ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών
Μονάδα Παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής & Βελτιστοποίησης

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

(3ο Εξάμηνο Σχομής Μηχ.Μηχ. ΕΜΠ)

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ Σ.Δ.Ε.

Η ΜΕΘΟΔΟΣ RUNGE-KUTTA

Οι σημειώσεις αυτές ΔΕΝ επιτρέπονται στις εξετάσεις!

Κυριάκος Χ. Γιαννάκογλου
Καθηγητής ΕΜΠ
kgianna@mail.ntua.gr
http://velos0.ltt.mech.ntua.gr/research/

Σύνοψη Προηγουμένων: Η Μέθοδος Euler (1/2)

Επιλύεται η σ.δ.ε.

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

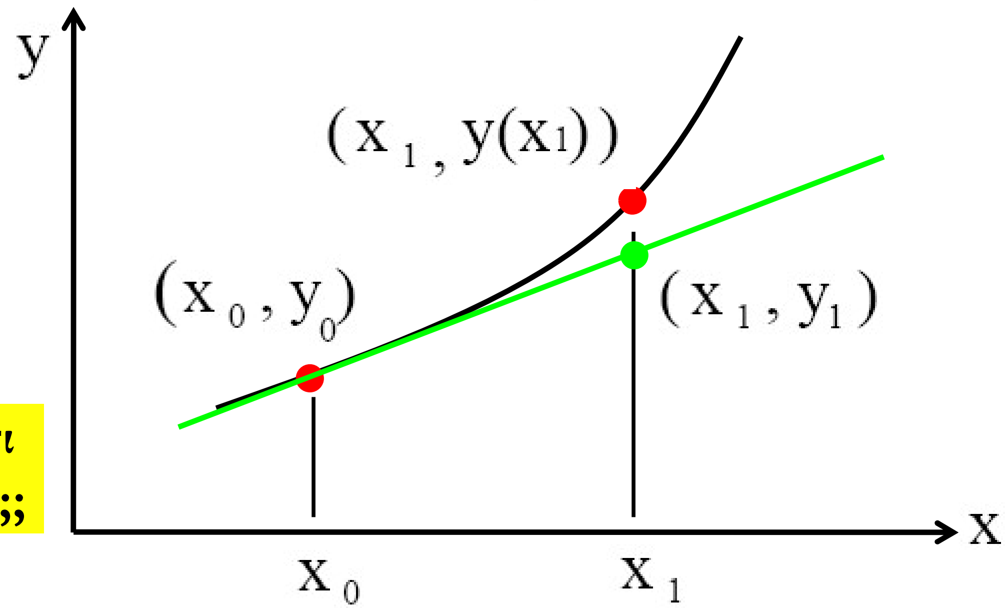
με αρχική συνθήκη

$$y(x_0) = y_0$$

Η μέθοδος Euler, η βασική εκπρόσωπος των μεθόδων επίλυσης που βασίζονται σε αναπτύγματα Taylor, είναι

$$y_{i+1} = y_i + \Delta x\, f(x_i, y_i) \qquad , \quad i \geq 1$$

ολοκληρώνει, γραφικά, ως



Πως δημιουργείται το σφάλμα και τι θάπρεπε να κάνω για να το μειώσω;;;

Σύνοψη Προηγουμένων: Η Μέθοδος Euler (2/2)

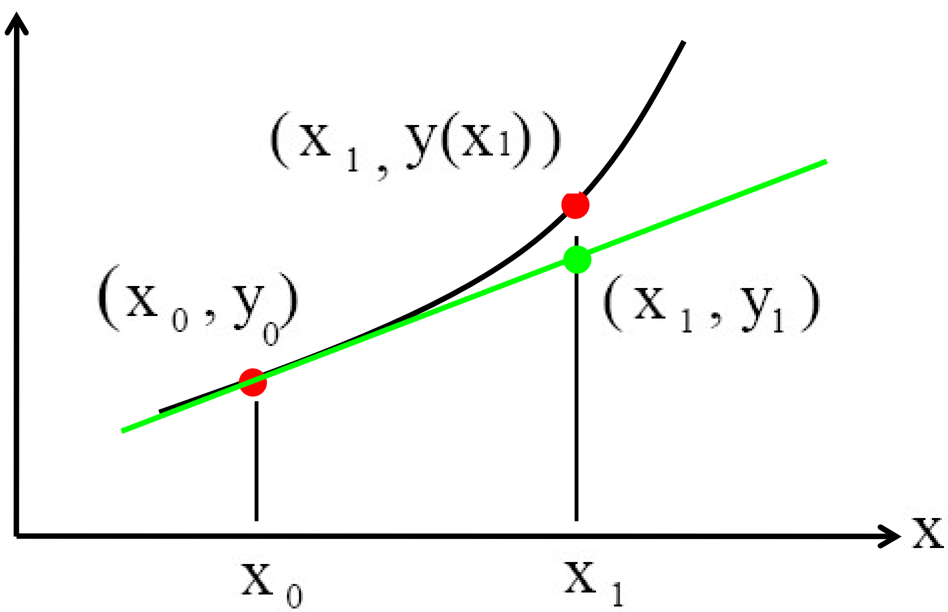
Τοπικό σφάλμα:

$$\epsilon_{i+1} = y_{i+1} - y(x_{i+1})$$

Αποδεικνύεται ότι η μέθοδος Euler, αν και το τοπικό της σφάλμα (για ένα βήμα είναι $O(\Delta x^2)$), εφαρμοζόμενη βήμα-βήμα για την επίλυση μιας σ.δ.ε. είναι μια συγκλίνουσα διαδικασία με συνολικό σφάλμα αποκοπής

$$|\epsilon_i| = |y_i - y(x_i)| = O(\Delta x)$$

Άρα, με ποιόν τρόπο, πρέπει να την εφαρμόζω (αν δεν διαθέτω καλύτερη επιλογή);;



Μέθοδοι Runge-Kutta

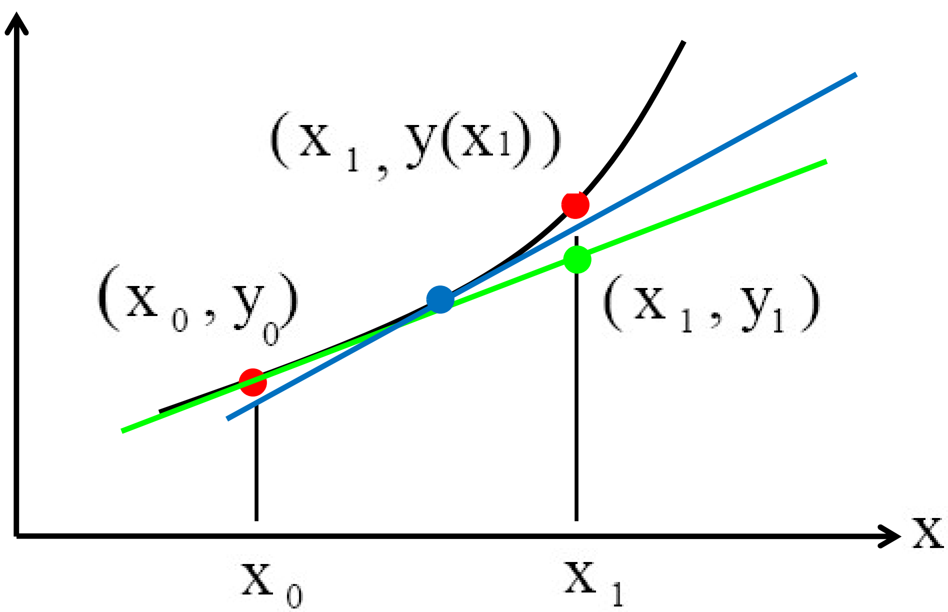
<u>Κατηγορία:</u> **Μέθοδοι απλού βήματος (*προσοχή στην ερμηνεία του όρου*)**

Οι μέθοδοι Runge-Kutta βασίζονται σε αναπτύγματα Taylor, όπου κρατάμε:

- **Όρους Δx^2 → Runge-Kutta 2ης τάξης**
- **Όρους Δx^3 → Runge-Kutta 3ης τάξης**
- **Όρους Δx^4 → Runge-Kutta 4ης τάξης**

<u>**Η ιδέα:**</u>
Να υπολογίζεται/ ανανεώνεται/ διορθώνεται η πρώτη παράγωγος σε πολλαπλά σημεία στο εσωτερικό του διαστήματος

$$x_i \leq x \leq x_{i+1}$$



Μέθοδος Runge-Kutta 2ης τάξης – Μαθηματική Διατύπωση

Αντί του Taylor Αναπτύγματος

$$\begin{aligned} y(x_{i+1}) &= y(x_i + \Delta x) = y(x_i) + \Delta x f(x_i, y(x_i)) \\ &+ \frac{\Delta x^2}{2!}\left[\frac{\partial f(x_i, y(x_i))}{\partial x} + \frac{\partial f(x_i, y(x_i))}{\partial y} f(x_i, y(x_i))\right] + O(\Delta x^3) \end{aligned}$$

