



NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY OF ATHENS

School of Mechanical Engineering

Fluids Section - Lab. Of Thermal Turbomachines

Parallel CFD & Optimization Unit (PCOpt/NTUA)

## Αριθμητική Ανάλυση - Εισαγωγή

Κυριάκος Χ. ΓΙΑΝΝΑΚΟΓΛΟΥ, Καθηγητής ΕΜΠ

[kgianna@mail.ntua.gr](mailto:kgianna@mail.ntua.gr)

Δρ. Βαρβάρα ΑΣΟΥΤΗ, Εντεταλμένη Διδάσκουσα

[vasouti@mail.ntua.gr](mailto:vasouti@mail.ntua.gr)

Γραφείο Ε309

<http://velos0.ltt.mech.ntua.gr/kgianna>

<http://velos0.ltt.mech.ntua.gr/research>



## Site - Επικοινωνία:

- Τα “πάντα” γύρω από το μάθημα βρίσκονται στο:

**<http://velos0.ltt.mech.ntua.gr/kgianna>**  
ή **147.102.55.162/kgianna**

- Σε αυτό σας παραπέμπει και το Helios. Το Helios χρησιμοποιείται επικουρικά και κατά περίπτωση, λχ για να σας σταλεί ένα επείγον μήνυμα για το μάθημα, τις εξετάσεις κλπ
- Επικοινωνία με τους διδάσκοντες με email ή δια ζώσης. Δείτε πάντως τις ανακοινώσεις πριν επικοινωνήσετε.
- Απορίες πάνω στο μάθημα, καλύτερα δια ζώσης: στην τάξη ή στο γραφείο E309.
- Μη-πραγματοποιηθέντα δώρα μαθήματος αναπληρώνονται άμεσα (δείτε στο site, στις Ανακοινώσεις). **Λήξη διδασκαλίας: 29/5/2026.**
- Έχουν ήδη χαθεί 3 δώρα. Θα αναπληρωθούν μετά από έγκαιρη ανακοίνωση.



## Τα Τυπικά του Μαθήματος

- Βιβλίο: μπορείτε να το κατεβάσετε σε pdf από το <http://147.102.55.162/kgianna/analysis/notesw.html>
- Από αυτό το έτος, η εξέταση θα γίνεται με μοναδικό βοήθημα ένα **τυπολόγιο**, που θα φτιαχτεί σύντομα και θα τεθεί στη διάθεσή σας ώστε να μας προτείνετε παραλείψεις ή βελτιώσεις.
- Πολλά λυμένα σετ θεμάτων παλιότερων εξετάσεων στο site.
- **Προαιρετικές** Υπολογιστικές Ασκήσεις (Homeworks) με **μεγάλη βαρύτητα στο βαθμό**.
- Στο site διατίθεται λογισμικό για κάθε (σχεδόν) διδαχθείσα μέθοδο, σε δύο γλώσσες προγραμματισμού (C++ και Fortran).



## Γιατί υπάρχει η Αριθμητική Ανάλυση – Μικρά Παραδείγματα

- Υπολογίστε τις ρίζες της (μη-γραμμικής) εξίσωσης:

$$\exp(x) - \sin(x) \cdot \frac{\cos^{0.145}(x - \sqrt{x - \tan(x)})}{\log_2 \left| 3x^{8/9} + 15 \frac{1}{x^{1/5}} \right|} = 0.11$$

- Υπολογίστε την τιμή του ολοκληρώματος:

$$I = \int_1^{10} \int_2^{100} \int_3^{\infty} e^{-x^2/2\pi} \sin(x^{3/2} - \sin(y+z)) \frac{y^z}{z^y} dx dy dz$$

- Λύστε ένα γραμμικό σύστημα  $Ax=b$ , με 1.000.000 αγνώστους!
- Κάντε το ίδιο σε μη-γραμμικό σύστημα!



## Γιατί υπάρχει η Αριθμητική Ανάλυση – Μικρά Παραδείγματα

- Βρείτε τη λύση της συνήθους διαφορικής εξίσωσης:

$$4y^3 + 7x \sin(x) + 4x^4 - \left(-\frac{7}{4}y^2 + 16 \cos(y) - 7x\right)y' = -e^{-x+y} + \sinh(y)$$

