ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙΙβ
ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΕΣ ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ

Κ.Χ. Γιαννάκογλου– Ι.Αναγνωστόπουλος (11/2003)

Ανάλυση Cholesky Συμμετρικού Μητρώου A:

Η ανάλυση σε άνω και κάτω τριγωνικό πίνακα ενός συμμετρικού και θετικά–ορισμένου μητρώου A, δηλαδή η λεγόμενη ανάλυση Cholesky, γράφεται

$$A = L\,L^T \tag{1}$$

Εννοείται ότι

$$A = \left| \begin{array}{ccccc} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \dots & a_{1,N} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \dots & a_{2,N} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \dots & a_{3,N} \\ & & & \vdots & \\ a_{N,1} & a_{N,2} & a_{N,3} & \dots & a_{N,N} \end{array} \right| , \qquad L = \left| \begin{array}{ccccc} l_{1,1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ l_{2,1} & l_{2,2} & 0 & \dots & 0 \\ l_{3,1} & l_{3,2} & l_{3,3} & \dots & 0 \\ & & & \vdots & \\ l_{N,1} & l_{N,2} & l_{N,3} & \dots & l_{N,N} \end{array} \right| \tag{2}$$

Ο αλγόριθμος της μεθόδου Cholesky αποτελείται ουσιαστικά από δύο βρόχους (nested loops), τον ένα μέσα στον άλλο. Είναι:

- Για $i = 1, 2, \dots, N$ υπολόγισε το διαγώνιο στοιχείο του L για την αντίστοιχη γραμμή:

$$l_{i,i} = \sqrt{a_{i,i} - \sum_{m=1}^{i-1} l_{i,m}^2} \tag{3}$$

  - Για κάθε τιμή του i, πραγματοποίησε τον εσωτερικό βρόχο, $k = i + 1, \dots, N$, και υπολόγισε τα στοχεία της i–ιοστής στήλης του L, που προφανώς βρίσκονται κάτω από το διαγώνιο στοιχείο που υπολογίσθηκε προηγουμένως:

$$l_{k,i} = \frac{1}{l_{i,i}} \left[a_{k,i} - \sum_{m=1}^{i-1} l_{k,m} l_{i,m} \right] \tag{4}$$

Στον προηγούμενο αλγόριθμο, το ασθενές σημείο κατά την υλοποίησή του σε υπολογιστή είναι η ύπαρξη τετραγωνικής ρίζας για τον υπολογισμό του διαγώνιου στοιχείου του L. Κατά τα άλλα, ο αλγόριθμος είναι οικονομικός, με την έννοια ότι τα υπολογιζόμενα στοιχεία του L μπορούν να αποθηκευθούν στη θέση των στοιχείων του A, αν βέβαια αυτά δεν χρειάζονται στη συνέχεια.

Το προαναφερθέν πρόβλημα του παραπάνω αλγορίθμου μπορεί να ξεπεραστεί αν η ανάλυση Cholesky γίνει σε τρόπο ώστε

$$A \; = \; L\,D\,L^T \tag{5}$$

όπου το D είναι διαγώνιο μητρώο ενώ τα διαγώνια στοιχεία του L είναι μοναδιαία. Δηλαδή:

$$D \; = \; \begin{vmatrix} d_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & \dots & 0 \\ & & & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & d_N \end{vmatrix} \;, \qquad L \; = \; \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ l_{2,1} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ l_{3,1} & l_{3,2} & 1 & \dots & 0 \\ & & & \vdots & \\ l_{N,1} & l_{N,2} & l_{N,3} & \dots & 1 \end{vmatrix} \tag{6}$$

Ο νέος αλγόριθμος της μεθόδου Cholesky υπολογίζει τα στοιχεία των L και D και αποτελείται και πάλι από δύο βρόχους, τον ένα μέσα στον άλλο. Είναι:

- Για $i = 1, 2, \dots, N-1$ υπολογίσε το διαγώνιο στοιχείο του D για την αντίστοιχη γραμμή:

$$d_i \; = \; a_{i,i} - \sum_{m=1}^{i-1} d_m \; l_{i,m}^2 \tag{7}$$

  - Για κάθε τιμή του i, πραγματοποίησε τον εσωτερικό βρόχο, $k = i + 1, \dots, N$, και υπολόγισε τα στοχεία της i–ιοστής στήλης του L, που προφανώς βρίσκονται κάτω από το μοναδιαίο διαγώνιο στοιχείο:

$$l_{k,i} \; = \; \frac{1}{d_i}\left[a_{k,i} \; - \; \sum_{m=1}^{i-1} d_m l_{k,m} l_{i,m} \right] \tag{8}$$

- Τελευταία υπολογίζεται το

$$d_N \; = \; a_{N,N} \; - \; \sum_{m=1}^{N-1} d_m l_{N,m}^2 \tag{9}$$