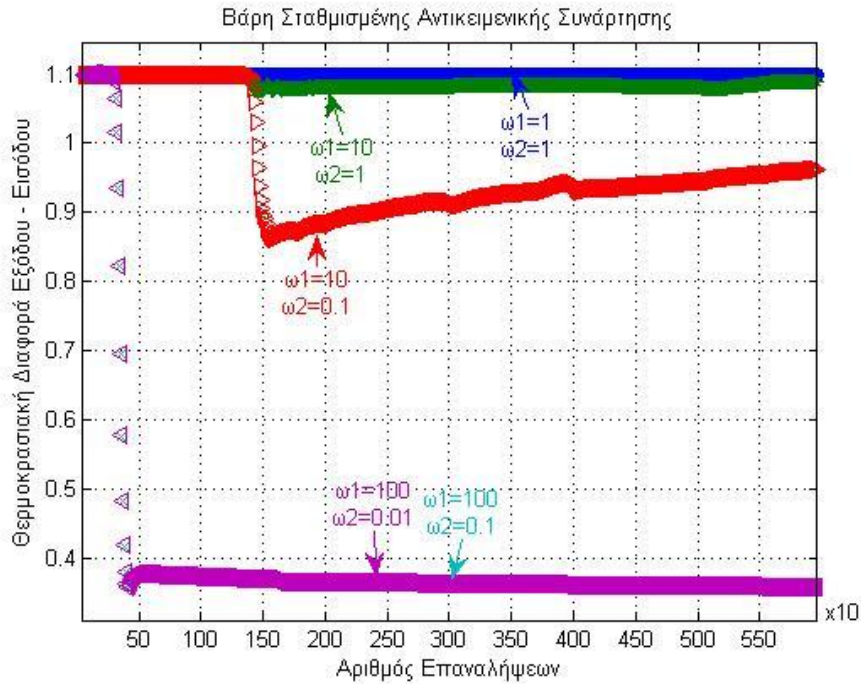
Σχήμα 4.2.7: Διάγραμμα σύγκλισης της F_{obj} 2Δ τετραγωνικού χωρίου με μια είσοδο και μια έξοδο με $Re = 400$, αρχικά κλειστό χωρίο και $\eta = 10^2 \frac{s}{m^2}$, με παράμετρο τον αριθμό Prandtl.

Οι μεγαλύτερες τιμές του αριθμού Prandtl μειώνει την επίδραση του όρου διάχυσης της εξίσωσης (2.5γ) και για το λόγο αυτό η μετάδοση θερμότητας από τα στερεά τοιχώματα στο ρευστό είναι μικρότερη. Από την άλλη μεριά, το αντίθετο συμβαίνει για τις μικρότερες του Pr όπου ο όρος διάχυσης αυξάνεται και άρα με τη σειρά της και η πρόσδοση θερμότητας.

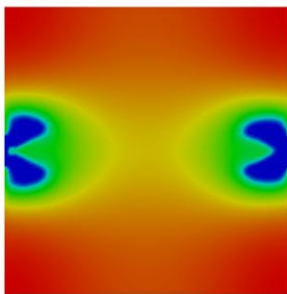
4.2.4 Παράγοντες Βαρύτητας Σταθμισμένης Αντικειμενικής Συνάρτησης

Τα βάρη της σταθμισμένης αντικειμενικής συνάρτησης F_{obj} επηρεάζουν την τελική τιμή της στο βέλτιστο αγωγό. Αυτό σημαίνει πως αν $F_{obj}(\omega_1, \omega_2) < F_{obj}(\omega'_1, \omega'_2)$ δεν συνεπάγεται απαραίτητα ότι $f_1(\omega_1, \omega_2) < f_1(\omega'_1, \omega'_2)$ και $f_2(\omega_1, \omega_2) < f_2(\omega'_1, \omega'_2)$. Συνεπώς, για να γίνει αντιληπτή η επιρροή τους στη βέλτιστη λύση πρέπει να λαμβάνονται υπόψη και τα διαγράμματα των f_1 και f_2 ξεχωριστά. Για $Pr = 0.68$, $Re = 200$, $\eta = 10^5/m^2$ και αρχικά κλειστό χωρίο ($\alpha_{internal} = 200$), μελετήθηκε η συμπεριφορά του αλγόριθμου για διαφορετικούς συνδυασμούς των βαρών ω_1 και ω_2 . Στα Σχήματα 4.2.8&9 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της παραμετρικής μελέτης ως προς τα βάρη της F_{obj} . Παρατηρείται η F_{obj} ελαχιστοποιείται για $\omega_1 = 10$ και $\omega_2 = 0.1$. Δεν συμβαίνει, ωστόσο, το ίδιο για τις απώλειες ολικής πίεσης και τη θερμοκρασιακή διαφορά εξόδου - εισόδου (Σχήμα 4.2.9). Αντίστοιχα, ο συνδυασμός $\omega_1 = 100$ και $\omega_2 = 0.1$ ενώ προσφέρει τις ελάχιστες απώλειες ολικής πίεσης, αυξάνει μονάχα κατά 37 βαθμούς Kelvin τη θερμοκρασία του ρευστού, όταν άλλοι συνδυασμοί καταφέραν τη μέγιστη πρόσδοση θερμότητας των 110 K. Σημαντικός παράγοντας για την εκλογή του βέλτιστου συνδυασμού των βαρών είναι και η μορφή του πεδίου για πορώδες που προσδιορίζει το βέλτιστο αγωγό, δηλαδή εάν έχει όντως σχηματιστεί ένας κλειστός αγωγός και εάν ναι κατά πόσο είναι κατασκευάσιμος από μηχανολογικής άποψης. Στο Σχήμα 4.2.10 παρουσιάζονται οι βέλτιστοι αγωγοί που υπέδειξε η μέθοδος βελτιστοποίησης τοπολογίας για τους ανωτέρους συνδυασμούς των βαρών.

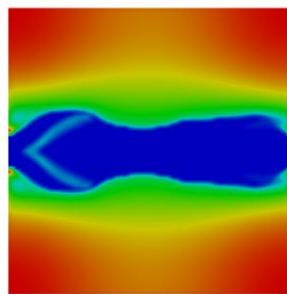




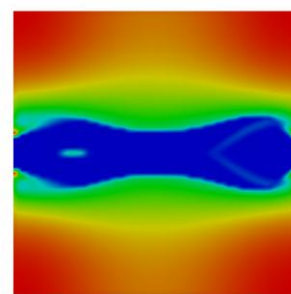
Σχήμα 4.2.8: Διάγραμμα σύγκλισης των f_1 (πάνω) και f_2 (κάτω) 2Δ τετραγωνικού χωρίου με μια είσοδο και μια έξοδο με $Re = 200$, $Pr = 0.68$, αρχικά κλειστό χωρίο και $\eta = 10 \frac{s}{m^2}$, με παράμετρο τα βάρη της σταθμισμένης αντικειμενικής συνάρτησης.



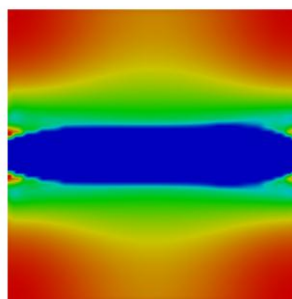
1. $\omega_1 = 1, \omega_2 = 1$



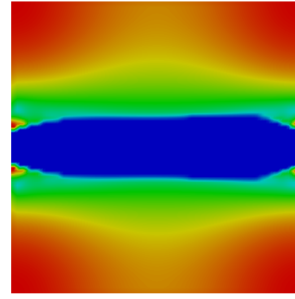
2. $\omega_1 = 10, \omega_2 = 1$



3. $\omega_1 = 10, \omega_2 = 0.1$



4. $\omega_1 = 100, \omega_2 = 0.1$



5. $\omega_1 = 100, \omega_2 = 0.01$

Σχήμα 4.2.9: Βέλτιστοι αγωγοί που υπέδειξε η μέθοδος βελτιστοποίησης τοπολογίας σε 2Δ τετραγωνικό χωρίο με μια είσοδο και μια έξοδο με $Re = 200$, $Pr = 0.68$, αρχικά κλειστό χωρίο και $\eta = 10 \frac{s}{m^2}$, για διαφορετικές τιμές των βαρών.

Στην περίπτωση 1 του Σχήματος 4.2.9 ο αλγόριθμος εγκλωβίστηκε και δεν δημιουργήθηκε αγωγός, ενώ στις περιπτώσεις 2 και 3 ο αγωγός παρουσίασε ασυνέχειες είτε στην αρχή είτε στο τέλος του. Από την άλλη, για τις περιπτώσεις 4 και 5 δημιουργήθηκαν οι αναμενόμενοι αγωγοί, ενώ παρατηρείται τόσο από τη μορφή τους όσο και από τις τιμές των αντικειμενικών συναρτήσεων η ταύτισή τους. Από τα παραπάνω, είναι σημαντικό να σημειωθεί πως η μέθοδος βελτιστοποίησης τοπολογίας είναι ευαίσθητη στα βάρη της F_{obj} διότι μπορεί να προκληθούν ασυνέχειες στη βέλτιστη λύση ή να προκύψουν αγωγοί με ελαχιστοποιημένη τη σταθμισμένη συνάρτηση κόστους που όμως δεν ανταποκρίνεται σε αγωγό υπαρκτό ή φυσικά αποδεκτό. Το σημαντικότερο σημείο της παραμετρικής μελέτης ως προς τα βάρη είναι πως η βέλτιστη λύση σε κάθε εφαρμογή επηρεάζεται διαφορετικά από τις καθαρές τιμές τους και θα πρέπει πρώτα να μελετηθεί η καθεμιά ξεχωριστά για την εύρεση του καταλληλότερου συνδυασμού των βαρών. Επιπλέον, οι τιμές των ω_1 και ω_2 επηρεάζουν έμμεσα και την τιμή του βήματος η . Από την παραγωγή της εξίσωσης (3.18) προκύπτει η παράγωγος $\frac{\partial F_{obj}}{\partial a_{ij}}$ που υπεισέρχεται στην εξίσωση (4.1) με βάση την οποία επιλέγεται η τιμή του βήματος:

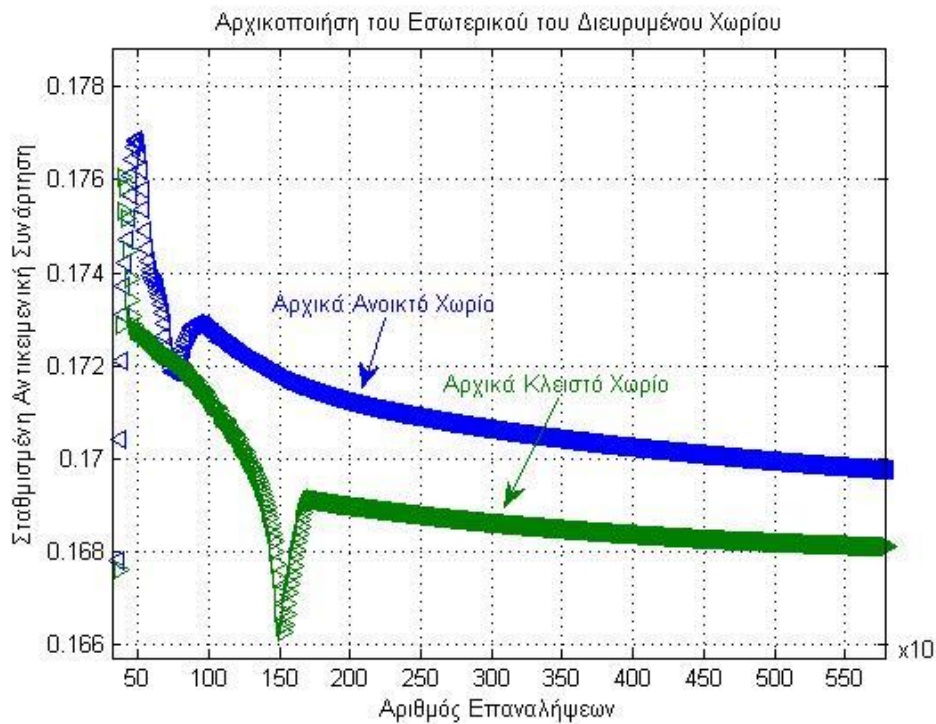
$$\frac{\partial F_{obj}}{\partial a_{ij}} = \omega_1 \frac{\partial f_1}{\partial a_{ij}} - \omega_2 \frac{\partial f_2}{\partial a_{ij}} \quad (4.4)$$

όπου η παράγωγος $\frac{\partial f_1}{\partial a_{ij}}$ στο OpenFOAM κωδικοποιείται ως *deriv* ενώ η $\frac{\partial f_2}{\partial a_{ij}}$ ως *derivThermal*. Η επιρροή τους θα γίνει αντιληπτή σε επόμενες εφαρμογές.

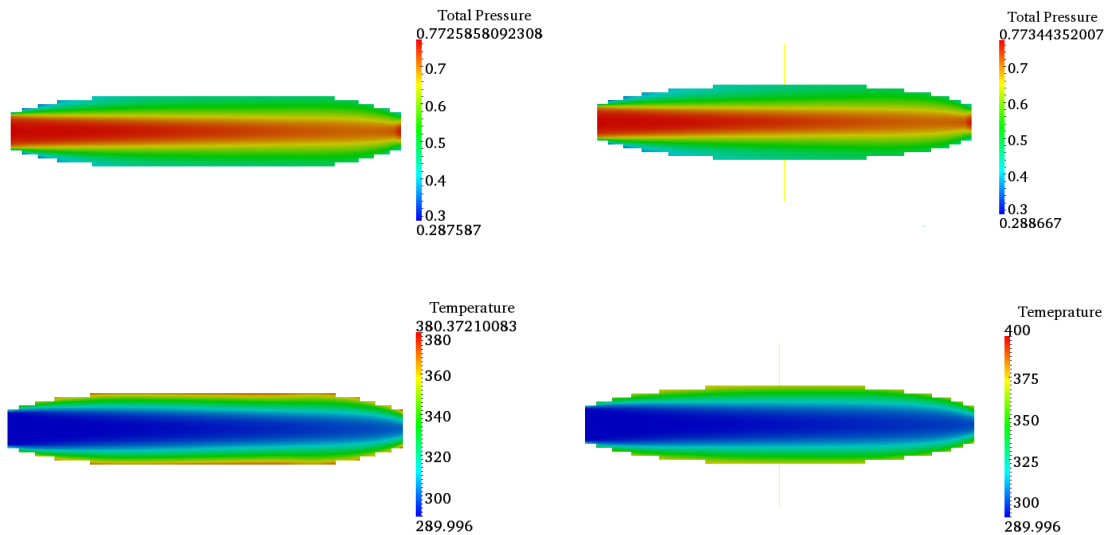
4.2.5 Αρχικοποίηση του Εσωτερικού του Διευρυμένου Πεδίου

Το εσωτερικό του διευρυμένου πεδίου αρχικοποιείται κι αυτό με τιμές για όλες τις μεταβλητές ροής, τις συζυγείς μεταβλητές και το πορώδες α . Η αρχικοποίηση για το πορώδες $\alpha_{internal}$ επηρεάζει τη 'διαδρομή' που θα ακολουθήσει ο αλγόριθμος βελτιστοποίησης τοπολογίας για να προσεγγίσει τη βέλτιστη λύση. Εάν τεθεί $\alpha_{internal} = 0$, δηλαδή στην αρχή το ρευστό δύναται να περάσει από οποιοδήποτε εσωτερικό κόμβο, τότε αυτή η περίπτωση περιγράφεται ως αρχικά ανοικτό διευρυμένο χωρίο. Αντίθετα, εάν $\alpha_{internal} = \alpha_{max}$, τότε γίνεται λόγος για αρχικά κλειστό διευρυμένο πεδίο, δηλαδή στην αρχή όλο το εσωτερικό πεδίο θεωρείται τοίχωμα. Από τη μία, το ανοικτό πεδίο δημιουργεί επικίνδυνες ταλαντώσεις στη σύγκλιση του αλγόριθμου. Από την άλλη, το κλειστό πεδίο ενδέχεται να εγκλωβίσει τη ροή πριν αυτή φτάσει στην έξοδο ή τις εξόδους και να μην δημιουργηθεί αγωγός, όπως στην περίπτωση 1

του Σχήματος 4.2.9. Τα αποτελέσματα της παραμετρικής μελέτης ως προς το $\alpha_{internal}$ παρουσιάζονται στο Σχήματα 4.2.10.



Σχήμα 4.2.10: Διάγραμμα σύγκλισης της F_{obj} 2Δ τετραγωνικού χωρίου με μια είσοδο και μια έξοδο με $Re = 200$, $Pr = 0.68$, και $\eta = 10 \frac{s}{m^2}$, για αρχικά κλειστό και αρχικά ανοικτό χωρίο.

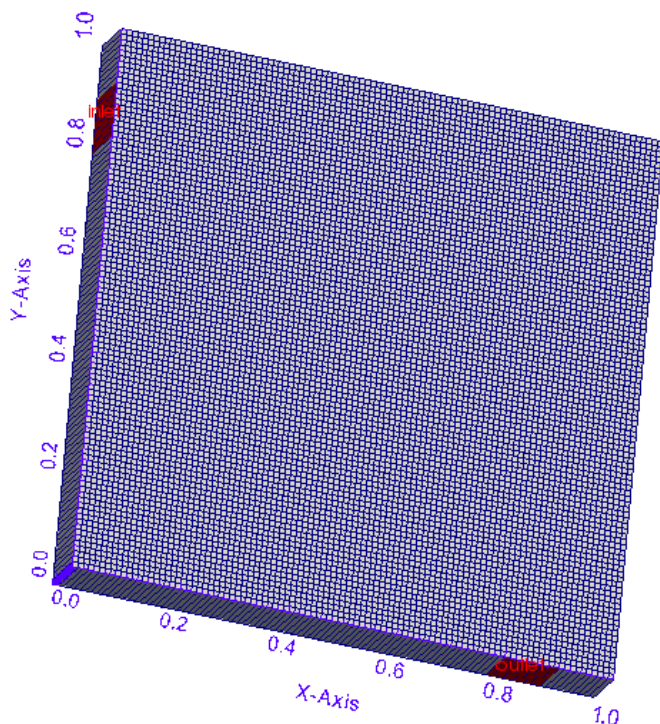


Σχήμα 4.2.11: Πεδία της ολικής πίεσης και της θερμοκρασίας πάνω στη γεωμετρία του βέλτιστου αγωγού για αρχικά ανοικτό (αριστερά) και κλειστό (δεξιά) χωρίο.