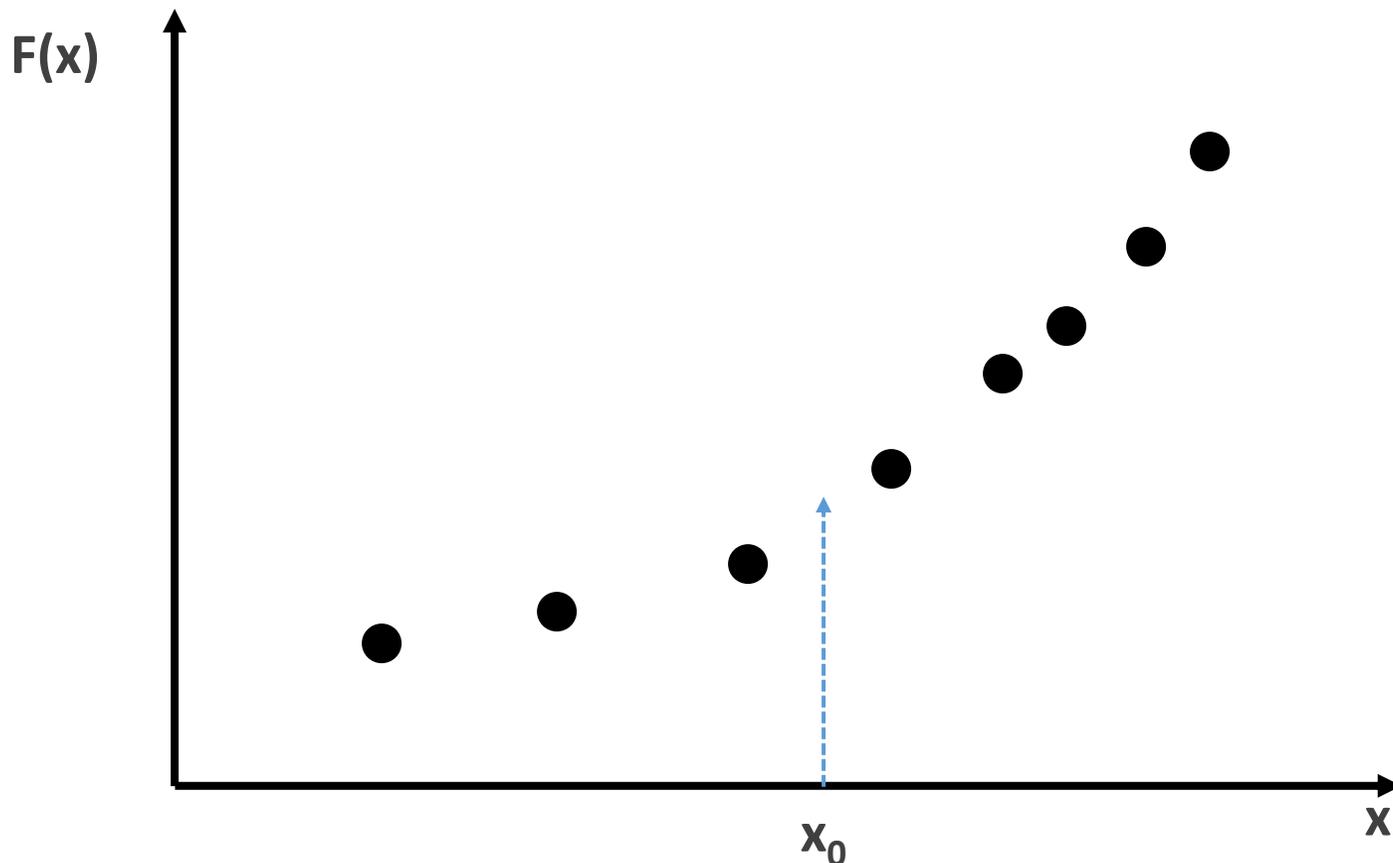
- Βρείτε τη λύση του συστήματος συνήθων διαφορικών εξισώσεων:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x - \frac{\alpha y}{\ln(x^2 + y^2)} \\ \dot{y} &= -y + \frac{\alpha x}{\ln(x^2 + y^2)}\end{aligned}$$



## Γιατί υπάρχει η Αριθμητική Ανάλυση – Παραδείγματα

► Μετεπεξεργασία και εκμετάλλευση δεδομένων από πειράματα/μετρήσεις:



$x$ =είσοδος στο πείραμα  
 $y$  ή  $F(x)$ =έξοδος / απόκριση

Πιθανά ζητούμενα:

• Η  $y=f(x)$  ως μια συνάρτηση (αναλυτική έκφραση) που να προσεγγίζει βέλτιστα τη μετρηθείσα απόκριση.

