Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών ΕΜΠ
4ο Εξάμηνο
ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

Πρώτη Ενότητα Διδακτέας Ύλης
Αριθμητική Επίλυση Μη-Γραμμικής Εξίσωσης

Κ.Χ. Γιαννάκογλου, Καθηγητής ΕΜΠ
kgianna@mail.ntua.gr

Αριθμητική Επίλυση Μη-Γραμμικής Εξίσωσης

- **Αριθμητική επίλυση, αντί της αναλυτικής επίλυσης.**
- **Για μια γραμμική εξίσωση ΔΕΝ χρειαζόμαστε την Αριθμητική Ανάλυση.**
- **Αν τη μη-γραμμική εξίσωση μπορούμε να τη λύσουμε αναλυτικά, προφανώς το προτιμάμε! Αν μη τι άλλο, για λόγους ακρίβειας.**
- **Με την ολοκλήρωση της ύλης για την αριθμητική επίλυση μιας μη-γραμμικής εξίσωσης, θα ακολουθήσει η γενίκευση για συστήματα εξισώσεων.**

Αριθμητική Επίλυση Μη-Γραμμικών Εξισώσεων

Το πρόβλημα: **Δεδομένης της μη-γραμμικής συνάρτησης $F(x)$, να βρεθεί η τιμή $x=x_0$ ώστε $F(x_0)=0$ (ρίζα της εξίσωσης) ή $F(x_0)=y$ (y=γνωστό).**

$$\alpha+\beta\,\ell n x = y \qquad (x>0) \quad \rightarrow \quad x_0 = e^{(y_0-\alpha)/\beta}$$

$$F(x)=\cosh(\sqrt{x^2+1}-e^x)+\log|six(x)|=0$$

$$F(x)=12.2(e^{2x}-1)+x=0$$

Ειδική **περίπτωση/πολυωνυμική συνάρτηση (επιδέχεται ΚΑΙ ειδικές μεθόδους επίλυσης, πέραν όλων των άλλων):**

$$F(x)=\alpha_n x^n+\alpha_{n-1}x^{n-1}+\alpha_{n-2}x^{n-2}+\ldots+\alpha_0=0$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Εξίσωση van der Waals

$$\left(P+\frac{\alpha}{V^2}\right)\left(V-b\right)=RT$$

α, b	**:**	**σταθερές του αερίου**
P	**:**	**πίεση του αερίου (N/m^2)**
V	**:**	**ειδικός όγκος του αερίου (m^3/kg)**
T	**:**	**θερμοκρασία του αερίου (K)**
R	**:**	**η σταθερά του αερίου (J/kg/K)**

Είναι ΓΡΑΜΜΙΚΗ ή ΜΗ-ΓΡΑΜΜΙΚΗ;;;;;

... εξαρτάται :

Όταν επιλύεται ως προς το T:

$$T = \frac{1}{R}\left(P + \frac{\alpha}{V^2}\right)(V - b)$$

Όταν επιλύεται ως προς το P:

$$P = \frac{RT}{V - b} - \frac{\alpha}{V^2}$$

Όταν επιλύεται ως προς το V:

δεν γράφεται ως $V = f(P,T)$ **!!!!!**

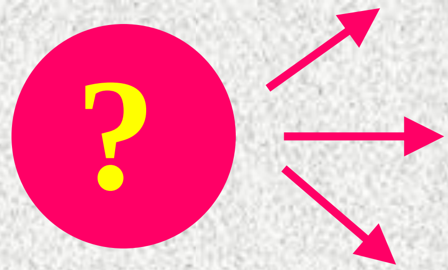
Σχόλια:

Αποτελεί ευθύνη μας η επιλογή της καλύτερης από τις διαθέσιμες μεθόδους (ή και από άλλες που δεν καλύπτονται από την ύλη του μαθήματος) για το συγκεκριμένο πρόβλημα.

Ενδιαφερόμαστε και για το υπολογιστικό κόστος που έχει η μέθοδος που θα επιλεγεί.

Ειδικά για το κεφάλαιο αυτό η παραλληλοποίηση λογισμικού είναι ήσσονος σημασίας.

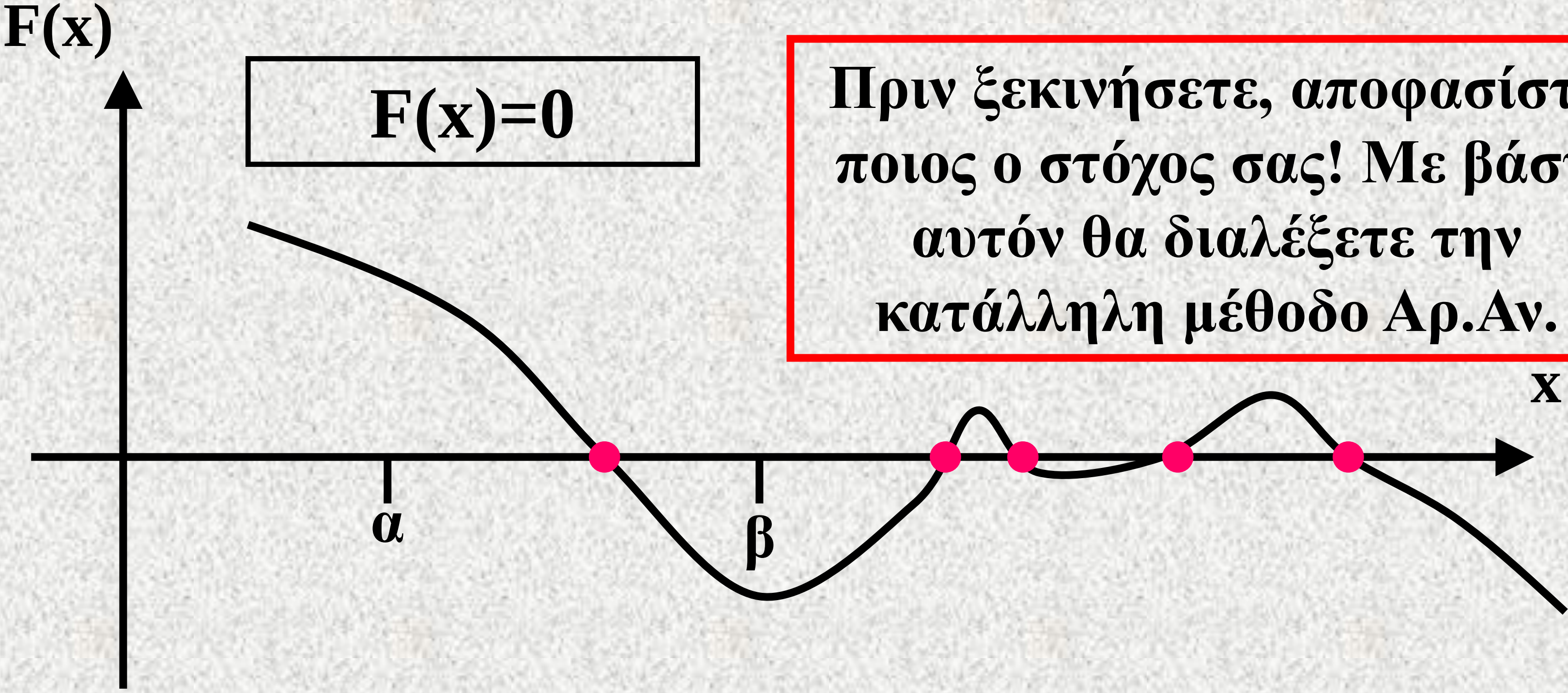
<u>Αριθμητική Επίλυση Μη-Γραμμικών Εξισώσεων</u>



Αναζήτηση <u>μιας</u> οποιασδήποτε ρίζας

Αναζήτηση μιας ρίζας σε <u>δεδομένο</u> (α,β)

Αναζήτηση <u>όλων</u> των ριζών



Πριν ξεκινήσετε, αποφασίστε ποιος ο στόχος σας! Με βάση αυτόν θα διαλέξετε την κατάλληλη μέθοδο Αρ.Αν.

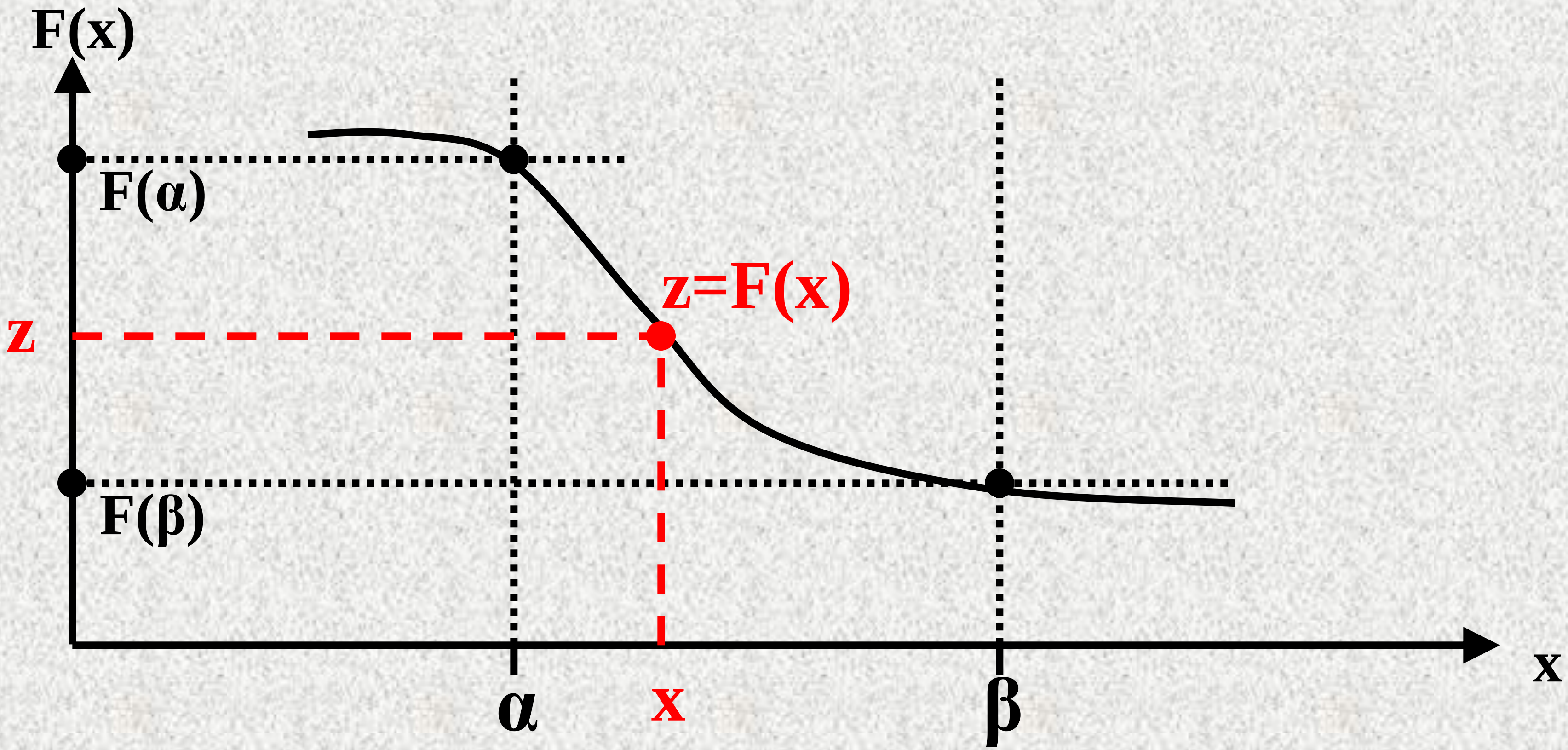
<u>Μέθοδοι Εντοπισμού του διαστήματος το οποίο περιέχει μια ρίζα της εξίσωσης:</u>

<u>Η Μέθοδος των Ισων Διαστημάτων</u>

Μερικές μέθοδοι για να ξεκινήσουν «να ψάχνουν τη ρίζα» πρέπει να τροφοδοτηθούν με το κάτω και το πάνω όριο του διαστήματος μέσα στο οποίο θα βρίσκεται η ρίζα. Τέτοιες μεθόδους θα δείτε στη συνέχεια!

<u>Το Θεώρημα της Μέσης Τιμής:</u>

“Αν F <u>συνεχής</u> συνάρτηση στο [α,β] και z ένας πραγματικός αριθμός που F(α)≤z≤F(β), υπάρχει ένα τουλάχιστον xЄ [α,β] για το οποίο z=F(x)”



Αριθμητικό Παράδειγμα:

$$F(x) = x^2 - 4.3x + 3.52 = 0$$

(Ρίζες: x=1.1 και x=3.2)

Αναζητείται ρίζα στο διάστημα [α,β]=[0,2], διακριτοποιημένο σε 10 ίσα διαστήματα.

x	F(x)
0.000000	3.520000
0.200000	2.700000
0.400000	1.960000
0.600000	1.300000
0.800000	0.720000
1.000000	0.220000
1.200000	-0.200000
1.400000	-0.540000
1.600000	-0.800000
1.800000	-0.980000
2.000000	-1.080000

Υπολογιστικό κόστος μετρούμενο με κλήσεις της συνάρτησης F(x).
<Function Calls>
1 κλήση=1 Μονάδα Χρόνου (ΜΧ)
1 call=1 Time Unit (TU)

Αλλά:

$$F(x) = x^2 - 2.25x + 1.265 = 0$$

(Ρίζες: x=1.1 και x=1.15)

Αναζητείται ρίζα στο διάστημα [α,β]=[0,2], διακριτοποιημένο σε 10 ίσα διαστήματα.

Υπολογισμοί, σε κώδικα, πάντα με ακρίβεια δεύτερης τάξης (double precision)

x	F(x)
0.000000	1.265000
0.200000	0.855000
0.400000	0.525000
0.600000	0.275000
0.800000	0.105000
1.000000	0.015000
1.200000	0.005000
1.400000	0.075000
1.600000	0.225000
1.800000	0.455000
2.000000	0.765000

?

