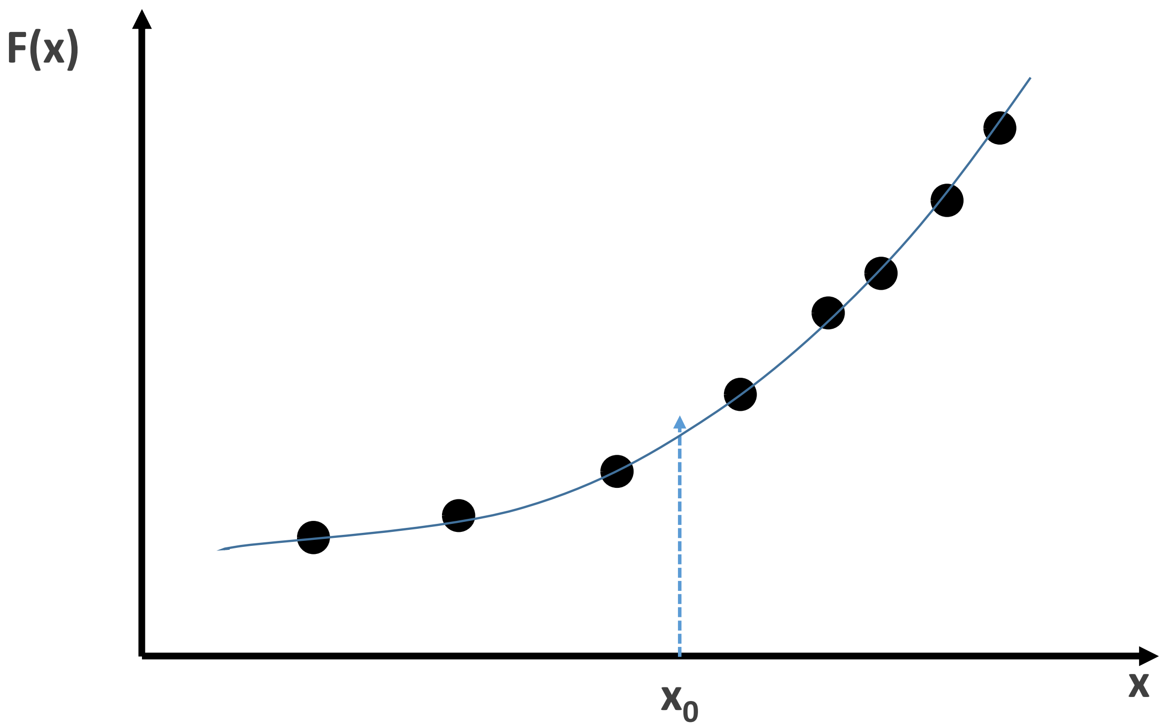
NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY OF ATHENS
School of Mechanical Engineering
Fluids Section - Lab. Of Thermal Turbomachines
Parallel CFD & Optimization Unit (PCOpt/NTUA)

Παρεμβολή και Προσέγγιση

Κυριάκος Χ. ΓΙΑΝΝΑΚΟΓΛΟΥ, Καθηγητής ΕΜΠ
kgianna@mail.ntua.gr
http://velos0.ltt.mech.ntua.gr/kgianna
http://velos0.ltt.mech.ntua.gr/research

Παρεμβολή (Interpolation)