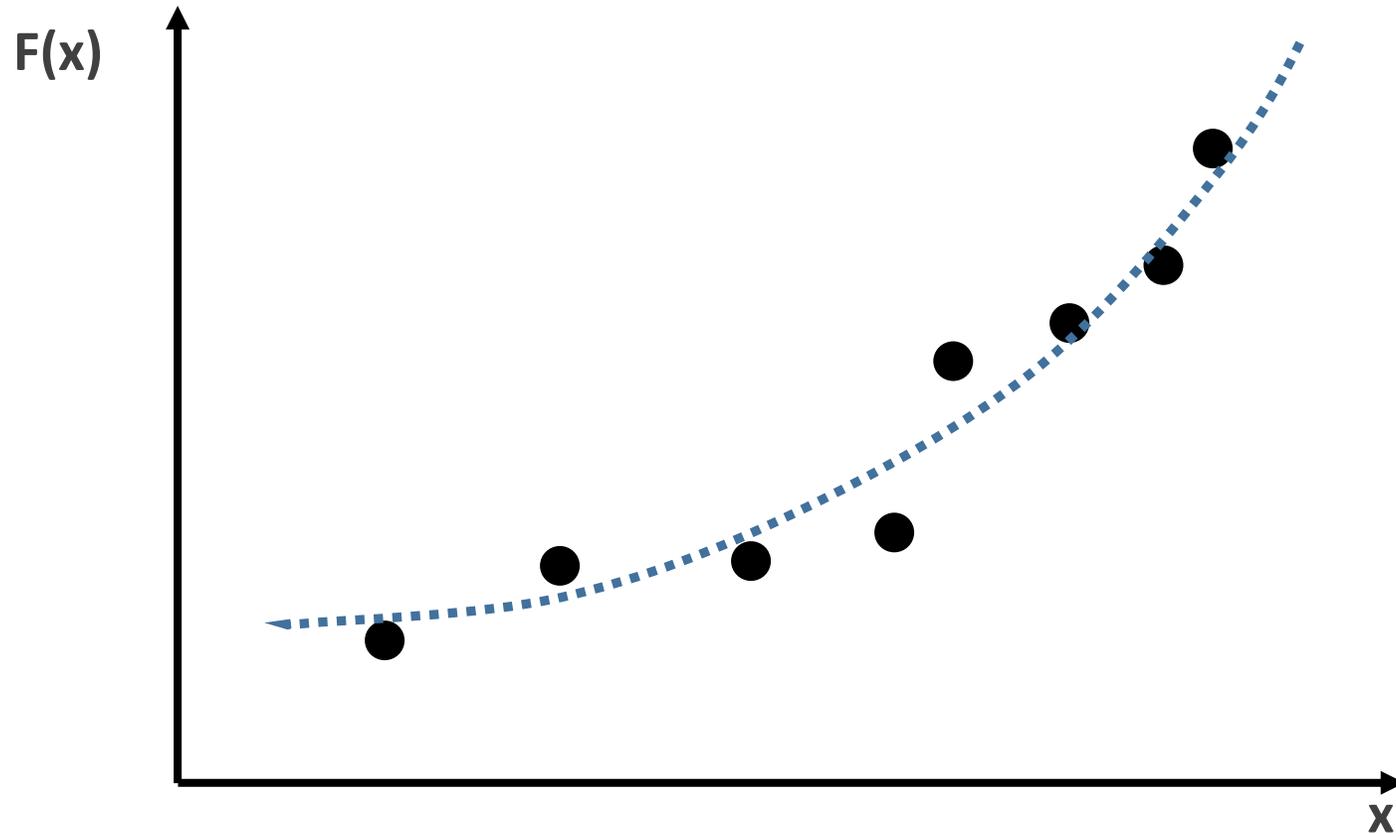
• Για μια νέα τιμή εισόδου  $x_0$ , ποια η αναμενόμενη απόκριση;

**Παρεμβολή (Interpolation)!**



## Γιατί υπάρχει η Αριθμητική Ανάλυση – Παραδείγματα

► Προσέγγιση σε περίπτωση μετρήσεων με «θόρυβο» (“noise”)