Αν είναι τεχνικά εφικτό, βοηθά να ξεκινάμε από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης !!!

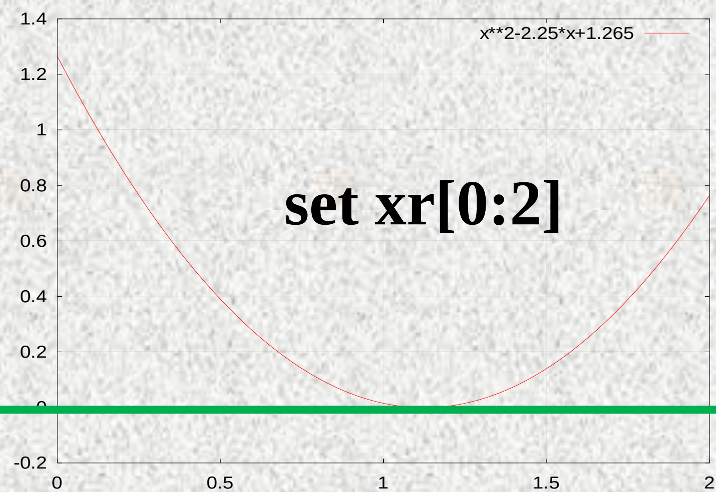
Συνιστάται η χρήση gnuplot:

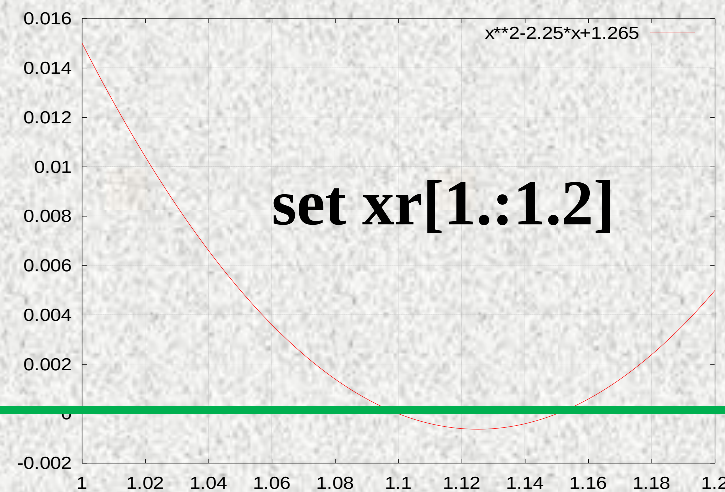
p x2-2.25*x+1.265**

set grid

rep

set xr[0:2]





Άλλες Μέθοδοι Εντοπισμού του διαστήματος το οποίο περιέχει μια ρίζα της εξίσωσης:

Ένα έξυπνο τέχνασμα, όταν και αν μπορεί να εφαρμοστεί: λύστε μια απλοποιημένη εκδοχή της ίδιας εξίσωσης

Λ.χ. αντί της

$$\left(P+\frac{\alpha}{V^2}\right)(V-b)=RT$$

Αρχίστε με την

$$PV = RT$$

... και εκτιμήστε προσεγγιστικά (συν/πλην) που «βρίσκονται» οι ρίζες ...

Ειδικά για πολυωνυμικές συναρτήσεις:

$$F(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \alpha_{n-2} x^{n-2} + \ldots + \alpha_0$$

όλες οι ρίζες (πραγματικές και μιγαδικές) βρίσκονται στην περιοχή ενός κυκλικού δακτυλίου με εξωτερική και εσωτερική ακτίνα:

$$R_o = 1 + \max\left(|a_{n-1}|, |a_{n-2}|, \ldots, |a_0|\right) / |a_n|$$

$$R_i = |a_n| / \left[|a_n| + \max\left(|a_n|, |a_{n-1}|, \ldots, |a_1|\right)\right]$$

Ένα απλό παράδειγμα:

$$F(x) = x^3 - 2.2x^2 - 0.8x + 2.4$$

(Ρίζες: x = 1.2 , x = 2.0 , x = -1)

(α_3 = 1 , α_2 = -2.2 , α_1 = -0.8 , α_0 = 2.4)

$$R_o = 1 + \max\left(|-2.2|, |-0.8|, |2.4| \right) / |1| = 3.4$$

$$R_i = |1| / \left[|1| + \max\left(|1|, |-2.2|, |-0.8|, |2.4| \right) \right] = 0.2941$$

Βασικές Μέθοδοι για την Αριθμητική Επίλυση Μη-Γραμμικών ή Υπερβατικών Εξισώσεων

- **Μέθοδος Διαδοχικών Διχοτομήσεων**
- **Μέθοδος των Διαδοχικών Αντικαταστάσεων**
- **Μέθοδος Newton-Raphson**
- **(Άλλες…)**

Μέθοδος Διαδοχικών Διχοτομήσεων

Bisection Method
or
Interval Halving Method

Η πιο απλή μέθοδος για την αριθμητική επίλυση της f(x)=0.

Απλή, όμως, δεν σημαίνει και γρήγορη!!!

Η έννοια των Επαναληπτικών Μεθόδων (Iterative Methods)

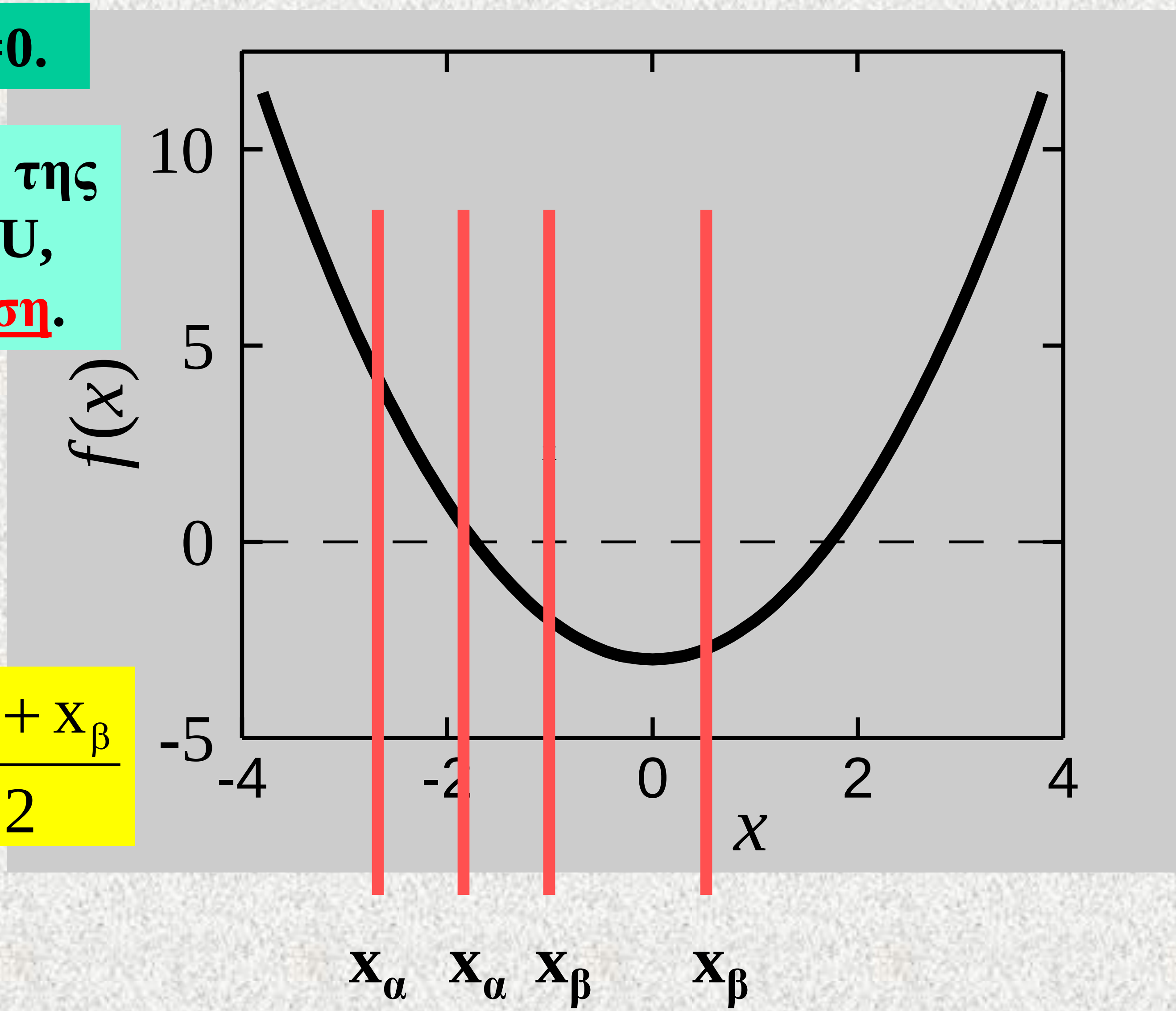
Κλειστή Μέθοδος!

<u>Μέθοδος Διαδοχικών Διχοτομήσεων</u>

Λύνω την f(x)=0.

Μετράμε κλήσεις της f(x), δηλ. XM/TU, μέχρι τη <u>σύγκλιση</u>.

$$x_m = \frac{x_\alpha + x_\beta}{2}$$



Κριτήρια Σύγκλισης (Τερματισμού):

* Μέγιστος Αριθμός Διχοτομήσεων

* Αν F(x)=0, όταν $|F(x)|<\varepsilon_1$, όπου ε_1 πολύ μικρός θετικός αριθμός.

* Όταν η απόλυτη ή σχετική απόκλιση δύο διαδοχικών λύσεων είναι μικρότερη από ένα όριο ε_2

$$\varepsilon_{\alpha\pi o\lambda\upsilon\tau o} = \left| x^{(n)} - x^{(n-1)} \right| < \varepsilon_2$$

$$\varepsilon_{\sigma\chi\varepsilon\tau\iota\kappa o} = \frac{\left| x^{(n)} - x^{(n-1)} \right|}{|\, x^{(n)} \,|} < \varepsilon_2^*$$

Εκτίμηση πλήθους επαναλήψεων για δεδομένο [α,β] και επιθυμητό σφάλμα (ε_2)

Τερματισμός όταν $x^{(n)} - x^{(n-1)} < \varepsilon_2$

Διαρκείς Διχοτομήσεις $\frac{\beta - \alpha}{\varepsilon_2} = 2^n$

Εκτίμηση πλήθους επαναλήψεων $n = \ell n \left[\frac{\left(x_\beta - x_\alpha\right)}{\varepsilon_2} \right] \Big/ \ell n\, 2$

<u>Ασκηση:</u> **Αν $[\alpha_0,\beta_0]$, $[\alpha_1,\beta_1]$, $[\alpha_2,\beta_2]$, ... τα διαδοχικά διαστήματα αναζήτησης λύσης στη μέθοδο της διχοτόμησης, δείξτε ότι:**

$$a_n b_n + a_{n-1} b_{n-1} = a_{n-1} b_n + a_n b_{n-1}$$

a_{n-1} **b_{n-1}**

a_n **b_n**

=κ **=λ** **=μ**

$$\kappa\lambda + \kappa\mu = \kappa\lambda + \kappa\mu$$

a_{n-1} **b_{n-1}**

a_n **b_n**

=κ **=λ** **=μ**

$$\lambda\mu + \kappa\mu = \kappa\mu + \lambda\mu$$

Σύγκλιση της Μεθόδου Διχοτόμησης

Επειδή το σφάλμα περίπου μειώνεται στο μισό σε κάθε επανάληψη (λόγω διχοτόμησης), άρα η σύγκλιση του αλγορίθμου είναι (σχεδόν) ΓΡΑΜΜΙΚΗ

Καλό ή κακό??????

Έχετε Υπόψη:

Η εφαρμογή κάποιας μεθόδου είναι (παν)εύκολη και γίνεται με την υλοποίηση διαθέσιμων σχέσεων (ή λογισμικού).

- **Διαθέτουμε ότι χρειάζεται για να ξεκινήσει;**
- **Θα συγκλίνει πάντα;**
- **Θα βρει τη λύση που επιθυμούμε;**
- **Θα τη βρει με αποδεκτό ή (γιατί όχι;) το ελάχιστο υπολογιστικό κόστος. Ρυθμός σύγκλισης!**

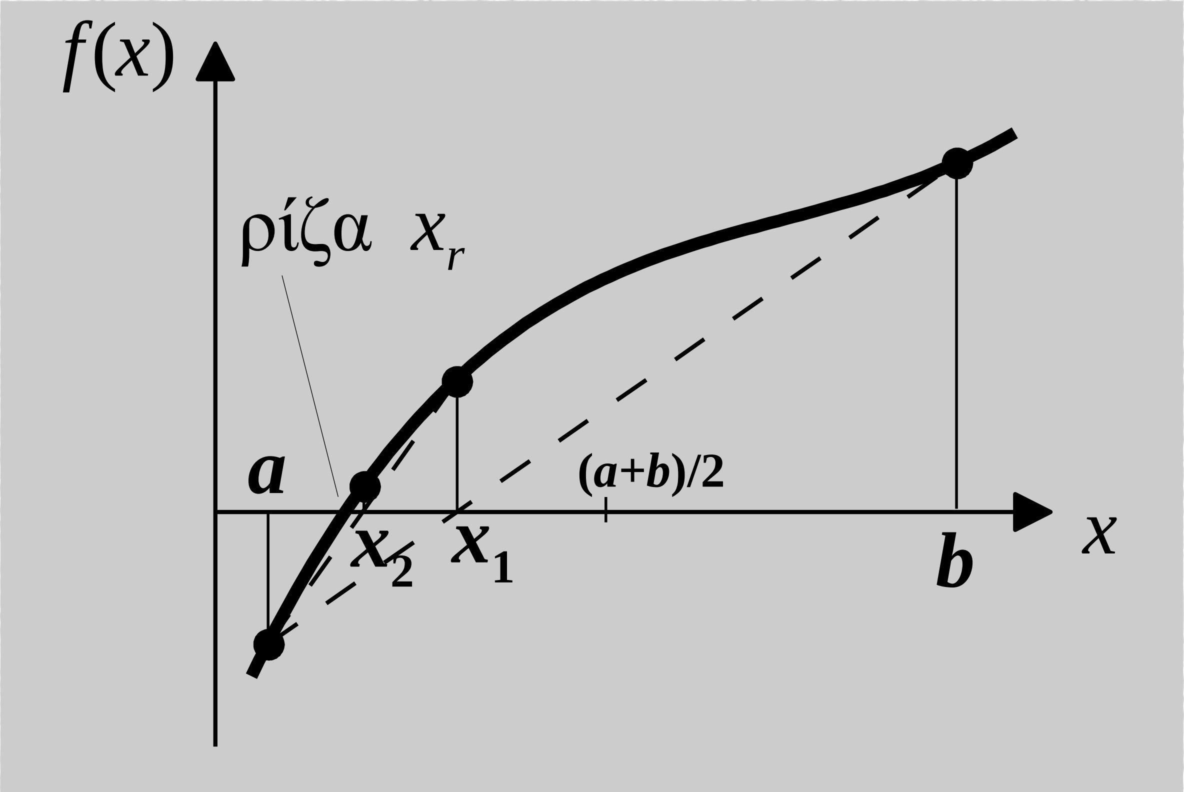
Άρα, έχει μεγάλη σημασία η επιλογή της μεθόδου που είναι ευθύνη του μηχανικού.

