ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών
Μονάδα Παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής & Βελτιστοποίησης

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

(3ο Εξάμηνο Σχομής Μηχ.Μηχ. ΕΜΠ)

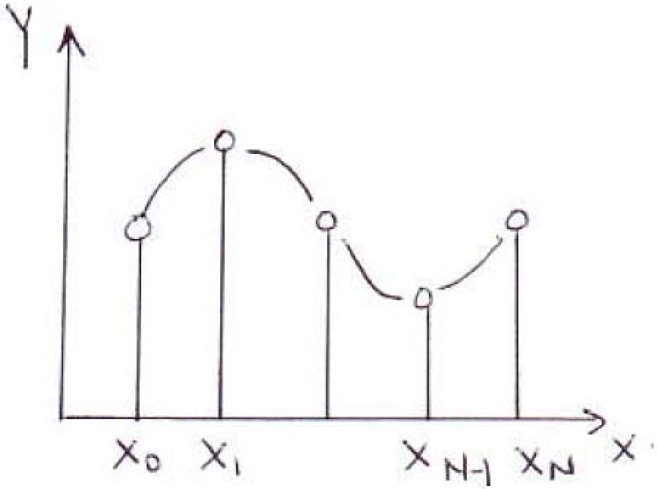
ΠΑΡΕΜΒΟΛΗ ΜΕΣΩ SPLINES

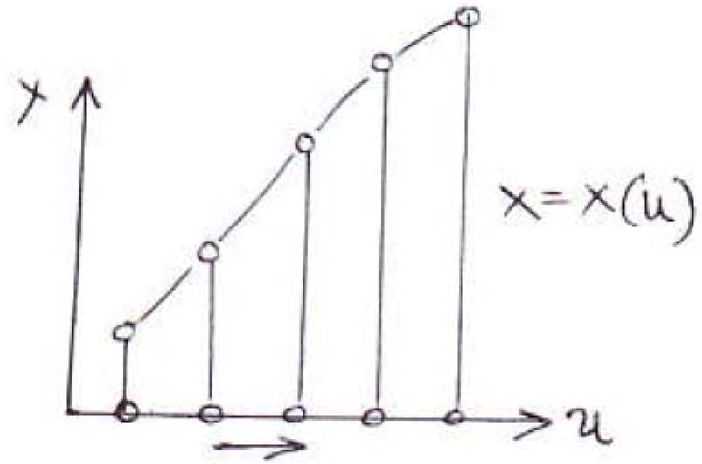
Οι σημειώσεις αυτές ΔΕΝ επιτρέπονται στις εξετάσεις!

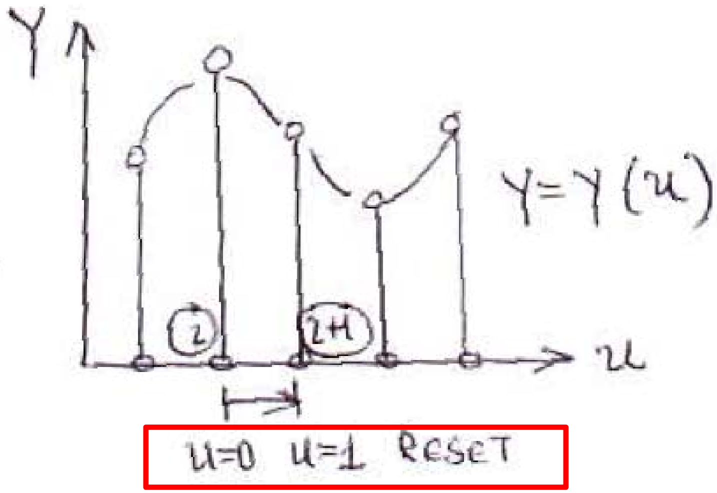
Κυριάκος Χ. Γιαννάκογλου
Καθηγητής ΕΜΠ
kgianna@central.ntua.gr
http://velos0.ltt.mech.ntua.gr/research/

Παραμετρική Περιγραφή Καμπύλης

N+1 σημεία/κόμβοι (x_i,y_i)