### Προσέγγιση (Approximation)!

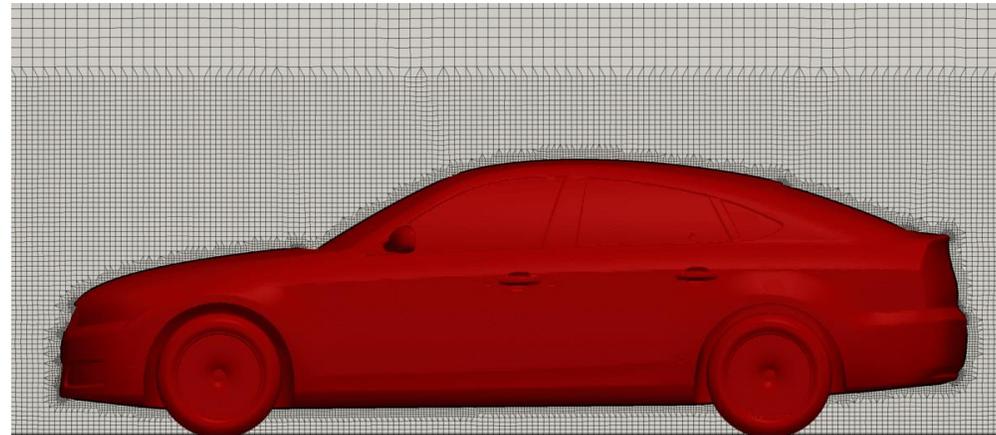
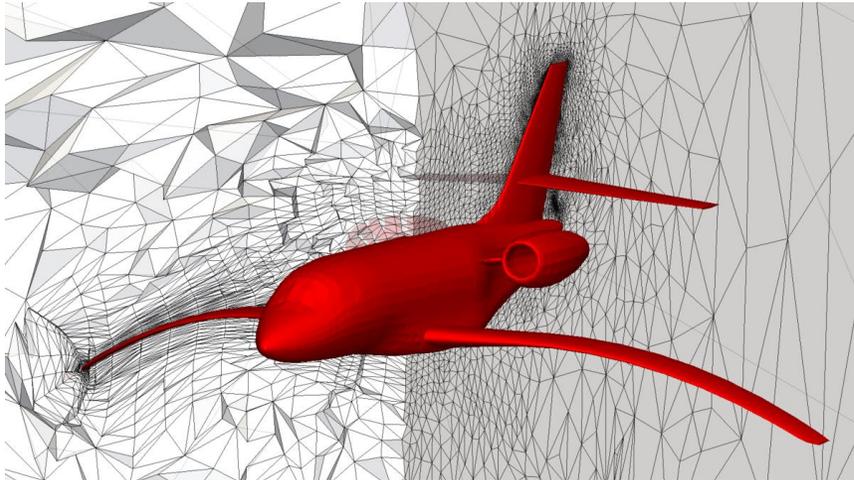
Στόχος: Ελαχιστοποίηση του σφάλματος μεταξύ της καμπύλης προσέγγισης και των μετρηθέντων σημείων.

(ορισμός σφάλματος;)



## Γιατί υπάρχει η Αριθμητική Ανάλυση – Παραδείγματα

- ▶ Διαχείριση γεωμετριών (καμπυλών, επιφανειών) κατά το σχεδιασμό σωμάτων με εφαρμογές σε κάθε επιστήμη: κατασκευές, αεροδυναμική, αυτοκινητοβιομηχανία, ιατρικές επιστήμες κλπ.