Σίγουρα, όπως παρατηρείται από το σύνολο των εφαρμογών της παρούσας εργασίας, τα αποτελέσματα για αρχικά κλειστό χωρίο είναι εν γένει ελαφρά βελτιωμένα και κατά περίπτωση εγγυημένα. Η αρχικοποίηση του εσωτερικού $\alpha_{internal}$ επελέγη για όλες τις εφαρμογές μέγιστη, δηλαδή κλειστό πεδίο, εφόσον δεν προκαλούνται αναταράξεις ή αποκλίσεις της ροής, φαινόμενα που εμφανίζονται κάποιες φορές στα προβλήματα με αρχικά ανοικτά πεδία.

4.3 Στροφή της Ροής κατά 90°

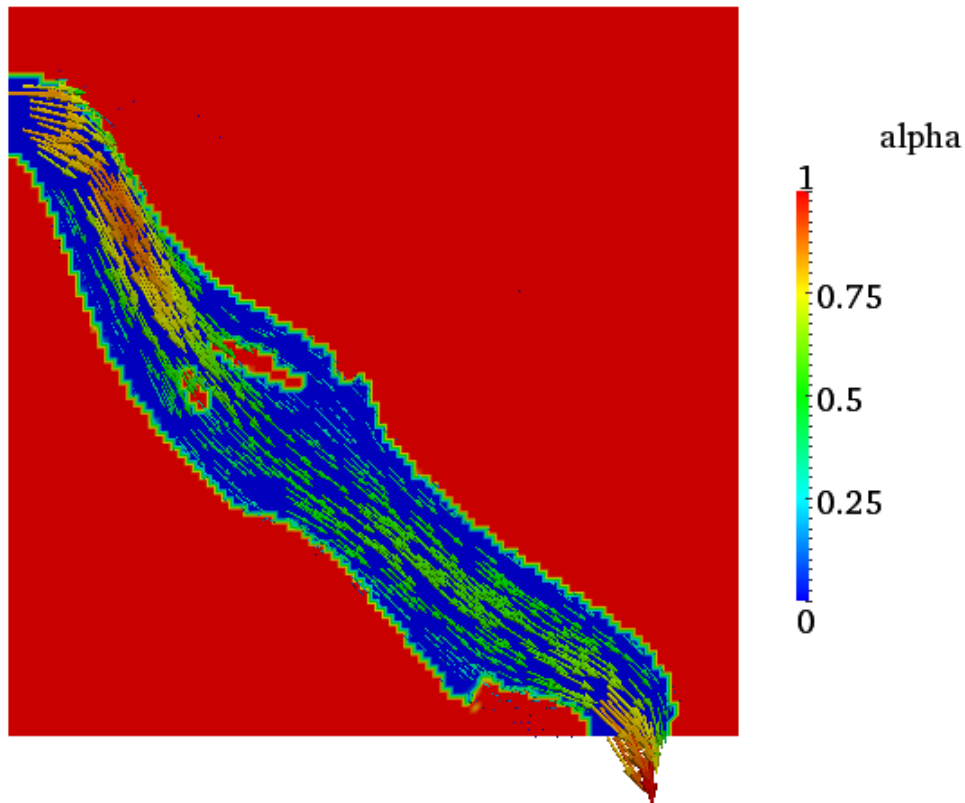
Στις παραπάνω υποενότητες περιγράφηκε και μελετήθηκε παραμετρικά η πιο απλοποιημένη περίπτωση ενός προβλήματος βελτιστοποίησης τοπολογίας, δηλαδή ενός 2Δ τετραγωνικού χωρίου με μια είσοδο και μια έξοδο ίδιου πλάτους. Η επιλογή ενός τέτοιου προβλήματος έδωσε την ευκαιρία να εξαχθούν κάποια συμπεράσματα για τις παραμέτρους που επηρεάζουν τον αλγόριθμο βελτιστοποίησης και να υπάρξει μια αρχική εικόνα για τις τιμές και την επιρροή τους, παρόλο που κάθε εφαρμογή διέπεται από διαφορετική συμπεριφορά στην αλλαγή των παραμέτρων. Στη συγκεκριμένη ενότητα, αλλάζουν θέση η είσοδος και η έξοδος, όπως φαίνονται στο Σχήμα 4.3.1, για να πραγματοποιηθεί στροφή της ροής κατά 90 μοίρες. Εδώ, ο μηχανικός αναμένει είτε έναν αγωγό-τόξο που συνδέει είσοδο με έξοδο είτε ένα ορθογωνικό αγωγό με στρογγυλεμένες γωνίες.



Σχήμα 4.3.1:

Προοπτική απεικόνιση της εισόδου (0.8m έως 0.9m κατά τον άξονα y) και της εξόδου (0.8m έως 0.9m κατά τον άξονα x). Ο άξονας της εισόδου σχηματίζει ορθή γωνία με τον άξονα της εξόδου.

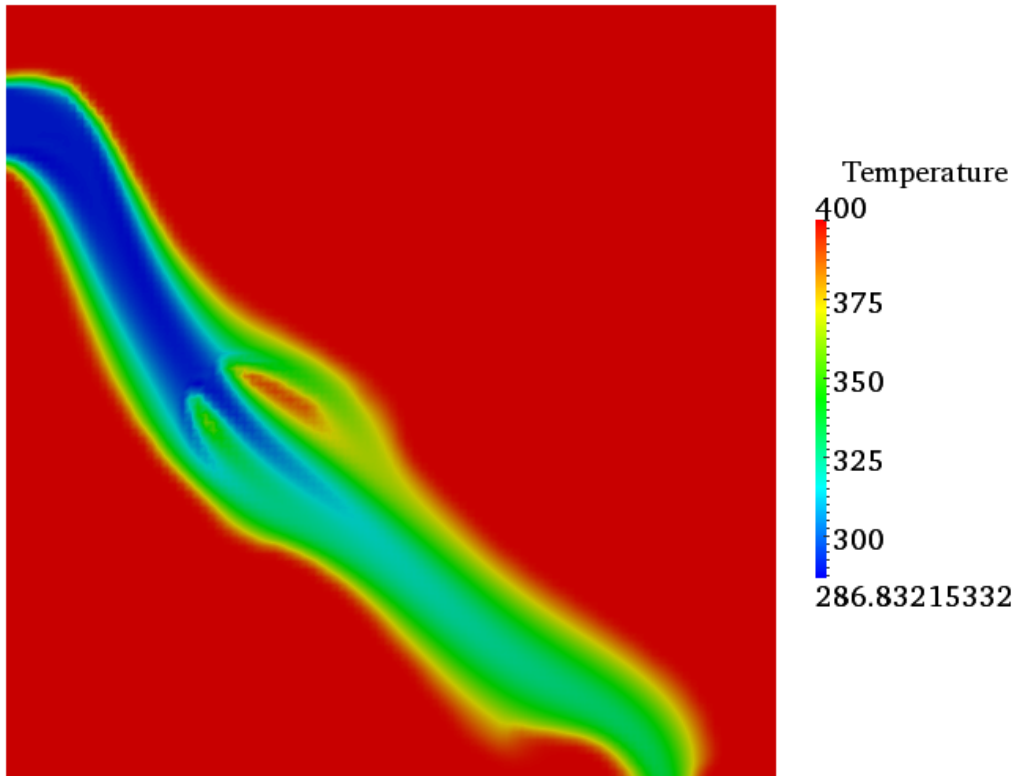
Η ταχύτητα εισόδου ισούται με $U_I = 1 \frac{m}{s}$ και έτσι ο αριθμός Re δεδομένου ότι η διάσταση της εισόδου δεν άλλαξε είναι ίσος με 200. Ο αριθμός Pr παρέμεινε 0.68 ενώ το βήμα απότομης καθόδου επιλέχθηκε ίσο με $10 \frac{s}{m^2}$. Τα βάρη της σταθμισμένης αντικειμενικής συνάρτησης F_{obj} , ω_1 και ω_2 , θεωρήθηκαν ίσα με 0.8 και 0.2 αντίστοιχα, ύστερα από αδυναμία των τιμών της υποενότητας 4.2.4 να προσεγγίσει ένα αγωγό όχι μόνο βέλτιστης μορφής αλλά και κατασκευαστικά εύκολο. Το Σχήμα 4.3.2 παρουσιάζει το πεδίο του πορώδους α μαζί με 2Δ αναπαραστάσεις του διανύσματος της ταχύτητας.



Σχήμα 4.3.2: Βέλτιστο πεδίο της τοπολογικής μεταβλητής ή πορώδους α σε τετραγωνικό χωρίο με το πέρας 10000 επαναλήψεων και για $Re = 200$, $Pr = 0.68$, τιμή του βήματος απότομης καθόδου 10, αρχικά κλειστό χωρίο, $\omega_1 = 0.8$ και $\omega_2 = 0.2$ με στόχο το άθροισμα των f_i .

Παρατηρείται στο μέσο του αγωγού ένα μικρό πτερύγιο, σκοπός του οποίου είναι να αυξηθούν τα σημεία επαφής ρευστού και τοιχώματος σε συνδυασμό με την εξομάλυνση της ροής για λιγότερες απώλειες ολικής πίεσης. Το πτερύγιο αυτό είναι εμφανές κυρίως από το Σχήμα 4.3.3 του πεδίου της θερμοκρασίας όπου φαίνεται και η πρόσδοση θερμότητας όταν το ρευστό το πλησιάζει. Επιπλέον, ο αλγόριθμος δημιούργησε μια πλάτυνση στο μέσο του αγωγού ώστε να επιβραδύνει τη ροή και να αυξήσει το χρόνο παραμονής του

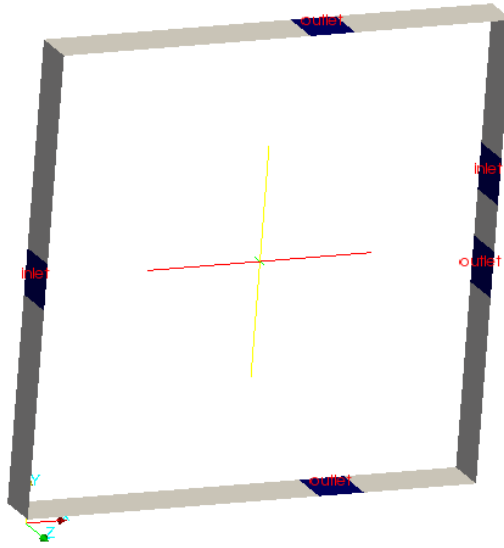
ρευστού στον αγωγό για μεγαλύτερη πρόσδοση θερμότητας. Για τις συναρτήσεις f_1 και f_2 βρέθηκε $f_1 = 0.83447 \text{ m}^2/\text{s}^2$ και $f_2 = 39.02 \text{ K}$.



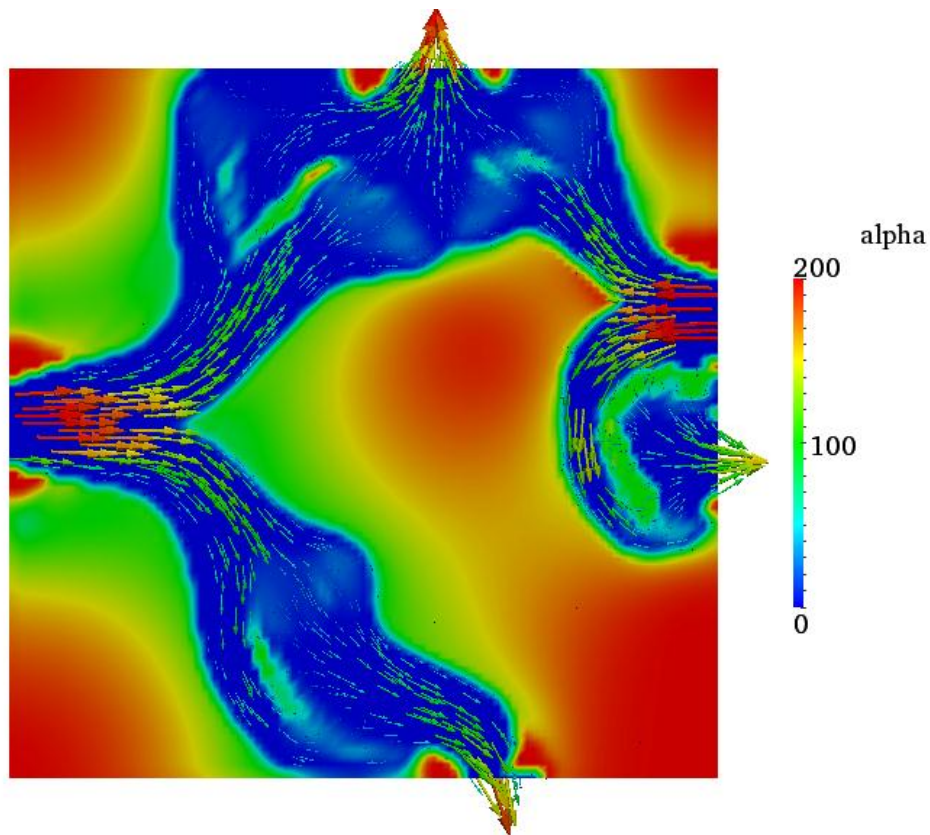
Σχήμα 4.3.3: Βέλτιστο πεδίο της θερμοκρασίας σε τετραγωνικό χωρίο με το πέρας 10000 επαναλήψεων και για $Re = 200$, $Pr = 0.68$, τιμή του βήματος απότομης καθόδου 10, αρχικά κλειστό χωρίο, $\omega_1 = 0.8$ και $\omega_2 = 0.2$ με στόχο το άθροισμα των f_i .

4.4 Πολλές Είσοδοι και Έξοδοι

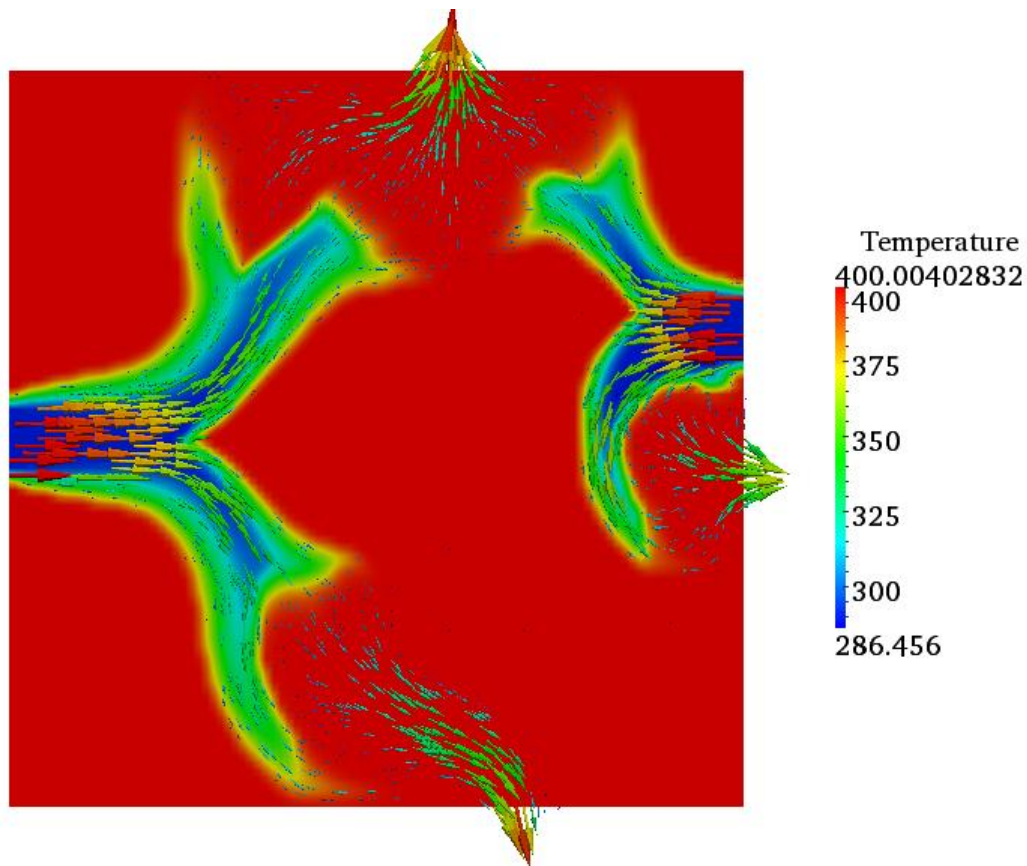
Στη συγκεκριμένη ενότητα, στο διευρυμένο χωρίο ορίζονται δύο εισοδοι και τρεις έξοδοι ίδιου πλάτους, όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.4.1. Οι ταχύτητες εισόδου είναι ίσες με $\vec{u}_1 = -U_I \cdot \vec{n}_x$ και $\vec{u}_2 = -U_I \cdot \vec{n}_y$ για την είσοδο που κείται στο άξονα x και άξονα y , αντίστοιχα, όπου $U_I = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Ο αριθμός Reynolds διαμορφώνεται ίσος με 400, εφόσον πλέον η κύρια διάσταση είναι $2 \cdot L_I$, αφού γίνεται λόγος για δυο εισόδους. Με τον αριθμό Pr να παραμένει ίσος με 0.68, τα βάρη επιλέγονται όπως και στην εφαρμογή στροφής της ροής, δηλαδή 0.8 και 0.2. Το βήμα η επιλέγεται ίσο με $10^3 \text{ s}/\text{m}^2$. Η βέλτιστη γεωμετρία που προέκυψε παρουσιάζεται στο Σχήμα 4.4.2&3.



Σχήμα 4.4.1: Προοπτική απεικόνιση της εισόδου (0.8m έως 0.9m κατά τον άξονα y) και της εξόδου (0.8m έως 0.9m κατά τον άξονα x). Ο άξονας της εισόδου σχηματίζει ορθή γωνία με τον άξονα της εξόδου.



