NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY OF ATHENS
School of Mechanical Engineering
Lab. Of Thermal Turbomachines
Parallel CFD & Optimization Unit (PCOpt/NTUA)

Αριθμητική Επίλυση Συνήθων Διαφορικών Εξισώσεων (Σ.Δ.Ε.)

Kyriakos C. GIANNAKOGLOU, Professor NTUA
kgianna@mail.ntua.gr
http://velos0.ltt.mech.ntua.gr/research

Αριθμητική Επίλυση ΣΔΕ

ΣΔΕ n-ιοστής τάξης:

$$F\left(x\ ,\ y\ ,\ \frac{dy}{dx}\ ,\ \frac{d^2y}{dx^2}\ ,\ \ldots\ \frac{d^ny}{dx^n}\right)\ =\ 0$$

Ανεξάρτητη Μεταβλητή **Εξαρτημένη Μεταβλητή**

Γραμμική ΣΔΕ n-ιοστής τάξης:

$$a_n\frac{d^ny}{dx^n}\ +\ a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\ +\ \ldots\ +\ a_2\frac{d^2y}{dx^2}\ +\ a_1\frac{dy}{dx}\ +\ a_0\ =\ 0$$

αν όλοι οι συν/στές $α_i$ είναι ανεξάρτητοι του y (μπορούν να συναρτώνται μόνο του x

Αριθμητική Επίλυση ΣΔΕ

Παραδείγματα Μη-Γραμμικών ΣΔΕ:

$$y\frac{dy}{dx} + ay = 0$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + ay = 0$$

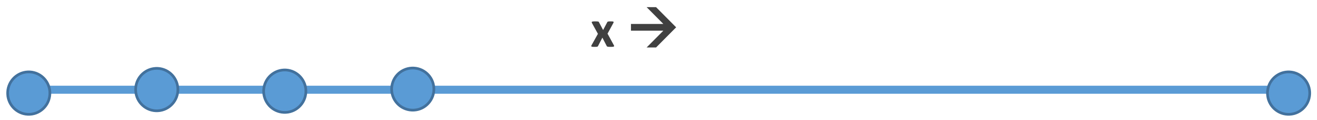
Ομογενείς (RHS=0)

Κατηγοριοποίηση Προβλημάτων ΣΔΕ

1. *πρόβλημα αρχικών τιμών* (initial-value problem), το πρόβλημα της αριθμητικής επίλυσης μιας *σ.δ.ε.* στο οποίο έχουν καθοριστεί τιμές του $y(x)$ ή των παραγώγων του στην ίδια τιμή $x = x_0$ της ανεξάρτητης μεταβλητής. Οι με τον τρόπο αυτό καθοριζόμενες τιμές αποτελούν τις *αρχικές συνθήκες* του προβλήματος.

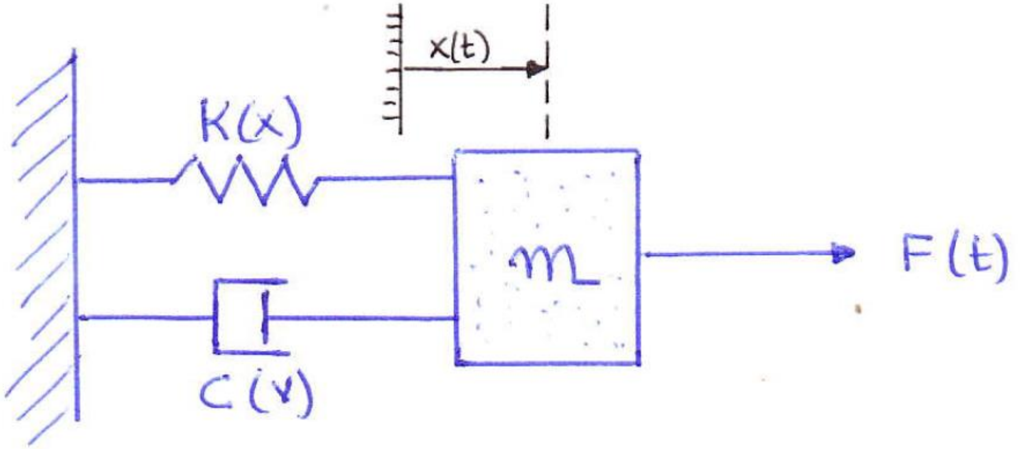
2. *πρόβλημα οριακών τιμών* (ή *συνοριακών τιμών*, boundary value problem), το πρόβλημα της αριθμητικής επίλυσης μιας *σ.δ.ε.* με καθορισμένες τιμές του y ή/και των παραγώγων του σε περισσότερες της μιας θέσης του x. Οι έτσι καθοριζόμενες τιμές αποτελούν τις *οριακές* ή *συνοριακές συνθήκες* του προβλήματος.