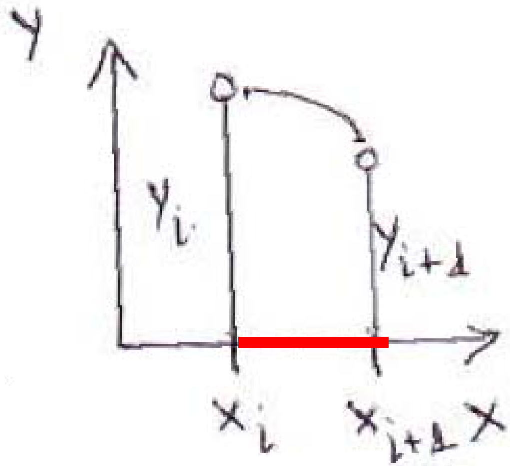
Ένας πιθανός τρόπος…

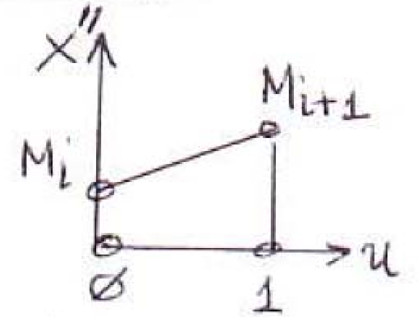
<u>ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΗ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ:</u>

Αντί της y=y(x), η καμπύλη περιγράφεται ως x=x(u) και y=y(u), όπου u παράμετρος.

Κυβικές Splines (Cubic Splines)

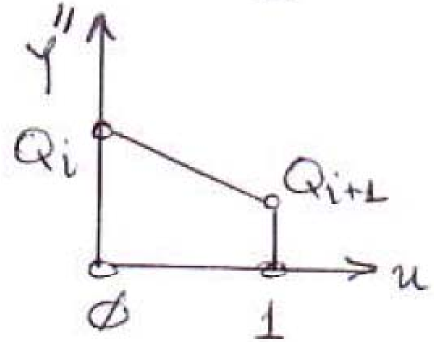
Η ιδέα: τα d^2x/du^2, d^2y/du^2 να είναι γραμμικά σε κάθε διάστημα. Γιατί:::





αν $x = g_x(u)$

$$g_x'' = M_i + (M_{i+1} - M_i)u$$



αν $y = g_y(u)$

$$g_y'' = Q_i + (Q_{i+1} - Q_i)u$$

Ολοκλήρωση για να προκύψουν τα $g_x(u)$, $g_y(u)$:

$$g_x'(u) = M_i u + \frac{1}{2}(M_{i+1} - M_i)u^2 + C_1$$

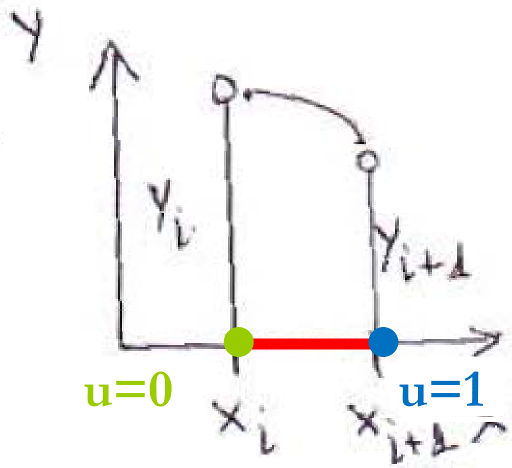
$$g_x(u) = \frac{1}{2}M_i u^2 + \frac{1}{6}(M_{i+1} - M_i)u^3 + C_1 u + C_2$$

(όμοια για τα $g_y(u)$ …)

Υπολογισμός σταθερών ολοκλήρωσης:

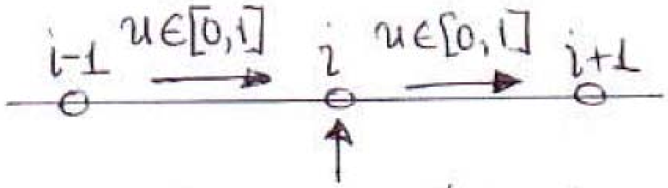
$u=0 \Rightarrow g_x(\emptyset)=x_i$ και $u=1 \Rightarrow g_x(1)=x_{i+1}$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} g_x(u) &= x_i + \left[(x_{i+1}-x_i) - \frac{M_{i+1}}{6} - \frac{M_i}{3}\right]u + \frac{M_i}{2}u^2 + \frac{M_{i+1}-M_i}{6}u^3 \\ g_y(u) &= y_i + \left[(y_{i+1}-y_i) - \frac{Q_{i+1}}{6} - \frac{Q_i}{3}\right]u + \frac{Q_i}{2}u^2 + \frac{Q_{i+1}-Q_i}{6}u^3 \end{aligned}}$$



Κυβικές Splines (Cubic Splines)

Εύρεση των (N+1) συντελεστών M_i (όμοια των Q_i), απαιτώντας συνέχεια πρώτης παραγώγου (<u>ποιάς;;;</u>) στους κόμβους:



$$g'_x(u=1) = g'_x(u=0)$$

$$\underbrace{g'_y(u=1)}_{\text{αριστερό πολυώνυμο}} = \underbrace{g'_y(u=0)}_{\text{δεξιό πολυώνυμο}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} M_{i-1} + 4M_i + M_{i+1} &= 6\,(x_{i-1} - 2x_i + x_{i+1}) \\ Q_{i-1} + 4Q_i + Q_{i+1} &= 6\,(y_{i+1} - 2y_i + y_{i+1}) \end{aligned}}$$

Πόσες συνθήκες γράψαμε για τους συντελεστές M_i (ή, όμοια, τους Q_i);

Πόσους αγνώστους M_i (ή Q_i) πρέπει να υπολογίσω;

Τι μένει;

Κυβικές Splines (Cubic Splines)

Ελευθερία να κλείσει το σύστημα με 2 «αυθαίρετες» συνθήκες:

1) Φυσικές splines $\quad M_0 = \emptyset \, , \quad M_N = \emptyset$

2) κλίση $\left. g'_x \right|_{(x_0, y_0)}$ και $\left. g'_x \right|_{(x_N, y_N)} = d_0 , d_N$ "γνωστά"

(προσοχή ποιά κλίση!!)

$$\Rightarrow \begin{cases} 2M_0 + M_1 = 6\,(x_1 - x_0 - d_0) \\ -M_{N-1} + 2M_N = 6\,(-x_N + x_{N-1} + d_N) \end{cases}$$

3) υπόθεση: $\quad M_0 = M_1 \quad$ και $\quad M_N = M_{N-1}$

Κυβικές Splines (Cubic Splines)

Τελικό σύστημα (N+1)x(N+1) για τον υπολογισμό των M_i (όμοια για Q_i):

$$
\begin{bmatrix}
\gamma_{0,0} & \gamma_{0,1} & & & & \\
1 & 4 & 1 & & & \\
 & 1 & 4 & 1 & & \\
 & & & \ddots & & \\
 & & & 1 & 4 & 1 \\
 & & & & \gamma_{N,N-1} & \gamma_{N,N}
\end{bmatrix}
\cdot
\begin{bmatrix}
M_0 \\ M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_{N-1} \\ M_N
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
h_0 \\ x_0-2x_1+x_2 \\ x_1-2x_2+x_3 \\ \vdots \\ x_{N-2}-2x_{N-1}+x_N \\ h_N
\end{bmatrix}
\cdot 6
$$

(1) Ορίσετε τα στοιχεία [γ, h], σύμφωνα με την προηγούμενη επιλογή σας.

(2) Πότε το δεξί μέλος γίνεται το μηδενικό διάνυσμα στήλης;

(3) Υπολογισμός ή χρήση του dy/dx;

ΑΣΚΗΣΗ - Κυβικές Splines (Cubic Splines)

Παρεμβάλετε με κυβικές splines τα εξής 4 σημεία:

x_i	$\emptyset$	$\pi/3$	$2\pi/3$	π
y_i	$\emptyset$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/2$	$\emptyset$
	$(i=0)$			$(i=N-3)$

Χρησιμοποιήστε φυσικές κυβικές splines.

