ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ LEGENDRE

Τα πολυώνυμα Legendre $P_n(x)$ είναι ορθογώνια πολυώνυμα στο διάστημα $[-1,+1]$, με συνάρτηση βάρους την $w(x)=1$, άρα ισχύει:

$$\int_{-1}^{+1} P_m(x)P_n(x)dx = \frac{2}{2n+1}\delta_m^n$$

Τα επτά πρώτα πολυώνυμα Legendre είναι τα:

$$\begin{aligned}
P_0(x) &= 1\\
P_1(x) &= x\\
P_2(x) &= \frac{1}{2}(3x^2-1)\\
P_3(x) &= \frac{1}{2}(5x^3-3x)\\
P_4(x) &= \frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3)\\
P_5(x) &= \frac{1}{8}(63x^5-70x^3+15x)\\
P_6(x) &= \frac{1}{16}(231x^6-315x^4+105x^2-5)\\
&\dots
\end{aligned}$$

Τα παραπάνω και όλα τα επόμενα προκύπτουν από τον αναδρομικό τύπο:

$$P_n(x) = \frac{2n-1}{n}xP_{n-1}(x) - \frac{n-1}{n}P_{n-2}(x)$$

ή, εναλλακτικά,

$$P_{n+1}(x)(n+1) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x)$$

Κοινή ιδιότητα όλων των πολυωνύμων Legendre, για οποιαδήποτε τιμή του δείκτη n, είναι η: $P_n(1)=1$. Πλην της αναδρομικής, υπάρχει και η ρητή έκφραση των πολυωνύμων Legendre, η οποία είναι η:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right)^2 \left(\frac{1+x}{2}\right)^{n-k} \left(\frac{1-x}{2}\right)^k$$

όπου

$$\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) = \frac{n!}{k!(n-k)!},\ 0 \leq k \leq n\ (=0,\ \text{αλλιώς})$$

Το πολυώνυμο Legendre n-οστού βαθμού $P_n(x)$ αποτελεί λύση της διαφορικής εξίσωσης Legendre:

$$(1-x^2)Y^{''} - 2xY^{'} + n(n+1)Y = 0$$

(όπου n=ένας μη-αρνητικός ακέραιος). Η παραπάνω εξίσωση έχει σχέση με προβλήματα σφαιρικής συμμετρίας.

Άλλες χρήσιμες ιδιότητες, πέραν της $P_n(1) = 1$:

$$\begin{array}{c} \mid P_n(x) \mid \leq 1,\ \forall x \\ P_n(-1) = (-1)^n \\ P_n(-x) = (-1)^n P_n(x) \end{array}$$

Επιπλέον ορίζονται και τα μετατοπισμένα (shifted) πολυώνυμα Legendre ($\tilde{P_n}(x)$), τα οποία είναι ορθογώνια στο $[0,1]$, και τα οποία ορίζονται συναρτήσει των προηγούμενων ως:

$$\begin{array}{c} \tilde{P_n}(x) = P_n(2x-1) \\ \int_0^1 \tilde{P_m}(x)\tilde{P_n}(x)dx = \frac{1}{2n+1}\delta_m^n \end{array}$$

ή, με ρητό τρόπο, ως:

$$\tilde{P}_n(x) = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} n+k \\ k \end{array} \right) (-x)^k$$

Τα τέσσερα πρώτα από αυτά τα πολυώνυμα είναι:

$$\begin{aligned}
\tilde{P}_0(x) &= 1 \\
\tilde{P}_1(x) &= 2x - 1 \\
\tilde{P}_2(x) &= 6x^2 - 6x + 1 \\
\tilde{P}_3(x) &= 20x^3 - 30x^2 + 12x - 1
\end{aligned}$$

ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ LAGUERRE

Τα πολυώνυμα Laguerre ($\mathcal{L}_n(x)$) είναι ορθογώνια πολυώνυμα στο $[0, \infty]$ με συνάρτηση βάρους την $w(x) = e^{-x}$. Άρα, στην Gaussian Quadrature, χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό ολοκληρωμάτων της μορφής:

$$\int_0^\infty f(x) e^{-x} dx$$

Η ορθογωνιότητά τους διατυπώνεται ως:

$$\int_0^\infty \mathcal{L}_n(x)\mathcal{L}_m(x) e^{-x} dx = 0, \text{ αν } n \neq m$$

$$\int_0^\infty [\mathcal{L}_n(x)]^2 e^{-x} dx = c(n) \neq 0, \; c(n) = \frac{\Gamma(n+1)}{n!}$$