Διακριτοποίηση (Discretization) του χωρίου επίλυσης – Δημιουργία κόμβων (nodes)



Κατηγοριοποίηση Προβλημάτων ΣΔΕ

Ένα Παράδειγμα Προβλήματος ΣΔΕ Αρχικών Τιμών



$$m \cdot a = m \frac{dV}{dt} = m \cdot \frac{dx^2}{dt^2} = F(t) - C(V)\frac{dx}{dt} - K(x)x$$

$$\boxed{m \frac{d^2x}{dt^2} + C(V)\frac{dx}{dt} + K(x)x = F(t)}$$

Με αρχικές συνθήκες:

$$x(t_0) = x_0$$
$$V(t_0) = V_0$$

Αριθμητική Επίλυση ΣΔΕ Υψηλότερης Τάξης

Ένα παράδειγμα:

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + xy = 0$$

Ορίζοντας την:

$$\phi = \frac{dy}{dx}$$

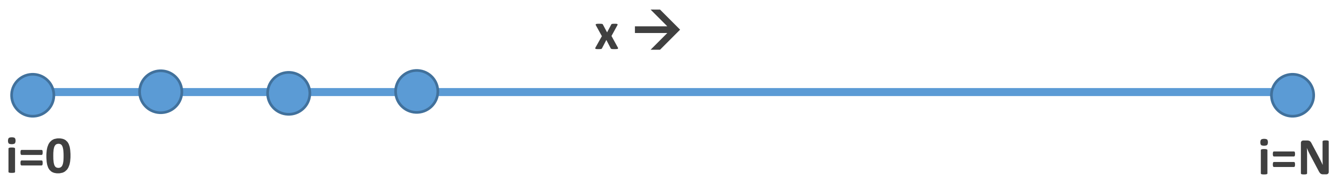
Μετασχηματίζεται στο σύστημα:

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{dy}{dx} - \phi &= 0 \\ x^2 \frac{d\phi}{dx} + x\phi + xy &= 0 \end{aligned}}$$

ΓΕΝΙΚΕΥΣΗ !!!!