<u>Σκεφθείτε:</u>

(1) Πώς θα σχεδιάζατε την καμπύλη παρεμβολής (δηλ. την προκύπτουσα καμπύλη κυβικών splines) δημιουργώντας 100 σημεία επ’ αυτής;

(2) Πως θα κάνατε το ίδιο δημιουργώντας 100 σημεία που ισαπέχουν κατά x;

(3) Να συγκρίνετε γραφικά το αποτέλεσμά σας με ένα ημικύκλιο που θα μπορούσε να ήταν η συνάρτηση που έδωσε τα παραπάνω 4 σημεία.

Κυβικές b-Splines (Cubic b-Splines)

ΙΣΩΣ Ο ΠΙΟ ΣΥΝΗΘΙΣΜΕΝΟΣ ΤΡΟΠΟΣ ΠΑΡΕΜΒΟΛΗΣ ΓΙΑ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΕΣ-ΒΙΟΜΗΧΑΝΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ.

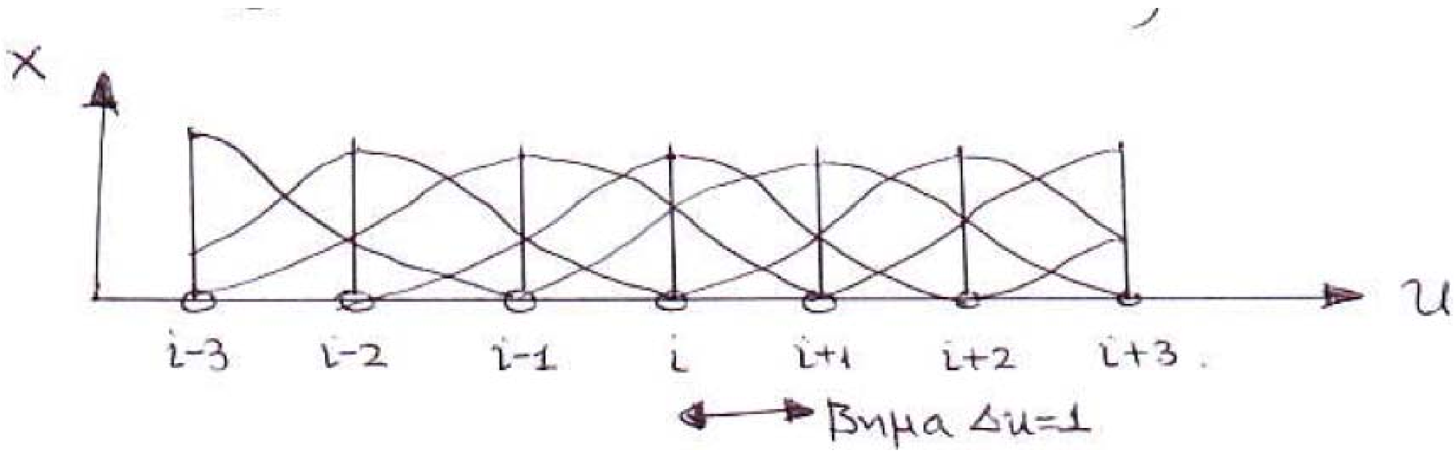
Κυβικές b-Splines (Cubic b-Splines)

<u>Το πρόβλημα: N+1 σημεία/κόμβοι (x_i,y_i) να παρεμβληθούν με κυβικές b-splines</u>

<u>ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΗ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ (και πάλι!!!):</u>

