ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ IIIβ
ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΕΣ ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ

Κ.Χ. Γιαννάκογλου– Ι.Αναγνωστόπουλος (11/2003)

Ανάλυση Μητρώου A σε άνω και κάτω τριγωνικά μητρώα: Μέθοδοι Doolittle και Crout.

Στην ανάλυση $A = LU$, $L =$ κάτω τριγωνικός, $U =$ άνω τριγωνικός, ισχύει

$$\sum_{k=1}^{N} l_{i,k}\, u_{k,j} \;=\; a_{i,j} \tag{1}$$

όπου a, l, u είναι τα στοιχεία των μητρώων A, L και U. Η μέθοδος Doolittle επιβάλλει

$$l_{i,i} \;=\; 1 \tag{2}$$

ενώ η μέθοδος Crout επιβάλλει

$$u_{i,i} \;=\; 1 \tag{3}$$

Εννοείται ότι

$$A \;=\; \left|\begin{array}{lllll} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \dots & a_{1,N} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \dots & a_{2,N} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \dots & a_{3,N} \\ & & & \vdots & \\ a_{N,1} & a_{N,2} & a_{N,3} & \dots & a_{N,N} \end{array}\right| \tag{4}$$

$$L \;=\; \left|\begin{array}{lllll} l_{1,1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ l_{2,1} & l_{2,2} & 0 & \dots & 0 \\ l_{3,1} & l_{3,2} & l_{3,3} & \dots & 0 \\ & & & \vdots & \\ l_{N,1} & l_{N,2} & l_{N,3} & \dots & l_{N,N} \end{array}\right| \tag{5}$$

και

$$U \;=\; \left|\begin{array}{lllll} u_{1,1} & u_{1,2} & u_{1,3} & \dots & u_{1,N} \\ 0 & u_{2,2} & u_{2,3} & \dots & u_{2,N} \\ 0 & 0 & u_{3,3} & \dots & u_{3,N} \\ & & & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & u_{N,N} \end{array}\right| \tag{6}$$

Ο αλγόριθμος της μεθόδου Doolittle αποτελείται κατά σειρά από τα εξής βήματα:

- Για $j = 1, 2, \ldots, N$ υπολόγισε:

$$u_{1,j} = a_{1,j} \tag{7}$$

- Για $i = 2, 3, \ldots, N$ υπολόγισε:

$$l_{i,1} = \frac{a_{i,1}}{u_{1,1}} \tag{8}$$

- Σε εξωτερικό βρόχο για τις τιμές $r = 2, 3, \ldots, N$ εκτέλεσε, τον ένα μετά τον άλλο τους εξής δύο εσωτερικούς βρόχους:

  – Για $j = r, r+1, \ldots, N$ υπολόγισε:

$$u_{r,j} = a_{r,j} - \sum_{k=1}^{r-1} l_{r,k} u_{k,j} \tag{9}$$

  – Για $i = r+1, r+2, \ldots, N$ υπολόγισε:

$$l_{i,r} = \frac{a_{i,r} - \sum_{k=1}^{r-1} l_{i,k} u_{k,r}}{u_{r,r}} \tag{10}$$

Ο αλγόριθμος της μεθόδου Crout αποτελείται κατά σειρά από τα εξής βήματα:

- Για $i = 1, 2, \ldots, N$ υπολόγισε:

$$l_{i,1} \;=\; a_{i,1} \tag{11}$$

- Για $j = 2, 3, \ldots, N$ υπολόγισε:

$$u_{1,j} \;=\; \frac{a_{1,j}}{l_{1,1}} \tag{12}$$

- Σε εξωτερικό βρόχο για τις τιμές $r = 2, 3, \ldots, N$ εκτέλεσε, τον ένα μετά τον άλλο τους εξής δύο εσωτερικούς βρόχους:

  - Για $i = r, r+1, \ldots, N$ υπολόγισε:

$$l_{i,r} \;=\; a_{i,r} \;-\; \sum_{k=1}^{r-1} l_{i,k} u_{k,r} \tag{13}$$

  - Για $j = r+1, r+2, \ldots, N$ υπολόγισε:

$$u_{r,j} \;=\; \frac{a_{r,j} \;-\; \sum_{k=1}^{r-1} l_{r,k} u_{k,j}}{l_{r,r}} \tag{14}$$