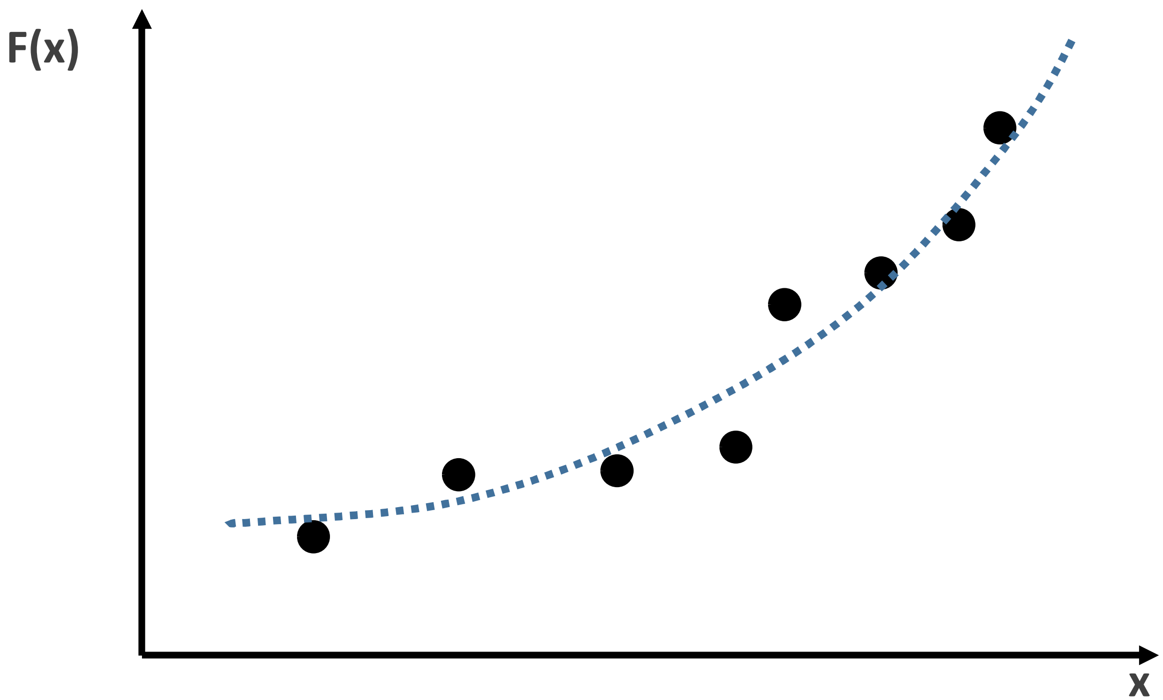
NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY OF ATHENS
School of Mechanical Engineering
Fluids Section - Lab. Of Thermal Turbomachines
Parallel CFD & Optimization Unit (PCOpt/NTUA)

Προσέγγιση με Μέθοδο Ελαχίστων Τετραγώνων

Κυριάκος Χ. ΓΙΑΝΝΑΚΟΓΛΟΥ, Καθηγητής ΕΜΠ
kgianna@mail.ntua.gr
http://velos0.ltt.mech.ntua.gr/kgianna
http://velos0.ltt.mech.ntua.gr/research

Προσέγγιση (Approximation) - ΥΠΕΝΘΥΜΙΣΗ

► **Προσέγγιση σε περίπτωση μετρήσεων με «θόρυβο» ("noise")**



Προσέγγιση (Approximation)!