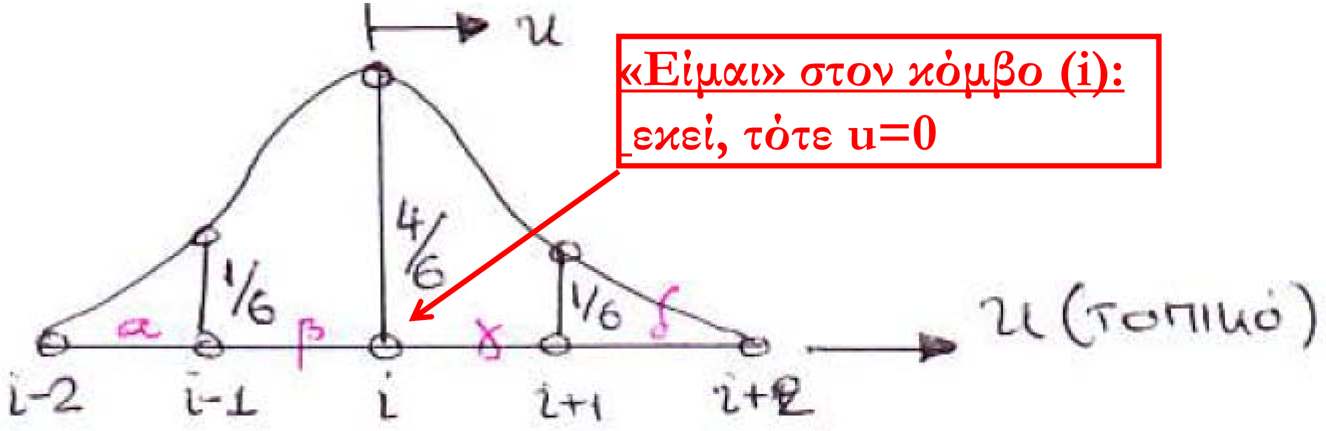
Αντί της y=y(x), η καμπύλη περιγράφεται ως x=x(u) και y=y(u), όπου u παράμετρος.

<u>Η (νέα) ιδέα</u>: δουλεύουμε με τετράδες διαστημάτων=πεντάδες διαδοχικών κόμβων:



(όμοια για τα g_y(u) …)

<u>Ορισμοί:</u> Το δομικό στοιχείο και η τοπική αρίθμηση της παραμέτρου u (κάθε φορά με αφετηρία (u=0) στον υπόψη κόμβο)



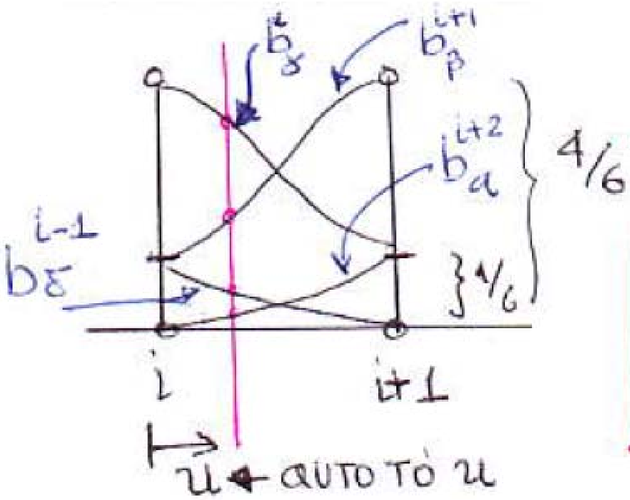
«Είμαι» στον κόμβο (i): εκεί, τότε u=0

$$
B^i(u) = \begin{cases}
b^i_\alpha(u) = \frac{1}{6}(2+u)^3, & -2 \le u \le -1 \\
b^i_\beta(u) = \frac{1}{6}(4-6u^2-3u^3), & -1 \le u \le 0 \\
b^i_\gamma(u) = \frac{1}{6}(4-6u^2+3u^3), & 0 \le u \le 1 \\
b^i_\delta(u) = \frac{1}{6}(2-u)^3, & 1 \le u \le 2
\end{cases}
$$

(αλλού μηδέν)

(ΠΡΑΚΤΙΚΑ $u \in [-2,2]$)

Βασική Ιδιότητα:



$$\sum_{4} (\text{Τομών}) = 1$$

$$\boxed{b_\delta^{i-1}(u+1) + b_\gamma^{i}(u) + b_\beta^{i+1}(u-1) + b_\alpha^{i+2}(u-2) = 1}$$

Σε κάθε σημείο του παραμετρικού χώρου u, 4 καμπύλες θα συνεισφέρουν **ΜΗ-ΜΗΔΕΝΙΚΕΣ** τιμές, με μοναδιαίο άθροισμα.