Υιοθετείται σχήμα της μορφής

$$y(x_{i+1}) = y(x_i + \Delta x) = y(x_i) + w_1 k_1 + w_2 k_2$$

όπου

$$\begin{aligned} k_1 &= \Delta x f(x_i, y(x_i)) \\ k_2 &= \Delta x f(x_i + a\Delta x, y(x_i) + b k_1) \end{aligned}$$

Η εύρεση κατάλληλων συντελεστών w_1, w_2, α, b θα εξασφαλίσει την επιθυμητή ακρίβεια!

Υπολογιστικό κόστος: Πόσες κλήσεις της f(x,y) ανά βήμα;;;

Μέθοδος Runge-Kutta 2ης τάξης – Μαθηματική Διατύπωση

Αναπτύγματα…

$$k_2 \; = \; \Delta x f(x_i + a\Delta x, y(x_i) + bk_1) \quad \Rightarrow$$

$$k_2 \; = \; \Delta x \left[f(x_i, y(x_i)) + a\Delta x \frac{\partial f}{\partial x}(x_i, y(x_i)) + bk_1 \frac{\partial f}{\partial y}(x_i, y(x_i)) + O(\Delta x^2) \right]$$

Άρα, τελικά,

$$\begin{aligned} y(x_{i+1}) \; &= \; y(x_i + \Delta x) \; = \; y(x_i) + w_1 \Delta x f(x_i, y(x_i)) \\ &+ \; w_2 \Delta x \left[f(x_i, y(x_i)) + a\Delta x \frac{\partial f}{\partial x}(x_i, y(x_i)) + bk_1 \frac{\partial f}{\partial y}(x_i, y(x_i)) \right] \\ &+ \; O(\Delta x^3) \end{aligned}$$

και εξισώνουμε, όρο-προς-όρο, με το αρχικό ανάπτυγμα Taylor

Μέθοδος Runge-Kutta 2ης τάξης – Μαθηματική Διατύπωση

Προκύπτουσες συνθήκες:

$$\begin{aligned} w_1 + w_2 &= 1 \\ w_2 a &= \frac{1}{2} \\ w_2 b &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Σχόλια…

Μέθοδος Runge-Kutta 2ης τάξης – Ένα Σχήμα

Λύση: $w_1 = w_2 = \frac{1}{2}$ $\quad a = b = 1$

Το Σχήμα:

$$\boxed{\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + \frac{1}{2}k_1 + \frac{1}{2}k_2 \\ k_1 &= \Delta x \ f(x_i, y_i) \\ k_2 &= \Delta x \ f(x_{i+1}, y_i + k_1) \end{aligned}}$$

Ή σε ενιαία γραφή:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{\Delta x}{2}\left[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_i + \Delta x f(x_i, y_i))\right]$$