Διακριτοποίηση χωρίου

N+1 Διακριτά Σημεία (N διαστήματα) μεταξύ x=α και x=β



$$x_i \ , \ i = 0, \ldots, N \qquad \Delta x = \frac{\beta - \alpha}{N}$$

$$x_i = x_0 + i\,\Delta x \quad , \quad i = 0, 1, 2, \ldots, N$$

Λχ. σε ένα πρόβλημα Αρχικών Τιμών: $y(x_0) = y_0 = known$

Σφάλμα Διακριτοποίησης: $\boxed{\epsilon = y_i - y(x_i)}$

Ταξινόμηση Μεθόδων Αρ. Επίλυσης ΣΔΕ

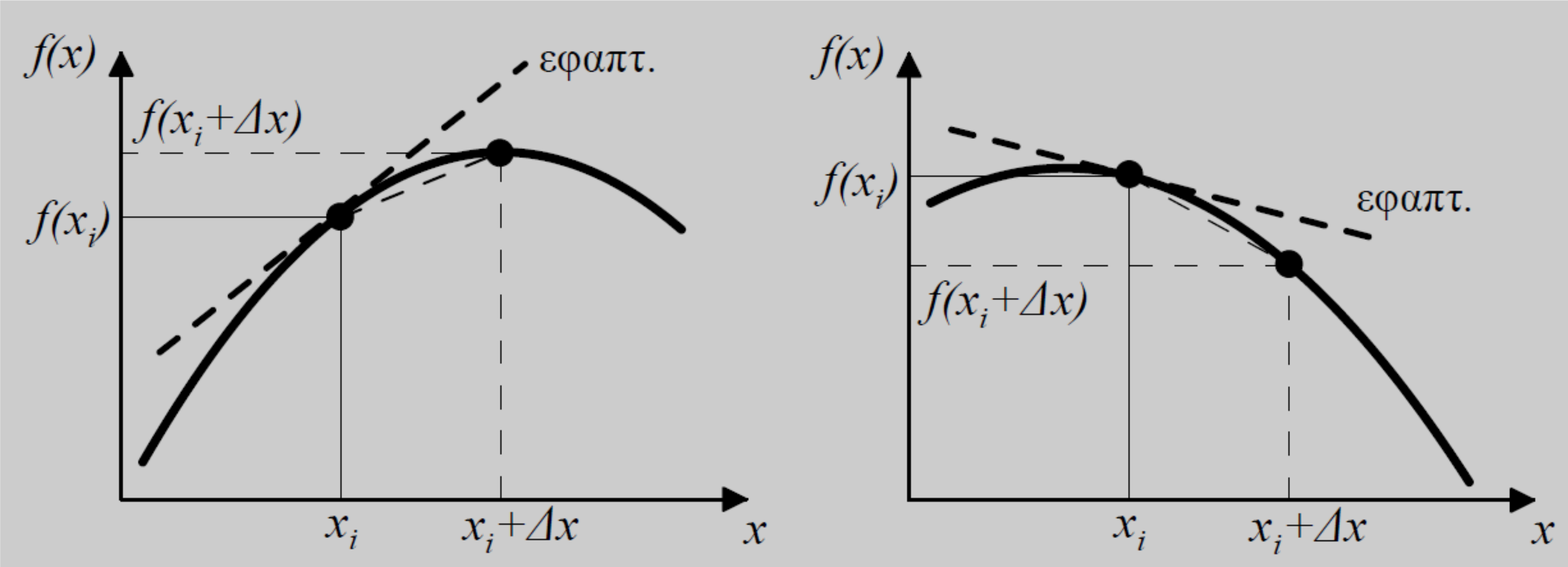
- **Άμεσες Μέθοδοι που βασίζονται σε αναπτύγματα Taylor**
- **Μέθοδοι Βασισμένες σε τεχνικές Αριθμητικής Ολοκλήρωσης**

- **Τεχνικές Runge-Kutta (τεχνικές απλού βήματος)**
- **Μέθοδοι Πρόβλεψης-Διόρθωσης (Predictor-Corrector) ή Τεχνικές Πολλαπλών Βημάτων**

Παρένθετη Ύλη: Πεπερασμένες Διαφορές (Finite-Differences, ΠΔ, FD)

Αριθμητική Παραγώγιση:

$$f'(x_i) \equiv \frac{df(x_i)}{dx} \equiv \left(\frac{df}{dx}\right)_{x=x_i} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_i+\Delta x)-f(x_i)}{\Delta x}$$



Παρένθετη Ύλη: Πεπερασμένες Διαφορές (Finite-Differences, ΠΔ, FD)

Εκφράσεις Πεπερασμένων Διαφορών:

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)h + \frac{f''(x_i)}{2!}h^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_i)}{n!}h^n + R_n$$

$$h = \Delta x = x_{i+1} - x_i = x_i - x_{i-1}$$

$$f(x_{i-1}) = f(x_i) - f'(x_i)h + \frac{f''(x_i)}{2!}h^2 - \ldots \pm \frac{f^{(n)}(x_i)}{n!}h^n + R_n$$