Μέθοδος Εσφαλμένης Θέσης
ή
Μέθοδος Γραμμικής Παρεμβολής

Method of False Position
or
Regula Falsi Method

Μια «λογική» επέκταση της μεθόδου των Διαδοχικών Διχοτομήσεων. Κλειστή Μέθοδος.

Μέθοδος Εσφαλμένης Θέσης - Regula Falsi



Λύνω την f(x)=0.

$$\cancel{x_1 = \frac{a+b}{2}}$$

$$\frac{x_1 - a}{b-a} = \frac{\cancelto{0}{f(x_1)} - f(a)}{f(b)-f(a)} \Rightarrow \quad x_1 = a - \frac{f(a)\cdot(b-a)}{f(b)-f(a)}$$

Σύγκλιση της Regula Falsi

- **απαιτεί «περισσότερες» πράξεις από άλλες μεθόδους που θα γνωρίσουμε**
- **συγκλίνει ταχύτερα από αυτήν της διχοτόμησης όταν η συνάρτηση είναι σχεδόν γραμμική στην περιοχή της ρίζας**
- **Μπορεί, όμως, να γίνει και πιο αργή**

Υπολογιστικό κόστος: Μια κλήση της f(x) ανά επανάληψη (πλην της πρώτης).

(όπως και η μέθοδος της διχοτόμησης)

Ανοικτές Επαναληπτικές Μέθοδοι Προσέγγισης Ριζών

+ Δεν χρειάζονται [α,β] για να ξεκινήσουν

+ Πιο γρήγορες από ότι οι διαδοχικές διχοτομήσεις

+ Μπορούν να βρουν πολλαπλές λύσεις

- Δεν έχουν εξασφαλισμένη σύγκλιση

Μέθοδος Διαδοχικών Αντικαταστάσεων
ή
Μέθοδος Σταθερού Σημείου

Method of Successive Substitutions
or
Fixed Point Iteration Method

Ανοικτή μέθοδος

Μέθοδος Διαδοχικών Αντικαταστάσεων
(Μέθοδος Σταθερού Σημείου)

Λύνω την f(x)=0.

$$f(x)=0 \Rightarrow x=g(x) \Rightarrow x^{(n)}=g\left(x^{(n-1)}\right)$$

Η έννοια των επαναλήψεων-iterations (n=μετρητής επαναλήψεων, $x^{(1)}$ η αρχική τιμή):

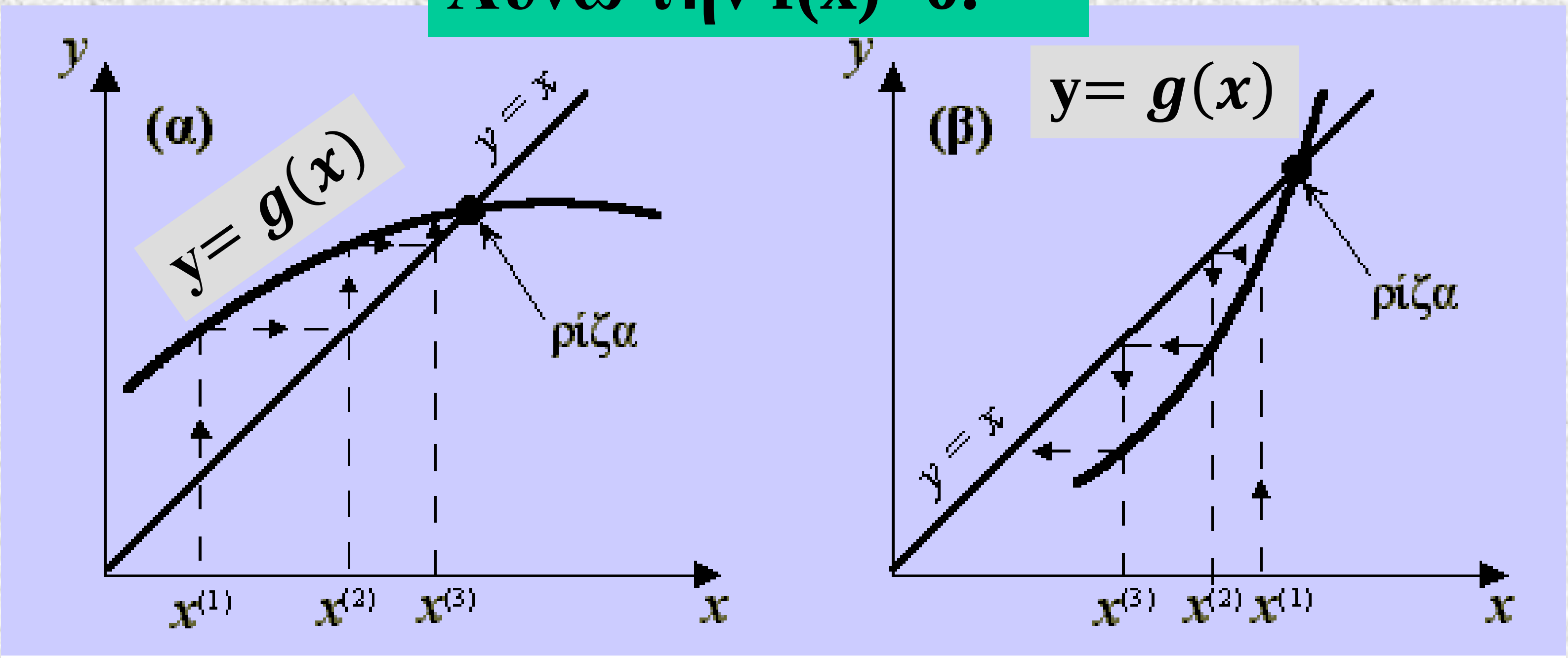
$$\boldsymbol{x}^{(1)} \rightarrow \boldsymbol{x}^{(2)} \rightarrow \boldsymbol{x}^{(3)} \rightarrow \boldsymbol{x}^{(4)} \rightarrow \ldots.$$

$$\boldsymbol{x}^{(n)}=\boldsymbol{g}\left(\boldsymbol{x}^{(n-1)}\right)$$

$$\boldsymbol{x}^{(new)}=\boldsymbol{g}\left(\boldsymbol{x}^{(old)}\right)$$

Μέθοδος Διαδοχικών Αντικαταστάσεων

Λύνω την f(x)=0.



$$x^{(1)} = \text{given}$$

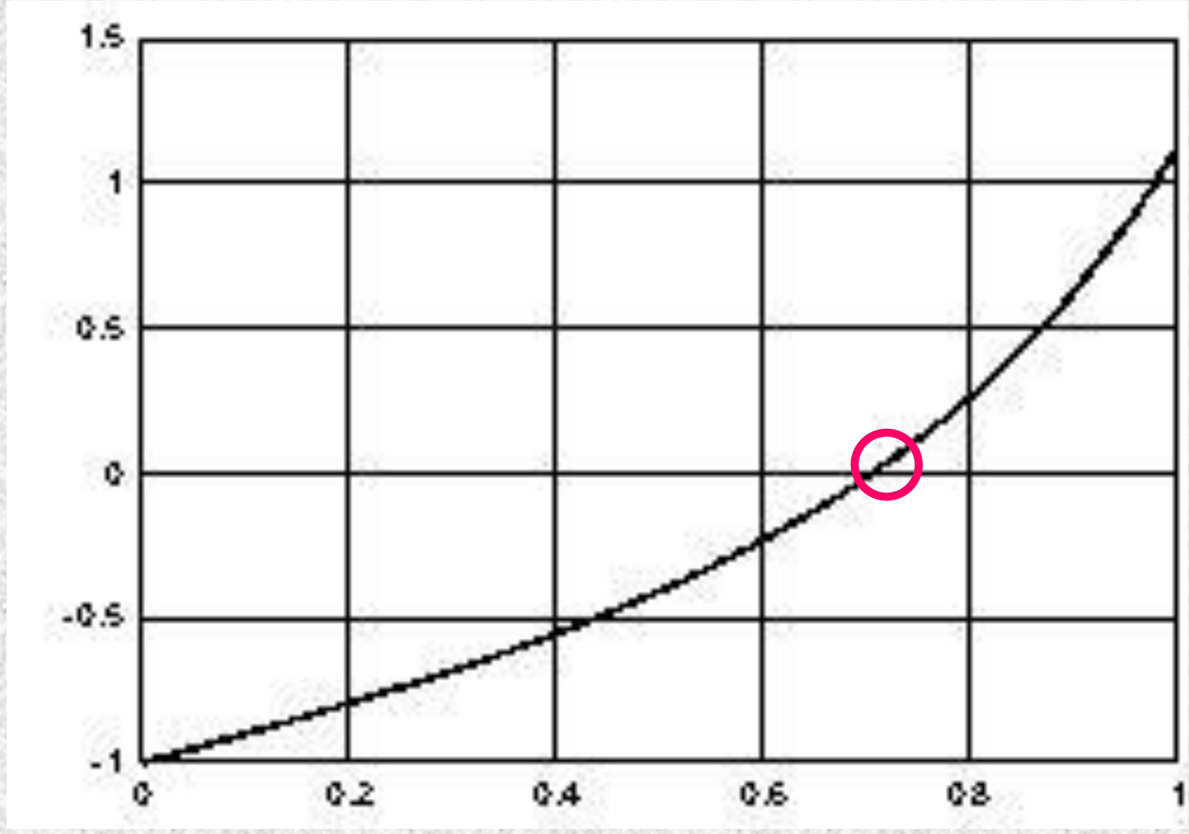
$$x^{(2)} = g(x^{(1)})$$

$$x^{(3)} = g(x^{(2)})$$

Παράδειγμα 1:

$$2\tan x - x - 1 = 0$$

Αναζήτηση λύσης στο [0,1]



Παράδειγμα 1:

$$2\tan x - x - 1 = 0$$

$$x^{(n)} = g\left(x^{(n-1)}\right)$$

$$x^{(n)} = 2\tan x^{(n-1)} - 1$$

$$x^{(n)} = a\tan\left(\frac{x^{(n-1)} + 1}{2}\right)$$

$$g(x) = 2\tan x - 1$$

$$g(x) = a\tan\left(\frac{x+1}{2}\right)$$

Ποιο από τα δύο πρέπει να χρησιμοποιήσω;;;;

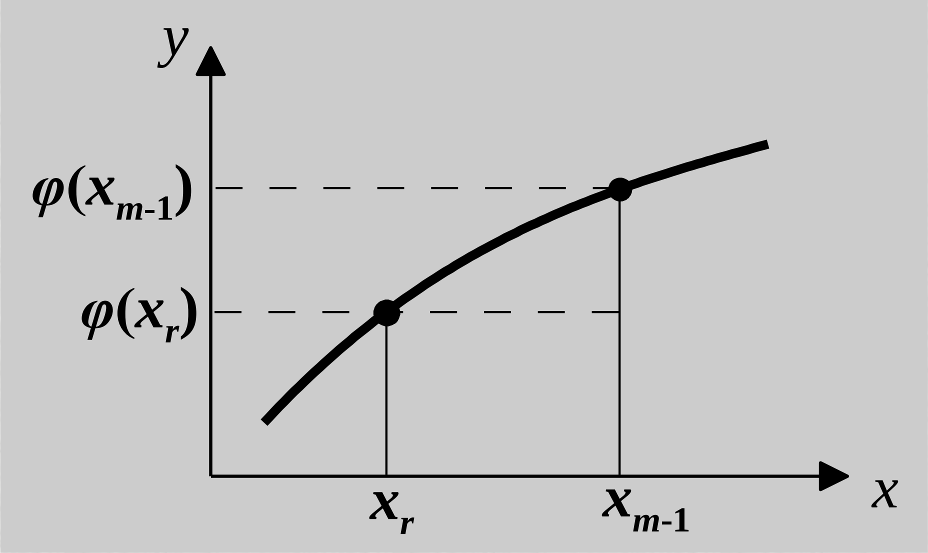
Σύγκλιση της Μεθόδου:

$$x^{(n)} = g\left(x^{(n-1)}\right)$$

x_r=λύση

$$\left| x^{(n)} - x_r \right| < \left| x^{(n-1)} - x_r \right|$$

$$\left| x^{(n)} - x_r \right| = \left| g(x^{(n-1)}) - g(x_r) \right| = \underbrace{\left| \frac{dg}{dx}(x_r) \right| . \left| x^{(n-1)} - x_r \right|}_{\text{αν κοντά στη λύση}}$$



$$\left| g'\left(x_r\right) \right| < 1$$

ΑΝΑΓΚΑΙΑ, ΟΧΙ ΙΚΑΝΗ,
εξαρτάται από το σημείο εκκίνησης

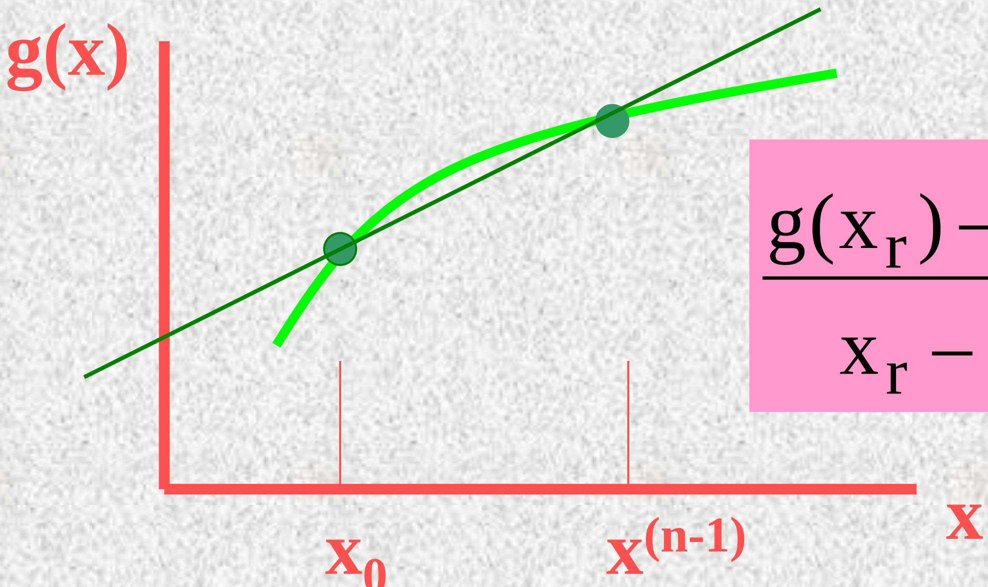
Επεξηγήσεις:

$$x^{(n)} = g(x^{(n-1)})$$

$$x_r = g(x_r)$$

x_r=τελική λύση=σταθερό σημείο

$$x_r - x^{(n)} = g(x_r) - g(x^{(n-1)}) \cong \left[x_r - x^{(n-1)}\right] g'\left(x^{(n-1)}\right)$$