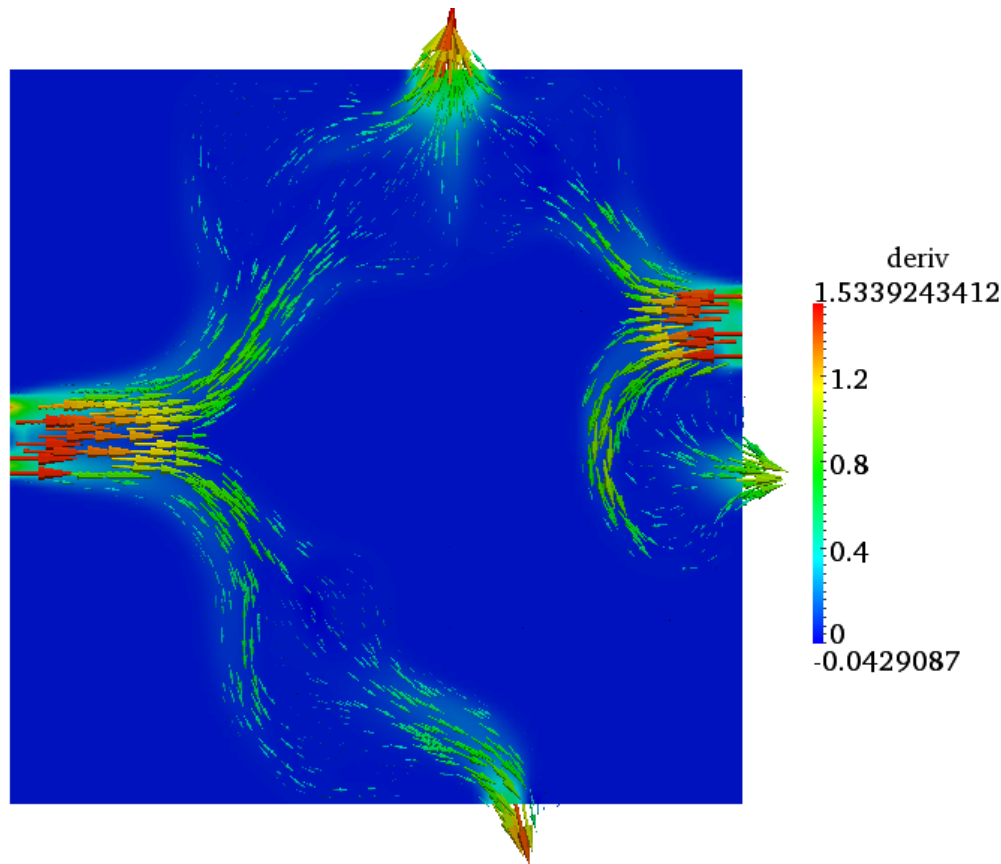
Σχήμα 4.4.2: Πεδίο της τοπολογικής μεταβλητής ή πορώδους α σε τετραγωνικό χωρίο πολλών εισόδων και εξόδων με το πέρας 10000 επαναλήψεων και για $Re = 400$, $Pr = 0.68$, τιμή του βήματος απότομης καθόδου 10^3 , αρχικά κλειστό χωρίο, $\omega_1 = 0.8$ και $\omega_2 = 0.2$.



Σχήμα 4.4.3: Πεδίο της θερμοκρασίας σε τετραγωνικό χωρίο πολλαπλών εισόδων και εξόδων με το πέρας 10000 επαναλήψεων και για $Re = 400$, $Pr = 0.68$, τιμή του βήματος απότομης καθόδου 10^3 , αρχικά κλειστό χωρίο, $\omega_1 = 0.8$ και $\omega_2 = 0.2$.

Από το πεδίο της θερμοκρασίας στον βέλτιστο αγωγό γίνεται αντιληπτή απότομη άνοδος της θερμοκρασίας κατά τη προσέγγιση του ρευστού στην έξοδο. Αυτό, στην πραγματικότητα, δεν σημαίνει πως το ρευστό πήρε θερμότητα έτσι απότομα αλλά ότι ο αλγόριθμος έχει υποδείξει τις περιοχές κοντά στις εξόδους ως στερεά τοιχώματα, γεγονός που υποδηλώνει πως η λύση εγκλωβίστηκε. Για να αποφευχθεί ο εγκλωβισμός της λύσης, θα πρέπει να τροποποιηθούν οι παράμετροι και να γίνει ξεχωριστή παραμετρική μελέτη για αυτή την εφαρμογή. Όταν όμως η πιο απλοποιημένη μορφή ενός 2D προβλήματος βελτιστοποίησης τοπολογίας τετραγωνικού διευρυμένου πεδίου με μια είσοδο και μια έξοδο, είναι ευαίσθητη στις παραμέτρους που περιγράφηκαν, η παραμετρική μελέτη σε ένα τέτοιο πρόβλημα με πολλαπλές εξόδους και εισόδους θα είναι πολύ δύσκολη και ιδιαίτερα δαπανηρή σε υπολογιστικό κόστος. Επιχειρείται να επιλυθεί το πρόβλημα για περισσότερες επαναλήψεις με αφετηρία το 'εγκλωβισμένο' αυτό πεδίο αλλά με μόνο κριτήριο τις απώλειες ολικής πίεσης, δηλαδή για $\omega_1 = 1$ και $\omega_2 = 0$. Αυτή η ιδέα γεννιάται αφενός από το γεγονός ότι τα 2D διανύσματα της ταχύτητας που φαίνονται τόσο στο πεδίο του πορώδους όσο και της θερμοκρασίας τείνουν να σχηματίσουν έναν εκ πρώτης όψευς 'καλό' αγωγό και αφετέρου διότι ο στόχος

ελαχιστοποίησης των απωλειών ολικής πίεσης και μόνο θα απεγκλωβίσει περιοχές για να οδηγήσει τη ροή στην έξοδο. Για να γίνει αυτό απεικονίζεται το πεδίο της $\frac{\partial f_1}{\partial a_{ij}}$ που είναι πλέον ίση με την παράγωγο $\frac{\partial F_{obj}}{\partial a_{ij}}$ (αφού $\omega_2 = 0$) για να επιλεγεί μια 'καλή' τιμή για το μέγεθος βήματος η (Σχήμα 4.4.4).

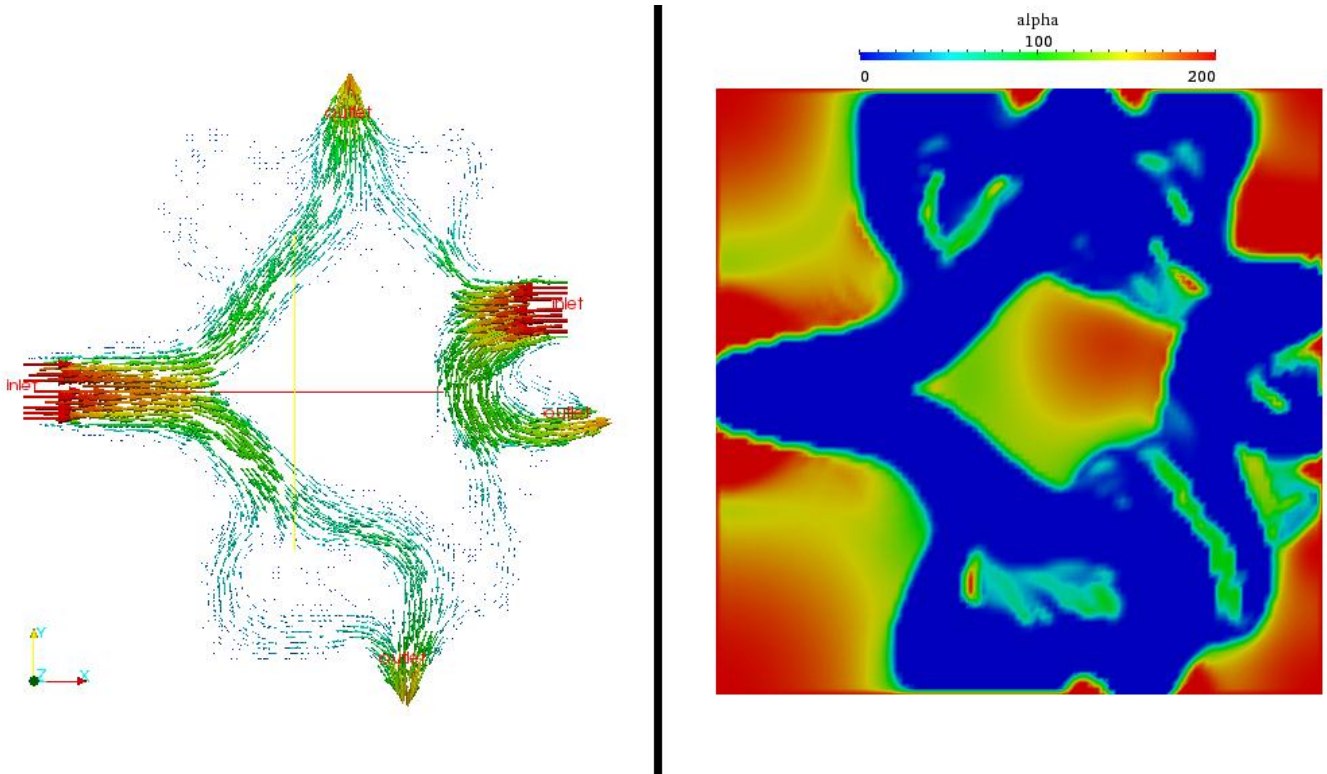


Σχήμα 4.4.4: Πεδίο της παραγώγου $\frac{\partial f_1}{\partial a_{ij}}$ σε τετραγωνικό χωρίο πολλαπλών εισόδων και εξόδων με το πέρας 10000 επαναλήψεων και για $Re = 400$, $Pr = 0.68$, τιμή του βήματος απότομης καθόδου 10^3 , αρχικά κλειστό χωρίο, $\omega_1 = 0.8$ και $\omega_2 = 0.2$.

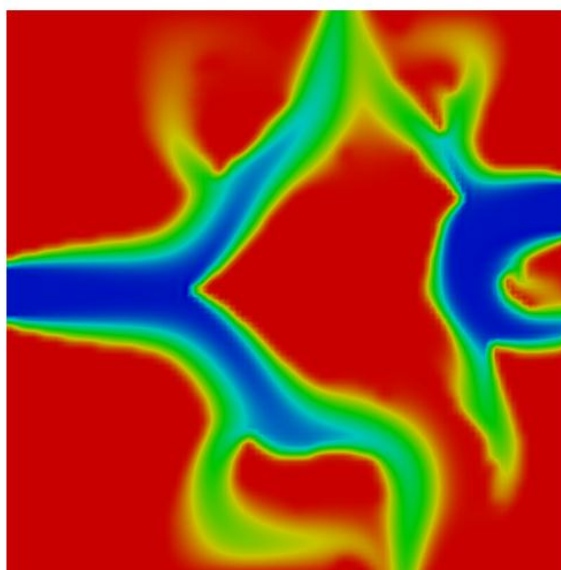
Από το Σχήμα 4.4.4 φαίνεται πως το μεγαλύτερο μέρος του πεδίου είναι μπλε δηλαδή η παράγωγος $\frac{\partial f_1}{\partial a_{ij}}$ προσεγγίζεται με τιμές της τάξεως του 0.01. Άρα για το λόγο αυτό και με βάση τη σχέση (4.1) το βήμα απότομης καθόδου επιλέγεται ίσο με 10^2 S/m^2 . Λύνοντας τις εξισώσεις κατάστασης και τις συζυγείς εξισώσεις με μοναδικό στόχο τις απώλειες ολικής πίεσης, για κάποιον αριθμό κύκλων βελτιστοποίησης, απεγκλωβίζονται περιοχές και η ροή προσεγγίζει τις εξόδους. Με βάση αυτό τον αγωγό, το πρόβλημα συνεχίζει τους κύκλους βελτιστοποίησης, χρησιμοποιώντας, ωστόσο, ξανά ως αντικειμενική συνάρτηση το σταθμισμένο άθροισμα των f_1 και f_2 . Τα τελικά αποτελέσματα παρουσιάζονται στα Σχήματα 4.4.5&6. Τελικά, οι τιμές για τις απώλειες ολικής

πίεσης και τη θερμοκρασιακή διαφορά εξόδου – εισόδου διαμορφώνονται ως

$$f_1 = 0.60967 \frac{m^2}{s^2} \text{ και } f_2 = 45.58 K .$$



Σχήμα 4.4.5: Διάγραμμα της ταχύτητας (αριστερά) και πεδίο του πορώδους (δεξιά) σε τετραγωνικό χωρίο πολλαπλών εισόδων και εξόδων με το πέρας 30000 επαναλήψεων και για $Re = 400$, $Pr = 0.68$, τιμή του βήματος απότομης καθόδου 10^3 και αρχικά κλειστό χωρίο. Τα βάρη είναι ίσα με $\omega_1 = 0.8$ και $\omega_2 = 0.2$ έως τη 10000^η επανάληψη, με 1 και 0 έως τη 20000^η επανάληψη και πάλι 0.8 και 0.2 μέχρι το πέρας των επαναλήψεων.



Σχήμα 4.4.6: Θερμοκρασιακό πεδίο σε τετραγωνικό χωρίο πολλαπλών εισόδων και εξόδων με το πέρας 30000 επαναλήψεων και για $Re = 400$, $Pr = 0.68$, τιμή του βήματος απότομης καθόδου 10^3 και αρχικά κλειστό χωρίο. Τα βάρη είναι ίσα με $\omega_1 = 0.8$ και $\omega_2 = 0.2$ έως τη 10000^η επανάληψη, με 1 και 0 έως τη 20000^η επανάληψη και πάλι 0.8 και 0.2 μέχρι το πέρας των επαναλήψεων.

Κεφάλαιο 5

Ομαλοποίηση της Βέλτιστης Γεωμετρίας και Επίλυση της Εισερχόμενης Ροής

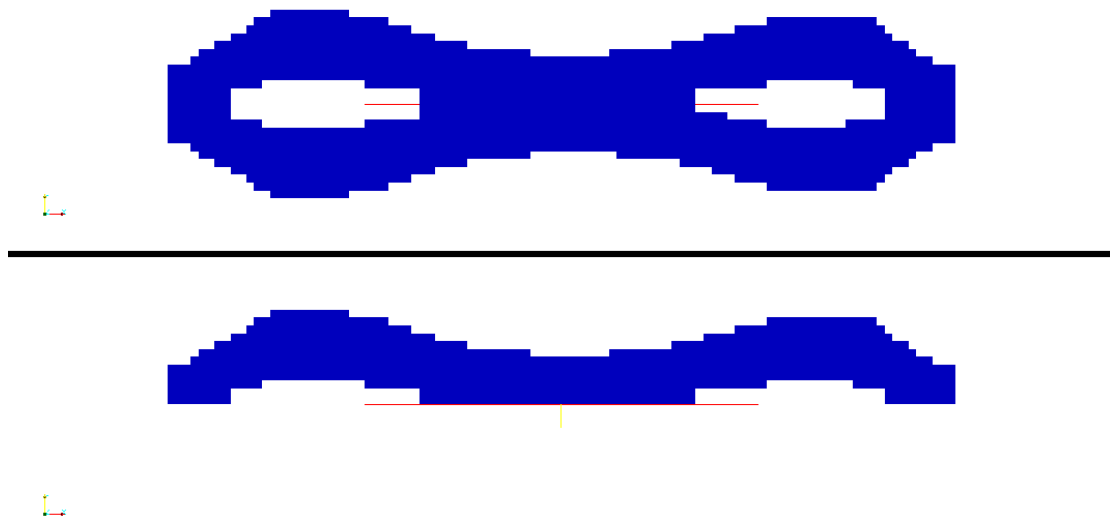
Στο Κεφάλαιο 4 έγινε η προσπάθεια να βελτιστοποιηθεί η διαδρομή από την είσοδο στην έξοδο ενός διευρυμένου πεδίου βάσει συγκεκριμένης συνάρτησης κόστους και κριτηρίων. Η διαδικασία της βελτιστοποίησης με τη μέθοδο της τοπολογίας οδήγησε σε τρεις διαφορετικές γεωμετρίες αλλάζοντας κάθε φορά τις παραμέτρους του προβλήματος. Όπως έγινε αντιληπτό, κιόλας από το προηγούμενο κεφάλαιο, μπορεί να προκύψουν κάποιες θεωρητικά βέλτιστες λύσεις οι οποίες ωστόσο υστερούν τόσο στο κόστος όσο και στην ευκολία κατασκευής τους. Αυτό, βέβαια, δεν σημαίνει πως η μέθοδος οδηγεί σε λανθασμένα αποτελέσματα απλώς εξηγείται πως η διαδικασία πραγματοποιείται χωρίς περιορισμούς ή κριτήρια ελαχιστοποίησης λ.χ. για το κόστος κατασκευής μίας γεωμετρίας. Σε αυτό το κεφάλαιο, επιλέγεται η πρώτη λύση των περιπτώσεων του Κεφαλαίου 4, ώστε να ομαλοποιηθεί και να υπολογισθεί η εισερχόμενη ροή. Η γεωμετρία παραμετροποιείται με σημεία Bezier ενώ δημιουργείται πλέγμα σε μορφή LTT και στη συνέχεια πραγματοποιείται μετατροπή δεδομένων μορφής LTT σε OpenFOAM. Ο πλεγματοποιητής και ο μετατροπέας δεδομένων που χρησιμοποιήθηκαν είναι ο *front5.exe* και ο *lttTofoam.exe*, αντίστοιχα. Επιλύονται οι εξισώσεις κατάστασης – ευθύ πρόβλημα – στην ομαλοποιημένη πλέον γεωμετρία με τον κώδικα *adjointSimpleFoam-topo-thesis* και συγκρίνονται τα αποτελέσματα που προκύπτουν για τις ίδιες τιμές των παραμέτρων, με αυτά του Κεφαλαίου 4.

5.1 Ομαλοποίηση & Γένεση Πλέγματος

Η μέθοδος βελτιστοποίησης της τοπολογίας για συντελεστή απότομης καθόδου $\eta = 10^2 \frac{s}{m^2}$ και αρχικά κλειστό χωρίο, οδήγησε στη βέλτιστη λύση του Σχήματος 4.2.1. Η γεωμετρία είναι συμμετρική ως προς τον άξονα $x = 0.5$ και για το λόγο αυτό μπορεί να παραμετροποιηθεί μόνο η πάνω πλευρά της, ορίζοντας τον άξονα συμμετρίας ή περιοδικότητας. Ο ορισμός άξονα συμμετρίας επιτρέπει την επίλυση της εισερχόμενης ροής με δύο τρόπους, είτε ο υπολογισμός της ροής να γίνει μόνο σε ένα από τα δύο συμμετρικά τμήματα της γεωμετρίας για εξοικονόμηση υπολογιστικού χρόνου, είτε κατά τη διαδικασία γένεσης πλέγματος να δημιουργηθούν και τα δύο τμήματα με τη μέθοδο καθρεπτίσματος (mirror) και εκεί να επιλυθεί η ροή, έχοντας, ωστόσο, παραμετροποιήσει μόνο το ένα τμήμα εκ των δύο. Στην παρούσα διπλωματική εργασία, η γεωμετρία παραμετροποιείται στο άνωθεν του άξονα $x = 0.5$ τμήμα και, στη συνέχεια, αυτό καθρεπτίζεται για να δημιουργηθεί τελικά δομημένο πλέγμα κατά μήκος ολόκληρης της γεωμετρίας. Η επιλογή αυτή μπορεί υπολογιστικά να κοστίζει περισσότερο, ωστόσο επιτρέπει την απόλυτη ταύτιση των δύο προς σύγκριση προβλημάτων, της βέλτιστης λύσης που υπέδειξε η μέθοδος της τοπολογίας και του ομαλοποιημένου ισοδύναμού της. Αρχικά, απομονώνονται οι κόμβοι με μηδενική τιμή για το πορώδες στη βέλτιστη λύση του Κεφαλαίου 4, ώστε να προκύψει η γεωμετρία του αγωγού μέσα στον οποίο ρέει το ρευστό, μία επιλογή που προσφέρει το Paraview^[9]. Επιπλέον, είναι δυνατόν να εξαχθούν οι συντεταγμένες x και y των κόμβων που αποτελούν τον αγωγό για να χρησιμοποιηθούν για την παραμετροποίηση με σημεία ελέγχου Bezier, που θα ακολουθήσει.