Πρόσω Σχήμα Παραγώγισης (Forward FD):

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} - O(h)$$

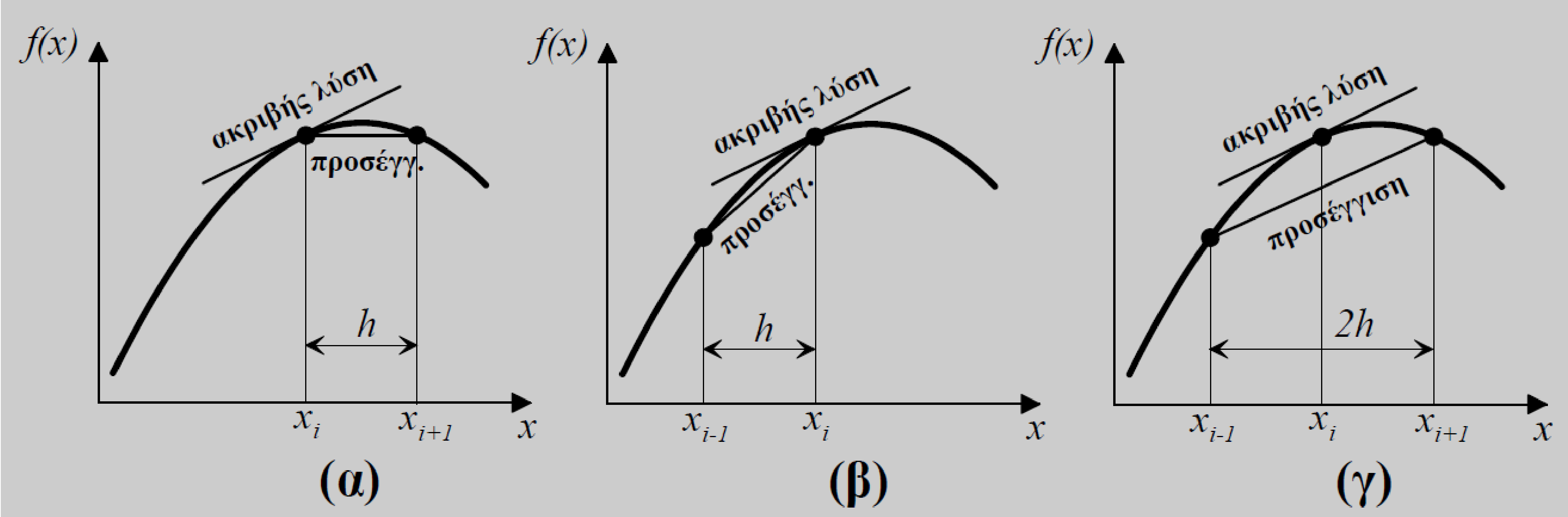
Πίσω Σχήμα Παραγώγισης (Backward FD):

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h} + O(h)$$

Κεντρικό Σχήμα Παραγώγισης (Central FD):

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2h} - O(h^2)$$

Παρένθετη Ύλη: Πεπερασμένες Διαφορές (Finite-Differences, ΠΔ, FD)



Παρένθετη Ύλη: Πεπερασμένες Διαφορές (Finite-Differences, ΠΔ, FD)

Εκφράσεις Πεπερασμένων Διαφορών:

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)h + \frac{f''(x_i)}{2!}h^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_i)}{n!}h^n + R_n$$

$$h = \Delta x = x_{i+1} - x_i = x_i - x_{i-1}$$

$$f(x_{i-1}) = f(x_i) - f'(x_i)h + \frac{f''(x_i)}{2!}h^2 - \ldots \pm \frac{f^{(n)}(x_i)}{n!}h^n + R_n$$

$$f'(x_i) \cong \frac{-f(x_{i+2}) + 4f(x_{i+1}) - 3f(x_i)}{2h}, \qquad O(h^2)$$

Πρόσω Σχήμα Παραγώγισης (Forward FD):

$$f'(x_i) \cong \frac{3f(x_i) - 4f(x_{i-1}) + f(x_{i-2})}{2h}, \qquad O(h^2)$$

Πίσω Σχήμα Παραγώγισης (Backward FD):