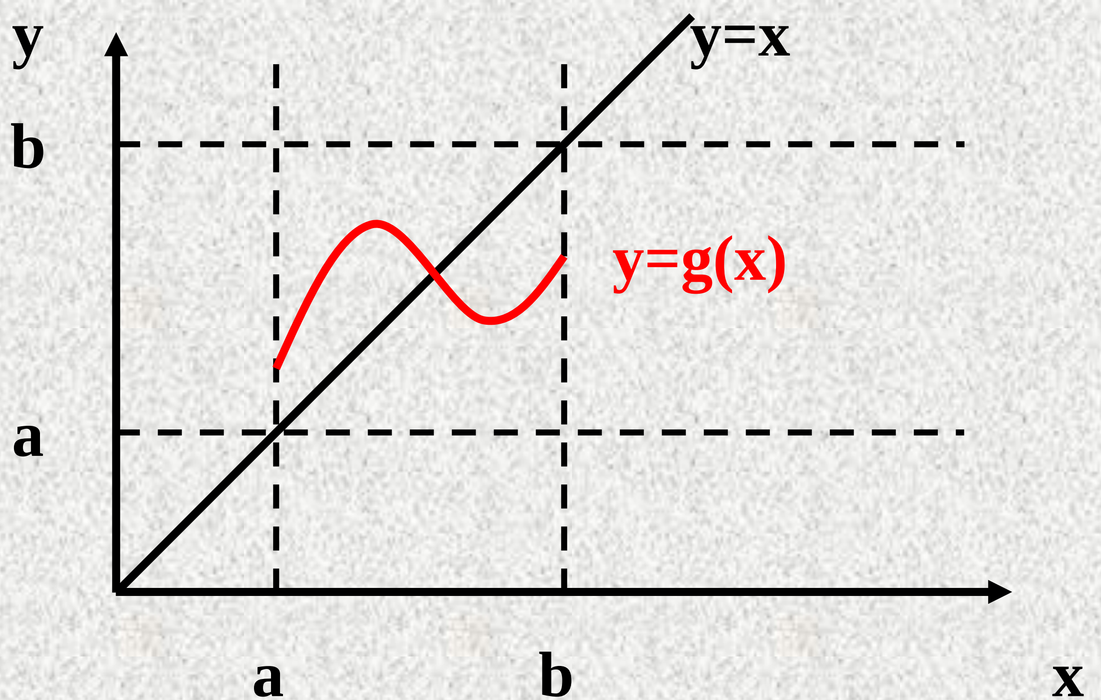


$$\frac{g(x_r) - g(x^{(n-1)})}{x_r - x^{(n-1)}} = g'(x^{(n-1)})$$

Εξήγηση της Ονομασίας:

Ορισμός: Ένα σημείο x^* του πεδίου ορισμού μιας συνάρτησης $g(x)$ λέγεται **σταθερό σημείο** της αν ισχύει $g(x^*)=x^*$

Πρόταση: Κάθε συνεχής συνάρτηση $g:[a,b] \rightarrow [a,b]$ έχει στο διάστημα $[a,b]$ (τουλάχιστον) ένα **σταθερό σημείο**



Η συνθήκη της πρότασης είναι ικανή, αλλά όχι και αναγκαία

x= $g(x)$

λ.χ. Η συνεχής συνάρτηση

g:[-1:1] →[0,2] , $g(x):=2x^2$

Σταθερά Σημεία τα 0 και ½

χωρίς να ισχύει η συνθήκη !

$|g'(x)| < 1$

Παράδειγμα 1:

$$2\tan x - x - 1 = 0$$

$$x^{(n)} = 2\tan x^{(n-1)} - 1$$

$$x^{(n)} = a\tan\left(\frac{x^{(n-1)} + 1}{2}\right)$$

$$g(x) = 2\tan x - 1$$

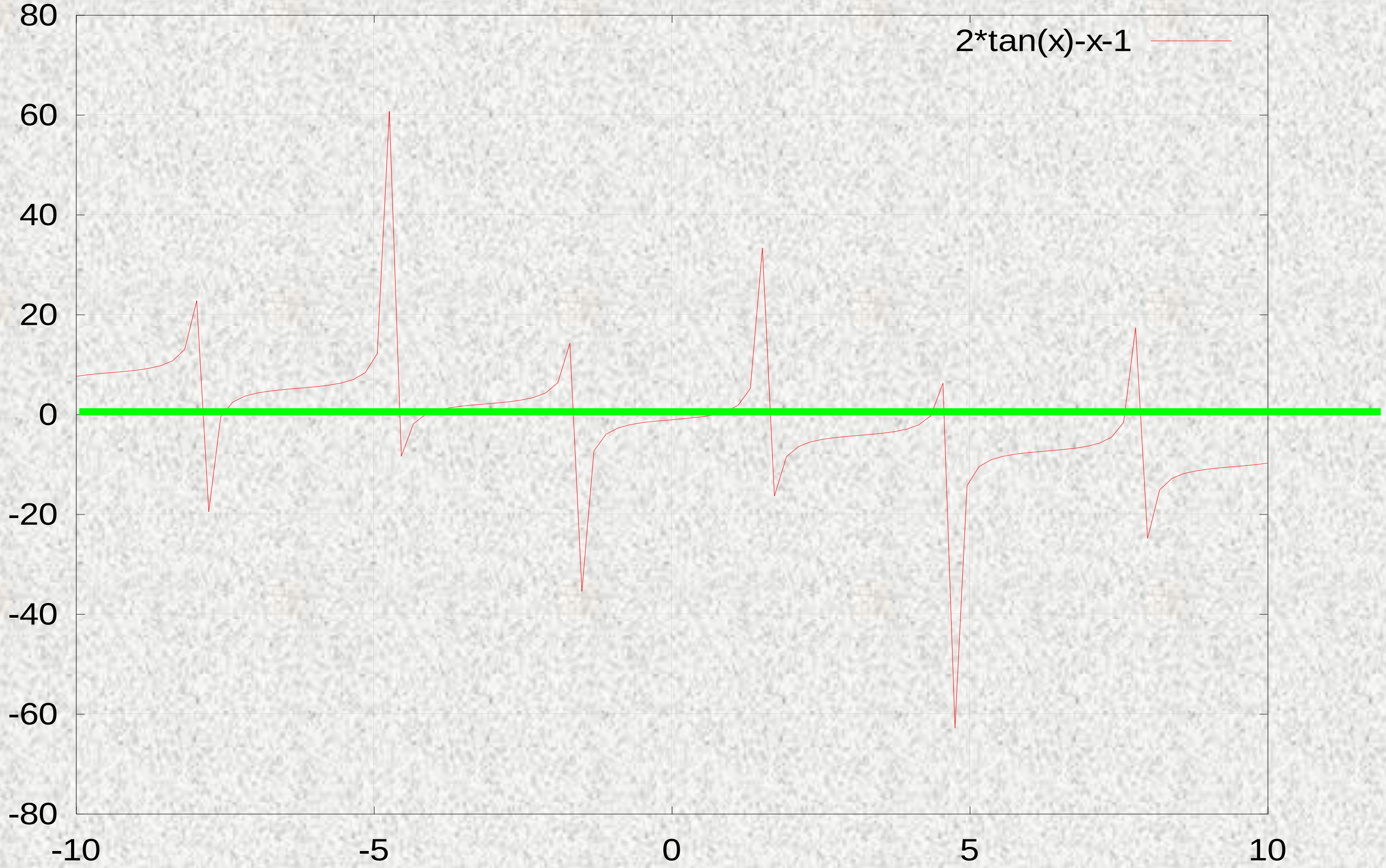
$$g(x) = a\tan\left(\frac{x+1}{2}\right)$$

$$g'(x) = 2/\cos^2 x$$

$$g'(x) = \left[1 + \frac{(x+1)^2}{4}\right]^{-1}$$

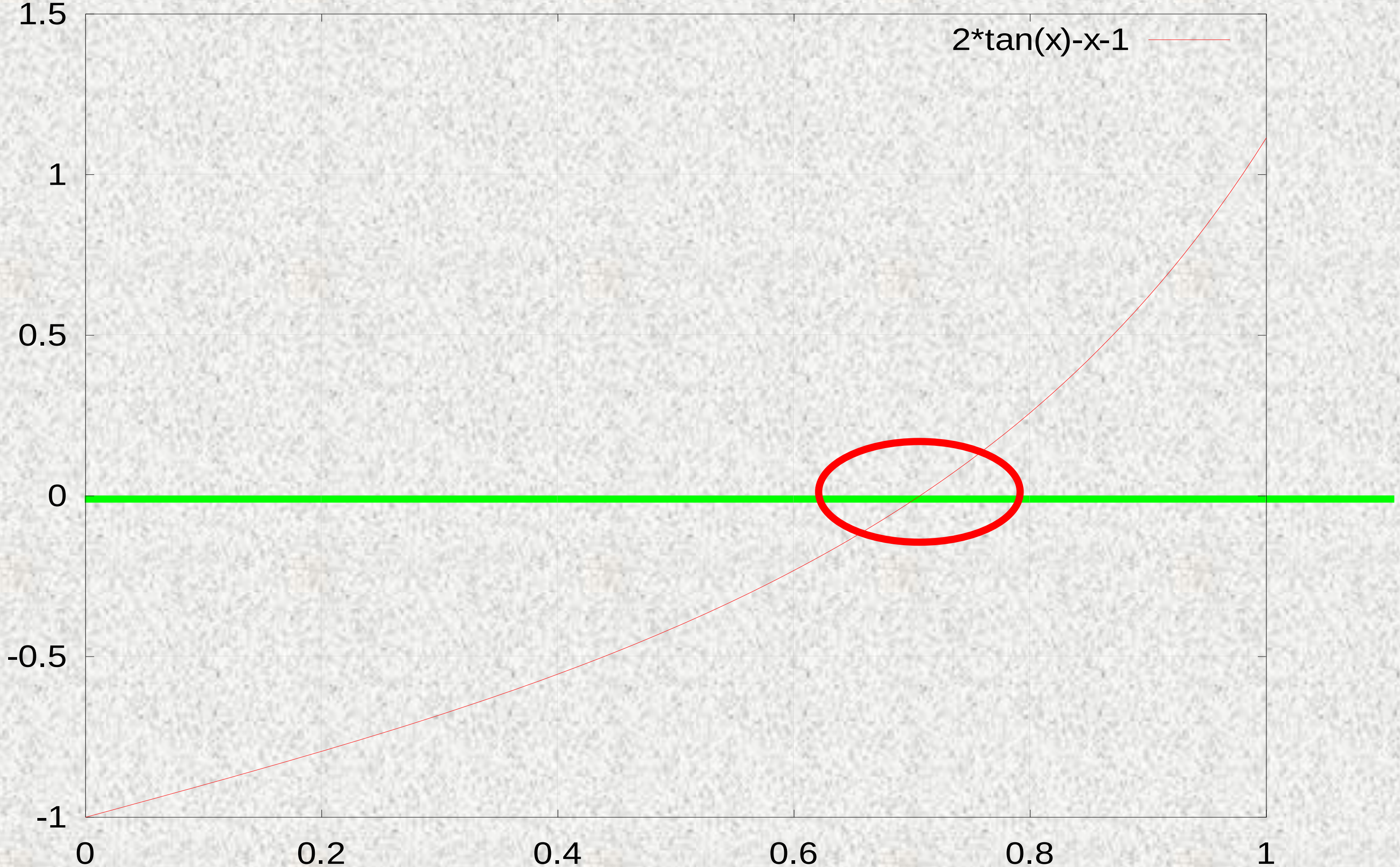
$$2\tan x - x - 1 = 0$$

στο [-10,10]