5.1.1 Παραμετροποίηση με Σημεία Ελέγχου Bezier

Από τη βέλτιστη γεωμετρία επιλέγονται εκείνα τα σημεία που θα αποτελέσουν τα σημεία ελέγχου για την καμπύλη Bezier και δημιουργείται ένα αρχείο *bezier.dat* με αυτά. Προφανώς, η επιλογή δεν μπορεί να είναι τυχαία και πρέπει να στοχεύει στην όσο το δυνατόν καλύτερη προσομοίωση των πλευρών της γεωμετρίας. Αυτό επιτυγχάνεται με σημεία μέγιστου ή ελάχιστου x και y , σημεία αλλαγής κατεύθυνσης και σημεία μέγιστης στένωσης. Όπως αναφέρθηκε και παραπάνω, λόγω της συμμετρίας η παραμετροποίηση γίνεται μονάχα στο άνωθεν του άξονα συμμετρίας τμήμα, το οποίο απομωνομένο φαίνεται στο Σχήμα 5.1.2.



Σχήμα 5.1.1: Βέλτιστη γεωμετρία με δύο νησίδες ($\alpha = 0$). Πάνω παρουσιάζεται ολόκληρος ο αγωγός με τον άξονα συμμετρίας $x = 0.5$ και κάτω το τμήμα του που θα ομαλοποιηθεί.

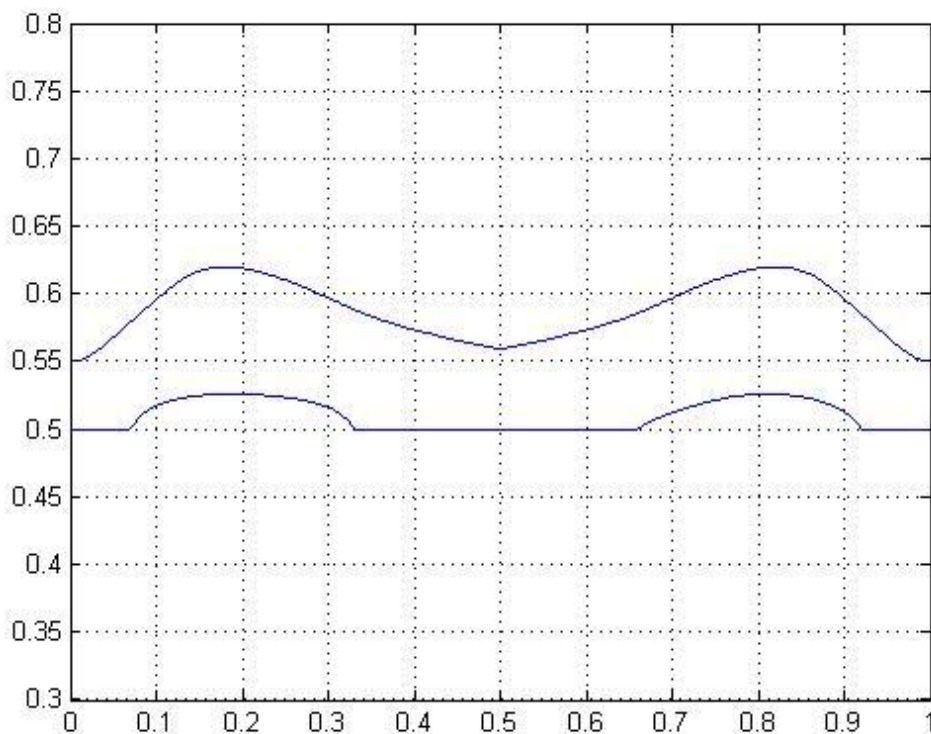
Στη συνέχεια, ο υπάρχων κώδικας *beztest.for* της ΜΠΥΡ&Β, μεταγλωττίζεται και αφού ορίσει τα σημεία του αρχείου *bezier.dat* ως σημεία ελέγχου δημιουργεί την καμπύλη Bezier. Τονίζεται, πως επειδή το υπό παραμετροποίηση συμμετρικό τμήμα είναι και αυτό από μόνο του μία κλειστή γεωμετρία, ο κώδικας αδυνατεί να δημιουργήσει μία τέτοια καμπύλη Bezier που να περνά από τόσο ασύμβατα σημεία. Για το λόγο αυτό, παραμετροποιούνται ξεχωριστά η είσοδος, η άνω πλευρά, η έξοδος, οι νησίδες και οι πλευρές περιοδικότητας. Έτσι κι αλλιώς, στόχος είναι η δημιουργία ενός αρχείου που θα περιέχει όλα τα σημεία που απαρτίζουν τη γεωμετρία, χωρίς να ενδιαφέρει αν αυτά εξάχθηκαν όλα μαζί ή ξεχωριστά. Όλα τα σημεία που αποτελούν τις δημιουργηθείσες καμπύλες Bezier, όπως αυτές παρουσιάζονται στο Σχήμα 5.1.3, αποθηκεύονται στο αρχείο *geometryData.dat*, ξεκινώντας από ένα σημείο – συνήθως κομβικό – και ακολουθώντας μόνο αριστερόστροφη ή μόνο δεξιόστροφη πορεία σκανάρωντας όλη τη γεωμετρία και αποφεύγοντας την αποθήκευση με διπλά σημεία. Το αρχείο *geometryData.dat* για να μπορέσει να αποτελέσει είσοδο δεδομένων για τον πλεγματοποιητή *front5.exe* πρέπει να ακολουθεί την εξής μορφή:

```

1:           1
2:           701
3:  0.000000000000000000      0.5000000000000000      24
...
703:  0.000000000000000000      0.5010000000000000      4

```

όπου στην πρώτη γραμμή εισάγεται ένας συντελεστής που απαιτεί ο *front5.exe* ο οποίος στις περισσότερες περιπτώσεις, αν όχι όλες, είναι 1, στη δεύτερη γραμμή αναγράφεται ο αριθμός N των σημείων της γεωμετρίας ενώ στις υπόλοιπες γραμμές οι συντεταγμένες τους x και y και ένας αριθμός που υποδηλώνει σε ποια ομαδοποιημένη επιφάνεια ανήκει το κάθε σημείο.



Σχήμα 5.1.2: Καμπύλες που προέκυψαν από την παραμετροποίηση με σημεία ελέγχου Bezier για τη βέλτιστη λύση και ευθείες που τις ενώνουν.

Ο αριθμός αυτός ονομάζεται $logfr$ και είναι 4 για την είσοδο, 5 για την έξοδο, 2 για τις πλευρές περιοδικότητας και 3 για τα τοιχώματα. Τα σημεία τα οποία είναι κοινά για δύο ομαδοποιημένες επιφάνειες έχουν $logfr$ και τους δύο αριθμούς, για παράδειγμα το σημείο που ανήκει τόσο στην είσοδο όσο και στα τοιχώματα έχει $logfr = 34$. Αφού ο κώδικας δημιουργήσει το πλέγμα, αυτόματα, θέτει $logfr = 0$ σε όλα τα εσωτερικά σημεία.

5.1.2 Γένεση Πλέγματος

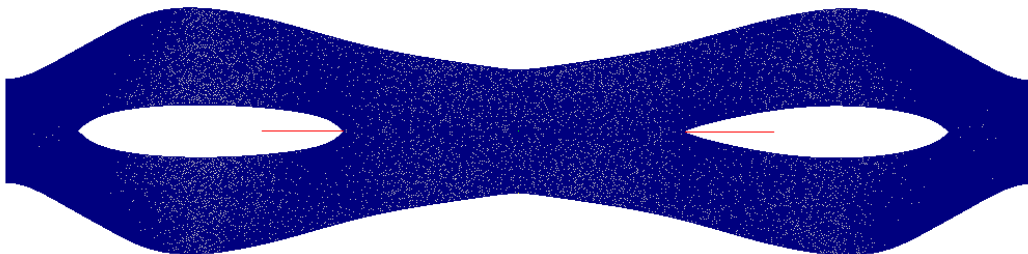
Για τη γένεση πλέγματος του χωρίου ροής της γεωμετρίας που προέκυψε από την παραμετροποίηση με σημεία ελέγχου Bezier χρησιμοποιείται ο πλεγματοποιητής του εργαστηρίου *front5.exe*. Ο συγκεκριμένος πλεγματοποιητής δημιουργεί πεπερασμένου πλήθους τρίγωνα στο εσωτερικό γεωμετρίας για την οποία είναι γνωστά τα σημεία στα όριά της. Ένα αρχείο *front5.ini* (Παράρτημα Β') δίνει τις απαραίτητες πληροφορίες στον πλεγματοποιητή, ο οποίος εκτελούμενος δημιουργεί το επιθυμητό πλέγμα. Η πυκνότητα του πλέγματος εξαρτάται από το πλήθος των σημείων στο

geometryData.dat με το οποίο τροφοδοτείται το εκτελέσιμο. Για τον λόγο αυτό, τα σημεία είναι περισσότερα στην είσοδο, την έξοδο, τις νησίδες και τον άξονα συμμετρίας και λιγότερα στο πάνω όριο της γεωμετρίας. Το πλέγμα που δημιουργείται παρουσιάζεται στο Σχήμα 5.1.4.

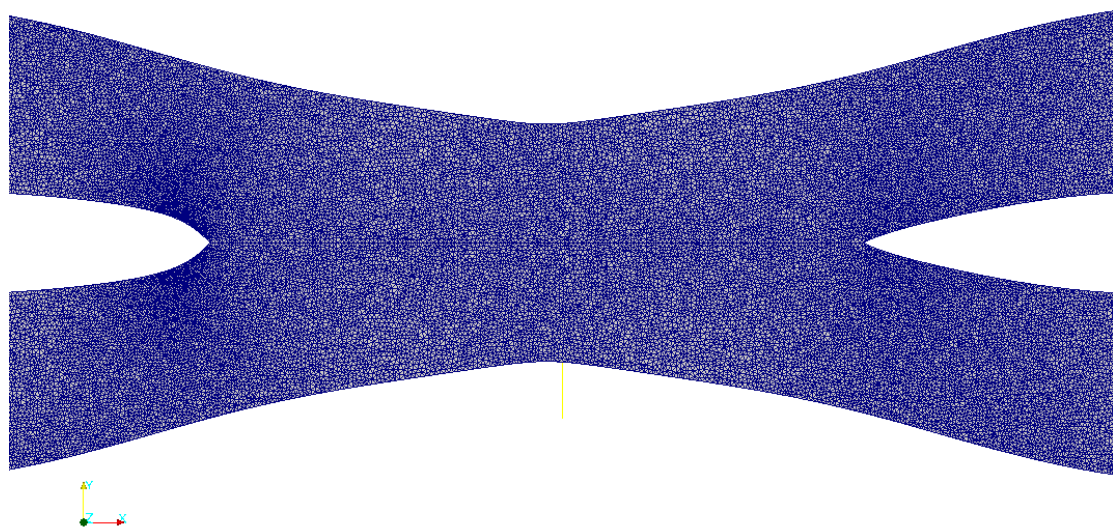
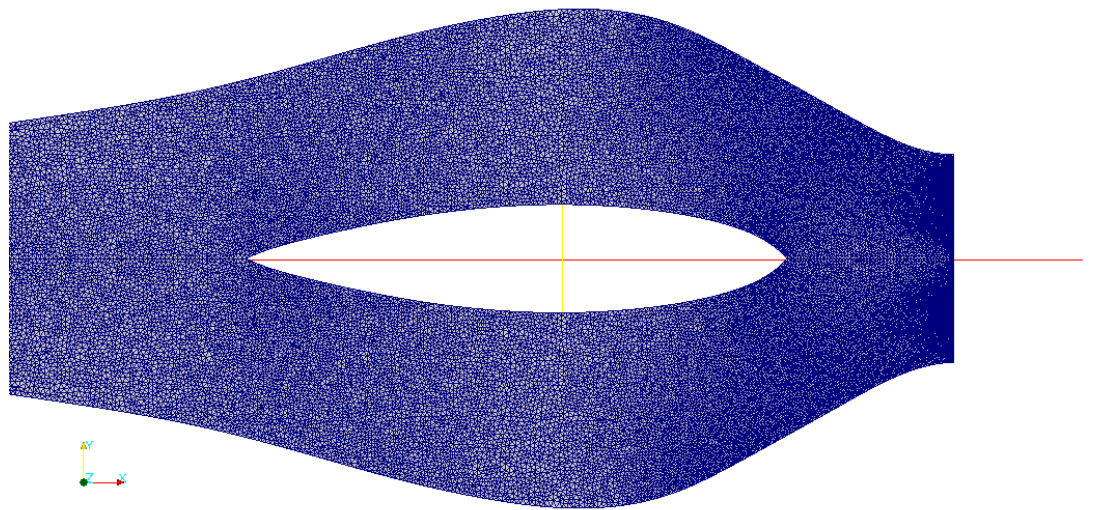


Σχήμα 5.1.3: Δομημένο πλέγμα για το άνωθεν του άξονα συμμετρίας τμήμα της γεωμετρίας που δημιούργησε ο πλεγματοποιητής *front5.exe*.

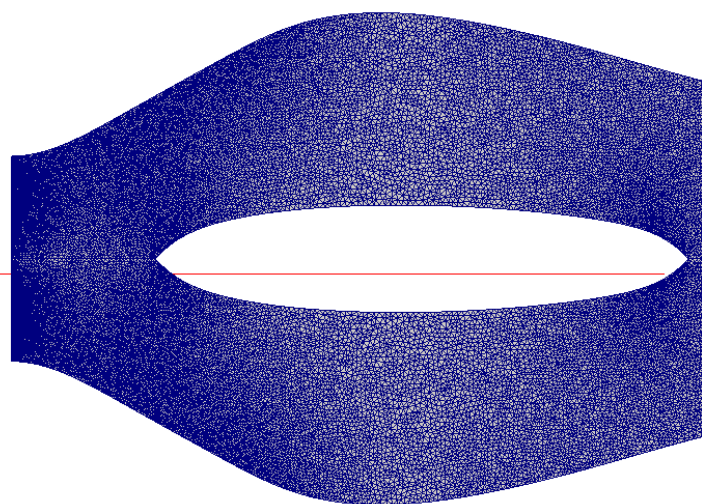
Το συγκεκριμένο πλέγμα είναι πυκνό στις περιοχές όπου η ροή αναταράσσεται όπως στα σημεία πρόσπτωσης και σημεία εκφυγής των νησίδων αλλά και στην έξοδο όπου η ροή λαμβάνει τα τελικά της χαρακτηριστικά. Για στρωτή ροή, το πλέγμα θα μπορούσε να είναι και με λιγότερους κόμβους, ωστόσο, για μεγαλύτερη ακρίβεια στα αποτελέσματα χρησιμοποιήθηκε αυτός ο αυξημένος αριθμός κόμβων. Το δημιουργηθέν πλέγμα είναι σε μορφή δεδομένων LTT, η οποία δεν αναγνωρίζεται από το OpenFOAM. Για τη μετατροπή του πλέγματος σε μορφή συμβατή με το OpenFOAM χρησιμοποιείται ο υπάρχων κώδικας, *lttTofoam*. Κατά τη διαδικασία της μετατροπής, τα *logfr* διατηρούνται ίσα για την κάθε ομαδοποιημένη επιφάνεια, ωστόσο ενδέχεται οι αριθμοί να αλλάξουν. Το γεγονός αυτό δεν επηρεάζει το σκοπό για τον οποίο υπάρχουν τα *logfr*, ο οποίος είναι η ύπαρξη διακριτών ομάδων από κόμβους που θα λάβουν συγκεκριμένες ιδιότητες στη συνέχεια. Για τη πλήρη μετατροπή του πλέγματος από LTT σε OpenFOAM είναι απαραίτητη η κατάλληλη επαναρίθμηση των σημείων του όπως την 'αντιλαμβάνεται' το OpenFOAM (εντολή *renumberMesh*). Σε αυτή τη φάση, είναι δυνατό το καθρέπτισμα (mirroring) της γεωμετρίας ως προς τον άξονα συμμετρίας για τη δημιουργία ολόκληρου του αγωγού, το πλέγμα του οποίου παρουσιάζεται στα Σχήματα 5.1.5&6 (εντολή *mirrorMesh*).



Σχήμα 5.1.4: Δομημένο πλέγμα για ολόκληρη τη γεωμετρία του βέλτιστου αγωγού με εμφανή πύκνωση στην είσοδο, την έξοδο και τα σημεία πρόσπτωσης και εκφυγής των νησίδων. Λόγω της εφαρμογής του καθρεπτίσματος το πλέγμα είναι πλήρως συμμετρικό ως προς τον άξονα $x = 0.5$.



Σχήμα 5.1.5: Πυκνώσεις του πλέγματος στην είσοδο, τις νησίδες και στην έξοδο του χωρίου ροής.