►**Μετεπεξεργασία και εκμετάλλευση δεδομένων από πειράματα/μετρήσεις:**



x=είσοδος στο πείραμα
y ή F(x)=έξοδος / απόκριση

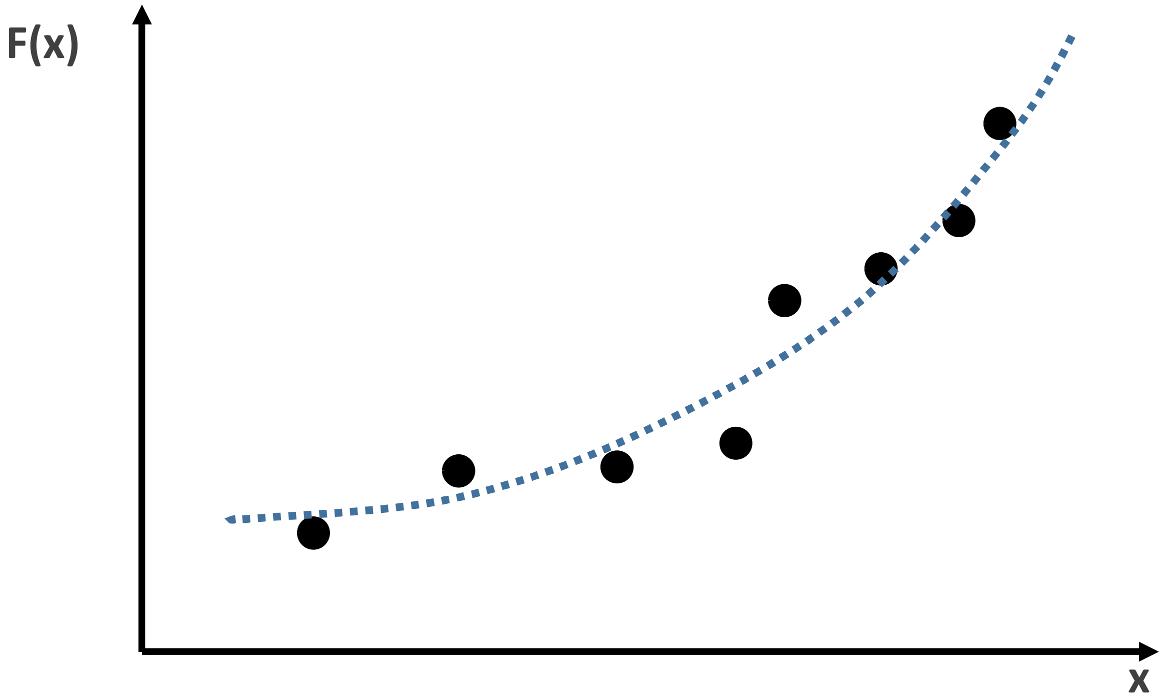
<u>Πιθανά ζητούμενα:</u>

- **Η y=f(x) ως μια συνάρτηση (αναλυτική έκφραση) που να προσεγγίζει βέλτιστα τη μετρηθείσα απόκριση.**
- **Για μια νέα τιμή εισόδου x_0, ποια η αναμενόμενη απόκριση;**

Παρεμβολή (Interpolation)!

Προσέγγιση (Approximation)

► **Προσέγγιση σε περίπτωση μετρήσεων με «θόρυβο» (“noise”)**

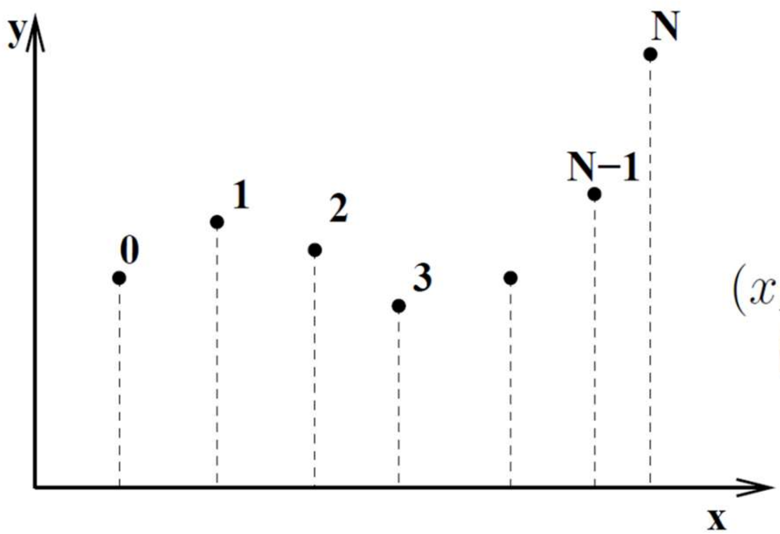


Προσέγγιση (Approximation)!