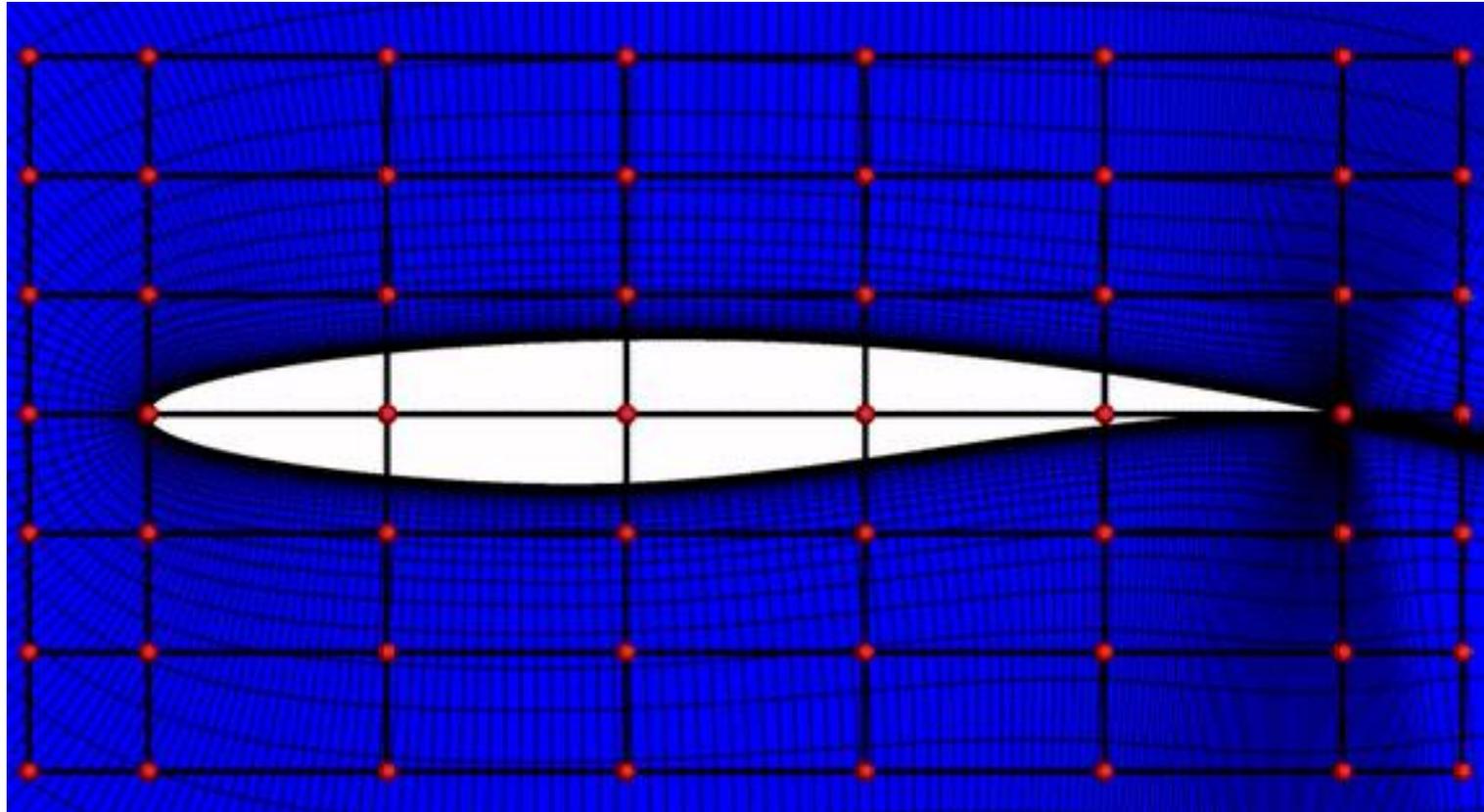


Παραδείγματα από ερευνητικές δραστηριότητες του εργαστηρίου μας (αεροελαστική συμπεριφορά πτέρυγας αεροσκάφους, σχεδιασμός βελτιστοποίηση μορφής επιβατικού αυτοκινήτου)



## Γιατί υπάρχει η Αριθμητική Ανάλυση – Παραδείγματα

- Διαχείριση γεωμετριών (καμπυλών, επιφανειών) κατά το σχεδιασμό σωμάτων με εφαρμογές σε κάθε επιστήμη: κατασκευές, αεροδυναμική, αυτοκινητοβιομηχανία, ιατρικές επιστήμες κλπ.