Τα έξι πρώτα πολυώνυμα Laguerre είναι τα:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_0(x) &= 1\\
\mathcal{L}_1(x) &= -x+1\\
\mathcal{L}_2(x) &= \frac{1}{2}(x^2-4x+2)\\
\mathcal{L}_3(x) &= \frac{1}{6}(-x^3+9x^2-18x+6)\\
\mathcal{L}_4(x) &= \frac{1}{24}(x^4-16x^3+72x^2-96x+24)\\
\mathcal{L}_5(x) &= \frac{1}{120}(-x^5+25x^4-200x^3+600x^2-600x+120)
\end{aligned}$$

και προκύπτουν από τον αναδρομικό τύπο:

$$\mathcal{L}_{n+1}(x) = \frac{1}{n+1}\Big[(2n+1-x)\mathcal{L}_n(x) - n\mathcal{L}_{n-1}(x)\Big]$$

Τα πολυώνυμα Laguerre n-οστού βαθμού $\mathcal{L}_n(x)$ αποτελούν λύση των διαφορικών εξισώσεων Laguerre

$$xY^{''} + (1-x)Y^{'} + ny = 0$$

όπου n είναι ένας μη-αρνητικός ακέραιος.

Τα πολυώνυμα Laguerre διέπονται, μεταξύ άλλων, από τις παρακάτω ιδιότητες:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_n(0) &= 1\\
\int_0^x \mathcal{L}_n(t)dt &= \mathcal{L}_n(x) - \mathcal{L}_{n+1}(x)\\
\int_0^\infty x^p e^{-x}\mathcal{L}_n(x)dx &= \begin{cases} 0, & \text{αν } p<n\\ (-1)^n n!, & \text{αν } p=n \end{cases}\\
\mathcal{L}_n^{'}(x) &= \mathcal{L}_{n-1}^{'}(x) - \mathcal{L}_{n-1}(x)\\
x\mathcal{L}_n^{'}(x) &= n\mathcal{L}_n(x) - n\mathcal{L}_{n-1}(x)
\end{aligned}$$

GAUSS-LAGUERRE QUADRATURE-ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ

Βασίζεται στην προσέγγιση του παρακάτω ολοκληρώματος από ένα άθροισμα n όρων, ως:

$$\int_0^{\infty} e^{-x} f(x) dx \cong \sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i)$$

όπου x_i είναι οι ρίζες του πολυωνύμου Laguerre βαθμού $n+1$.

Δίνονται πινακοποιημένες οι ρίζες x_i και οι συντελεστές w_i των τριών πρώτων πολυωνύμων Laguerre:

$n=1$	$x_0 = 0.585786$ $x_1 = 3.41421$	$w_0 = 0.853553$ $w_1 = 0.146447$
$n=2$	$x_0 = 0.415775$ $x_1 = 2.29428$ $x_2 = 6.28995$	$w_0 = 0.711093$ $w_1 = 0.278518$ $w_2 = 0.0103893$
$n=3$	$x_0 = 0.322548$ $x_1 = 1.74576$ $x_2 = 4.53662$ $x_3 = 9.39507$	$w_0 = 0.603154$ $w_1 = 0.357419$ $w_2 = 0.0388879$ $w_3 = 0.000539295$

ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ HERMITE

Τα πολυώνυμα Hermite είναι ορθογώνια πολυώνυμα στο $(-\infty, +\infty)$ με συνάρτηση βάρους την e^{-x^2}.

Τα επτά πρώτα πολυώνυμα Hermite είναι:

$$\begin{aligned}
H_0(x) &= 1 \\
H_1(x) &= 2x \\
H_2(x) &= 4x^2 - 2 \\
H_3(x) &= 8x^3 - 12x \\
H_4(x) &= 16x^4 - 48x^2 + 12 \\
H_5(x) &= 32x^5 - 160x^3 + 120x \\
H_6(x) &= 64x^6 - 480x^4 + 720x^2 - 120
\end{aligned}$$

Η ορθογωνιότητα των πολυωνύμων Hermite διατυπώνεται ως:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_m(x)H_n(x)e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}2^n n!\delta_m^n$$

Τα πολυώνυμα Hermite παράγονται από τον αναδρομικό τύπο:

$$\begin{aligned} H_{n+1}(x) &= 2xH_n(x) - H_n^{'}(x) \\ H_n^{'}(x) &= 2nH_{n-1}(x) \end{aligned}$$

άρα:

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x)$$

Ισχύει η συνθήκη συμμετρίας:

$$H_n(-x) = (-1)^n H_n(x)$$

ΤΡΟΠΟΠΟΙΗΜΕΝΑ (PROBABILISTIC) ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ HERMITE