Στόχος: Ελαχιστοποίηση του σφάλματα μεταξύ της καμπύλης προσέγγισης και των μετρηθέντων σημείων.

(ορισμός σφάλματος;)

Παρεμβολή (Interpolation)



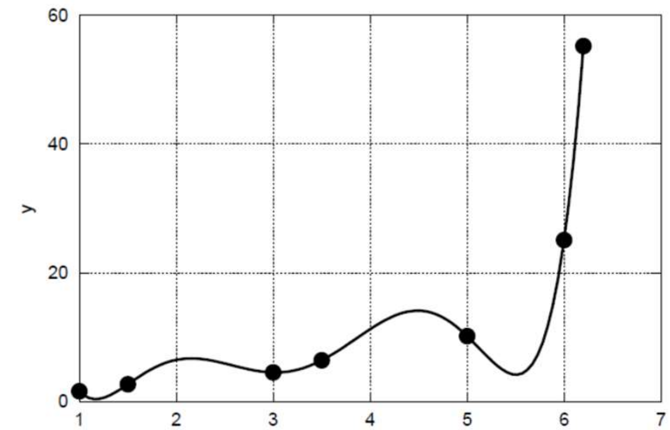
$$
\begin{array}{c}
(x_0 \ , \ y_0) \\
(x_1 \ , \ y_1) \\
(x_2 \ , \ y_2) \\
\vdots \\
(x_{N-1} \ , \ y_{N-1}) \\
(x_N \ , \ y_N)
\end{array}
$$

(N+1) διαθέσιμα σημεία

Στην Παρεμβολή πρέπει να βρεθεί μια συνάρτηση (συναρτηση δεν σημαίνει αναγκαστικά πολυώνυμο, αν και αυτό είναι συνήθης παραδοχή) f(x) ώστε:

$$y_i = f(x_i) \quad , \qquad i = 0, \ldots, N$$

Πολυωνυμική Παρεμβολή



Παράδειγμα πολυωνυμικής Παρεμβολής με N+1=7 σημεία

$$(1.00, 1.64)\ ,\ (1.50, 2.71)\ ,\ (3.00, 4.55)\ ,\ (3.50, 6.43)\ ,$$
$$(5.00, 10.18)\ ,\ (6.00, 25.10)\ ,\ (6.20, 55.20)$$

Πολυώνυμο 6^{ου} βαθμού (Μοναδικότητα)

$$g(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + a_6 x^6$$

Εύρεση συντελεστών πολυωνύμου - Σχόλια

$$g(x) = 182.3503 - 489.5377x + 502.8798x^2 - 251.464x^3 + 65.4774x^4 - 8.4985x^5 + 0.4333x^6$$

Πολυωνυμική Παρεμβολή

Περί Βαθμού του Πολυωνύμου (για N+1 σημεία)

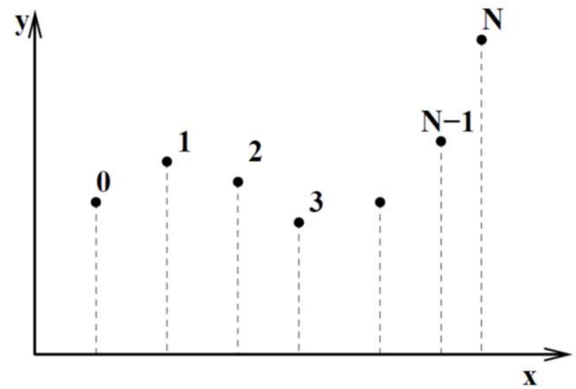
$$g(x) \;=\; a_0 + \; a_1 x + \; a_2 x^2 + \; \ldots a_{N-1} x^{N-1} + \; a_N x^N$$

Πρέπει:

$$y_i \;=\; g(x_i) \qquad , \qquad i = 0, \ldots, N$$

Σύστημα προς επίλυση (ορίζουσα του Vandermonde)

$$C \overrightarrow{a} \;=\; \overrightarrow{y}$$



$$\begin{gathered}(x_0 \;,\; y_0)\\(x_1 \;,\; y_1)\\(x_2 \;,\; y_2)\\\vdots\\(x_{N-1} \;,\; y_{N-1})\\(x_N \;,\; y_N)\end{gathered}$$