Παρένθετη Ύλη: Πεπερασμένες Διαφορές (Finite-Differences, ΠΔ, FD)

Εκφράσεις Πεπερασμένων Διαφορών:

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)h + \frac{f''(x_i)}{2!}h^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_i)}{n!}h^n + R_n$$

$$h = \Delta x = x_{i+1} - x_i = x_i - x_{i-1}$$

$$f(x_{i-1}) = f(x_i) - f'(x_i)h + \frac{f''(x_i)}{2!}h^2 - \ldots \pm \frac{f^{(n)}(x_i)}{n!}h^n + R_n$$

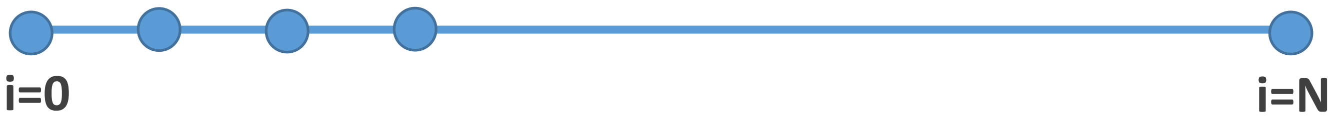
$$f''(x_i) \cong \frac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1})}{h^2}, \qquad O(h^2)$$

Αρ. Επίλυσης ΣΔΕ με τη Μέθοδο Euler - Γενικά

Το Πρόβλημα (ΣΔΕ Πρώτης Τάξης):

$$F\left(x\ ,\ y\ ,\ \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= f\,(x\ ,\ y\ ) \\ y(x_0) &= y_0 = known \end{aligned}}$$



Βασισμένη σε (απλό) ανάπτυγμα Taylor:

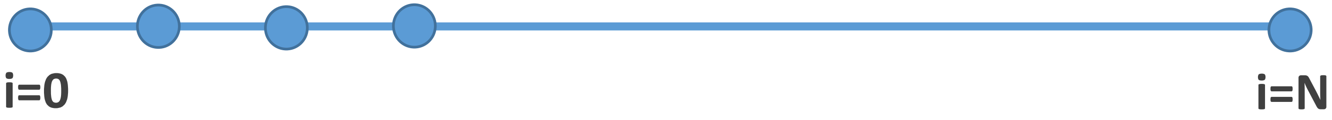
$$y(x_0+\Delta x) = y(x_0) + \frac{\Delta x}{1!} f\,(x_0, y(x_0)) + \frac{\Delta x^2}{2!} f'\,(x_0, y(x_0)) + \frac{\Delta x^3}{3!} f''\,(x_0, y(x_0)) + \ldots$$

όπου

$$f'\,(x, y(x)) = \frac{d}{dx} f\,(x, y(x)) \qquad f''\,(x, y(x)) = \frac{d^2}{dx^2} f\,(x, y(x))$$

Αρ. Επίλυσης ΣΔΕ με τη Μέθοδο Euler - Γενικά

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= f\,(x\;,\;y\;) \\ y(x_0) &= y_0 = known \end{aligned}}$$



$$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx} f\,(x, y(x)) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}$$

ΚΟΚ

Αρ. Επίλυσης ΣΔΕ με τη Μέθοδο Euler – Ένα Παράδειγμα

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = x + y} \qquad y(x_0) = y_0 \qquad \text{με } x_0 = 2 \text{ και } y_0 = -2.$$

$$f(x,y) = x + y \qquad \left\{ \begin{aligned} f'(x,y) &= 1 + 1 \cdot \frac{dy}{dx} = 1 + x + y \\ f''(x,y) &= 1 + 1 \cdot \frac{dy}{dx} = 1 + x + y \\ &\vdots \\ f^{(n)}(x,y) &= 1 + 1 \cdot \frac{dy}{dx} = 1 + x + y \end{aligned} \right.$$

$$y(x_0 + \Delta x) = y(x_0) + \frac{\Delta x}{1!}[x_0 + y(x_0)] + \frac{\Delta x^2}{2!}[1 + x_0 + y(x_0)] + \frac{\Delta x^3}{3!}[1 + x_0 + y(x_0)] + \ldots$$