Συμβολίζονται με $He_n(x)$ και δίνονται από την παρακάτω έκφραση που τα συσχετίζει με τα $H_n(x)$:

$$He_n(x) = 2^{-n/2}H_n\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$$

Τα πέντε πρώτα τροποποιημένα πολυώνυμα Hermite είναι:

$$
\begin{aligned}
He_1(x) &= x \\
He_2(x) &= x^2 - 1 \\
He_3(x) &= x^3 - 3x \\
He_4(x) &= x^4 - 6x^2 + 3 \\
He_5(x) &= x^5 - 10x^3 + 15x
\end{aligned}
$$

Ενδεικτικά, το $He_2(x)$ προέκυψε ως:

$$He_2(x) = 2^{-1} H_2\Big(\frac{x}{\sqrt{2}}\Big) = \frac{1}{2}\Big(4\frac{x^2}{2} - 2\Big) = \frac{1}{2}(2x^2 - 2) = x^2 - 1$$

Ισχύει:

$$He_0(x) = 2^0 H_0\Big(\frac{x}{\sqrt{2}}\Big) = 2^0 \cdot 1 = 1$$

Είναι σημαντικό να θυμόμαστε ότι $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ είναι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (pdf) κανονικής κατανομής με μέση τιμή 0 και τυπική απόκλιση 1. Σε μια τέτοια εφαρμογή, η συνάρτηση βάρους γίνεται: $e^{-x^2/2}$.

Η ορθογωνιότητά τους γράφεται:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} He_m(x) He_n(x) e^{-x^2/2} dx = \sqrt{2\pi} n! \delta_n^m$$

GAUSS-HERMITE QUADRATURE - ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ

Χρησιμοποιείται για προσέγγιση ολοκληρωμάτων της μορφής:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} f(x) dx \cong \sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i)$$

όπου τα x_i είναι οι ρίζες πολυωνύμων Hermite βαθμού $n+1$.

Πινακοποιημένες ρίζες x_i και συντελεστές w_i τριών πολυωνύμων:

$n=1$	$x_0 = -0.70710678$ $x_1 = +0.70710678$	$w_0 = 0.88622692$ $w_1 = 0.88622692$
$n=2$	$x_0 = -1.22474487$ $x_1 = 0.00$ $x_2 = +1.22474487$	$w_0 = 0.29540897$ $w_1 = 1.1816359$ $w_2 = 0.29540897$
$n=3$	$x_0 = -1.6506801$ $x_1 = -0.52464762$ $x_2 = +0.52464762$ $x_3 = +1.6506801$	$w_0 = 0.0813128$ $w_1 = 0.80491409$ $w_2 = 0.80491409$ $w_3 = 0.0813128$

ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ CHEBYSHEV

Τα πολυώνυμα Chebyshev είναι ορθογώνια πολυώνυμα στο $[-1,+1]$ με συνάρτηση βάρους την $w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Τα επτά πρώτα πολυώνυμα Chebyshev είναι:

$$
\begin{aligned}
T_0(x) &= 1 \\
T_1(x) &= x \\
T_2(x) &= 2x^2 - 1 \\
T_3(x) &= 4x^3 - 3x \\
T_4(x) &= 8x^4 - 8x^2 + 1 \\
T_5(x) &= 16x^5 - 20x^3 + 5x \\
T_6(x) &= 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1
\end{aligned}
$$

Τα πολυώνυμα Chebyshev παράγονται από τον αναδρομικό τύπο:

$$T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x)$$

Η μεταξύ τους ορθογωνιότητα γράφεται ως:

$$\int_{-1}^{1} T_n(x)T_m(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} 0, & \text{αν } n \neq m \\ \pi, & \text{αν } n = m = 0 \\ \pi/2, & \text{αν } n = m \neq 0 \end{cases}$$

Οι ρίζες του πολυωνύμου $T_n(x) = 0$ είναι οι

$$x_k = cos\Big(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{2k-1}{n}\Big),\ k = 1, \ldots, n$$

Ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

$$\begin{aligned} T_n(1) &= 1 \\ T_n(-1) &= (-1)^n \end{aligned}$$

Όλα τα μονώνυμα εκφράζονται συναρτήσει των πολυωνύμων Chebyshev. Ενδεικτικά:

$$\begin{aligned} 1 &= T_0 \\ x &= T_1 \\ x^2 &= \frac{1}{2}(T_0 + T_2) \\ x^3 &= \frac{1}{4}(3T_1 + T_3) \\ x^4 &= \frac{1}{8}(3T_0 + 4T_2 + T_4) \\ x^5 &= \frac{1}{16}(10T_1 + 5T_3 + T_5) \\ x^6 &= \frac{1}{32}(10T_0 + 15T_2 + 6T_4 + T_6) \end{aligned}$$