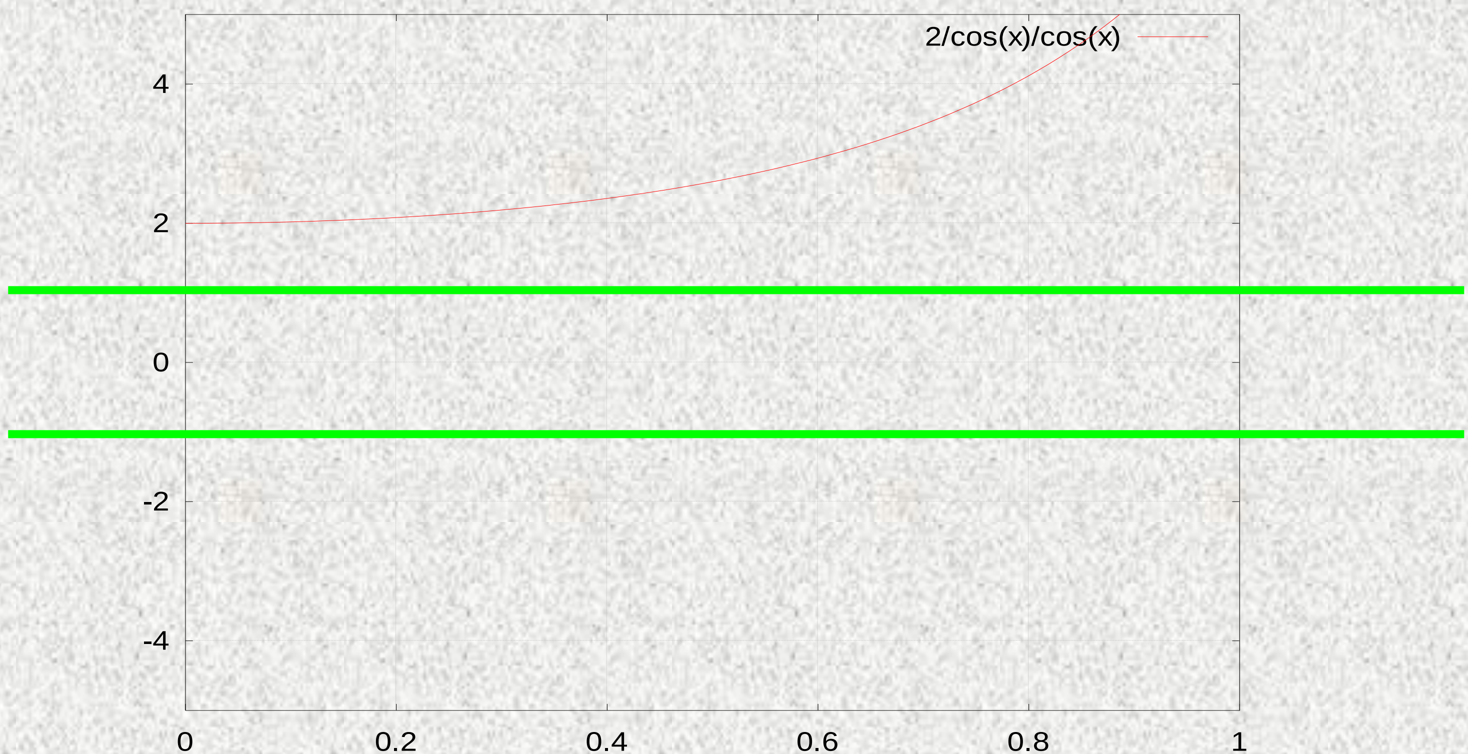
$$2\tan x - x - 1 = 0$$

στο [0,1]

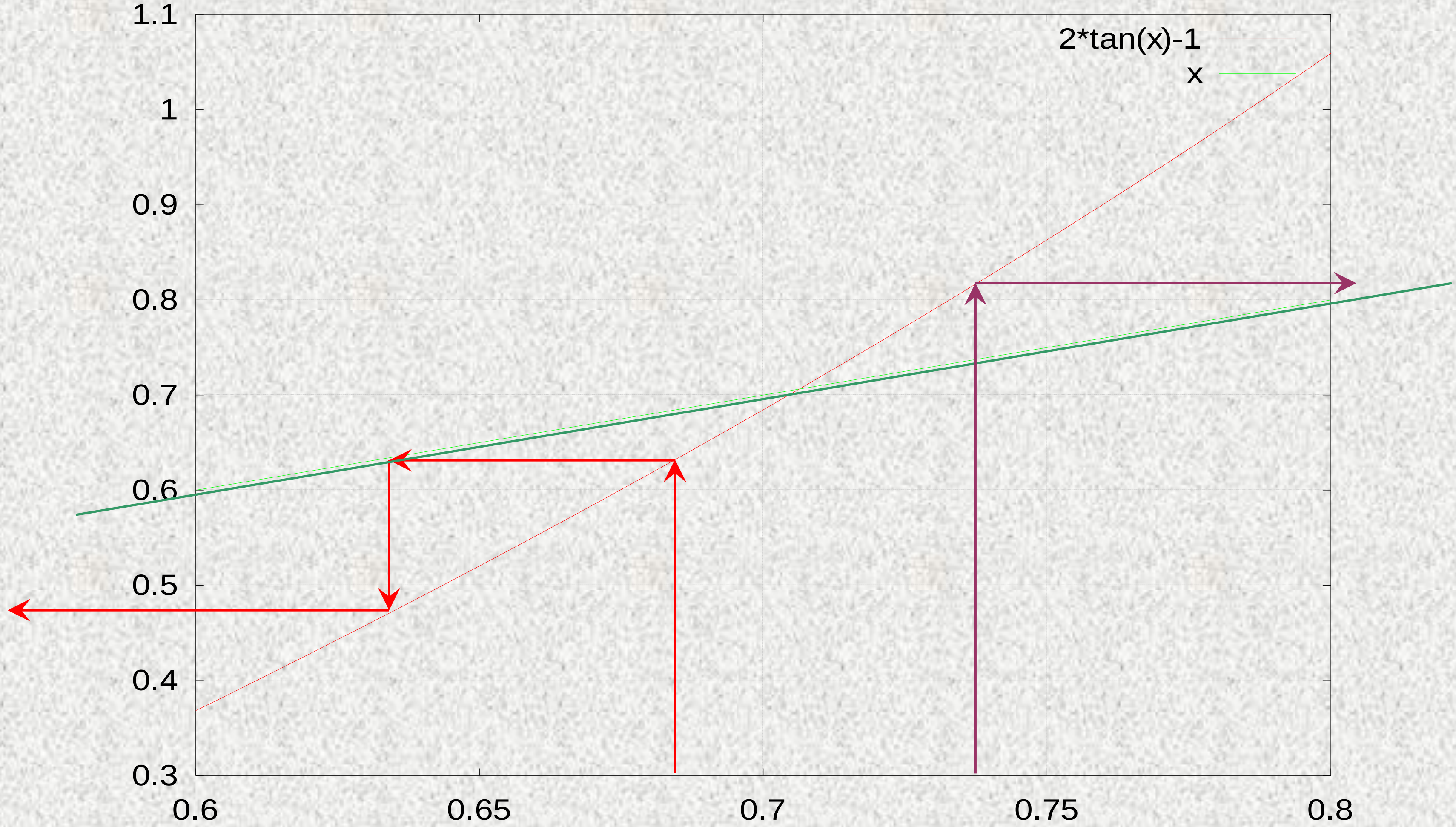


$$\boxed{x^{(n)} = 2\tan x^{(n-1)} - 1}$$

$$g'(x) = 2/\cos^2 x$$

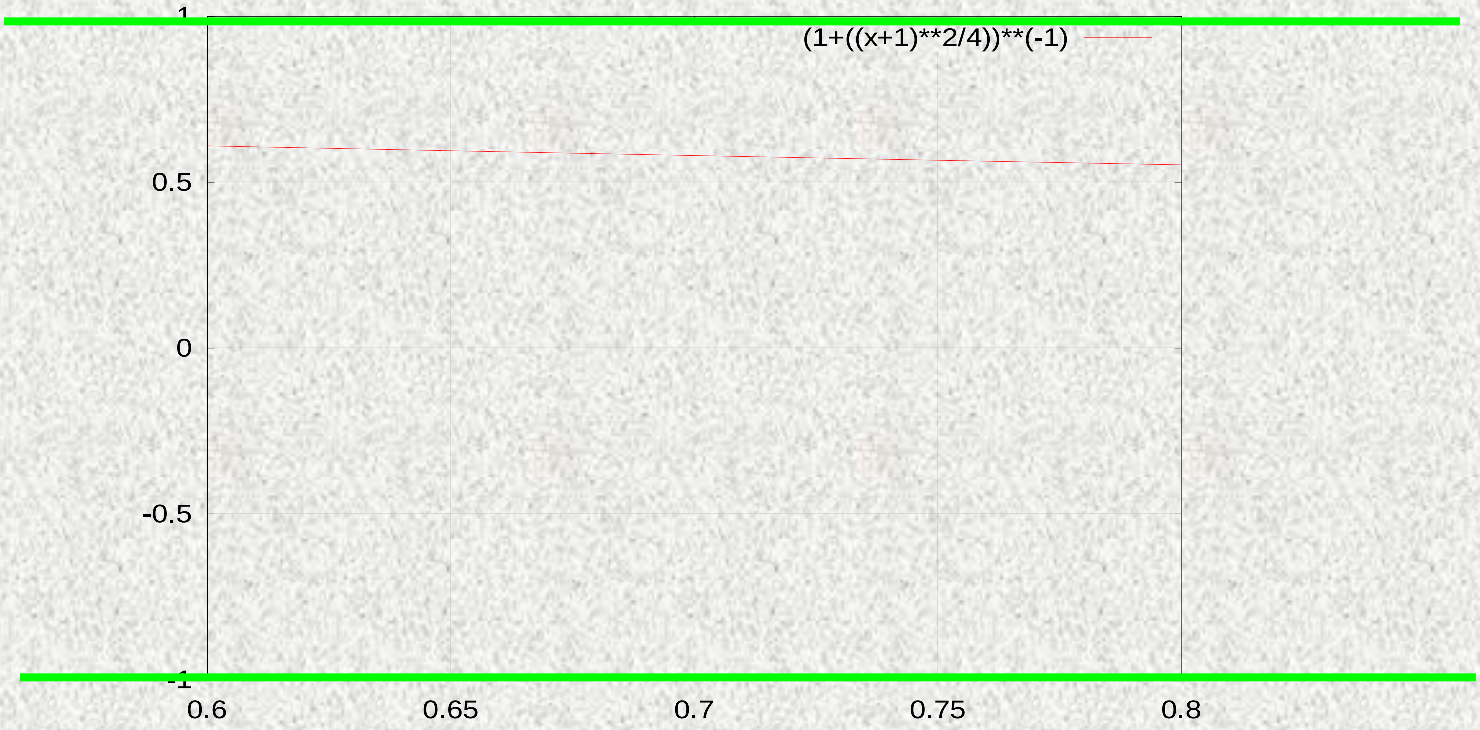


$$x^{(n)} = 2\tan x^{(n-1)} - 1$$

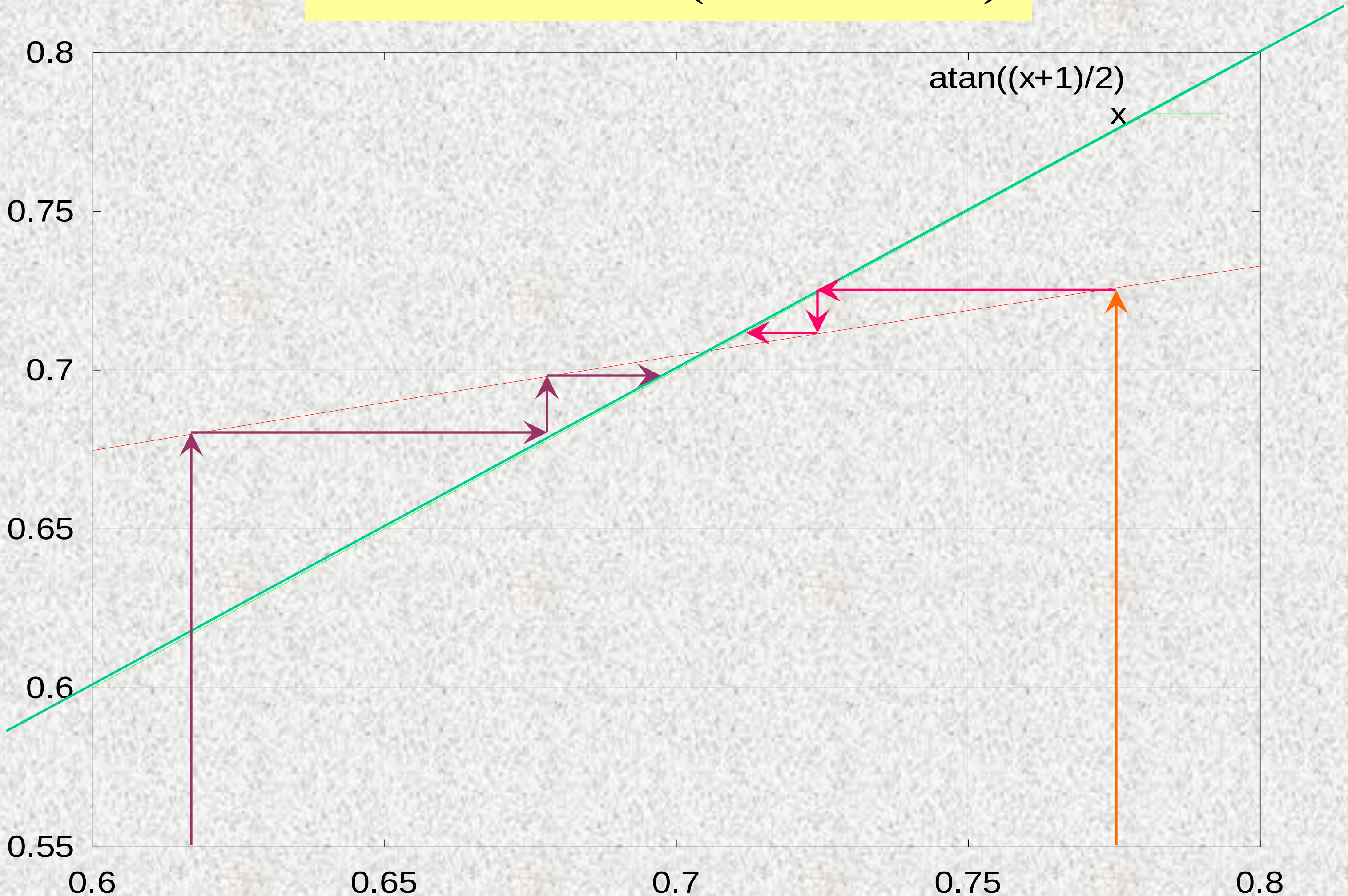


$$x^{(n)} = \mathrm{a}\tan\left(\frac{x^{(n-1)}+1}{2}\right)$$

$$g'(x) = \left[1+\frac{(x+1)^2}{4}\right]^{-1}$$



$$x^{(n)} = \operatorname{atan}\left(\frac{x^{(n-1)}+1}{2}\right)$$



Ένα Απλό Παράδειγμα:

$$x^2 = A$$

$$x^{(n)} = A / x^{(n-1)}$$

$$x^{(n)} = \frac{1}{2}\left[\frac{A}{x^{(n-1)}} + x^{(n-1)}\right]$$

$$g(x) = \frac{A}{x}$$

$$g(x) = \frac{1}{2}\left[\frac{A}{x} + x\right]$$

$$g'(x) = -\frac{A}{x^2}$$

$$g'(x) = -\frac{A}{2x^2} + \frac{1}{2}$$

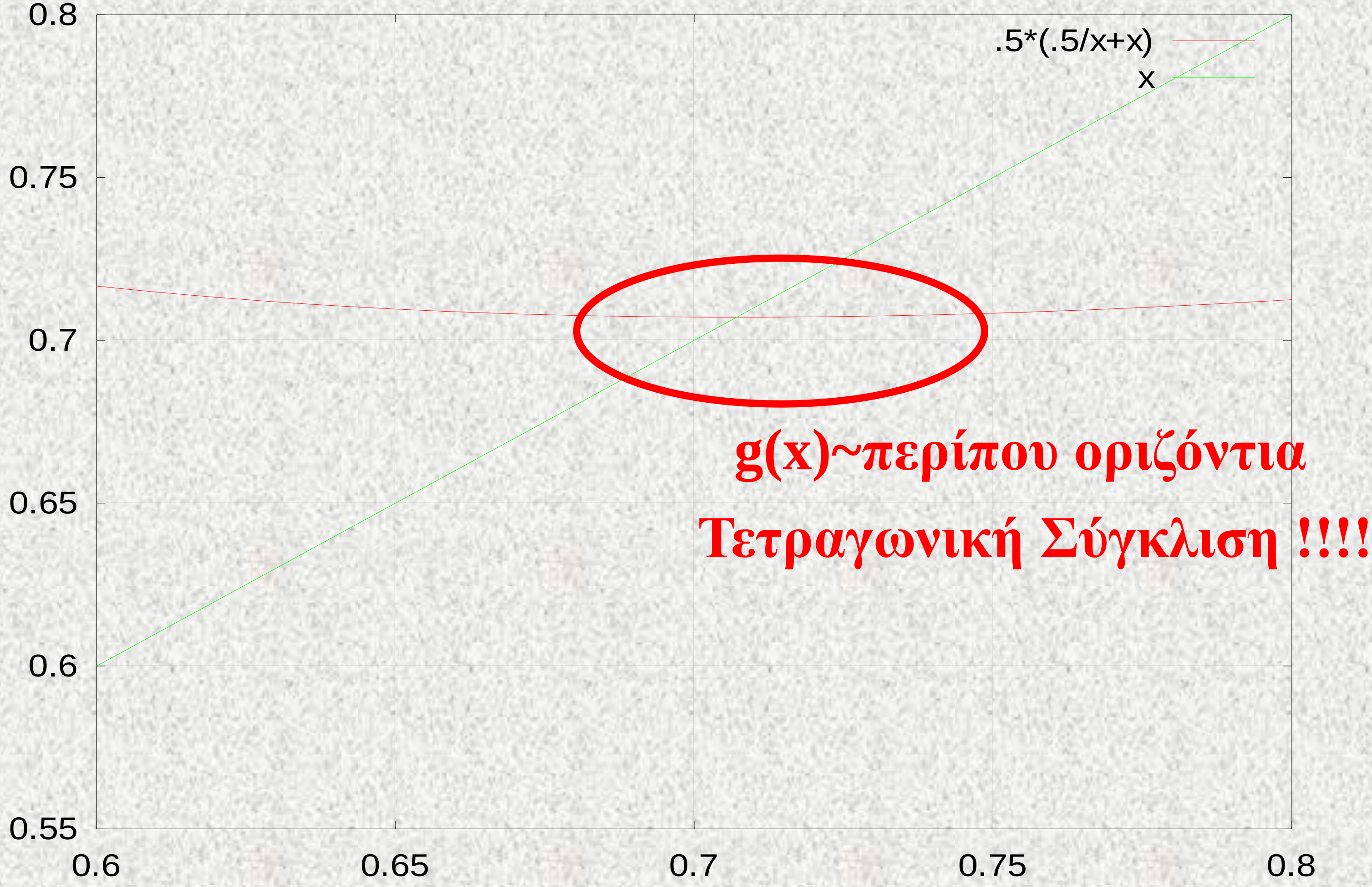
Στη λύση:

$$g'(\sqrt{A}) = -\frac{A}{\sqrt{A}^2} = -1$$

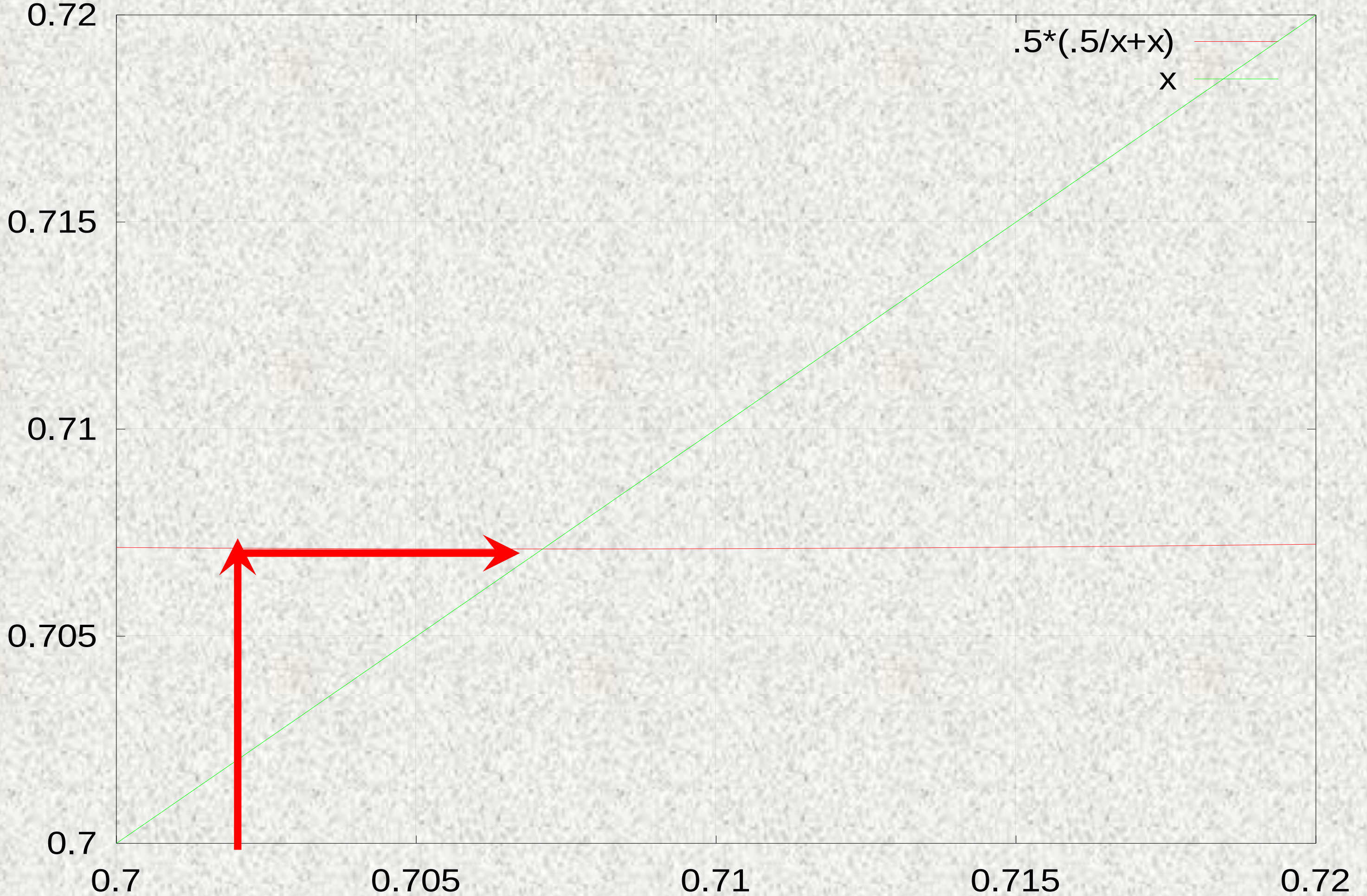
$$g'\left(\sqrt{A}\right) = -\frac{A}{2\sqrt{A}^2} + \frac{1}{2} = 0$$

$$x^{(n)} = \frac{1}{2}\left[\frac{A}{x} + x\right]$$

Για (A=1/2)



στο [0.70,0.72]

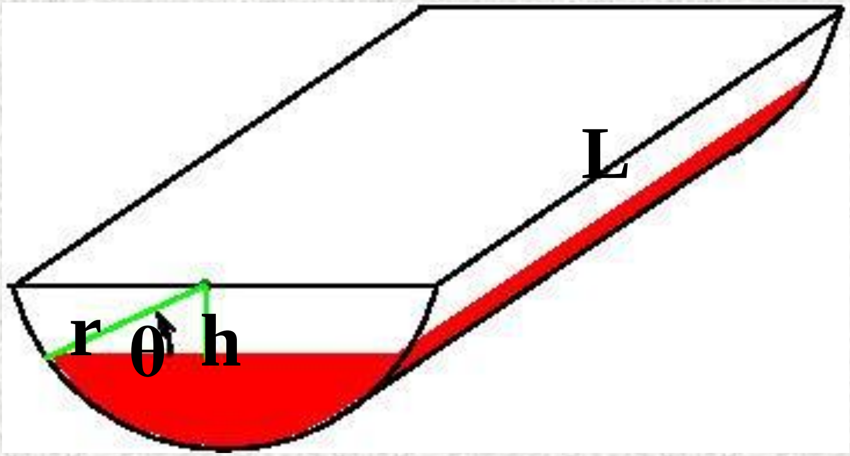


Παράδειγμα 2:

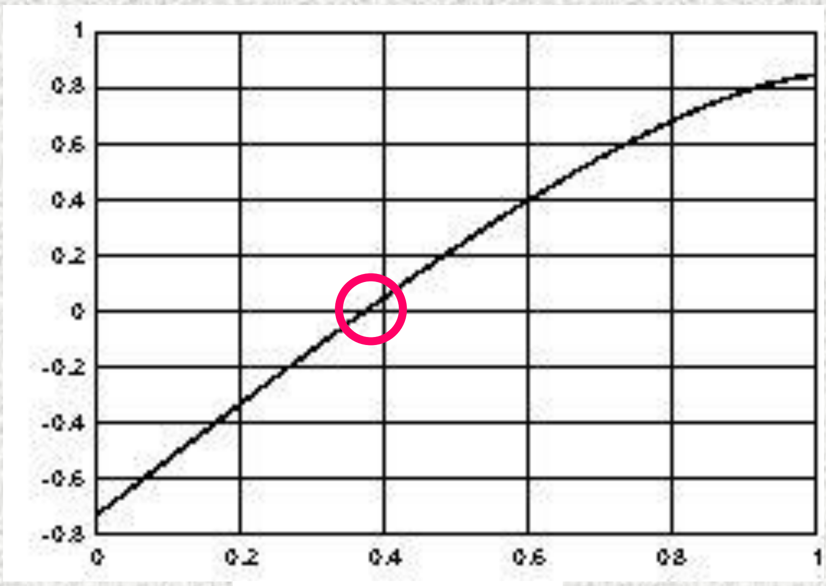
Δεδομένα:

$L = 2m$
$r = 0.4m$
$V = 0.27m^3$

$$\frac{V}{Lr^2} - \frac{\pi}{2} + \arcsin x + x\left(1 - x^2\right)^{\frac{1}{2}} = 0$$



Αγνωστος είναι το h (m) ή σε αδιάστατη μορφή το x=h/r.