Αρ. Επίλυσης ΣΔΕ με τη Μέθοδο Euler – Ένα Παράδειγμα

Προσθέτοντας και αφαιρώντας … :

$$
\begin{aligned}
y(x_0+\Delta x) &= -\ x_0 - \Delta x - 1 + [1+x_0+y(x_0)] + \frac{\Delta x}{1!}[1+x_0+y(x_0)] \\
&\quad + \frac{\Delta x^2}{2!}[1+x_0+y(x_0)] + \frac{\Delta x^3}{3!}[1+x_0+y(x_0)] + \dots \\
&= -\ x_0 - \Delta x - 1 + [1+x_0+y(x_0)] \cdot \underbrace{\left[1+\Delta x+\frac{\Delta x^2}{2!}+\frac{\Delta x^3}{3!}+\dots\right]}_{e^{\Delta x}}
\end{aligned}
$$

➡ $y(x) = -(x+1) + C\,e^{x}$

➡ $y_0 = -(x_0+1) + Ce^{x_0} \Rightarrow C = e^{-x_0}(1+x_0+y_0)$ ➡ $C = 0.13533528$

➡ $y(x) = -(x+1) + (1+x_0+y_0)\,e^{x-x_0}$

Αρ. Επίλυσης ΣΔΕ με τη Μέθοδο Euler – Ένα Παράδειγμα

$$\Rightarrow \quad y(x) = -(x+1) + (1+x_0+y_0)\, e^{x-x_0}$$

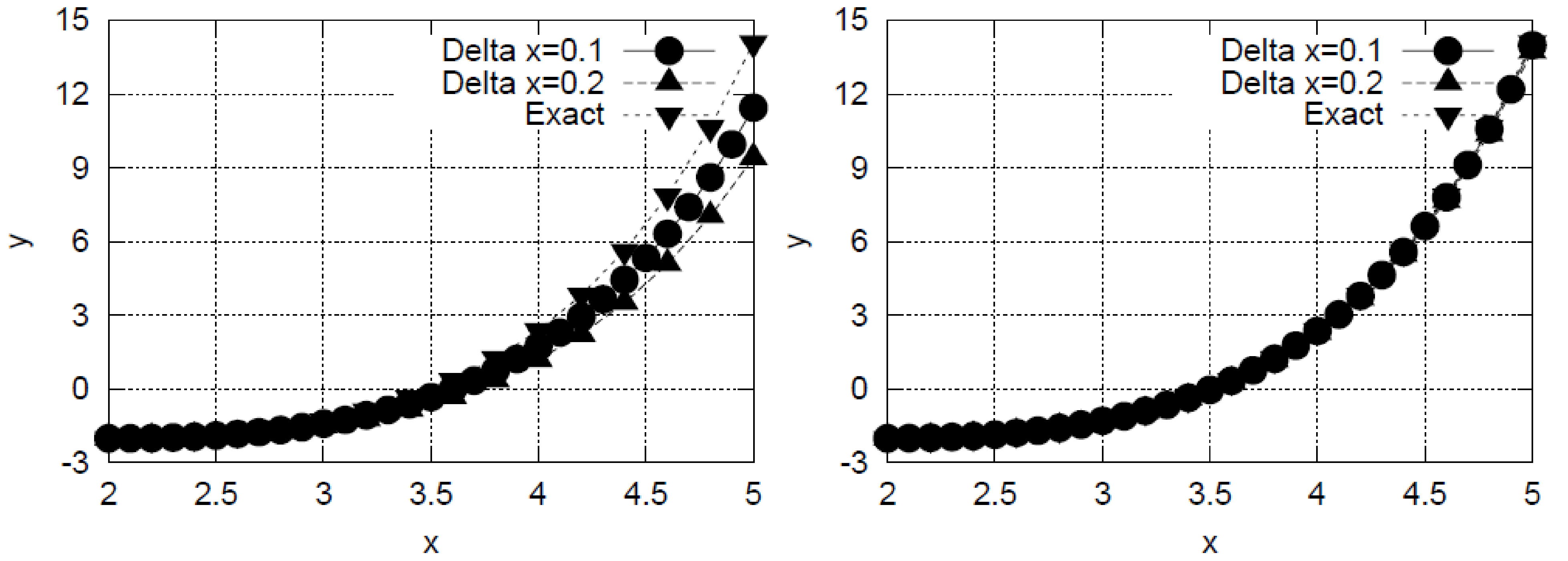
$$\Rightarrow \quad y(x_0+\Delta x) = -x_0 - \Delta x - 1 + (1+x_0+y(x_0))\, e^{\Delta x}$$