Συγκρίνετέ το με τον Euler: $y_{i+1} = y_i + \Delta x \ f(x_i, y_i)$

Μέθοδος Runge-Kutta 2ης τάξης - Κατανόηση

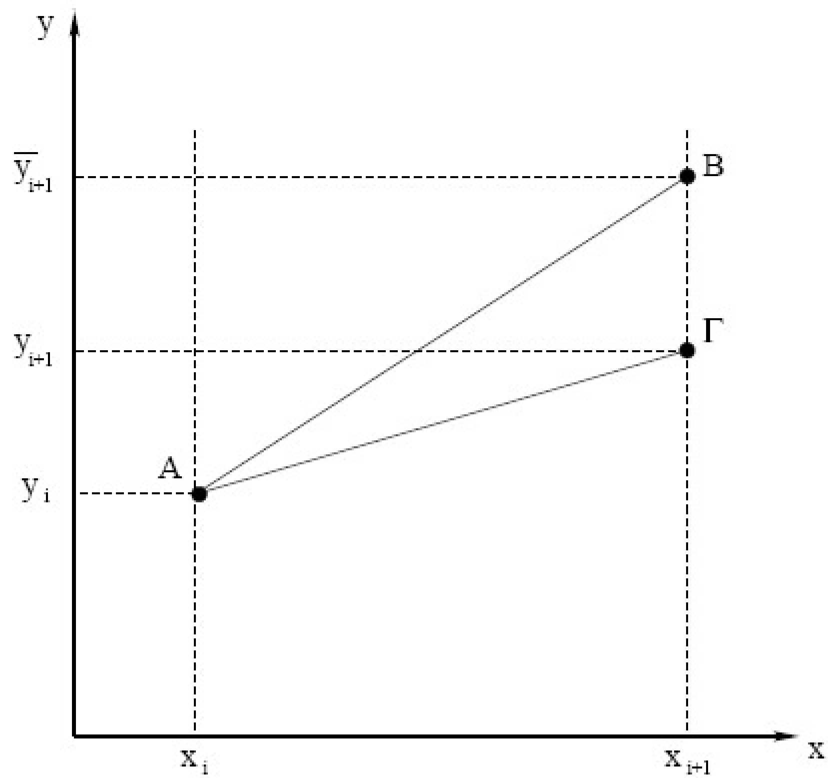
$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + \frac{1}{2}k_1 + \frac{1}{2}k_2 \\ k_1 &= \Delta x \; f(x_i, y_i) \\ k_2 &= \Delta x \; f(x_{i+1}, y_i + k_1) \end{aligned}$$

Με βάση την εναλλακτική γραφή:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{\Delta x}{2}\left[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, \overline{y}_{i+1})\right]$$

με

$$\overline{y}_{i+1} = y_i + \Delta x f(x_i, y_i)$$



Λύση:

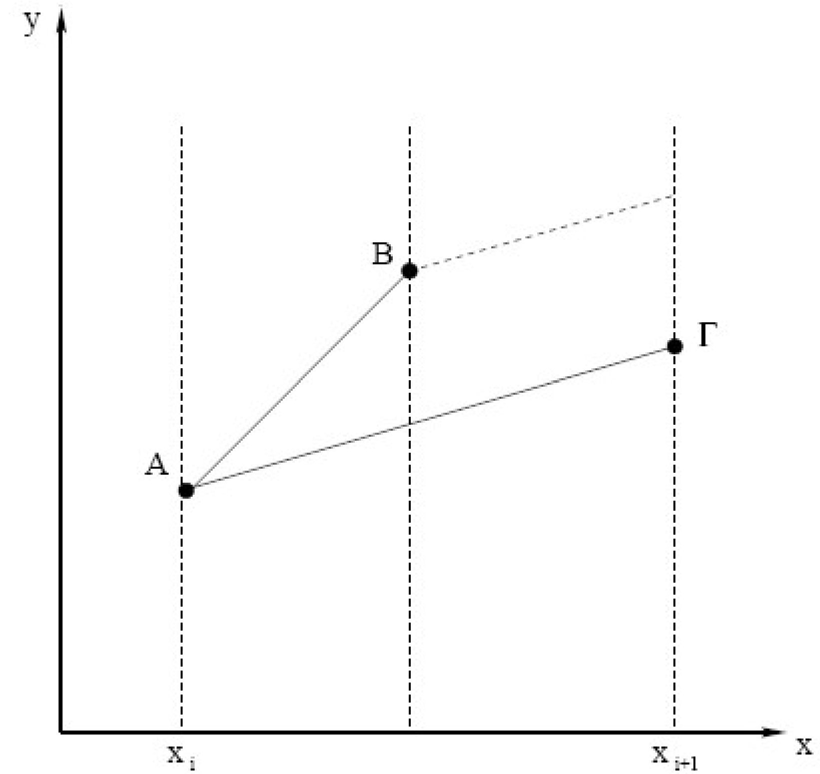
$$w_1 = 0 \quad , \quad w_2 = 1 \quad , \quad a = b = \frac{1}{2}$$

Το Σχήμα:

$$y_{i+1} = y_i + \Delta x f\left(x_i + \frac{\Delta x}{2}, \overline{y}_{i+\frac{1}{2}}\right)$$

με

$$\overline{y}_{i+\frac{1}{2}} = y_i + \frac{\Delta x}{2} f(x_i, y_i)$$



Μέθοδος Runge-Kutta 3ης τάξης

Γενικό σχήμα:

$$y_{i+1} = y_i + w_1 k_1 + w_2 k_2 + w_3 k_3$$

με

$$\begin{aligned} k_1 &= \Delta x \; f(x_i, y_i) \\ k_2 &= \Delta x \; f(x_i + a\Delta x, y_i + b k_1) \\ k_3 &= \Delta x \; f(x_i + c\Delta x, y_i + d k_2 + (c-d) k_1) \end{aligned}$$