(εξαίρεση: τομή σε ακέραιο u)

Κυβικές b-Splines (Cubic b-Splines)

<u>Μετατροπή σε ενιαία αρίθμηση v (αντί της τοπικής u):</u> υιοθετώντας αντιστοίχιση κάθε δοσμένου σημείου (από τα N+1) με μια ακέραια τιμή του u (πρώτος κόμβος v=0, τελευταίος v=N)

$i = \; 0 \quad 1 \quad 2 \quad \dots \quad N-2 \quad N-1 \quad N$

$\vartheta = \; 0 \quad 1 \quad 2 \quad \dots \quad N-2 \quad N-1 \quad N$

αρα τωρα $\boxed{\vartheta_{\text{ενιαιο}} = i}$ (στους κομβους)

οι τυποι ισχυουν για $\underline{u}_{\text{τοπικο}} \leftarrow \vartheta_{\text{ενιαιο}} - i$

$$\boxed{b_\delta^{i-1}(\vartheta-i+1) + b_\gamma^{i}(\vartheta-i) + b_\beta^{i+1}(\vartheta-i-1) + b_\alpha^{i+2}(\vartheta-i-2) = 1}$$

οπου $b_\alpha^{i}(\overset{\text{ενιαιο}}{\vartheta}) = \frac{1}{6}\left[2+(\overset{\text{ενιαιο}}{\vartheta}-i)\right]^3$, κ.ο.κ.

Κυβικές b-Splines (Cubic b-Splines)

(ή, ακόμη καλύτερα!!) Μετατροπή σε ΝΕΑ ενιαία αρίθμηση v : **υιοθετώντας αντιστοίχιση κάθε δοσμένου σημείου (από τα N+1) με μια ακέραια τιμή του u (πρώτος κόμβος v=0, τελευταίος v=1)**

ΠΡΙΝ:

$$b_\delta^{i-1}(v-i+1)+b_\gamma^{i}(v-i)+b_\beta^{i+1}(v-i-1)+b_\alpha^{i+2}(v-i-2)=1$$

$$v\in[0,N]$$

ΤΩΡΑ:

$$b_\delta^{i-1}(vN-i+1)+b_\gamma^{i}(vN-i)+b_\beta^{i+1}(vN-i-1)+b_\alpha^{i+2}(vN-i-2)=1$$

$$v\in[0,1]$$

Συνήθως υιοθετείται αυτό!!

Κυβικές b-Splines (Cubic b-Splines)

ΠΡΟΣΟΧΗ !!!!! (η ιδιαιτερότητα των b-splines):

Για να παρεμβάλουμε τα (N+1) σημεία που μας δόθηκαν

$$\vec{r}_i = (x_i, y_i), \quad i \in [0, N]$$

υιοθετώ/αναγκάζομαι να υπολογίσω (N+3) σημεία (*σημεία ελέγχου, control points*)

$$\vec{R}_i = (X_i, Y_i), \quad i \in [-1, N+1]$$

ώστε το διάνυσμα θέσης της καμπύλης παρεμβολής, τελικά, να δίνεται από μια σχέση της μορφής:

(X_i, Y_i)

$(x(v), y(v))$

$$\vec{r}(v) = \sum_{i=-1}^{N+1} B^i(v)\, \vec{R}_i$$

$$0 \le v \le 1$$

Υπολογισμός των (N+3) το πλήθος X_i και των (N+3) το πλήθος Y_i:

(N+1) προφανείς συνθήκες παρεμβολής για τα (N+1) δοσμένα σημεία:

$$(0 \le i \le N)$$

$$\underset{\uparrow \atop \vartheta}{\vec{r}\left(\frac{i}{N}\right)} = \underbrace{B^{i-1}\left(\frac{i}{N}\right)}_{1/6}\vec{R}_{i-1} + \underbrace{B^{i}\left(\frac{i}{N}\right)}_{4/6}\vec{R}_{i} + \underbrace{B^{i+1}\left(\frac{i}{N}\right)}_{1/6}\vec{R}_{i+1} = \vec{r}_i$$

$$\Rightarrow \left.\begin{cases} x_i = \frac{1}{6}\left(X_{i-1} + 4X_i + X_{i+1}\right) \\ \underbrace{y_i}_{\text{γνωστά}} = \frac{1}{6}\underbrace{\left(Y_{i-1} + 4Y_i + Y_{i+1}\right)}_{\text{άγνωστα}} \end{cases}\right\} \begin{array}{l} N+1 \\ \text{ζεύγη} \\ \text{εξισώσεων} \\ 0 \le i \le N \end{array}$$

Λείπουν 2+2 συνθήκες!