Σύγκριση της ακριβούς λύσης με αυτήν του αναπτύγματος Taylor:

$$y(x_0+\Delta x) = - \; x_0 - \Delta x - 1 + [1+x_0+y(x_0)] \cdot \left[1 + \Delta x + \frac{\Delta x^2}{2!} + \frac{\Delta x^3}{3!} + \ldots\right]$$

Αποκοπή???? → Σφάλμα

Αρ. Επίλυσης ΣΔΕ με τη Μέθοδο Euler – Ένα Παράδειγμα



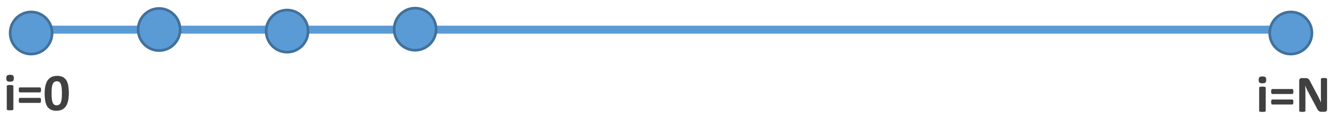
Σχήμα 6.1: Γραφική αναπαράσταση της αριθμητικής λύσης της σ.δ.ε. 6.11, σε σύγκριση με την αναλυτική λύση. Αριστερά παρουσιάζονται τα αποτελέσματα για αποκοπή όρων ίσης ή μεγαλύτερης δύναμης του Δx^2 στην τελευταία αγκύλη της 6.15. Δεξιά παρουσιάζονται τα αποτελέσματα για αποκοπή όρων ίσης ή μεγαλύτερης δύναμης του Δx^3. Σε κάθε περίπτωση, χρησιμοποιήθηκαν δύο βήματα $\Delta x = 0.1$ και $\Delta x = 0.2$.

Αρ. Επίλυσης ΣΔΕ με τη Μέθοδο Euler

Το Πρόβλημα (ΣΔΕ Πρώτης Τάξης):

$$F\left(x\ ,\ y\ ,\ \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= f\,(x\ ,\ y\ ) \\ y(x_0) &= y_0 = known \end{aligned}}$$



$$\begin{aligned} y_1 &= y(x_0) + \Delta x\ f(x_0, y(x_0)) \\ y_{i+1} &= y_i + \Delta x\ f(x_i, y_i) \qquad , \quad i \geq 1 \end{aligned}$$