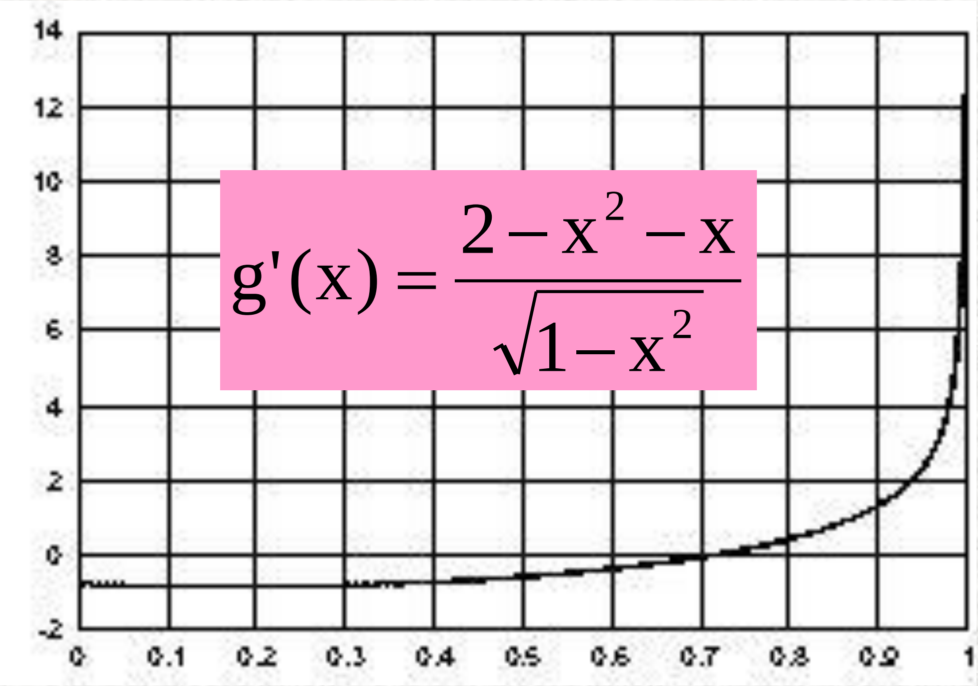


$x = h/r$

Παράδειγμα 2:

$$x = g(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{.27}{2*0.4^2} - x\left(1-x^2\right)^{1/2}\right)$$

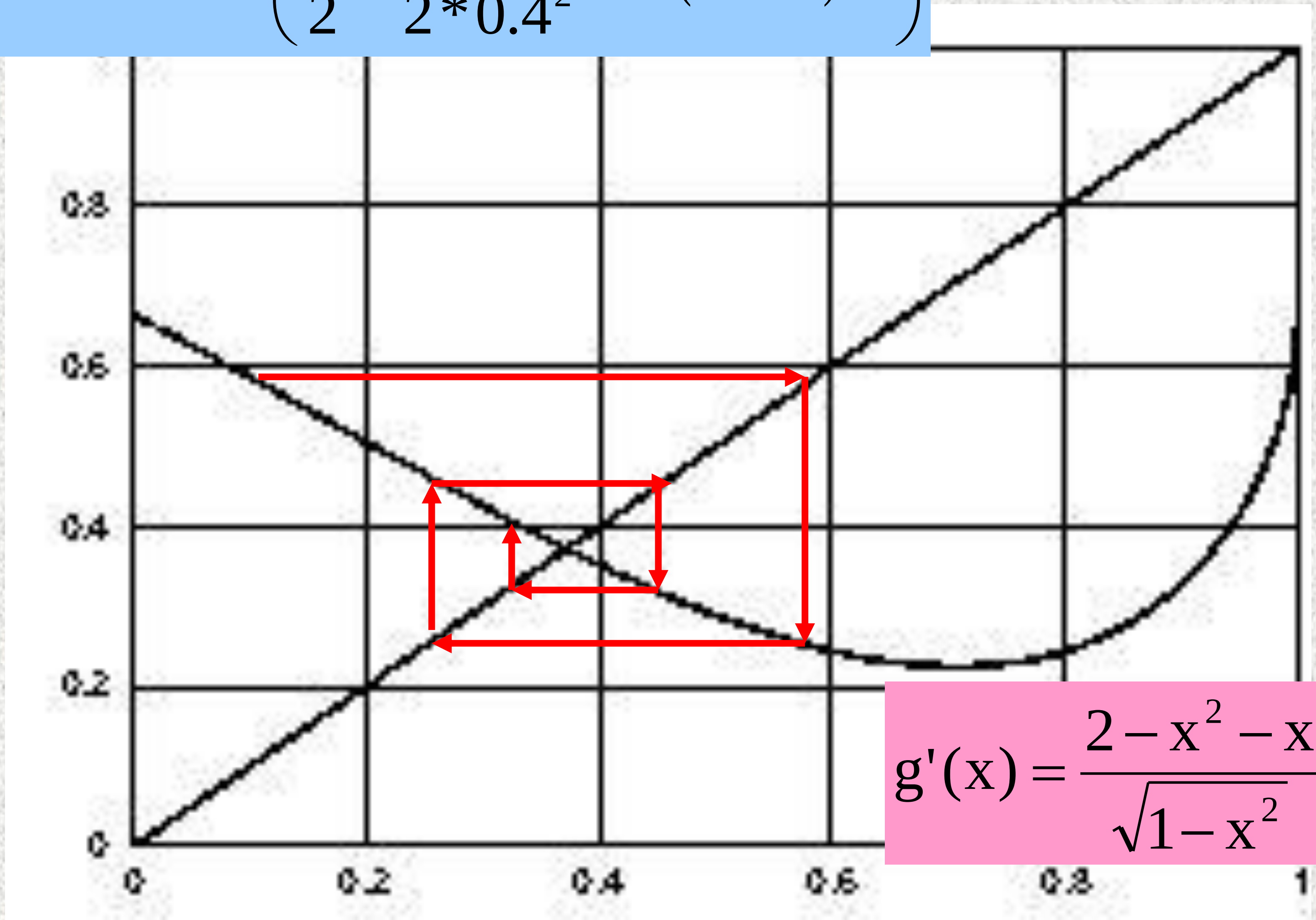
g'(x)



$$g'(x) = \frac{2 - x^2 - x}{\sqrt{1-x^2}}$$

x

$$x = g(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{.27}{2*0.4^2} - x\left(1 - x^2\right)^{1/2}\right)$$



$$g'(x) = \frac{2 - x^2 - x}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Μέθοδος Newton-Raphson

Μέθοδος Newton-Raphson

Λύνω την f(x)=0.

$$x_0 = x^{(1)} + h$$ **Πότε;;;**

Πραγματική λύση **Αρχική λύση**

Πρέπει:

$$f\left(x^{(1)} + h\right) = 0$$

$$f\left(x^{(1)} + h\right) = f\left(x^{(1)}\right) + \frac{h}{1!} f'\left(x^{(1)}\right) + \cancel{\frac{h^2}{2!} f''\left(x^{(1)}\right) + \ldots.}$$

$$h = -\frac{f\left(x^{(1)}\right)}{f'\left(x^{(1)}\right)}$$ **Πότε;;;**

Μέθοδος Newton-Raphson

$$x^{(2)} = x^{(1)} - \frac{f\left(x^{(1)}\right)}{f'\left(x^{(1)}\right)}$$

Ή, γενικά:

$$x^{(n)} = x^{(n-1)} - \frac{f\left(x^{(n-1)}\right)}{f'\left(x^{(n-1)}\right)}$$

Απαοιτεί εύρεση παραγώγων στο χαρτί ....

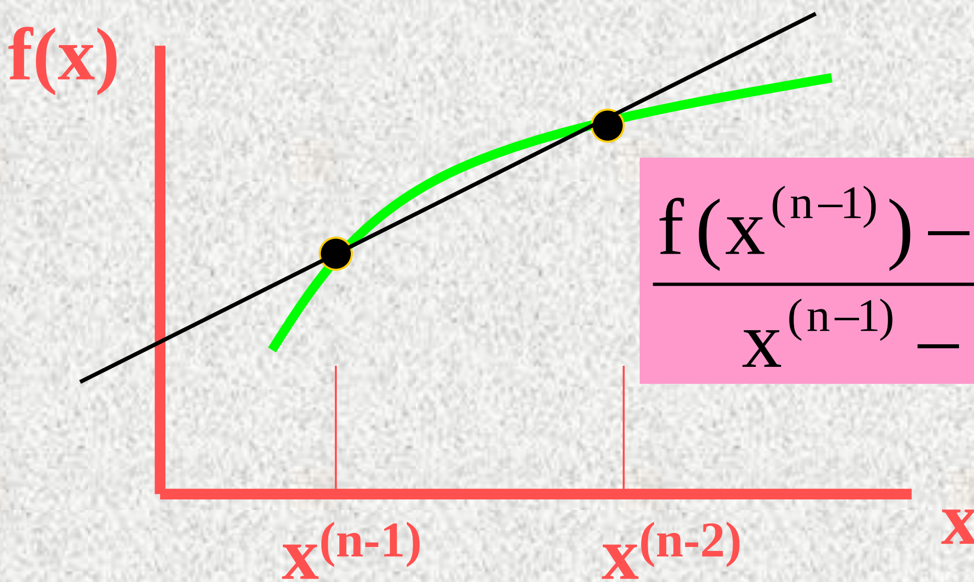
Κι αν δεν είναι εύκολο να βρω την παράγωγο; (δες επόμενη μέθοδο!)

Μέθοδος Newton-Raphson (με προσεγγιστική παράγωγο)=Μέθοδος της Τέμνουσας

Λύνω την f(x)=0.

$$x^{(n)} = x^{(n-1)} - \frac{x^{(n-1)} - x^{(n-2)}}{f\left(x^{(n-1)}\right) - f\left(x^{(n-2)}\right)} f(x^{(n-1)})$$

Δεν είναι αυτο-εκκινούμενη

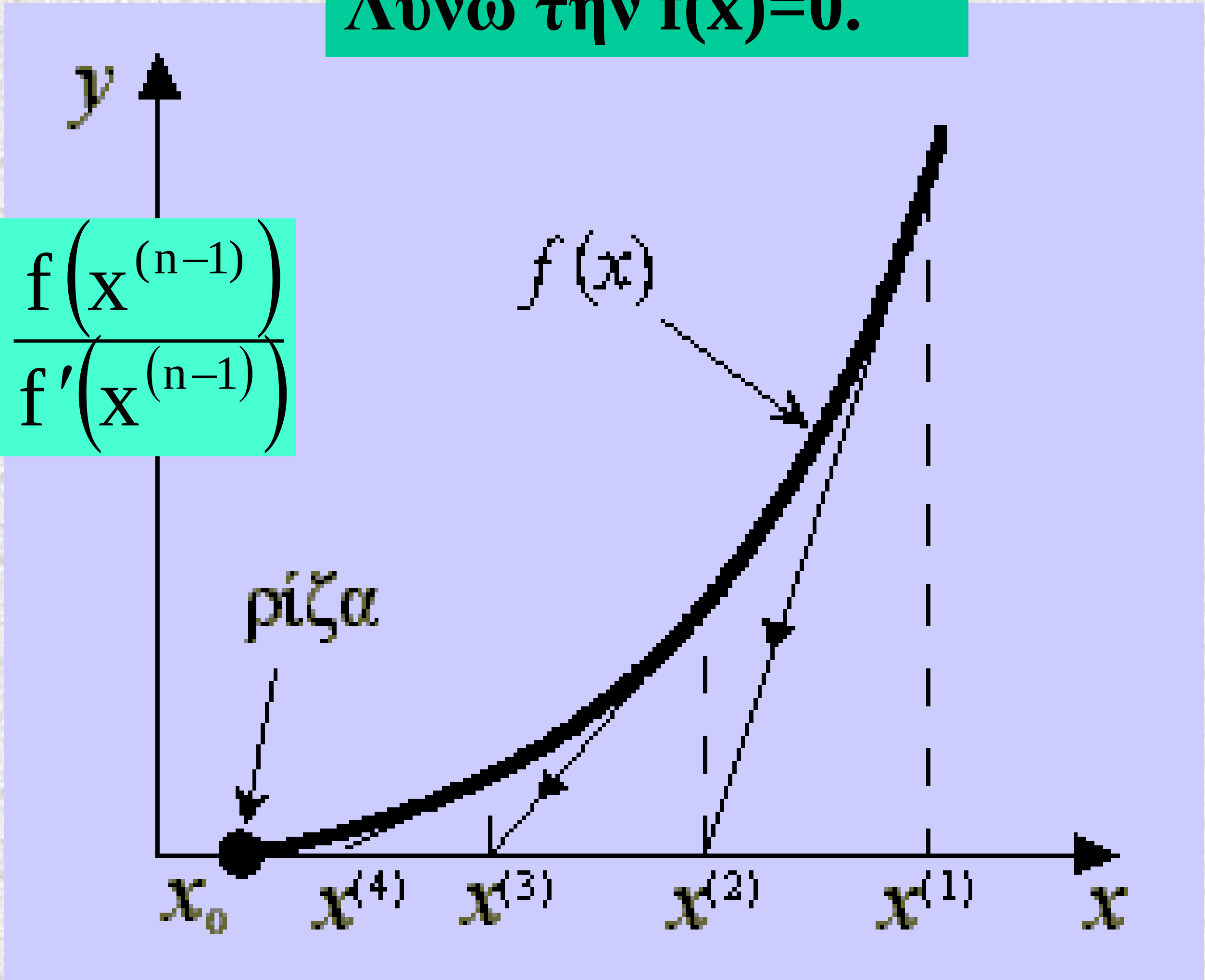


$$\frac{f(x^{(n-1)}) - f(x^{(n-2)})}{x^{(n-1)} - x^{(n-2)}} = f'(x^{(n-1)})$$

Μέθοδος Newton-Raphson

Λύνω την f(x)=0.

$$x^{(n)} = x^{(n-1)} - \frac{f\left(x^{(n-1)}\right)}{f'\left(x^{(n-1)}\right)}$$



Μέθοδος Newton-Raphson – Σύγκλιση

Λύνω την f(x)=0.

$$x^{(n+1)} = x^{(n)} - \frac{f\left(x^{(n)}\right)}{f'\left(x^{(n)}\right)}$$

$$x_r - x^{(n+1)} = x_r - x^{(n)} + \frac{f\left(x_r - \sigma^{(n)}\right)}{f'\left(x_r - \sigma^{(n)}\right)}$$

$$\sigma^{(n+1)} = x_r - x^{(n+1)} \qquad \sigma^{(n)} = x_r - x^{(n)}$$

$$\sigma^{(n+1)} = \sigma^{(n)} + \left[f(x_r) - \sigma^{(n)} f'(x_r) + \sigma^{(n)^2} / 2 f''(x_r) - \sigma^{(n)^3} / 3! f'''(x_r) + \ldots \right] /$$

$$/ \left[f'(x_r) - \sigma^{(n)} f''(x_r) + \frac{\sigma^{(n)^2}}{2} f'''(x_r) - \right]$$