Συν δύο οριακές συνθήκες:

Παράγωγος στο (x_0,y_0) [ομοίως για το (x_N,y_N)] ως προς v:

$$\boxed{\vec{r}\,'(v)=\sum_{i=-1}^{N+1} B^{i\,\prime}(v)\,\vec{R}_i}$$

όπου

$$B^{i\,\prime}(u)=\begin{cases}\frac{1}{2}(2+u)^2 & , -2\le u\le -1\\ (-4u-3u^2)\frac{1}{2} & , -1\le u\le 0\\ (-4u+3u^2)\frac{1}{2} & , 0\le u\le 1\\ \frac{-1}{2}(2-u)^2 & , 1\le u\le 2\end{cases}$$

προσοχή (u)

Προσέξτε στις ακέραιες τιμές του u:

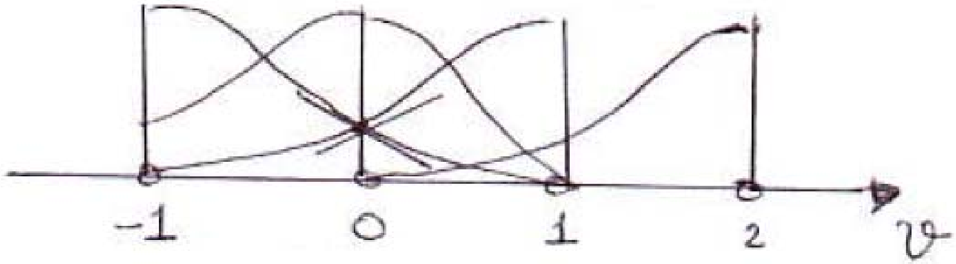
$$B^{i\,\prime}(u)=\begin{cases}\emptyset & \text{στο } u=-2\\ 1/2 & \text{στο } u=-1\\ \emptyset & \text{στο } u=\emptyset\\ -1/2 & \text{στο } u=1\\ \emptyset & \text{στο } u=2\end{cases}$$

Κάντε μόνοι σας την αντίστοιχη παραγώγιση ως προς v (αντί u)….

Κυβικές b-Splines (Cubic b-Splines)

<u>…συνέχεια:</u>

$$\vec{r}\,'(v=\emptyset) = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}\right)\Bigg|_{v=\emptyset} = \underbrace{B^{i-1\,\prime}(\emptyset)}_{-1/2}\,\vec{R}_{i-1} + \underbrace{B^{i+1\,\prime}(\emptyset)}_{1/2}\,\vec{R}_{i+1}$$



Προσέξτε ότι η παράγωγος στο v=0 επηρεάζεται από δύο καμπύλες μόνο!
Άρα, έστω ότι είτε δίνεται είτε αναγκαστικά υποτίθεται ότι:

$$\frac{dx}{dv}\bigg|_{v=0} = d_0^x \qquad \frac{dy}{dv}\bigg|_{v=0} = d_0^y$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} X_1 - X_{-1} &= 2d_0^x \\ Y_1 - Y_{-1} &= 2d_0^y \end{aligned}\right\}$$

Γράψτε το αντίστοιχο για v=1 ….

$$\left\{\begin{aligned} X_{N+1} - X_{N-1} &= 2d_N^x \\ Y_{N+1} - Y_{N-1} &= 2d_N^y \end{aligned}\right\}$$

Μάζεμα των εξισώσεων σε μητρωική γραφή::

$$
\begin{bmatrix}
-1 & 0 & 1 & & & & \\
1 & 4 & 1 & & & \emptyset & \\
 & 1 & 4 & 1 & & & \\
 & & 1 & 4 & 1 & & \\
 & \emptyset & & \ddots & \ddots & \ddots & \\
 & & & & 1 & 4 & 1 \\
 & & & & -1 & 0 & 1
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
X_{-1} \\ X_0 \\ X_1 \\ \vdots \\ X_N \\ X_{N+1}
\end{bmatrix}
= 6 \cdot
\begin{bmatrix}
d_0^x/3 \\ x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_N \\ d_N^x/3
\end{bmatrix}
\rightarrow X_i
$$