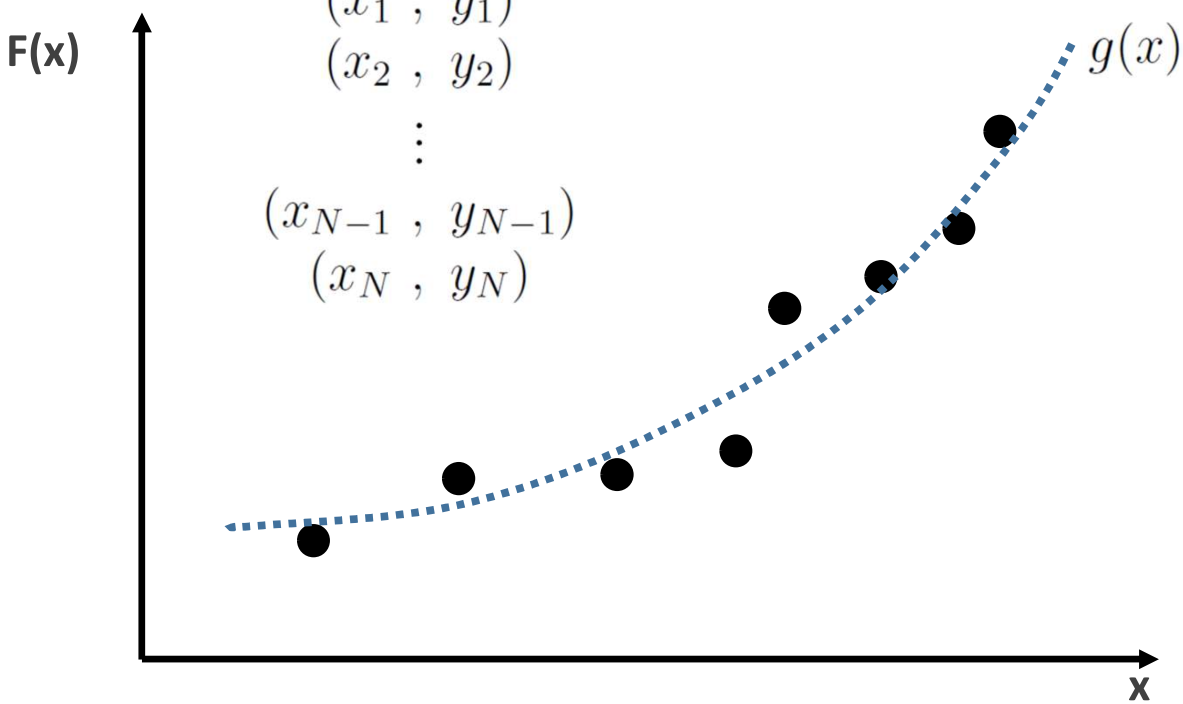
Στόχος: Ελαχιστοποίηση του σφάλματα μεταξύ της καμπύλης προσέγγισης και των μετρηθέντων σημείων.

<u>N+1 δεδομένα σημεία:</u>

$$\begin{array}{c} (x_0 \ , \ y_0) \\ (x_1 \ , \ y_1) \\ (x_2 \ , \ y_2) \\ \vdots \\ (x_{N-1} \ , \ y_{N-1}) \\ (x_N \ , \ y_N) \end{array}$$

Ορισμός Σφάλματος/Απόκλισης (ανά κόμβο & συνολικής)

$$
\begin{array}{c}
(x_0 \,,\, y_0) \\
(x_1 \,,\, y_1) \\
(x_2 \,,\, y_2) \\
\vdots \\
(x_{N-1} \,,\, y_{N-1}) \\
(x_N \,,\, y_N)
\end{array}
$$



Συνήθης, αλλά όχι αποκλειστικός, ορισμός:

$$e_i = g(x_i) - y_i$$

$$\sum_{i=0}^{N} (e_i)^2 = minimum$$

Πολυωνυμική Προσέγγιση Ελαχίστων Τετραγώνων

Παράδειγμα πολυωνυμικής Προσέγγισης βαθμού n

$$y(x) \doteq g(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$$

Απόκλιση κόμβου i

$$e_i = g(x_i) - y_i = a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + \ldots a_{n-1} x_i^{n-1} + a_n x_i^n - y_i$$

Η προσέγγιση ως πρόβλημα ελαχιστοποίησης (Least Squares)

$$E = \sum_{i=0}^{N} e_i = \sum_{i=0}^{N} \left(a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + \cdots + a_{n-1} x_i^{n-1} + a_n x_i^n - y_i\right)^2 = minimum$$