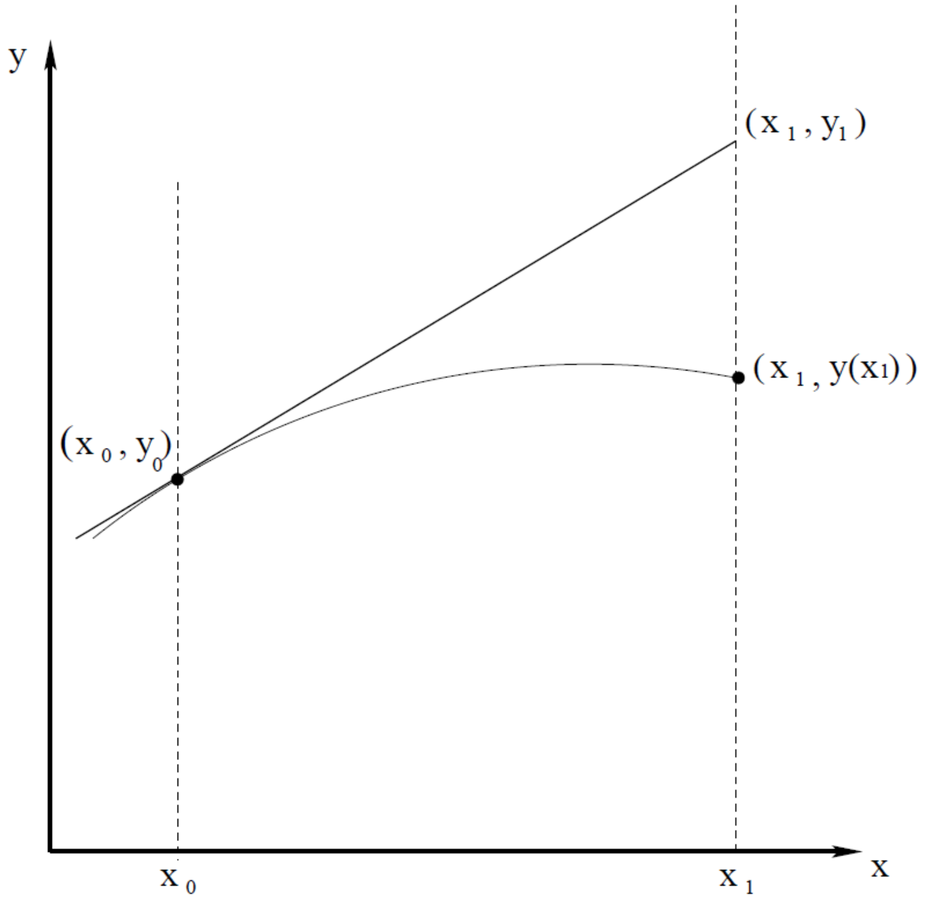
Μετάδοση Σφάλματος στη Μέθοδο Euler

Το Πρόβλημα (ΣΔΕ Πρώτης Τάξης):

$$y_{i+1} = y_i + \Delta x \, f(x_i, y_i) \qquad , \quad i \geq 1$$

$$\epsilon_{i+1} = y_{i+1} - y(x_{i+1})$$

$$\Delta\epsilon_i = \epsilon_{i+1} - \epsilon_i = \Delta x \left[f(x_i, y_i) - f(x_i, y(x_i)) \right] + \frac{\Delta x^2}{2!} f'\left(\xi, y(\xi)\right)$$



Τοπικό σφάλμα αποκοπής O(Δx²):

Συνολικό σφάλμα αποκοπής O(Δx):

Τα υπόλοιπα στο βιβλίο!

Μετάδοση Σφάλματος στη Μέθοδο Euler

Η Μέθοδος Euler σε Ψευδοκώδικα

π.χ. για να λύνει την $\frac{dy}{dx} = \underbrace{1+y^2+x^3}_{f(x,y)}$

$y(2)=?$ με $y(1)=-4$

b a Y

έστω με 100 steps.

n

Μετάδοση Σφάλματος στη Μέθοδο Euler

Η Μέθοδος Euler σε Ψευδοκώδικα

```
a = 1
b = 2
n = 100
y = -4

Δx = (b-a)/n
x = a

PRINT (0, x, y)

DO k = 1, n
    y = y + Δx · f(x,y)    ← πρώτα!
    x = x + Δx             ← μετά!
    PRINT (k, x, y)
ENDDO
```

Πίνακας

Πίνακας

Πίνακας

Πίνακας