λχ

$$\boxed{\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3) \\ k_1 &= \Delta x \; f(x_i, y_i) \\ k_2 &= \Delta x \; f(x_i + \frac{\Delta x}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}) \\ k_3 &= \Delta x \; f(x_i + \Delta x, y_i + 2k_2 - k_1) \end{aligned}}$$

με

Μέθοδος Runge-Kutta 4ης τάξης

<u>**Σχήμα (1):**</u>

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

με

$$\begin{aligned} k_1 &= \Delta x\ f(x_i, y_i) \\ k_2 &= \Delta x\ f(x_i + \frac{\Delta x}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}) \\ k_3 &= \Delta x\ f(x_i + \frac{\Delta x}{2}, y_i + \frac{k_2}{2}) \\ k_4 &= \Delta x\ f(x_{i+1}, y_i + k_3) \end{aligned}$$

<u>**Σχήμα (2):**</u>

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{8}(k_1 + 3k_2 + 3k_3 + k_4)$$

με

$$\begin{aligned} k_1 &= \Delta x\ f(x_i, y_i) \\ k_2 &= \Delta x\ f(x_i + \frac{\Delta x}{3}, y_i + \frac{k_1}{3}) \\ k_3 &= \Delta x\ f(x_i + \frac{2\Delta x}{3}, y_i - \frac{k_1}{3} + k_2) \\ k_4 &= \Delta x\ f(x_{i+1}, y_i + k_1 - k_2 + k_3) \end{aligned}$$

Μέθοδος Runge-Kutta 4ης τάξης για ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΣΔΕ

Λύστε το σύστημα M εξισώσεων

$$
\begin{aligned}
\frac{dy_1}{dx} &= f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_M) \\
\frac{dy_2}{dx} &= f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_M) \\
&\vdots \\
\frac{dy_M}{dx} &= f_M(x, y_1, y_2, \ldots, y_M)
\end{aligned}
$$

με αρχικές τιμές

$$
\begin{aligned}
y_1(x_0) &= y_{1,0} \\
y_2(x_0) &= y_{2,0} \\
&\vdots \\
y_M(x_0) &= y_{M,0}
\end{aligned}
$$

Προσοχή στους διπλούς δείκτες

Μέθοδος Runge-Kutta 4ης τάξης για ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΣΔΕ

$$y_{m,i+1} = y_{m,i} + \frac{1}{6}\left(k_{m,1} + 2k_{m,2} + 2k_{m,3} + k_{m,4}\right) \qquad , m = 1, \ldots, M$$

$$\begin{aligned}
k_{m,1} &= \Delta x \; f_m(x_i, y_{1,i}, y_{2,i}, \ldots, y_{M,i}) &&, m = 1, \ldots, M \\
y_m^{(1)} &= y_{m,i} + \frac{1}{2} k_{m,1} &&, m = 1, \ldots, M \\
k_{m,2} &= \Delta x \; f_m(x_i + \frac{\Delta x}{2}, y_1^{(1)}, y_2^{(1)}, \ldots, y_M^{(1)}) &&, m = 1, \ldots, M \\
y_m^{(2)} &= y_{m,i} + \frac{1}{2} k_{m,2} &&, m = 1, \ldots, M \\
k_{m,3} &= \Delta x \; f_m(x_i + \frac{\Delta x}{2}, y_1^{(2)}, y_2^{(2)}, \ldots, y_M^{(2)}) &&, m = 1, \ldots, M \\
y_m^{(3)} &= y_{m,i} + k_{m,3} &&, m = 1, \ldots, M \\
k_{m,4} &= \Delta x \; f_m(x_i + \Delta x, y_1^{(3)}, y_2^{(3)}, \ldots, y_M^{(3)}) &&, m = 1, \ldots, M
\end{aligned}$$

$$y_{m,i+1} = y_{m,i} + \frac{1}{6}\left(k_{m,1} + 2k_{m,2} + 2k_{m,3} + k_{m,4}\right) \qquad , m = 1, \ldots, M$$

Προσοχή πως γίνονται οι βρόχοι (σειρά πράξεων)