Πολυωνυμική Προσέγγιση Ελαχίστων Τετραγώνων

Η προσέγγιση ως πρόβλημα ελαχιστοποίησης (Least Squares)

$$E = \sum_{i=0}^{N} e_i = \sum_{i=0}^{N} \left(a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + \cdots + a_{n-1} x_i^{n-1} + a_n x_i^n - y_i\right)^2 = minimum$$

$$\frac{\partial E}{\partial a_k} = \sum_{i=0}^{N} 2\left(a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + \cdots + a_{n-1} x_i^{n-1} + a_n x_i^n - y_i\right) x^k = 0 \qquad k = 0, \ldots, n$$

$$\begin{bmatrix} (N+1) & \sum_{i=0}^N x_i & \ldots & \sum_{i=0}^N x_i^n \\ \sum_{i=0}^N x_i & \sum_{i=0}^N x_i^2 & \ldots & \sum_{i=0}^N x_i^{n+1} \\ & & \vdots & \\ \sum_{i=0}^N x_i^n & \sum_{i=0}^N x_i^{n+1} & \ldots & \sum_{i=0}^N x_i^{2n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^N y_i \\ \sum_{i=0}^N y_i x_i \\ \vdots \\ \sum_{i=0}^N y_i x_i^n \end{bmatrix}$$

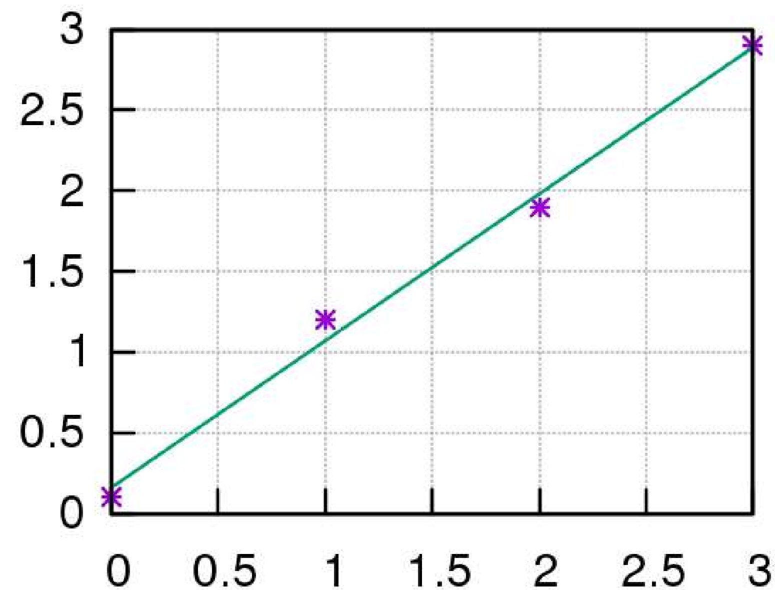
Εφαρμογή:

N=3

x_i	y_i
0	0.1
1	1.2
2	1.9
3	2.9

$$g(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x$$

$$n = 1 < 3$$



$$\begin{bmatrix} (N+1) & \sum_{i=0}^{N} x_i \\ \sum_{i=0}^{N} x_i & \sum_{i=0}^{N} x_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{N} y_i \\ \sum_{i=0}^{N} y_i x_i \end{bmatrix}$$

$$\Sigma x_i = 0+1+2+3=6$$

$$\Sigma x_i^2 = 0+1+4+9=14$$

$$\Sigma y_i = 0.1+1.2+1.9+2.9=6.1$$

$$\Sigma x_i y_i = 1.2+3.8+8.7=13.7$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 14 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6.1 \\ 13.7 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad g(x) = 0.16 + 0.91x$$

Σχόλια

- **Σύνδεση του κεφαλαίου με μεθόδους επίλυσης (συμμετρικών) γραμμικών συστημάτων**

- **Ελάχιστα τετράγωνα με άλλες συναρτήσεις πλην πολυωνύμων → ακολουθήστε ακριβώς την ίδια λογική (ορισμός σφάλματος, ελαχιστοποίηση, παράγωγοι, κλπ ενδεχομένως ανάγκη επίλυσης συστήματος μη-γραμμικών εξισώσεων)**

- **Πιθανόν διαφορετικός τόπος ορισμού της απόκλισης**