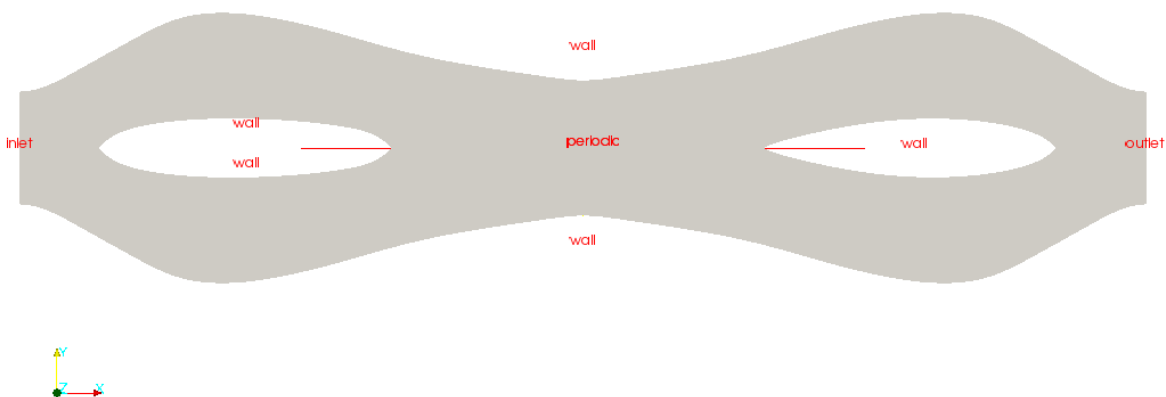
5.2 Επίλυση της Ροής

Με την ολοκλήρωση της διαδικασίας γένεσης πλέγματος και μετατροπής του σε μορφή υποστηριζόμενη από το OpenFOAM, έχουν δημιουργηθεί τα αρχεία *faces*, *owner*, *boundary*, *neighbour* και *points*, τα οποία περιγράφουν πλήρως το πλέγμα και τη γεωμετρία του υπό μελέτη αγωγού. Στο αρχείο *boundary* ορίζονται τα ονόματα των ομαδοποιημένων επιφανειών, οι οποίες παρουσιάζονται στο Σχήμα 5.1.7.

```

periodic
{
  type          periodicPlane;
  nFaces        34502;      startFace      25526;
}
symmetry
{
  type          empty;
  nFaces        204;        startFace      60028;
}
wall
{
  type          wall;
  nFaces        397;        startFace      60232;
}
inlet
{
  type          patch;
  nFaces        50;         startFace      60629;
}
outlet
{
  type          patch;
  nFaces        50;         startFace      60679;
}

```



Σχήμα 5.2.1: Ομαδοποιημένες επιφάνειες (patches) όπως αυτές ορίστηκαν στο OpenFOAM.

Αρχικοποιώντας το πρόβλημα με τις ίδιες ακριβώς τιμές για την πίεση, τις συνιστώσες της ταχύτητας και τη θερμοκρασία με αυτές του προβλήματος της τοπολογίας (Κεφάλαιο 4), επιλύεται η εισερχόμενη ροή με τον κώδικα *adjointSimpleFoam-toro-thesis*, ο ίδιος που χρησιμοποιήθηκε και στο Κεφάλαιο 4 για την εύρεση της βέλτιστης λύσης. Ωστόσο, απενεργοποιείται η επίλυση του συζυγούς προβλήματος – εδώ επιλύεται μονάχα το ευθύ – καθώς και η ανανέωση των χαρτών ευαισθησίας ως προς το πορώδες α , άρα τμήμα του αρχείου *system/fvSolution* τροποποιείται ως:

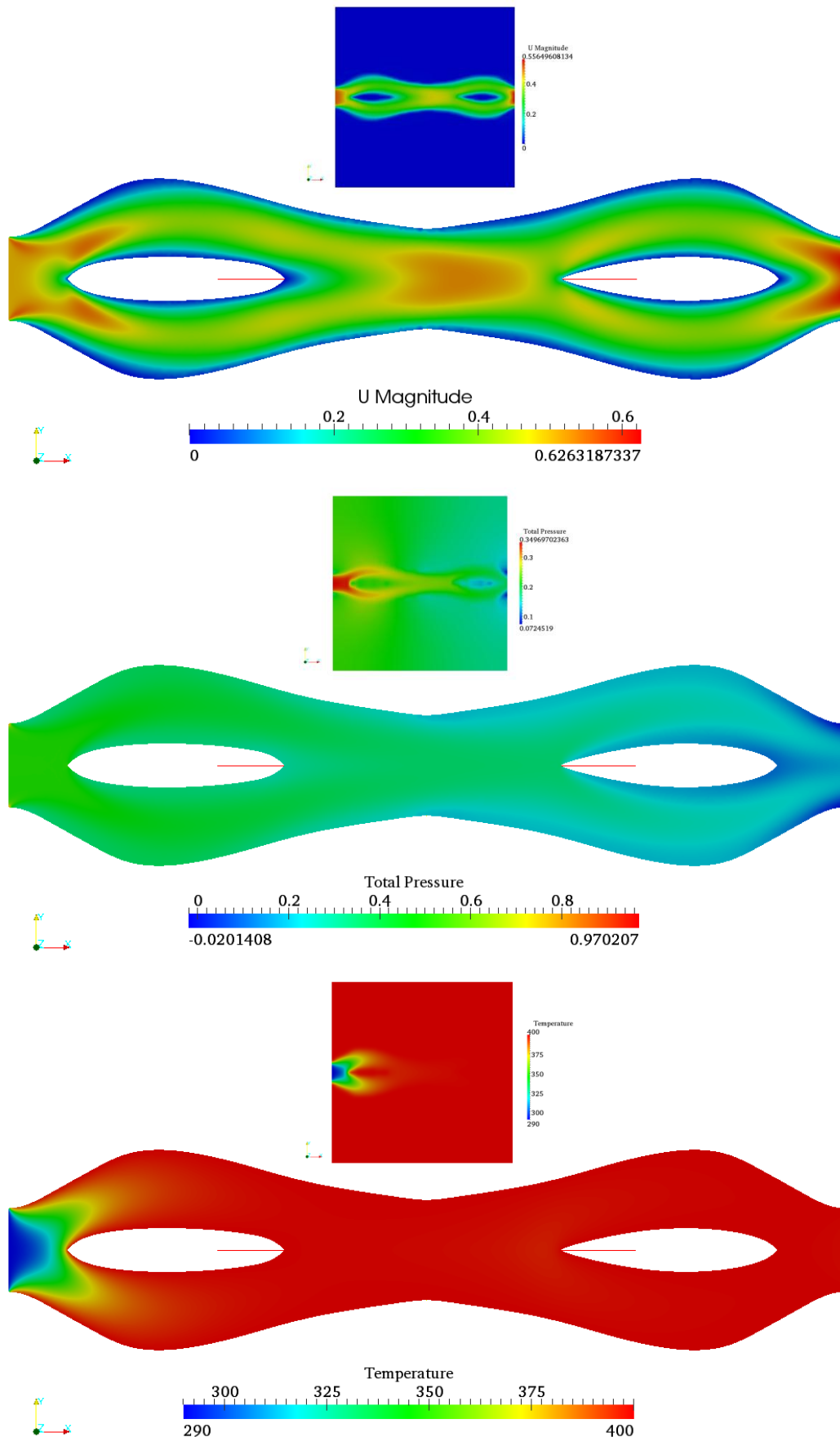
```
solvePrimal          yes;
solveAdjoint         no;
solveEnergy          yes;

optimization
{
    updatePorosity    no;
    initialPrimalIters 10;
    primalIters        1;
    primalConvLimit    5.e-08;
    initialAdjointIters 10;
    adjointIters        1;
    adjointConvLimit    1.e-06;
}
```

Με το πέρασ 10.000 επαναλήψεων το ευθύ πρόβλημα έχει συγκλίνει τόσο για τη θερμοκρασία και τις συνιστώσες της ταχύτητας όσο και για την πίεση. Στον πίνακα 5.2.1 παρουσιάζονται οι τιμές των μεταβλητών ροής για τα δύο ισοδύναμα προβλήματα.

	Βέλτιστος Αγωγός Κεφαλαίου 4	Ομαλοποιημένο Ισοδύναμο	Διαφορά
Ταχύτητα Εξόδου	0.5565	0.6263	-0.0698
Απώλειες Ολικής Πίεσης	$0.9471 \cdot 10^{-3}$	$0.7845 \cdot 10^{-3}$	$0.1626 \cdot 10^{-3}$
Θερμοκρασιακή Διαφορά	1.0996	1.09914	0.00046
Σταθμισμένη Αντικειμενική Συνάρτηση με $\omega_1 = 0.8$ και $\omega_2 = 0.2$	-0.2192	-0.2191	-0.0001

Πίνακας 5.2.1: Διαφορές των αποτελεσμάτων του βέλτιστου αγωγού που υπέδειξε η μέθοδος της τοπολογίας με αυτά του ομολοποιημένου ισοδύναμού του.



Σχήμα 5.2.2: Χαρακτηριστικά εισερχόμενης ροής στον ομαλοποιημένο αγωγό με το πέρας 10.000 επιλύσεων του ευθέος προβλήματος. Παρουσιάζονται τα πεδία της ταχύτητας, της ολικής πίεσης και της θερμοκρασίας. Κάθε σχήμα συνοδεύεται από ένα μικρότερο που υπενθυμίζει τη μορφή των πεδίων κατά την εφαρμογή της μεθόδου της τοπολογίας.

Οι μικρές διαφορές που παρατηρούνται στις τιμές των μεταβλητών ροής μεταξύ των δύο προβλημάτων οφείλονται αφενός στο γεγονός ότι το πλέγμα για τον ομαλοποιημένο αγωγό είναι καταλληλότερο, εφόσον έχει τις απαιτούμενες πυκνώσεις σε αντίθεση με το αντίστοιχο της περίπτωσης του Κεφαλαίου 4 που είναι ορθογωνικό και αφετέρου στην επιβολή της ομαλοποίησης. Το τελευταίο δικαιολογεί και την ομολογουμένως μεγάλη – σε σχέσεις με τις υπόλοιπες – διαφορά που εντοπίζεται στις απώλειες ολικής πίεσης. Η ομαλοποίηση που πραγματοποιήθηκε στον αγωγό (πλήρως αεροδυναμική μορφή των νησίδων και ‘στρογγύλευση’ των στερεών τοιχωμάτων του αγωγού) δημιούργησε ευνοϊκότερες συνθήκες για την εισερχόμενη ροή, γεγονός που αποτυπώθηκε στην κατά μία τάξη μεγέθους μείωση των απωλειών. Η, πρακτικά, αμετάβλητη θερμοκρασιακή διαφορά εξόδου – εισόδου επιβεβαίωσε και ισχυροποίησε το σκοπό των νησίδων που είναι η αύξηση των σημείων επαφής του ρευστού με τοιχώματα για όσο το δυνατόν μέγιστη πρόσδοση θερμότητας.

Κεφάλαιο 6

Βελτιστοποίηση Διαδρομής 2D Χωρίου με Ορθογωνικές Πηγές Θερμότητας

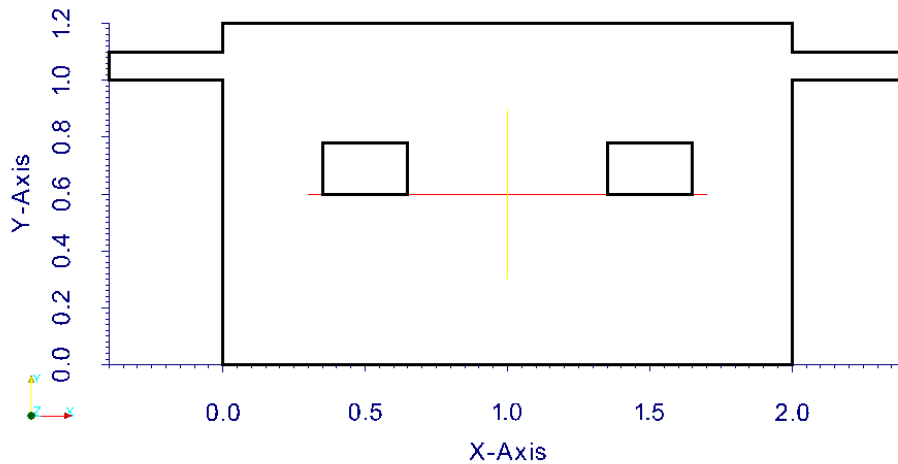
Στο παρόν κεφάλαιο, η μέθοδος τοπολογίας σε συνδυασμό με τη συνεχή συζυγή μέθοδο, εφαρμόστηκε για τη βελτιστοποίηση μορφής αγωγού μεταξύ εισόδου και εξόδου σε ένα 2D διευρυμένο χωρίο ροής, στο οποίο εσωκλείονται ορθογωνικές γεωμετρίες. Τα μοντέλα αυτά υπόκεινται σε σταθερά υψηλή θερμοκρασία. Στόχος είναι το περιβάλλον ρευστό να θερμανθεί από αυτά ώστε να φτάσει με τη μεγαλύτερη θερμοκρασία στην έξοδο. Η συνάρτηση στόχος F_{obj} είναι οι απώλειες ολικής πίεσης είτε αποκλειστικά είτε αθροιστικά με τη θερμοκρασιακή διαφορά εξόδου - εισόδου. Για την επίλυση των εξισώσεων ροής, των Navier - Stokes για 2D στρωτές ροές, όπως αυτές περιγράφηκαν αναλυτικά στο Κεφάλαιο 3, χρησιμοποιήθηκε ο κώδικας *adjointSimpleFoam-toro-thesis* στο OpenFOAM. Ως πλεγματοποιητής χρησιμοποιήθηκε, για ακόμη μία φορά, ο *blockMesh* εφόσον επιθυμείται η γένεση δομημένου πλέγματος.

6.1 Πλέγμα και Σταθερές της Ροής

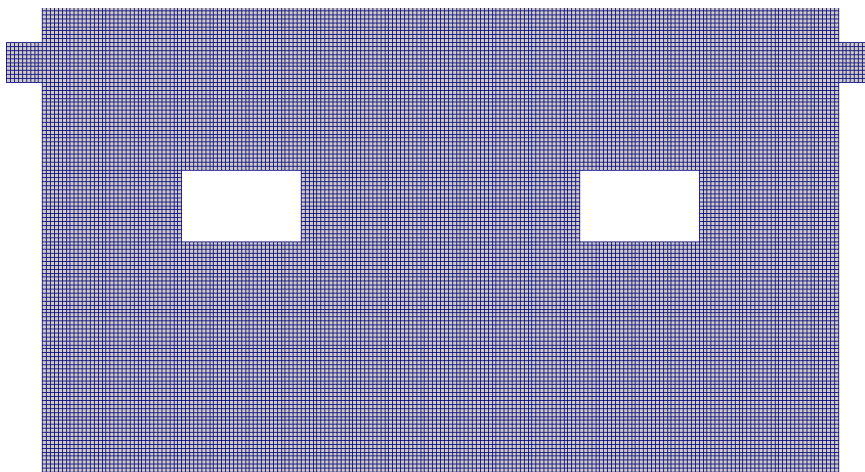
Αρχικά, για να μπορέσει να εφαρμοσθεί η μέθοδος της τοπολογίας ορίζεται το διευρυμένο χωρίο μέσα στο οποίο θα αναζητηθεί η επιθυμητή λύση. Είναι σημαντικό να επιλεγθεί κατάλληλος χώρος εγκατάστασης του προβλήματος

έτσι ώστε να μην δημιουργούνται φαινόμενα ‘εγκλωβισμού’ της μεθόδου και αδυναμία σύγκλισής της. Για το λόγο αυτό, τα όρια του χώρου εγκατάστασης δεν πρέπει να είναι κοντά στα μοντέλα των πηγών για να μπορέσει η ροή να επιλέξει χωρίς περιορισμούς τη διαδρομή της. Επιπλέον, για την ομαλοποίηση της ροής τόσο πριν την είσοδο όσο και μετά την έξοδο δημιουργείται ένας αγωγός που έχει ακριβώς αυτό το σκοπό. Η δομή του διευρυμένου χωρίου της συγκεκριμένης εφαρμογής παρουσιάζεται στο Σχήμα 6.1.1.

Οι διαστάσεις των πηγών είναι $0.30m \times 0.18m$ ενώ η είσοδος και η έξοδος είναι σχεδιασμένες με το ίδιο πλάτος, $0.1m$, και βρίσκονται στο ίδιο ύψος. Χρησιμοποιώντας το εργαλείο *blockMesh* του OpenFOAM, δημιουργείται ορθογωνικό πλέγμα, το οποίο ωστόσο επιλέγεται πυκνό, παρά τις μειωμένες απαιτήσεις των προβλημάτων στρωτής ροής, σε όλο το χώρο εγκατάστασης και όχι μεμονωμένα στις πηγές ή στα όρια. Αυτό το πλέγμα παρουσιάζεται στο Σχήμα 6.1.2.



Σχήμα 6.1.1: Διευρυμένο χωρίο μέσα στο οποίο η μέθοδος βελτιστοποίησης της τοπολογίας θα αναζητήσει τον αγωγό βέλτιστης μορφής που ελαχιστοποιεί τη συνάρτηση κόστους. Διαστάσεις σε m .



Σχήμα 6.1.2: Πλέγμα από το εργαλείο *blockMesh*, ιδιαίτερα πυκνό για προβλήματα στρωτής ροής. Οι κόμβοι του πλέγματος είναι ισαπέχοντες τόσο κατά τον άξονα x όσο και κατά τον άξονα y .