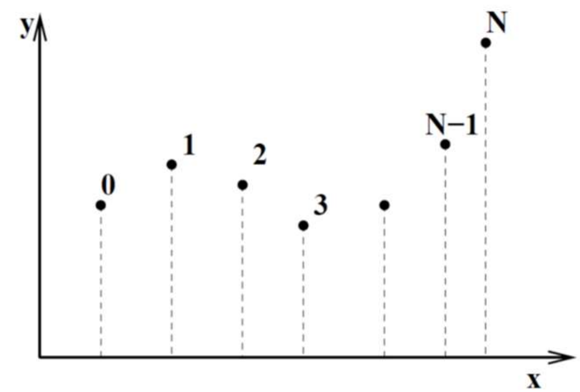
Πολυωνυμική Παρεμβολή

Σύστημα προς επίλυση (ορίζουσα του Vandermonde)

$$C\overrightarrow{a} = \overrightarrow{y}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^N \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^N \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_N & x_N^2 & \dots & x_N^N \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{a} = (a_0 \,,\, a_1 \,,\, a_2 \,,\, \dots \,,\, a_N)^T$$
$$\overrightarrow{y} = (y_0 \,,\, y_1 \,,\, y_2 \,,\, \dots \,,\, y_N)^T$$



$$\begin{array}{c} (x_0 \,,\, y_0) \\ (x_1 \,,\, y_1) \\ (x_2 \,,\, y_2) \\ \vdots \\ (x_{N-1} \,,\, y_{N-1}) \\ (x_N \,,\, y_N) \end{array}$$

Πολυώνυμα Παρεμβολής κατά Lagrange

N+1 Πολυώνυμα Βάσης (Φυσική Σημασία)

$$L_j(x_i) \;=\; \delta_i^j \qquad , \; i,j \in [0,N]$$

όπου (Kronecker) $\delta_i^j = 1$ όταν $i = j$.

$$L_j \;=\; \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})\ldots(x-x_{N-1})(x-x_N)}{(x_j-x_0)(x_j-x_1)\ldots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\ldots(x_j-x_{N-1})(x_j-x_N)}$$

$$= 0, \ldots, N$$

Τύπος Παρεμβολής κατά Lagrange: $g(x) \;=\; \sum_{j=0}^{N} y_j L_j(x)$

Προφανώς ισχύει ότι (Παρεμβολή!):

$$g(x_i) \;=\; \sum_{j=0}^{N} y_j L_j(x_i) \;=\; \sum_{j=0}^{N} y_j \delta_i^j \;=\; y_i \quad , \quad i = 0, \ldots, N$$

Πολυώνυμα Παρεμβολής κατά Lagrange

Εναλλακτική Γραφή:

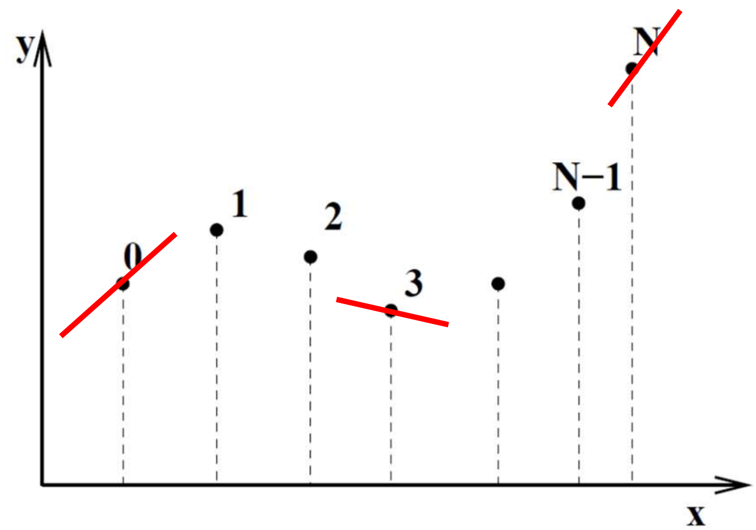
$$L_j = \frac{\omega(x)}{(x-x_j)\omega'(x_j)} \quad , \quad j=0,\ldots,N$$