… και ένα αντίστοιχο σύστημα για τα $\mathbf{Y}_i$

ΑΣΚΗΣΗ - Κυβικές b-Splines (Cubic b-Splines)

Παρεμβάλετε με κυβικές b-splines τα εξής 5 σημεία:

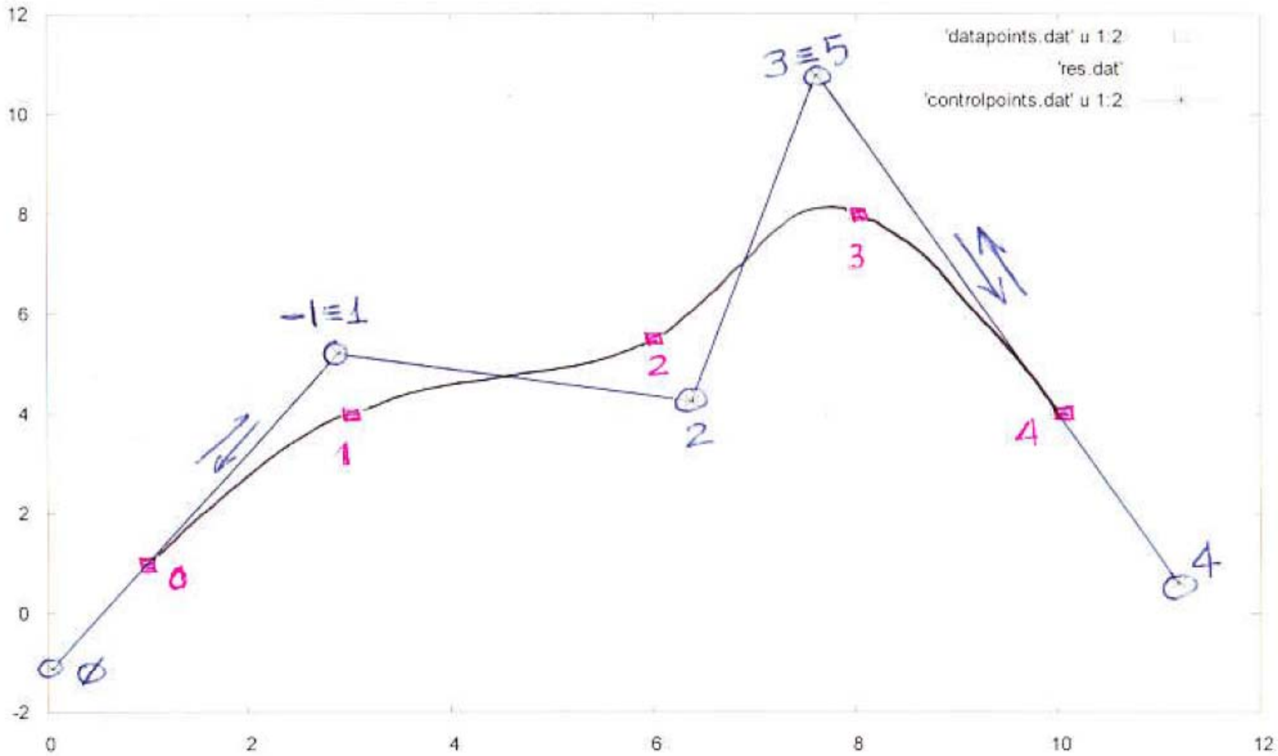
	(0)	(1)	(2)	(3)	(4)
x_i =	1.	3.	6.	8.	10.
y_i =	1.	4.	5.5	8.	4.

(N=4)

(β) Έστω ότι παρεμβάλλονται 500 σημεία (σε ισαπέχουσες τιμές της παραμέτρου v). Βρείτε τις συντεταγμένες του 300ου σημείου παρεμβολής.

… Η συνέχεια στον πίνακα….

ΑΣΚΗΣΗ - Κυβικές b-Splines (Cubic b-Splines)



Αρχικά δεδομένα σημεία (5)

Control points (7)