Η κινηματική συνεκτικότητα θεωρείται ίση με $\nu = 10^{-4} \frac{m^2}{s}$ ενώ ο αριθμός Pradtl ίσος με $Pr = 0.68$ ώστε το ρευστό να προσεγγίσει τη συμπεριφορά του αέρα, που επιλέγεται τις περισσότερες φορές για προβλήματα πρόσδοσης θερμότητας. Η ταχύτητα στην είσοδο επιλέγεται ως $U_I = 0.5 \frac{m}{s}$ και έτσι θεωρώντας το πλάτος της εισόδου ως κύρια διάσταση, υπολογίζεται ο αριθμός Reynolds:

$$Re = \frac{U_I \cdot L_I}{\nu} = \frac{0.5 \frac{m}{s} \cdot 0.1m}{5 \cdot 10^{-4} \frac{m^2}{s}} = 100$$

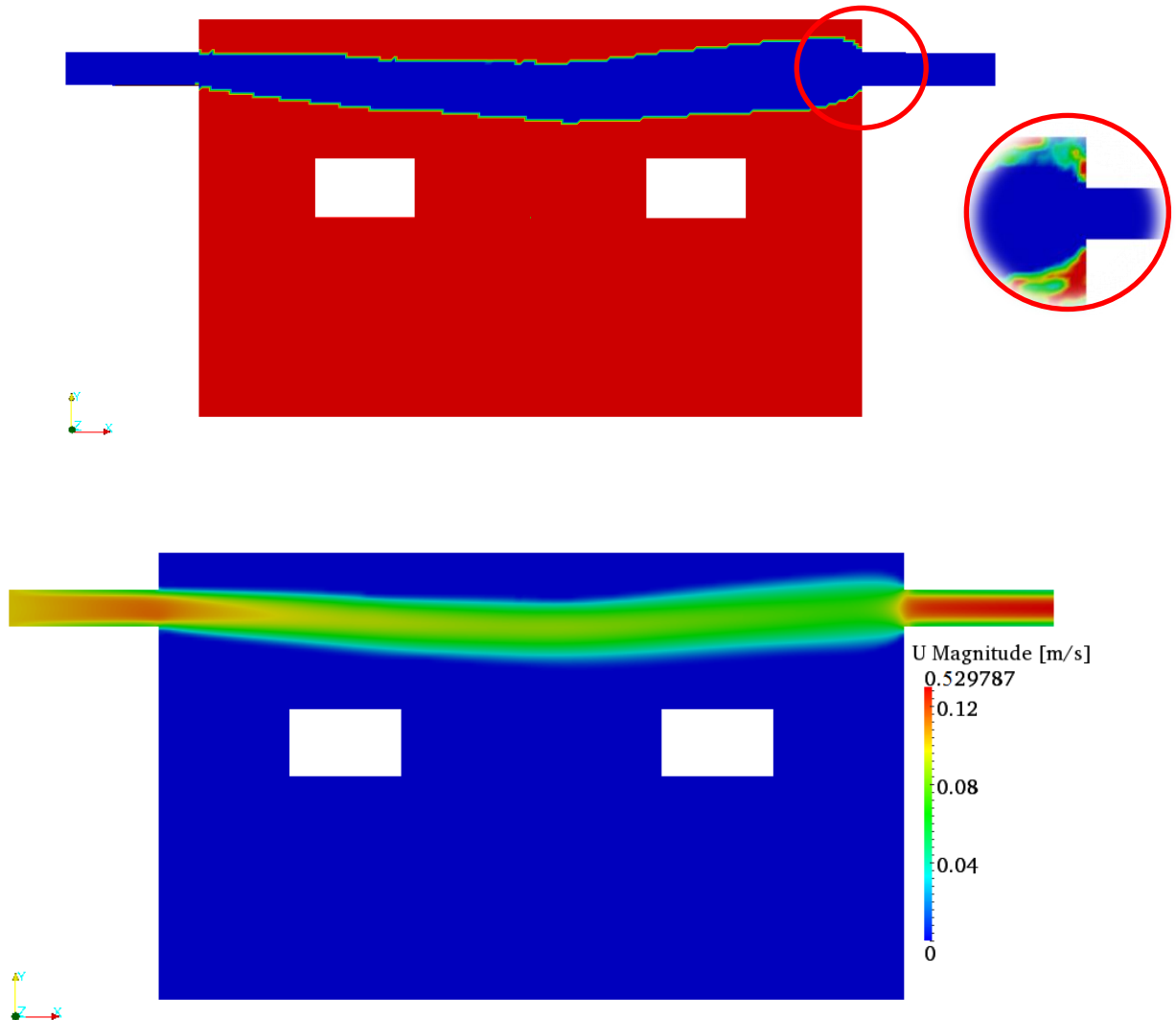
Οι πηγές θερμότητας θεωρούνται στερεά τοιχώματα, τα οποία υπόκεινται σε συγκεκριμένη, υψηλή σε σχέση με το ρευστό, θερμοκρασία. Για το λόγο αυτό ανήκουν σε διαφορετική ομάδα επιφανειών (patches) από τα υπόλοιπα στερεά τοιχώματα. Η θερμοκρασία του ρευστού στην είσοδο επιλέγεται ίση με τη θερμοκρασία περιβάλλοντος. Άρα για τη θερμοκρασία εισόδου ισχύει $T_I = 290K$. Στη συγκεκριμένη εφαρμογή, στόχος είναι το ρευστό να λαμβάνει θερμότητα από καμία άλλη πηγή παρά μονάχα από τις πηγές. Έτσι τα στερεά τοιχώματα του διευρυμένου χωρίου θα έχουν και αυτά τη θερμοκρασία περιβάλλοντος όπως επίσης την ίδια θερμοκρασία θα έχει και κάθε περιοχή που ο αλγόριθμος θα υποδείξει ως στερεό τοίχωμα (T_{wall}). Τέλος, η θερμοκρασία των πηγών θερμότητας επιλέγεται ως $T_{source} = 400 K$.

6.2 Αποτελέσματα Βελτιστοποίησης

Ως μοναδική παράμετρος επιλέγεται τα αντίστοιχα βάρη. Εάν μόνη επιδίωξη είναι η δημιουργία αγωγού ελαχιστοποιημένων απωλειών ολικής πίεσης τότε ο μηχανικός αναμένει έναν ευθύγραμμο αγωγό που συνδέει την είσοδο με την έξοδο, πόσο μάλλον στη συγκεκριμένη εφαρμογή που δεν υπάρχει εμπόδιο στο ύψος μεταξύ των δύο αυτών επιφανειών. Πράγματι, η μέθοδος βελτιστοποίησης της τοπολογίας προσέγγισε τον ευθύγραμμο επιθυμητό αγωγό, όπως παρουσιάζεται στο Σχήμα 6.2.1.

Παρατείνεται ότι η μέθοδος στρογγύλευσε τις γωνίες στη σύνδεση του βέλτιστου αγωγού με τον αγωγό εξόδου όπως αυτό γίνεται αντιληπτό από το Σχήμα 6.2.1. Η στρογγύλευση αυτή δημιουργεί ευνοϊκότερη μετάβαση της ροής από το πεπλατυμένο 'τελείωμα' του βέλτιστου αγωγού στον αγωγό εξόδου. Στο σημείο αυτό, τη θέση της συνάρτησης των απωλειών ολικής πίεσης ως

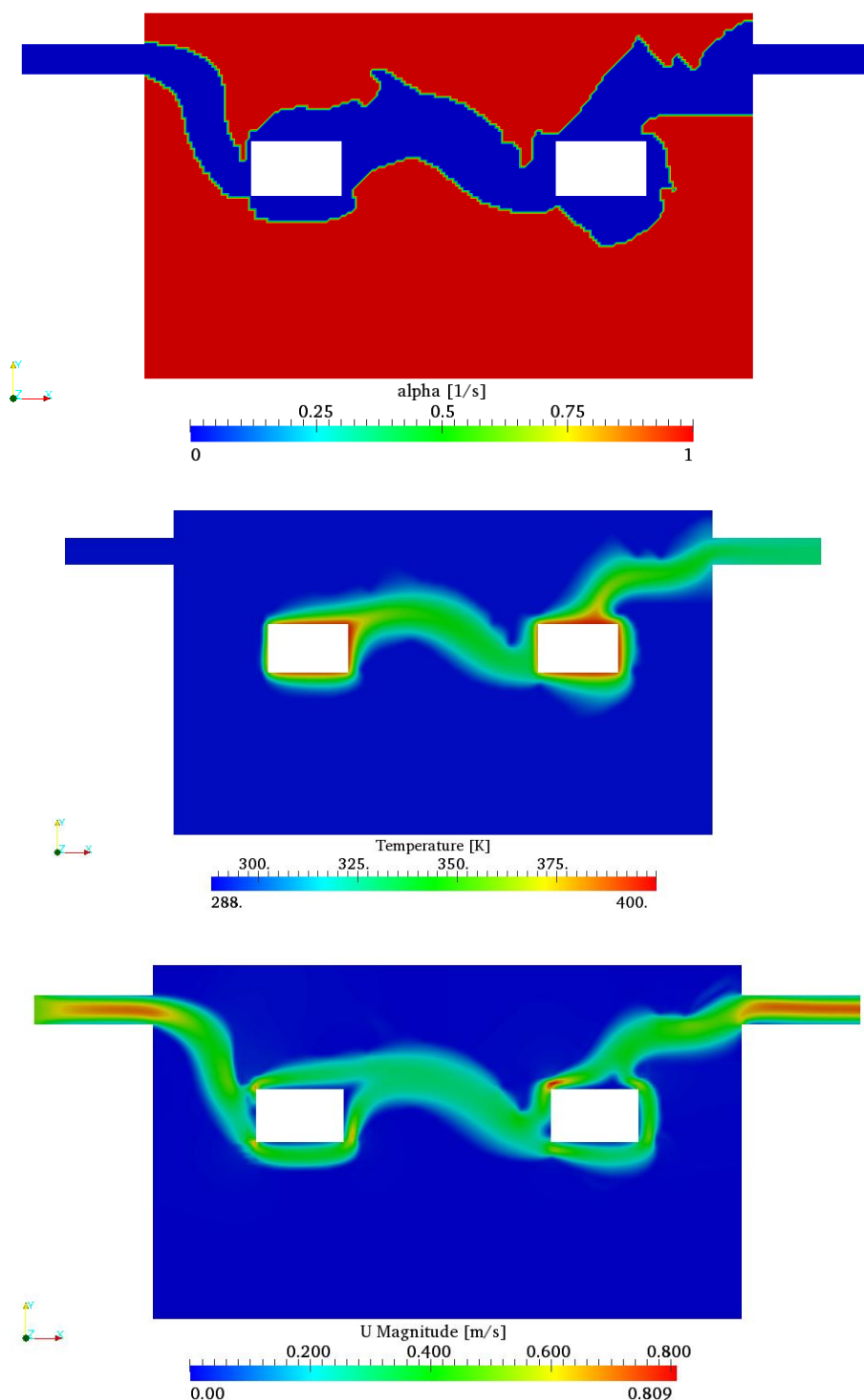
συνάρτηση κόστους, παίρνει το σταθμισμένο άθροισμα αυτής, με τη θερμοκρασιακή διαφορά εξόδου – εισόδου.



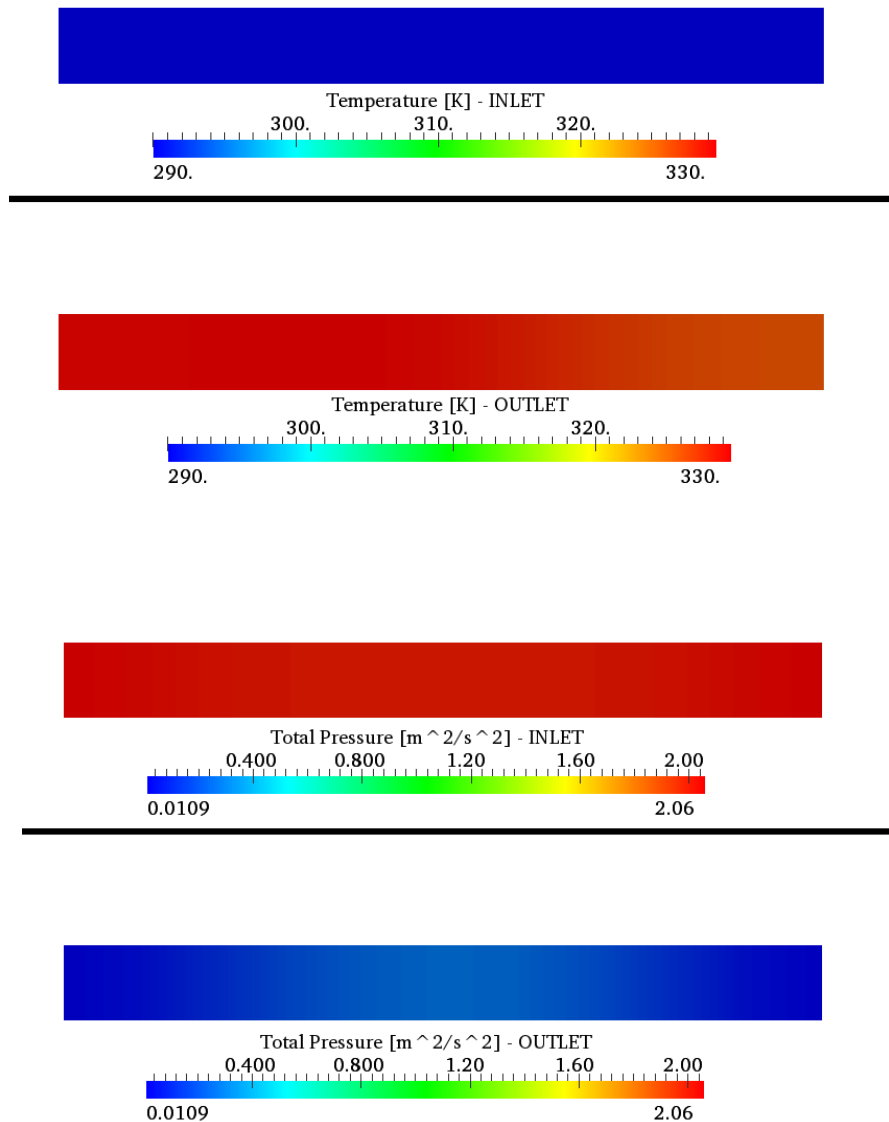
Σχήμα 6.2.1: -**Πάνω:** Πεδίο πορώδους στο σύνολο 2Δ χώρου εγκατάστασης με δύο ορθογωνικές πηγές θερμότητας στο εσωτερικό μετά το πέρας της βελτιστοποίησης που πραγματοποίησε η μέθοδος βελτιστοποίησης τοπολογίας με στόχο την ελαχιστοποίηση των απωλειών ολικής πίεσης. -**Κάτω:** Πεδίο της ταχύτητας.

Σκοπός είναι να βρεθεί η βέλτιστη διαδρομή που θα βρίσκει τη 'χρυσή τομή' μεταξύ της ελαχιστοποίησης των απωλειών και της μεγιστοποίησης της πρόσδοσης θερμότητας των πηγών στο ρευστό. Η ροή αναμένεται να 'αγκαλιάσει' τη γεωμετρία τους όσο το δυνατόν περισσότερο, ανάλογα βέβαια και με το βάρος που θα δώσει ο χρήστης στις αντίστοιχες συναρτήσεις. Το βήμα απότομης καθόδου επιλέγεται ίσο με $10^2 \frac{s}{m^2}$, ενώ οι παράγοντες βαρύτητας των

f_1 και f_2 με 0.7 και 0.3. Στα Σχήματα 6.2.2,3,4&5 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της διαδικασίας βελτιστοποίησης.



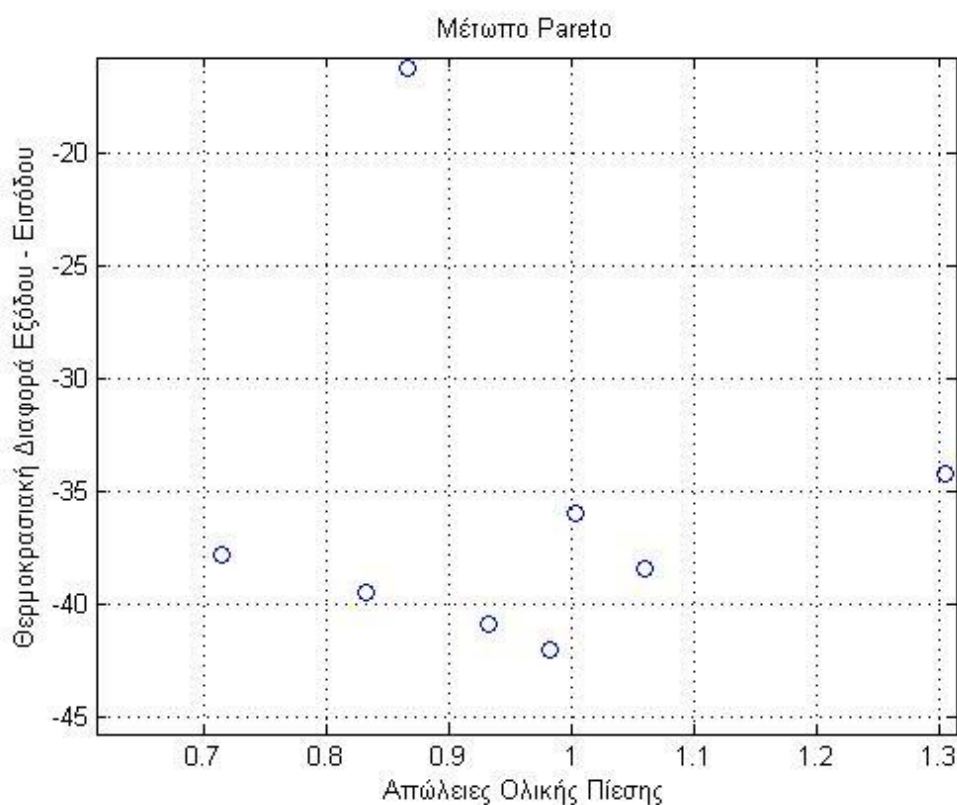
Σχήμα 6.2.2: -**Πάνω:** Πεδίο πορώδους 2D χωρίου με δύο ορθογωνικές πηγές θερμότητας στο εσωτερικό μετά το πέρας της βελτιστοποίησης που πραγματοποίησε η μέθοδος βελτιστοποίησης τοπολογίας με στόχο την ελαχιστοποίηση του σταθμισμένου αθροίσματος. - **Κέντρο:** Πεδίο της θερμοκρασίας. - **Κάτω :** Πεδίο της ταχύτητας.



Σχήμα 6.2.3: Τιμές των p_t (κάτω) και T (πάνω) στην είσοδο και τη έξοδο του βέλτιστου αγωγού 2Δ χωρίου με δύο ορθογωνικές πηγές θερμότητας στο εσωτερικό, που υπέδειξε η μέθοδος βελτιστοποίησης τοπολογίας με στόχο την ελαχιστοποίηση του σταθμισμένου αθροίσματος.

Εάν ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης με πολλαπλά κριτήρια είναι καλώς ορισμένο, τότε δεν θα υπάρχει μοναδική λύση η οποία ταυτόχρονα να ελαχιστοποιεί τον κάθε στόχο στο ελάχιστο δυνατό. Σε κάθε περίπτωση ένα κριτήριο πρέπει να έχει φτάσει ένα σημείο τέτοιο ώστε κάθε προσπάθεια επιπλέον βελτιστοποίησής του να έχει ως αποτέλεσμα την υποβάθμιση άλλων κριτηρίων. Το να βρεθεί μια τέτοια λύση, και να πιστοποιηθεί το πόσο καλύτερη είναι συγκριτικά με άλλες (γενικά θα υπάρχουν πολλές) είναι ο σκοπός όταν συντίθεται και λύνεται ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης με πολλαπλά κριτήρια. Η

λύση για το ανωτέρω πρόβλημα είναι ένα σύνολο από σημεία Pareto. Οι λύσεις Pareto είναι εκείνες για τις οποίες η βελτιστοποίηση ενός κριτηρίου μπορεί να επέλθει μόνο με την χειροτέρευση ενός τουλάχιστον κριτηρίου. Παρόλα αυτά, αντί για μια μόνο λύση στο πρόβλημα (κάτι το οποίο είναι τυπικά η περίπτωση του παραδοσιακού μαθηματικού προγραμματισμού), η λύση σε ένα πρόβλημα πολλαπλών κριτηρίων είναι μια σειρά (πιθανότατα άπειρων) σημείων Pareto. Η καμπύλη στην οποία φαίνονται οι βέλτιστες λύσεις, οι λεγόμενες και ως σημεία του μετώπου Pareto, παρουσιάζεται στο Σχήμα 6.2.4, ενώ γίνεται ευκρινές ποιες λύσεις είναι βέλτιστες και ποιες επικαλύπτονται.