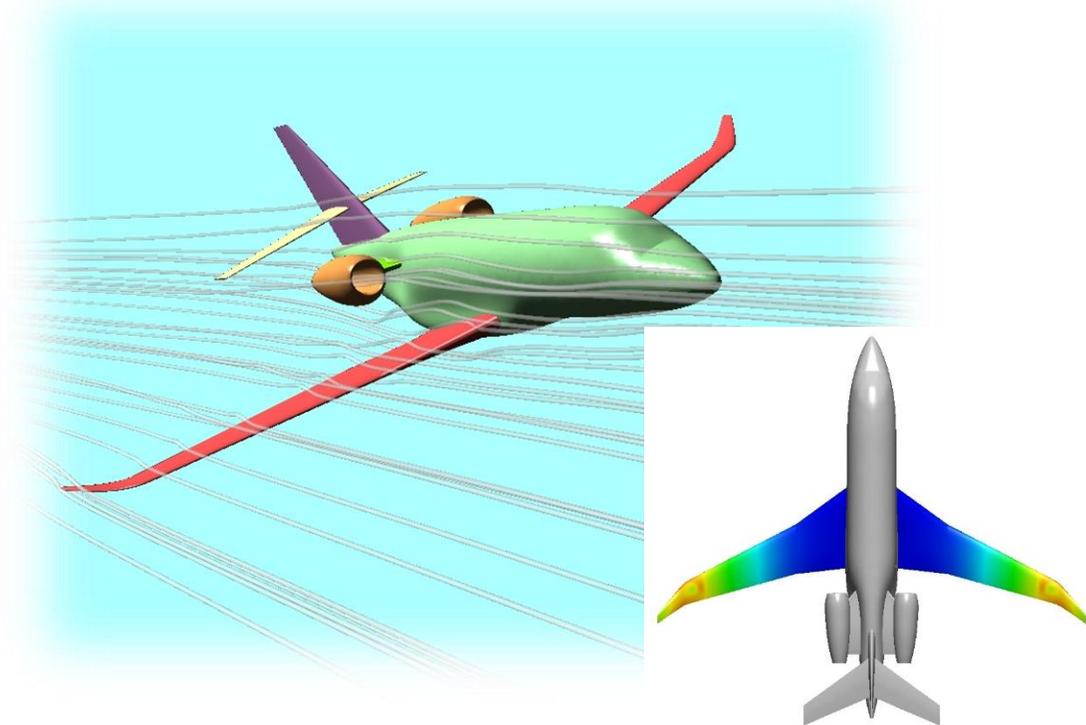
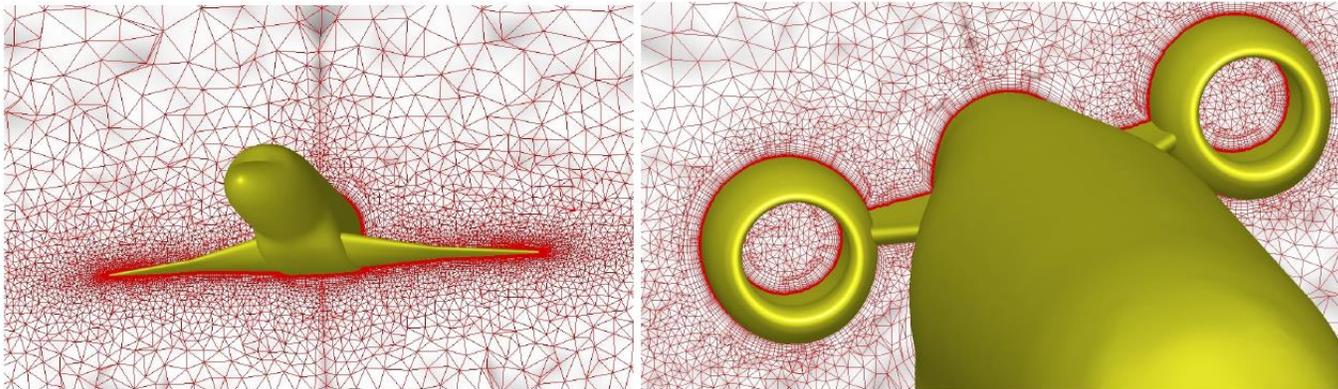
## Αριθμητική Ανάλυση

- ▶ Η Αριθμητική Ανάλυση (Numerical Analysis) είναι ο κλάδος των μαθηματικών ο οποίος επιτρέπει να δημιουργούμε (ή να δημιουργούν άλλοι για μας και εμείς απλώς να τις βρίσκουμε και τις εφαρμόζουμε) μεθόδους οι οποίες υπολογίζουν **Αριθμητικές/Προσεγγιστικές λύσεις (Numerical/Approximate solutions)** σε προβλήματα (για μας, λχ, προβλήματα ενδιαφέροντος Μηχανολόγου Μηχανικού) στα οποία η **Αναλυτική/Ακριβής λύση (Analytical/Exact solution)** είναι είτε αδύνατο ή απαγορευτικά ακριβό να βρεθεί.
- ▶ Γενικά, για κάθε εφαρμογή, η Αριθμητική Ανάλυση προτείνει πολλές εναλλακτικές μεθόδους, διαφορετικής ακρίβειας και υπολογιστικού κόστους η καθεμιά.
- ▶ Η Αριθμητική Ανάλυση είναι αλληλένδετη με τη χρήση ηλεκτρονικού υπολογιστή.
- ▶ Έχει ιδιαίτερο ενδιαφέρον να συνδέεται η Αριθμητική Ανάλυση με την Πολυεπεξεργασία. Άλλες μέθοδοι συνιστώνται για χρήση σε μονοεπεξεργαστικό και άλλες σε πολυεπεξεργαστικό περιβάλλον.



## Γιατί υπάρχει η Αριθμητική Ανάλυση – Παραδείγματα

- Όλα τα εξειδικευμένα μαθήματα «Υπολογιστικές Μέθοδοι σε ????» βασίζονται, για την υπολογιστική τους υλοποίηση σε γνώσεις που αποκτώνται στο μάθημα της Αριθμητικής Ανάλυσης.