$$\omega(x) = \prod_{k=0}^{N}(x-x_k)$$

Άσκηση στον πίνακα…

Πολυώνυμα Παρεμβολής κατά Hermite

Με δεδομένα τα x_i, y_i, dy/dx_i σε (N+1) σημεία



Πολυώνυμα Βάσης Hermite:

$$H_j(x_i) = \delta_i^j \quad , \quad H_j'(x_i) = 0$$

$$\overline{H}_j(x_i) = 0 \quad , \quad \overline{H}_j'(x_i) = \delta_i^j \quad , \ j = 0, \ldots, N$$

Πολυώνυμα Παρεμβολής κατά Hermite

Με δεδομένα τα x_i, y_i, dy/dx_i σε (N+1) σημεία. Κέρδος;;; (πότε;;;)

Πολυώνυμα Βάσης Hermite:

$$\begin{aligned} H_j(x_i) &= \delta_i^j \quad , \quad & H_j^{'}(x_i) &= 0 \\ \overline{H}_j(x_i) &= 0 \quad , \quad & \overline{H}_j^{'}(x_i) &= \delta_i^j \quad , \ j=0,\ldots,N \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_j(x) &= \left(1 - 2L_j^{'}(x_j)(x-x_j)\right)(L_j(x))^2 \\ \overline{H}_j(x) &= (x-x_j)\,(L_j(x))^2 \quad , \ j=0,\ldots,N \end{aligned}$$

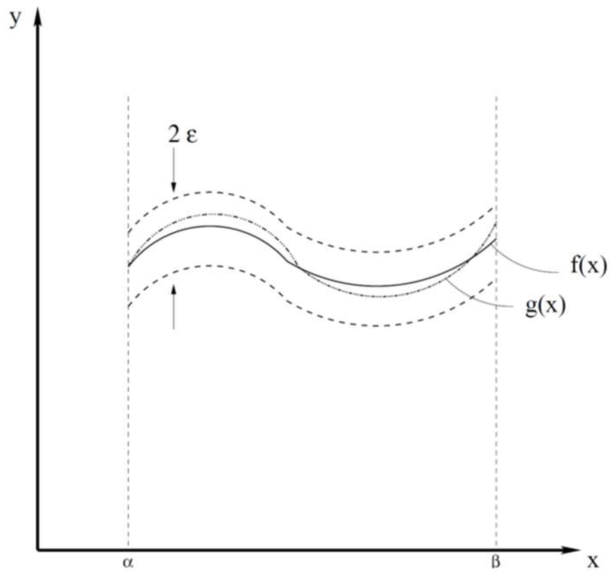
Τύπος Παρεμβολής κατά Hermite:

$$g(x) = \sum_{j=0}^{N} y_j H_j(x) + \sum_{j=0}^{N} y_j^{'} \overline{H}_j(x)$$

Δείτε λυμένη άσκηση στο βιβλίο…

Βασικά Θεωρήματα για τα Πολυώνυμα Παρεμβολής

Θεώρημα 4.1 (Θεώρημα Προσέγγισης του Weierstrass:) *Αν f συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[\alpha,\beta]$, τότε για κάθε θετική ποσότητα $\epsilon > 0$ υπάρχει ένα πολυώνυμο $g(x)$ τέτοιο ώστε*



$$\max_{x\in[\alpha,\beta]} |f(x)-g(x)| < \epsilon \tag{4.29}$$

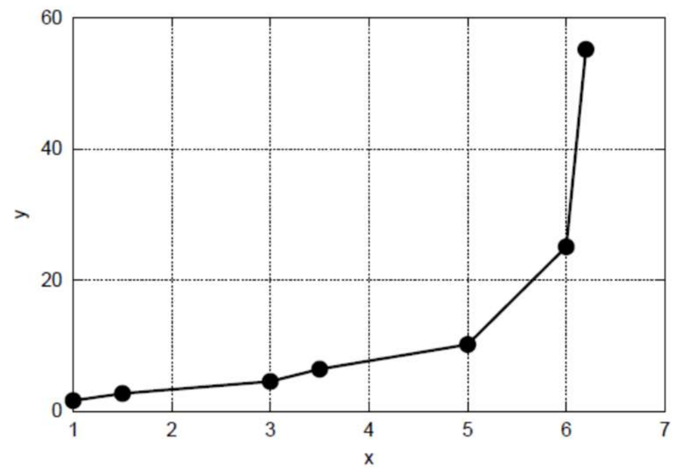
Βασικά Θεωρήματα για τα Πολυώνυμα Παρεμβολής