Σχήμα 6.2.4: Σημεία μετώπου Pareto για το πρόβλημα διαδρομής 2Δ χωρίου με δύο ορθογωνικές πηγές θερμότητας στο εσωτερικό, με στόχο την ελαχιστοποίηση του σταθμισμένου αθροίσματος.

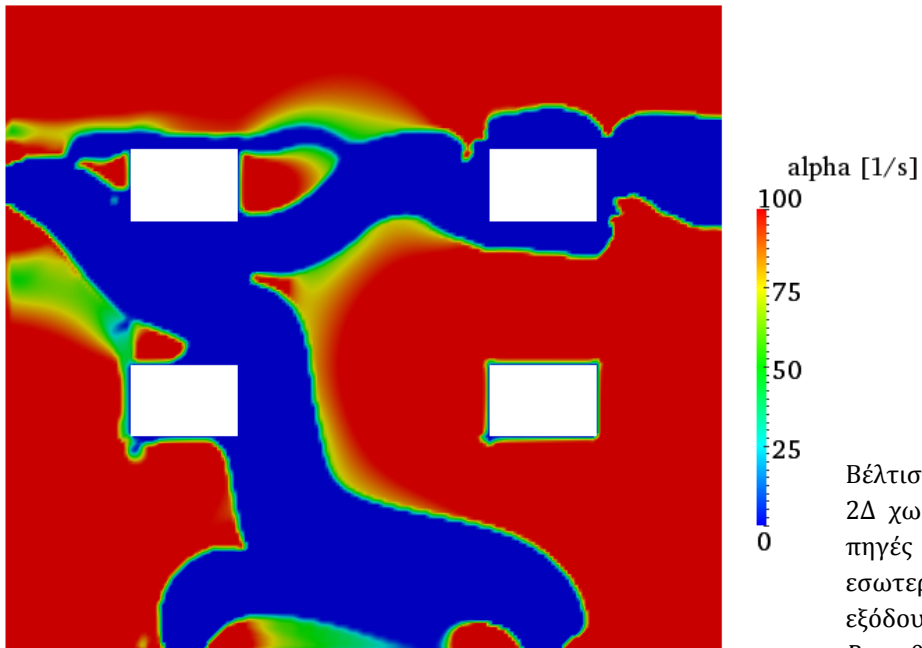
Τα σημεία του Σχήματος 6.2.4 εξάχθηκαν από τον παρακάτω πίνακα, ο οποίος περιέχει τις τιμές των f_1 και f_2 για διάφορους συνδυασμούς των παραμέτρων του προβλήματος.

Re	Pr	η (s/m^2)	$\alpha^{internal}$ ($1/s$)	ω_1	ω_2 (m^3/Ks^3)	Δp_t (m^2/s^2)	ΔT (K)
100	0.68	10^2	κλειστό	0.7	0.3	0.71512	37.85

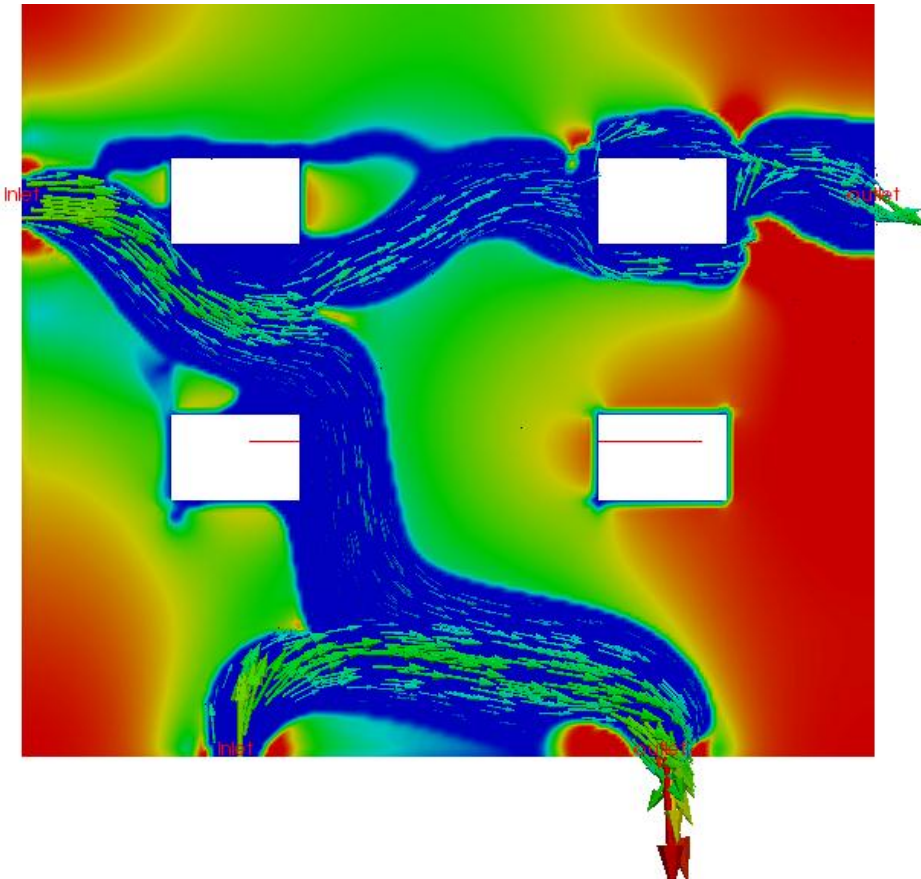
100	0,68	10^2	κλειστό	0.8	0.2	0.93213	40.93
		10	κλειστό	0.8	0.2	0.86678	16.30
		10^2	ανοικτό	0.8	0.2	0.98199	42.10
		10^2	κλειστό	0.6	0.4	1.05886	38.46
		10^2	κλειστό	0.5	0.5	1.30406	34.27
		10^2	ανοικτό	0.6	0.4	1.00283	36.03
		10	κλειστό	0.7	0.3	0.83296	39.54

6.3 2Δ Χωρίο με τέσσερις Πηγές Θερμότητας, δύο Εισόδους και δύο Εξόδους

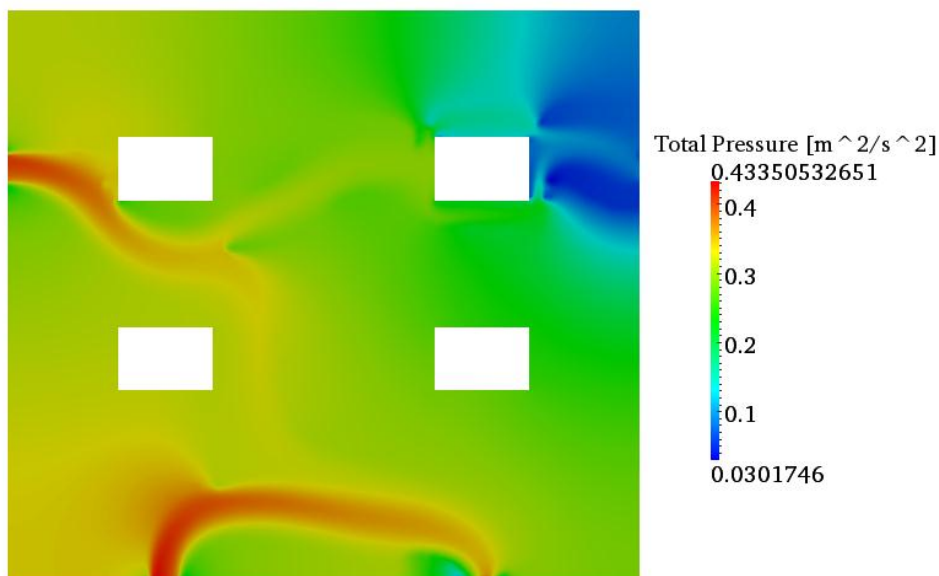
Ακολουθούν τα αποτελέσματα της βελτιστοποίησης ενός χωρίου με τέσσερις πηγές θερμότητας, δύο εισόδους και δύο εξόδους ως προς το σταθμισμένο άθροισμα στα Σχήματα 6.3.1,2,3&4.



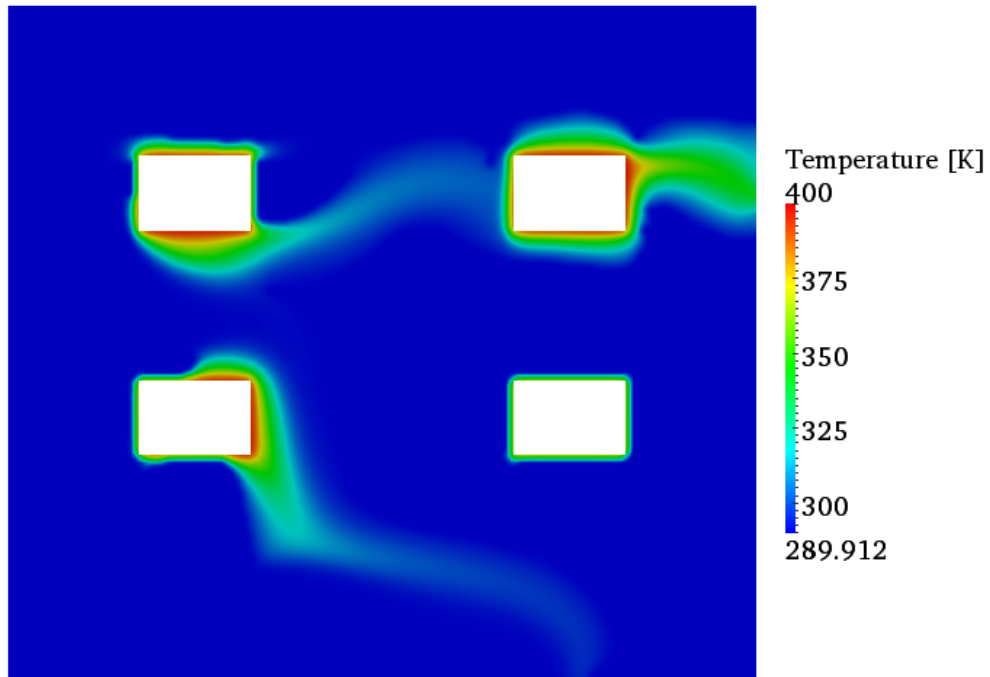
Σχήμα 6.3.1: Βέλτιστο πορώδες πεδίο στο 2Δ χωρίο με 4 ορθογωνικές πηγές θερμότητας στο εσωτερικό, 2 εισόδους και 2 εξόδους για $Re = 100$, $Pr = 0.68$, $\eta=100$ και αρχικά κλειστό χωρίο με στόχο το σταθμισμένο άθροισμα.



Σχήμα 6.3.2: Διανύσματα της ταχύτητας πάνω στο βέλτιστο πορώδες πεδίο στο σύνολο 2Δ χωρίου με 4 ορθογωνικές πηγές θερμότητας στο εσωτερικό, 2 εισόδους και 2 εξόδους για $Re = 100$, $Pr = 0.68$, $\eta=100$ και αρχικά κλειστό χωρίο με στόχο το σταθμισμένο άθροισμα.



Σχήμα 6.3.3: Βέλτιστο πεδίο της ολικής πίεσης στο σύνολο 2Δ χωρίου με 4 ορθογωνικές πηγές θερμότητας στο εσωτερικό, 2 εισόδους και 2 εξόδους για $Re = 100$, $Pr = 0.68$, $\eta=100$ και αρχικά κλειστό χωρίο με στόχο το σταθμισμένο άθροισμα.



Σχήμα 6.3.4: Βέλτιστο πεδίο της θερμοκρασίας στο σύνολο 2Δ χωρίου με 4 ορθογωνικές πηγές θερμότητας στο εσωτερικό, 2 εισόδους και 2 εξόδους για $Re = 100$, $Pr = 0.68$, $\eta=100$ και αρχικά κλειστό χωρίο .

Κεφάλαιο 7

Ανακεφαλαίωση & Συμπεράσματα

Η διπλωματική αυτή εργασία είχε σκοπό την εφαρμογή της μεθόδου βελτιστοποίησης της τοπολογίας σε συνδυασμό με τις συζυγείς μεθόδους υπολογισμού της παραγώγου, αποτυπώνοντας μέσα από απλές εφαρμογές τα πλεονεκτήματά της και τα προβλήματα στα οποία είναι εφαρμόσιμη. Βασικοί άξονες της διπλωματικής εργασίας είναι:

1. Η κατανόηση και εξοικείωση με το ανοικτό λογισμικό υπολογιστικής ρευστοδυναμικής **OpenFOAM** καθώς και του κώδικα *adjointSimpleFoam-topo-thesis* που λύνει τόσο τις εξισώσεις ροής όσο και τις συζυγείς. Διατυπώθηκαν οι χρησιμοποιούμενες συναρτήσεις κόστους, δηλαδή οι απώλειες ολικής πίεσης και η θερμοκρασιακή διαφορά εξόδου - εισόδου. Για τη διαχείριση των συναρτησιακών, δημιουργήθηκε το σταθμισμένο άθροισμα των δύο προαναφερθεισών συνιστωσών του.
2. Η προσθήκη όρων στις εξισώσεις ροής που περιέχουν την τοπολογική μεταβλητή ή πορώδες α για να μετατραπεί το διακριτό πρόβλημα 'περνάει ρευστό' - 'δεν περνάει ρευστό', που χαρακτηρίζει τη μέθοδο βελτιστοποίησης τοπολογίας, σε συνεχές. Λόγω του μεγάλου πλήθους τοπικών ακροτάτων κατά τη διαδικασία εντοπισμού της βέλτιστης λύσης, η μέθοδος εφαρμόστηκε για κάποιες περιπτώσεις, στις οποίες, αλλάζοντας κάθε φορά τις παραμέτρους, οι εκάστοτε 'βέλτιστες' λύσεις που υποδείκνυε η μέθοδος ήταν διαφορετικές.
3. Η παραμετρική μελέτη ως προς συγκεκριμένες σταθερές του αλγόριθμου βελτιστοποίησης τοπολογίας. Η σύγκλιση της

αντικειμενικής συνάρτησης και η συμπεριφορά του αλγόριθμου μελετήθηκε για ένα πρόβλημα 2D τετραγωνικού διευρυμένου χωρίου με παραμέτρους το μέγεθος βήματος απότομης καθόδου η , τους παράγοντες βαρύτητας ω_1 και ω_2 των συναρτησιακών, την ταχύτητα εισόδου, τον αριθμό Prandtl της ροής και την αρχικοποίηση του εσωτερικού πορώδους στο πεδίο.

4. **Η εφαρμογή της μεθόδου βελτιστοποίησης τοπολογίας σε δύο απλές περιπτώσεις.** Στην πρώτη, ο αλγόριθμος χρησιμοποιήθηκε για να βρεθεί ο βέλτιστος αγωγός που στρέφει τη ροή κατά 90 μοίρες και ταυτόχρονα ελαχιστοποιεί τη σταθμισμένη αντικειμενική συνάρτηση. Στη δεύτερη, στόχος ήταν ο εντοπισμός της βέλτιστης διαδρομής της ροής που εισέρχεται από δύο εισόδους και εξέρχεται από τρεις εξόδους. Σε όλες τις εφαρμογές ο αριθμός Re έπρεπε να κρατηθεί κάτω από τον κρίσιμο αριθμό μετάβασης της στρωτής ροής σε τυρβώδη.
5. **Η επιβεβαίωση των αποτελεσμάτων της μεθόδου.** Αρχικά, ομαλοποιήθηκε αεροδυναμικά ένας από τους 'βέλτιστους' αγωγούς που υπέδειξε η μέθοδος της τοπολογίας. Στη συνέχεια, επιβεβαιώθηκαν τα αποτελέσματα της μεθόδου μέσω επίλυσης της εισερχόμενης στον ομαλοποιημένο - πλέον - αγωγό, ροής.
6. **Η εφαρμογή της μεθόδου υπό την παρουσία μεταφοράς θερμότητας με ορθογωνικές πηγές θερμότητας.** Οι πηγές προσομοιώθηκαν με ορθογωνικές γεωμετρίες σταθερά υψηλής θερμοκρασίας που κείτονται στο εσωτερικό του διευρυμένου αρχικού ευρύτερου χωρίου. Επιβάλλοντας σταθερή θερμοκρασία, έγινε η προσπάθεια να βελτιστοποιηθεί το πρόβλημα, όπου στόχος είναι η μέγιστη πρόσδοση θερμότητας στο ρευστό. Με κατάλληλες τροποποιήσεις στα συναρτησιακά, έγινε η προσπάθεια βελτιστοποίησης τόσο ως προς τις απώλειες ολικής πίεσης όσο και ως προς τη διαφορά θερμοκρασίας εξόδου - εισόδου.

Η μέθοδος βελτιστοποίησης τοπολογίας πλεονεκτεί επειδή δεν είναι απαραίτητη μία αρχική παραμετροποίηση της βέλτιστης λύσης αλλά ένα διευρυμένο χωρίο μέσα στο οποίο η μέθοδος θα την αναζητήσει. Η μέθοδος της τοπολογίας φαντάζει ιδανική για προβλήματα στα οποία ο μηχανικός δεν έχει την αίσθηση της μορφής ή αναζητά μία εναλλακτική μορφή αγωγού που ίσως ταιριάζει περισσότερο στο πρόβλημα. Το βασικότερο σημείο σε αυτή τη διαδικασία είναι να μπορέσει ο μηχανικός να εκφράσει το στόχο του μέσα σε μία αντικειμενική συνάρτηση και να μπορέσει να συμπεριλάβει και περιορισμούς, που μπορούν να αποτελέσουν την μελλοντική εξέλιξη του υπάρχοντος αλγόριθμου. Τέλος, σημαντική εξέλιξη για τη μέθοδο θα αποτελούσε η εφαρμογή της σε τυρβώδη προβλήματα και η επιβεβαίωση της ορθότητας των αποτελεσμάτων σε αυτά. Η παρουσία της τύρβης προσθέτει όρους στις εξισώσεις ροής και βέβαια κάποιες παραπάνω εξισώσεις αναλόγως με το

μοντέλο που θα επιλεγεί για την επίλυση του προβλήματος. Μία πρόταση είναι η εφαρμογή της μεθόδου σε ένα απλοποιημένο, αρχικά, πρόβλημα τυρβώδους ροής καθώς επίσης και σε ένα πρόβλημα όπου θα δοκιμάζεται ένα διαφορετικής μορφής συναρτησιακό, το οποίο θα περιέχει εκτός από της απώλειες ολικής πίεσης ή τη θερμοκρασιακή διαφορά εξόδου – εισόδου και άλλα καθώς επίσης και περιορισμούς ως προς την οικονομικότητα και την ευκολία κατασκευής.