Παραδείγματα από ερευνητικές δραστηριότητες του εργαστηρίου μας (μελέτη αεροδυναμικής και αεροελαστικής συμπεριφοράς ενός Business Jet). Για την εύρεση του πεδίου ροής γύρω από το αεροσκάφος και των παραμορφώσεων του επιλύονται συστήματα αρκετών δεκάδων εκατομμυρίων κόμβων στη συστοιχία καρτών γραφικών (GPU cluster) του εργαστηρίου



## Υλη του Μαθήματος

### Εξι (6) κεφάλαια:

- Επίλυση Μη-Γραμμικών και Υπερβατικών Εξισώσεων
- Επίλυση Συστημάτων
- Αριθμητική Παρεμβολή και Προσέγγιση
- Αριθμητική Ολοκλήρωση και Παραγωγή
- Αριθμητική Επίλυση Συνήθων Διαφορικών Εξισώσεων
- Σφάλματα Αριθμητικών Υπολογισμών.

### Επικουρική Σύνδεση με:

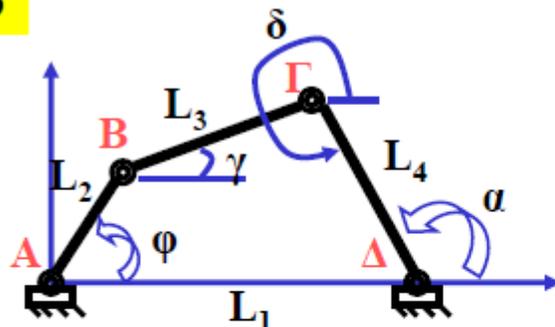
- 1/ Πολυεπεξεργασία (Multi-Processing)
- 2/ Μηχανική Μάθηση (Machine Learning)



## Ένα Απλό Παράδειγμα Επίλυσης Μη-Γραμμικής Εξίσωσης

Ζητούμενο: Για κάθε τιμή της γωνίας ( $\alpha$ ) να υπολογιστεί η τιμή της γωνίας ( $\phi$ )

$\alpha \rightarrow \phi$



$$\vec{AB} + \vec{B\Gamma} + \vec{\Gamma\Delta} = \vec{A\Delta}$$

$$L_2 \cos \phi + L_3 \cos \gamma + L_4 \cos \delta - L_1 = 0$$

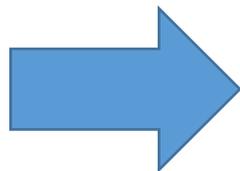
$$L_2 \sin \phi + L_3 \sin \gamma + L_4 \sin \delta = 0$$

αλλά  $\delta = \alpha + \pi$

Αριθμητική Εφαρμογή:

$$L_1 = 10m, L_2 = 6m,$$

$$L_3 = 8m, L_4 = 4m$$



$$\frac{L_1}{L_2} \cos \alpha - \frac{L_1}{L_4} \cos \phi + \frac{L_1^2 + L_2^2 - L_3^2 + L_4^2}{2L_2L_4} - \cos(\alpha - \phi) = 0$$

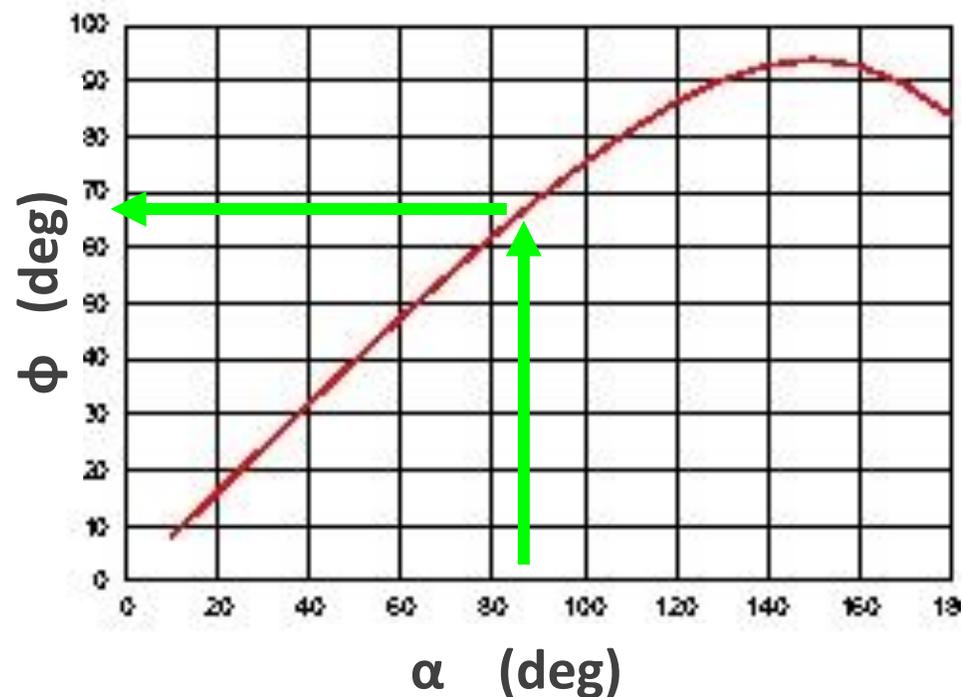
$$\frac{5}{3} \cos \alpha - \frac{5}{2} \cos \phi + \frac{11}{6} - \cos(\alpha - \phi) = 0$$