Μέθοδος Newton-Raphson – Σύγκλιση

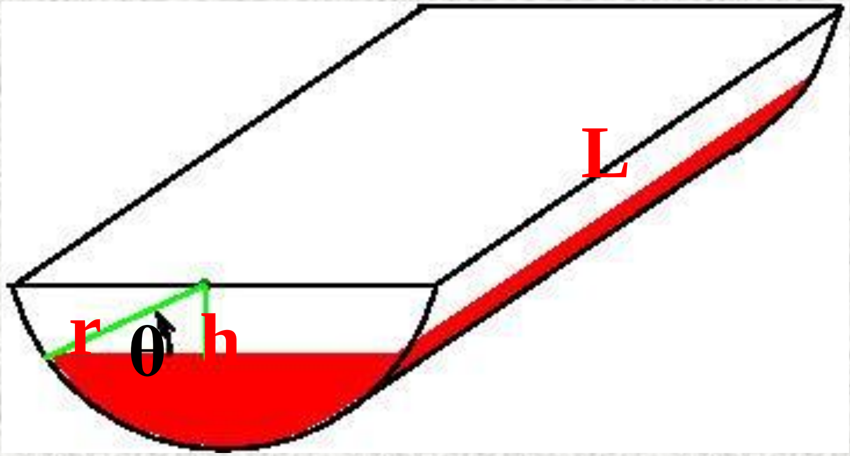
Με απλοποιήσεις:

$$\sigma^{(n+1)} = -\frac{1}{2}\left(\sigma^{(n)}\right)^{2}\frac{f''(x_0)}{f'(x_0)}$$

‘Οταν κοντά στη ρίζα:

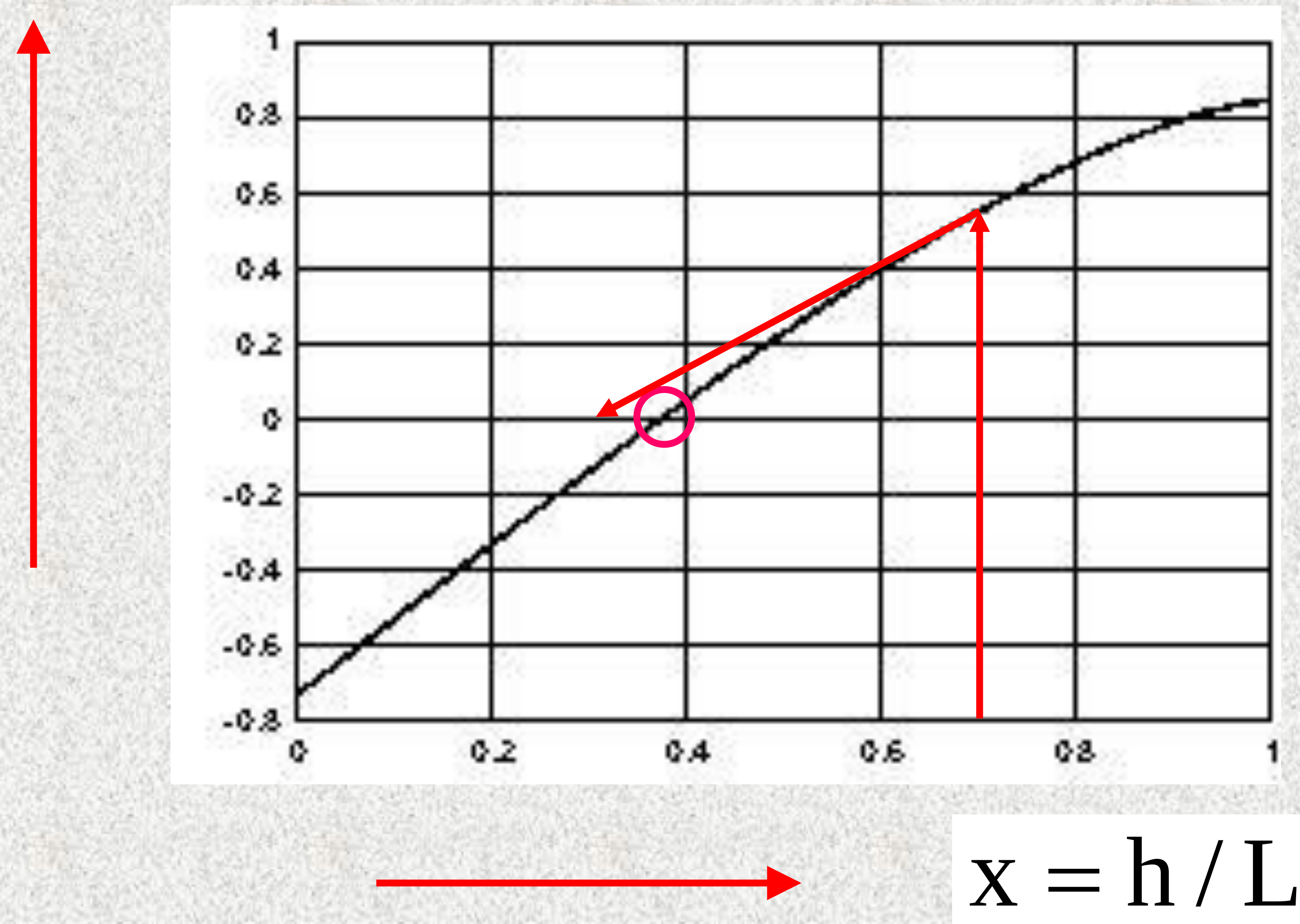
$$\left|\frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}\right| < 1.$$

Παράδειγμα 2:



$$\frac{.27}{2*0.4^2}=\frac{\pi}{2}-\arcsin x-x\left(1-x^2\right)^{1/2}$$

$$\frac{V}{Lr^2} - \frac{\pi}{2} + \arcsin x + x\left(1 - x^2\right)^{1/2}$$



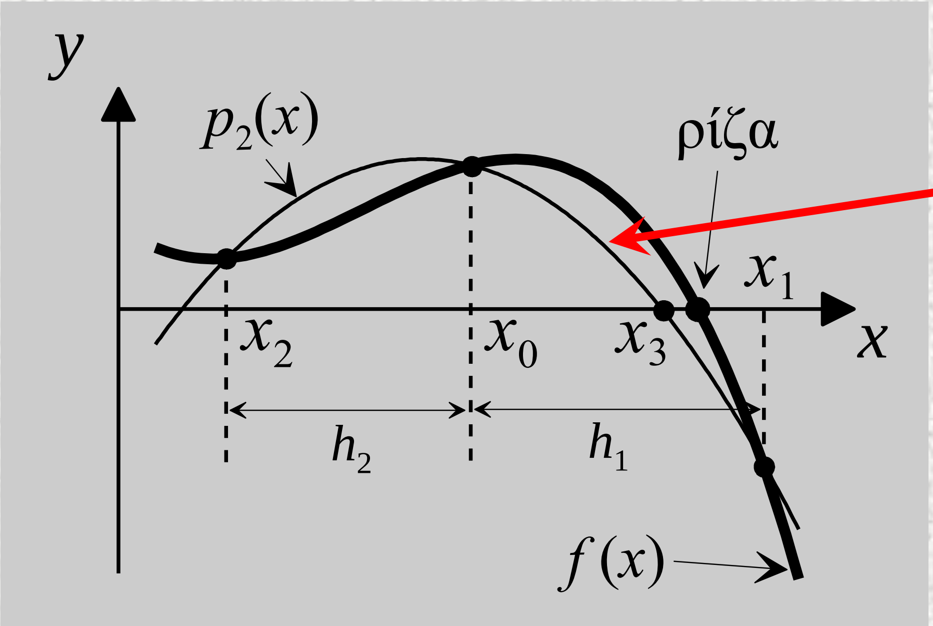
$$x = h / L$$

Άλλες Συναφείς Ανοικτές Μέθοδοι:

1. **Μέθοδος της Τέμνουσας (παρουσιάστηκε!)**
2. **Μέθοδος Muller**

Συγκρατήστε την ιδέα στην οποία στηρίζεται η μέθοδος Muller. Μπορεί κάποτε να σας φανεί χρήσιμη!

Μέθοδος Müller



Λύνω την f(x)=0.

$$p_2(x) = \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0$$

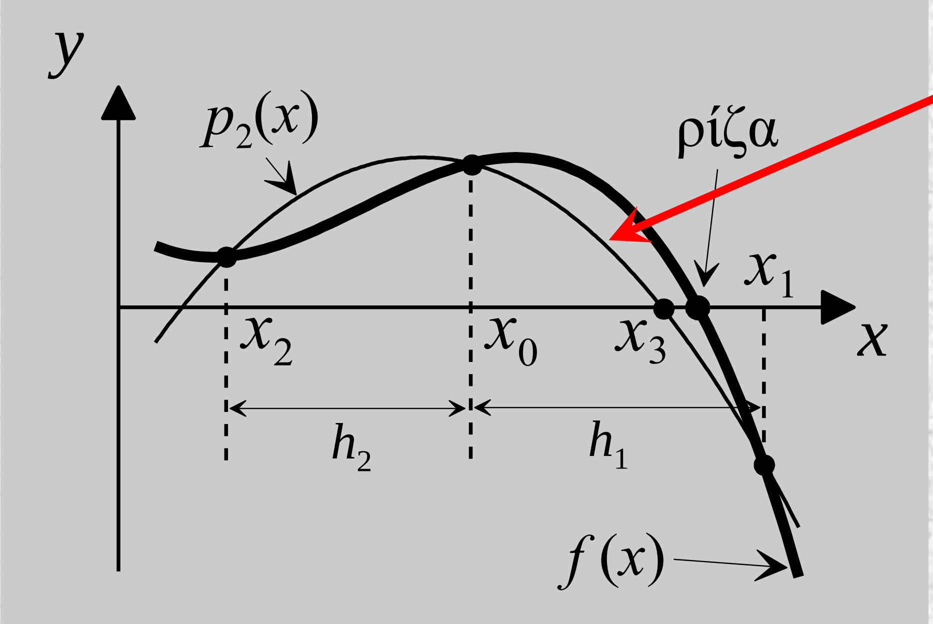
$(\mathbf{x_0,x_1,x_2}) \longrightarrow \mathbf{x_3}$

Αυτο-εκκίνηση ;;;;;

Βήματα:

1. **Υπολογισμός των συντελεστών α_i**
2. **Λύση της δευτεροβάθμιας**
3. **Επιλογή ως x_3 της πλησιέστερης στο x_0 ρίζας του**

Μέθοδος Müller



$$p_2(x) = \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0$$

$$\alpha_2 = \frac{h_2 \cdot f(x_1) - (h_1 + h_2) \cdot f(x_0) + h_1 \cdot f(x_2)}{h_1 h_2 \cdot (h_1 + h_2)},$$

$$\alpha_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0) - \alpha_2 \cdot h_1^2}{h_1},$$

$$\alpha_0 = f(x_0)$$

$$x_3 = x_0 - \frac{-2\alpha_0}{\alpha_1 \pm \sqrt{\alpha_1^2 - 4\alpha_2\alpha_0}}$$

Εύρεση Ριζών Πολυωνύμων:

Μέθοδος Newton

Βασικά Θεωρήματα:

- Ένα πολυώνυμο k βαθμού έχει ακριβώς k ρίζες (πραγματικές ή μιγαδικές), όπου μια ρίζα πολλαπλότητας ρ προσμετράται ρ φορές.
- Από $k+1$ σημεία περνά ακριβώς μόνο ένα πολυώνυμο k βαθμού.
- Κανόνας του προσήμου του Descartes: Οι θετικές πραγματικές ρίζες ενός πολυωνύμου $p_k(x) = 0$ είναι τόσες όσες και οι μεταβολές στο πρόσημο των (πραγματικών) συντελεστών του, α_i, $i = k, k\text{-}1, \ldots, 0$ ή λιγότερες κατά έναν άρτιο αριθμό. Το ίδιο ισχύει για τις αρνητικές ρίζες, όταν λαμβάνονται υπόψη τα πρόσημα του $p_k(-x) = 0$.

$$p_k(x) = \alpha_k x^k + \alpha_{k-1} x^{k-1} + \alpha_{k-2} x^{k-2} + \ldots + \alpha_0$$

Μέθοδος Horner για υπολογισμό τιμής πολυωνύμου

$$p_k(x) = \alpha_k x^k + \alpha_{k-1} x^{k-1} + \alpha_{k-2} x^{k-2} + \ldots + \alpha_0$$

k(k+1)/2 πολλαπλασιασμοί
και
k προσθέσεις

$$p_k(x) = \alpha_0 + x\left(\alpha_1 + x\left(\alpha_2 + \ldots + x\left(\alpha_{k-1} + x\alpha_k\right)\right)\right)$$

k πολλαπλασιασμοί
και
k προσθέσεις

Ελάχιστο

Μέθοδος Newton για Πολυώνυμα (1)

$$p_k(x) = \alpha_k x^k + \alpha_{k-1} x^{k-1} + \alpha_{k-2} x^{k-2} + \ldots + \alpha_0$$

Παραγοντοποίηση του $p_n(x)$ κατά Horner. Βασικές σχέσεις:

$$p_k(x) = (x - t) \cdot g_{k-1}(x) + r_k \quad \Rightarrow \quad p_k(t) = r_k$$

$$p_k'(t) = g_{k-1}(t)$$

$$g_{k-1}(x) = b_{k-1} x^{k-1} + b_{k-2} x^{k-2} + \ldots + b_0$$

$$b_{k-1} = a_k$$

$$b_i = a_{i+1} + t \cdot b_{i+1} \quad , \quad i = k\text{-}2,\ k\text{-}3,\ \ldots,\ 0.$$

$$r_k = a_0 + t \cdot b_0$$

Μέθοδος Newton για Πολυώνυμα (2)

$$p_k(x) = \alpha_k x^k + \alpha_{k-1} x^{k-1} + \alpha_{k-2} x^{k-2} + \ldots + \alpha_0$$

$$p_k(x) = (x - t) \cdot g_{k-1}(x) + r_k \quad \Rightarrow \quad p_k(t) = r_k$$

$$p_k'(t) = g_{k-1}(t)$$

$$x^{(n+1)} = x^{(n)} - \frac{f\left(x^{(n)}\right)}{f'\left(x^{(n)}\right)}$$

$$x^{(n+1)} = x^{(n)} - \frac{p_k\left(x^{(n)}\right)}{p_k'\left(x^{(n)}\right)}$$