Θεώρημα 4.2 *Έστω f συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και $N+1$ διακριτά σημεία ορισμένα στο ίδιο κλειστό διάστημα. Ας συμβολίσουμε με $g(x)$ το (μοναδικό) πολυώνυμο παρεμβολής για το οποίο ισχύει ότι $y_i = f(x_i) = g(x_i)$, $i = 0, \ldots, N$. Τότε, για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ υπάρχει ένα $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε*

$$E(x) \; = \; f(x) - g(x) = \frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_N)$$

Παρεμβολή με Τμηματικά Συνεχή Πολυώνυμα

Η ιδέα (σε μια πολύ απλή εκδοχή της):



Λχ. με Γραμμικά Πολυώνυμα Lagrange

$$L_0(u) = 1 - u \quad , \quad L_1(u) = u$$

$$L_0(u) = \frac{u-1}{0-1} \quad , \quad L_1(u) = \frac{u-0}{1-0}$$

Η ιδέα της Παραμετρικής Περιγραφής μιας καμπύλης (στην τμηματικά συνεχή εκδοχή της)

Παρεμβολή με Τμηματικά Συνεχή Πολυώνυμα

Λχ. με Τετραγωνικά Πολυώνυμα Lagrange

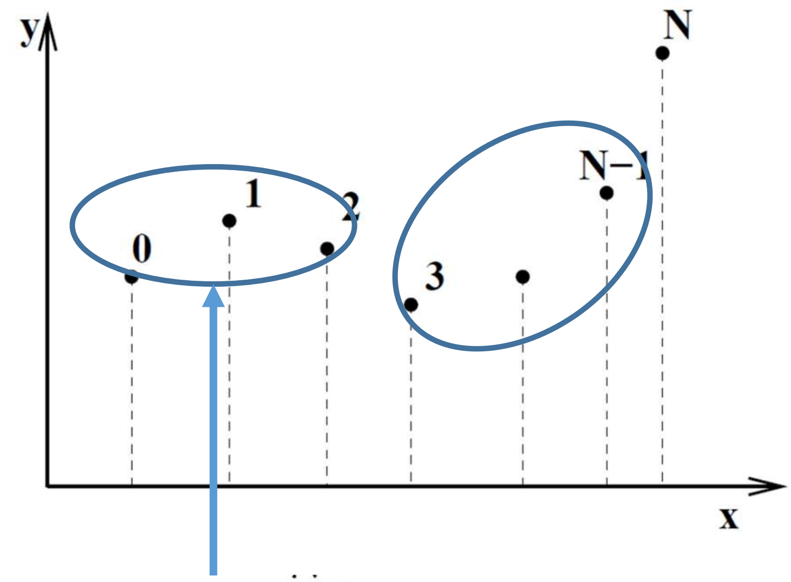
$$L_0(u) = 2u^2-3u+1 \quad , \quad L_1(u) = -4u^2+4u \quad , \quad L_2(u) = 2u^2-u \quad (4.33)$$

εκ των:

$$L_0(u) = \frac{(u-\frac{1}{2})(u-1)}{(0-\frac{1}{2})(0-1)}$$

$$L_1(u) = \frac{(u-0)(u-1)}{(\frac{1}{2}-0)(\frac{1}{2}-1)}$$

$$L_2(u) = \frac{(u-0)(u-\frac{1}{2})}{(1-0)(1-\frac{1}{2})}$$



$u=0,\ u=1/2$ και $u=1$

Κλπ (βλέπε βιβλίο μαθήματος)….