## Ένα Απλό Παράδειγμα Επίλυσης Μη-Γραμμικής Εξίσωσης

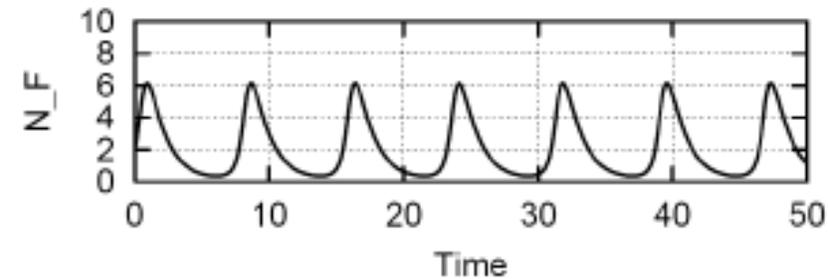
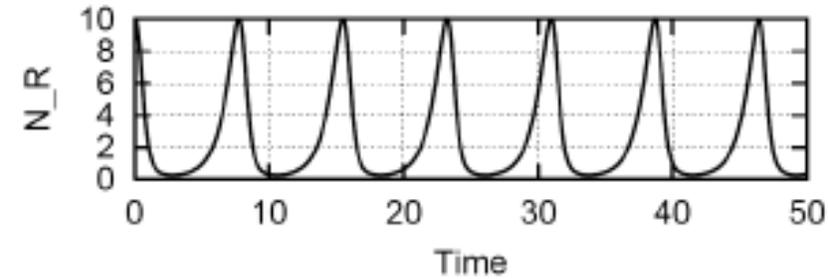
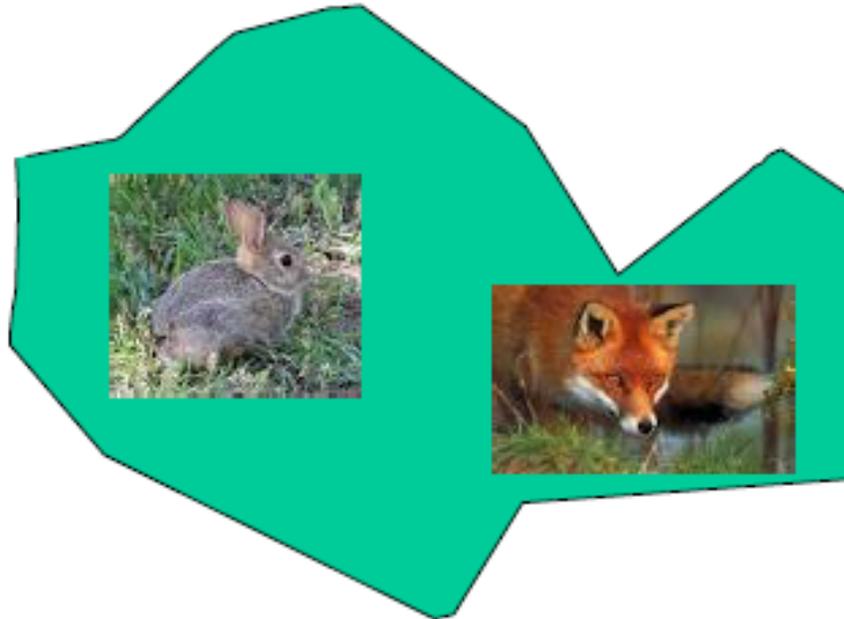
Ζητούμενο: Για κάθε τιμή της γωνίας ( $\alpha$ ) να υπολογιστεί η τιμή της γωνίας ( $\phi$ )

$\alpha$	$\phi$	$\alpha$	$\phi$
10.	8.069	100.	75.270
20.	16.113	110.	81.069
30.	24.105	120.	86.101
40.	32.015	130.	90.124
50.	39.810	140.	92.823
60.	47.450	150.	93.822
70.	54.887	160.	92.734
80.	62.060	170.	89.306
90.	68.888	180.	83.620





## Ένα Απλό Παράδειγμα Επίλυσης Συστήματος ΣΔΕ



$$\frac{dN_R(t)}{dt} = \alpha N_R(t) - \beta N_R(t) N_F(t)$$

$$\frac{dN_F(t)}{dt} = -\gamma N_F(t) + \delta N_R(t) N_F(t)$$