Παράρτημα Α'

Λειτουργία OpenFOAM – Πλέγμα blockMesh

Α'.1 Λειτουργία OpenFOAM

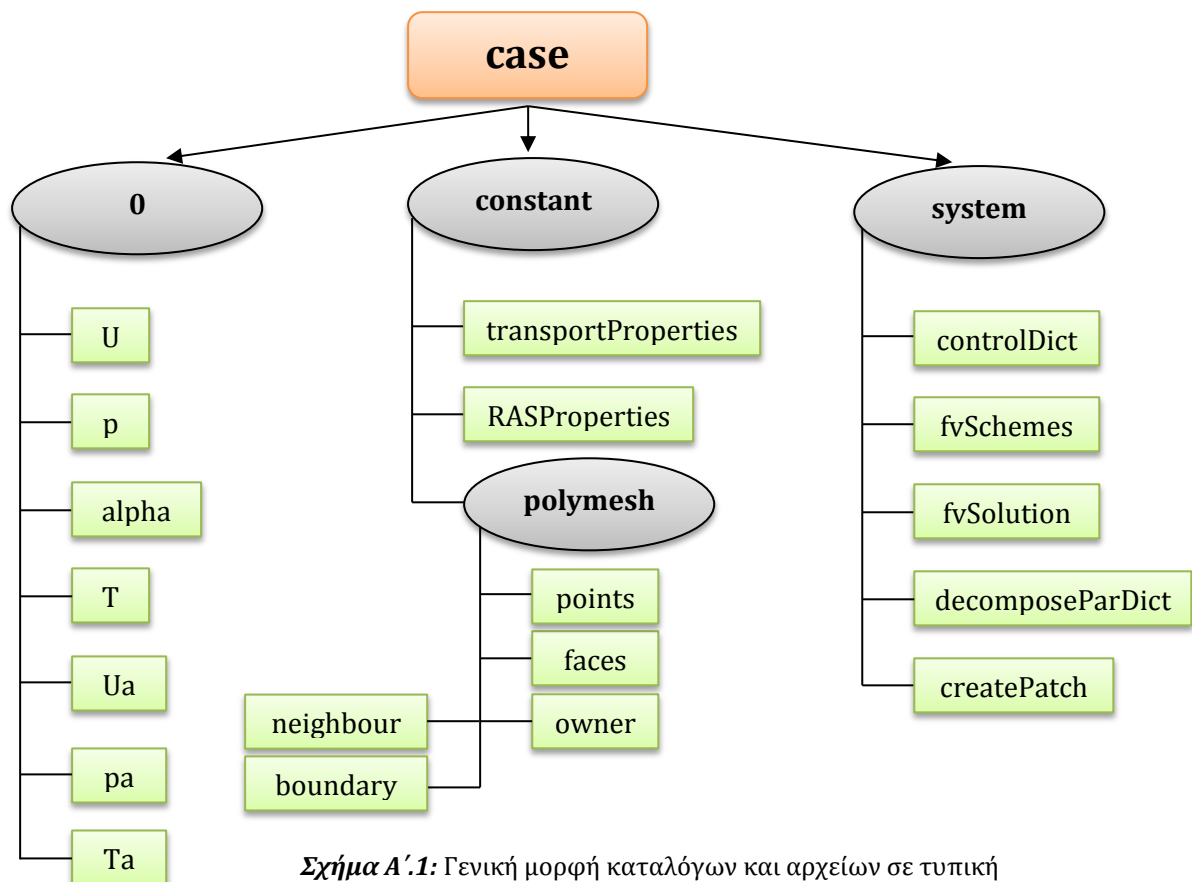
Για τη λειτουργία του OpenFOAM στις εφαρμογές της παρούσας διπλωματικής εργασίας είναι απαραίτητοι οι κατάλογοι **\$/case/0**, **\$/case/constant** και **\$/case/system**, όπου **\$/case** είναι το όνομα της εκάστοτε περίπτωσης.

- Η αρχικοποίηση και οι οριακές συνθήκες των μεταβλητών της ροής (**/U**, **/p**, **/alpha**, **/T**) και των συζυγών μεταβλητών (**/Ua**, **/pa**, **/Ta**) του προβλήματος περιέχονται στον κατάλογο **\$/0**.
- Ο κατάλογος **\$/constant** περιέχει εκείνες τις παραμέτρους που παραμένουν σταθερές κατά τη διαδικασία επίλυσης των εξισώσεων. Συγκεκριμένα, περιέχει:
 1. Το αρχείο **/transportProperties** στο οποίο επιλέγονται οι ιδιότητες του ρευστού λ.χ. η κινηματική συνεκτικότητα ν , ο συντελεστής απότομης καθόδου, η μέγιστη τιμή του πορώδους καθώς και η θερμοκρασία T_{wall} των περιοχών που θα υποδείξει ο αλγόριθμος βελτιστοποίησης ως στερεό τοίχωμα.
 2. Το αρχείο **/RASProperties** στο οποίο επιλέγεται το μοντέλο που θα χρησιμοποιηθεί για την επίλυση των εξισώσεων. Στην παρούσα διπλωματική εργασία επιλέγεται για όλες τις εφαρμογές στρωτό (laminar) μοντέλο με απενεργοποιημένη τη συμβολή της τύρβης.
 3. Ο κατάλογος **\$/polymesh** στο οποίο περιέχονται τα δεδομένα του πλέγματος.

- Ο κατάλογος `$/system` περιέχει τα αρχεία `/controlDict`, `/fvSchemes`, `/fvSolution`, `/decomposeParDict` και `/createPatch`:

1. Στο αρχείο `/controlDict` καταχωρούνται οι επιλογές σχετικά με το χρόνο έναρξης επίλυσης της ροής, το χρονικό βήμα, τον αριθμό αποθήκευσης, το πέρας της διαδικασίας βελτιστοποίησης κτλ.,
2. Στο αρχείο `/fvSchemes` καθορίζονται τα σχήματα διακριτοποίησης για κάθε όρο των εξισώσεων,
3. Στο αρχείο `/fvSolution` επιλέγονται οι επιλύτες των εξισώσεων ροής, η επίλυση ή μη των συζυγών και ενεργειακών εξισώσεων, καθώς και παράμετροι χαλάρωσης των μεταβλητών,
4. Στο αρχείο `/decomposeParDict` καταχωρούνται οι παράμετροι για επίλυση του προβλήματος σε παράλληλους επεξεργαστές και
5. Το αρχείο `/createPatch` διορθώνει τη σειρά αποθήκευσης των περιοδικών επιφανειών για να μπορέσει να τις διαχειριστεί το OpenFOAM.

Τα δύο τελευταία αρχεία δεν χρησιμοποιήθηκαν για τις εφαρμογές της παρούσας διπλωματικής εργασίας.



Σχήμα Α.1: Γενική μορφή καταλόγων και αρχείων σε τυπική περίπτωση OpenFOAM.

A'.2 Πλέγμα blockMesh

Τα δεδομένα πλέγματος που δημιουργούνται από την εκτέλεση της εντολής *blockMesh* του OpenFOAM καταχωρούνται στον κατάλογο **\$/case/constant/polymesh**. Εκεί ο χρήστης μπορεί να βρει τα αρχεία **points**, **faces**, **owner**, **neighbour** και **boundary**. Τα πλέγματα στο OpenFOAM είναι πάντα και για κάθε περίπτωση 3D ενώ κάθε στοιχείο του πλέγματος εμφανίζεται μία φορά.

- Το αρχείο **points** περιλαμβάνει τις καρτεσιανές συντεταγμένες όλων των σημείων του πλέγματος, με την αρίθμηση των σημείων να ξεκινάει από το μηδέν. Άρα για παράδειγμα οι συντεταγμένες του σημείου 20 είναι καταχωρημένες στην 21^η γραμμή.
- Το αρχείο **faces** περιλαμβάνει όλες τις επιφάνειες των κελιών που αποτελούν το πλέγμα. Αρχικά, γράφεται ο συνολικός αριθμός των επιφανειών και στη συνέχεια ακολουθούν μία προς μία οι επιφάνειες γράφοντας πρώτα τον αριθμό των σημείων που τις αποτελούν και μετά ποια σημεία είναι αυτά. Τα σημεία αυτά προέρχονται από το αρχείο **points**.
- Στο αρχείο **owner** καταχωρείται σε ποιο κελί ανήκει κάθε επιφάνεια.
- Στο αρχείο **neighbour** γράφονται οι γειτνιάσεις κάθε επιφάνειας δηλαδή ποια γειτονικά κελιά έχει κάθε επιφάνεια.
- Τέλος, στο αρχείο **boundary** καταχωρούνται τα ονόματα των ομαδοποιημένων επιφανειών, των λεγόμενων και *patches*, καθώς και οι επιφάνειες που τις αποτελούν. Τα *patches* δημιουργούνται ώστε ο χρήστης να μπορεί να τους προσδώσει συγκεκριμένες ιδιότητες ή οριακές συνθήκες.

Το *blockMesh* θα δημιουργήσει ένα δομημένο ορθογωνικό πλέγμα με τέτοιο αριθμό στοιχείων κατά τις 3 διαστάσεις που ορίζεται από την δήλωση των εξαέδρων στο *blockMeshDict*. Η δήλωση αυτή έχει την εξής μορφή:

```
blocks
(
  hex (0 1 2 7 8 9 10 15)      (100 45 1) simpleGrading (1 1 1)
);
```

όπου:

- *hex* είναι η κωδικοποίηση για τη δημιουργία εξαέδρων,
- στην παρένθεση (0 1 2 7 8 9 10 15) περιέχονται τα σημεία από το αρχείο **points** που αποτελούν το εξάεδρο,
- στην παρένθεση (100 45 1) καταχωρείται ο αριθμός των στοιχείων διακριτοποίησης κατά τους άξονες *x*, *y* και *z*,

- simpleGrading είναι η κωδικοποίηση για την απλή διάταξη των στοιχείων διακριτοποίησης και
- στην παρένθεση (1 1 1) περιέχονται οι συντελεστές αναλογίας του πρώτου και του τελευταίου στοιχείου κατά x - ο πρώτος αριθμός - y και z . Ακολουθεί το εξής παράδειγμα:

```
simpleGrading (2 0.5 1)
```

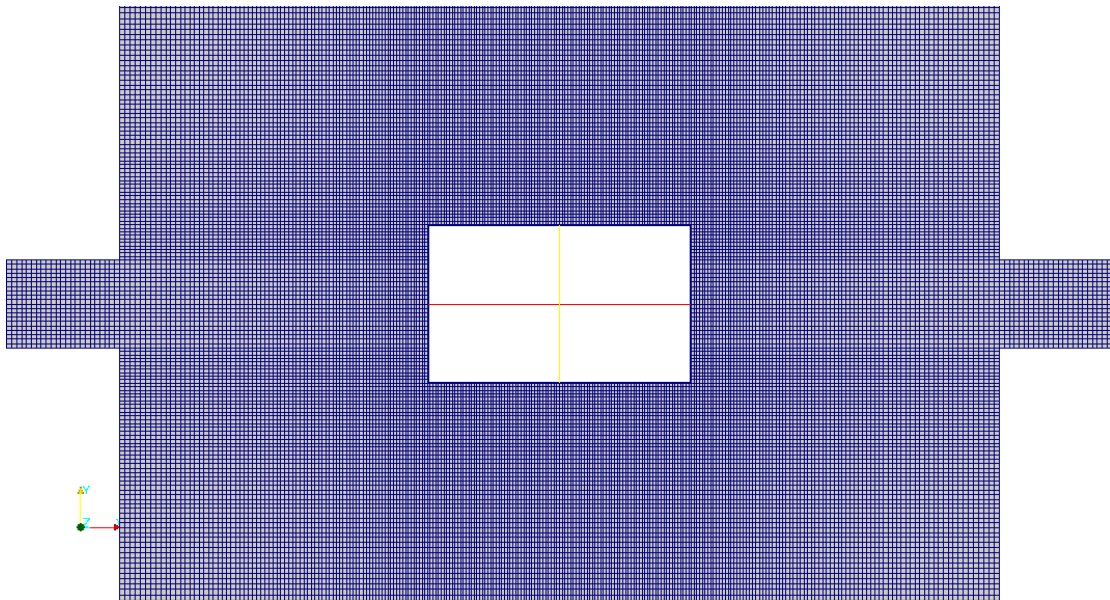
(Τελευταίο Κελί κατά x) = $2 \cdot$ (Πρώτο κελί κατά x)

άρα το τελευταίο κελί κατά x είναι διπλάσιο του πρώτου,

(Τελευταίο Κελί κατά y) = $0.5 \cdot$ (Πρώτο κελί κατά y)

άρα το τελευταίο κελί κατά y είναι μισό του πρώτου.

Ένα τέτοιο πλέγμα δημιουργεί διαβαθμίσεις στα κελιά του πλέγματος, όπως φαίνεται στο Σχήμα A'2.



Σχήμα A'2: Τυπικό πλέγμα blockMesh με διαβαθμίσεις κατά τους άξονες x και y . Η καταλληλότητα αυτού του πλέγματος αποτυπώνεται στις πυκνώσεις κοντά στην εσώκλειστη γεωμετρία όπου τα φαινόμενα διατάραξης είναι εντονότερα.

Παράρτημα Β΄

Πλεγματοποιητής front5.exe

Για τη γένεση πλέγματος του ομαλοποιημένου αγωγού του Κεφαλαίου 5 χρησιμοποιήθηκε το εκτελέσιμο *front5.exe* του Ε.Θ.Σ. . Ο συγκεκριμένος πλεγματοποιητής δημιουργεί τρίγωνα στο εσωτερικό γεωμετρίας για την οποία είναι γνωστά τα σημεία στα όριά της. Ένα αρχείο *front5.ini* δίνει τις απαραίτητες πληροφορίες στον πλεγματοποιητή, ο οποίος εκτελούμενος δημιουργεί το επιθυμητό πλέγμα. Το αρχείο *front5.ini* έχει την εξής μορφή:

```
geometryData.dat
geometryData
t
0.75000000      0.25000000
1.00000000
```

όπου καταχωρούνται οι ακόλουθες πληροφορίες:

- Το όνομα του αρχείου που περιέχει τα σημεία της γεωμετρίας, εδώ *geometryData.dat* .
- Η ρίζα των ονομάτων των αρχείων που θα δημιουργηθούν και θα ορίζουν πλήρως το πλέγμα, εδώ *geometryData* . Αφού 'τρέξει' ο κώδικας θα δημιουργηθούν 2 αρχεία, το *geometryData.ele* που περιέχει τα στοιχεία του πλέγματος και το *geometryData.nod* που περιέχει τους κόμβους.
- Ένα γράμμα για την επιθυμία ή μη του χρήστη για ομαλοποίηση του πλέγματος, <t> για ναι και <f> για όχι.
- Δύο συντελεστές με ονομασία *ruis* (0.75) και *coef* (0.25).
- Ο συντελεστής που θα πολλαπλασιάζονται οι καρτεσιανές συντεταγμένες. Εδώ, ο συντελεστής αυτός ορίζεται ίσος με τη μονάδα.

Η περαιτέρω εξοικείωση με τη λειτουργία του *front5.exe* δεν αποτελεί αντικείμενο της παρούσας διπλωματικής εργασίας.

Βιβλιογραφία

- [1]: Κ. Χ. Γιαννάκογλου: Μέθοδοι Βελτιστοποίησης στην Αεροδυναμική, Αθήνα 2006.
- [2]: Carsten Othmer: A continuous adjoint formulation for the computation of topological and surface sensitivities of ducted flows. December 2006.
- [3]: M. Bendsoe, N. Kikuchi: Generating Optimal topologies in structural design using a homogenization method. Journal of Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 71, 197 – 224 (1988).
- [4]: Α. Σ. Ζυμάρης: Συζυγείς μέθοδοι για το σχεδιασμό μορφών με βέλτιστη αεροδυναμική συμπεριφορά σε στρωτές και τυρβώδεις ροές. Διδακτορική Διατριβή. ΕΜΠ, Αθήνα 2010.
- [5]: Alabi, O. O.: Validity of Darcy's Law in Laminar Regime, Department of Mathematical and Physical Sciences, College of Science, Engineering and Technology, Osun State University, Osogbo.
- [6]: Γ. Κ. Καρπούζας: Αυτοματοποιημένη Μέθοδος Βελτιστοποίησης Πτερυγώσεων Στροβιλομηχανών με χρήση Συζυγών Μεθόδων και Διαχείριση Περιορισμών. Διπλωματική Εργασία. ΕΜΠ, Αθήνα 2011.
- [7]: Jesse Liberty: Sams Teach Yourself C + + in 24 Hours. Indiana 1999.
- [8]: V.G. Asouti, E.A. Kontoleonos, X.S. Trompoukis and K.C. Giannakoglou: Shape Optimization using the One-shot Adjoint Technique on Graphics Processing Units. 7th GRACM International Congress on Computational Mechanics. Athens, 2011.
- [9]: OpenFOAM: official web site <http://www.openfoam.com> .
- [10]: Tannehill, J.C., Anderson, D.A. Pletcher, R.H.: Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer. 2nd Ed. Taylor & Francis 1997. Philadelphia, D.A.

- [11]: Σ. Τσαγγάρης: Μηχανική των Ρευστών. Αθήνα 2005.
- [12]: Ξ. Κακάτσιος: Αρχές Μεταφοράς Θερμότητας και Μάζης. Αθήνα 2006.
- [13]: Antony J., Sriram S., Luigi M.: Continuous Adjoint Method for Unstructured Grids. 10.2514/1.25362. U.S.A.
- [14]: E.M. Papoutsis-Kiachagias, E.A. Kontoleonos, A.S. Zymaris, D.I. Papadimitriou, K.C. Giannakoglou: Constrained Topology Optimization for Laminar and Turbulent Flows, including Heat Transfer, Athens 2011.
- [15]: E. Hansen: Global Optimization using Interval Analysis. Pure and Applied Mathematics. A series of monographs and textbooks. 1992.
- [16]: G. Rozvdny: Topology Optimization in Structural Mechanics. Technical University. Budapest, Hungary. January 2001.
- [17]: Manolis Papadrakis, Yiannis Tsompanakis, Ernest Hinton, Johann Sienz: Advanced Solution Methods in Topology Optimization and Shape Sensitivity Analysis.
- [18]: Dimitrios I. Papadimitriou, Kyriakos C. Giannakoglou: A Continuous Method for the Minimization of Losses in Cascade Viscous Flows, 44th A/AA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit. Nevada, 2006.