Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών ΕΜΠ
4ο Εξάμηνο
ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

Πρώτη Ενότητα Διδακτέας Υλης
Αριθμητική Επίλυση Μη-Γραμμικών Εξισώσεων

Κ.Χ. Γιαννάκογλου, Καθηγητής ΕΜΠ
kgianna@mail.ntua.gr

Αριθμητική Επίλυση Μη-Γραμμικών Εξισώσεων

- **Επίλυση (αριθμητική επίλυση, αντί της αναλυτικής επίλυσης) ΜΙΑΣ μόνο μη-γραμμικής εξίσωσης.**

- **Αν ήταν γραμμική δεν θα χρειαζόμαστε την Αριθμητική Ανάλυση.**

- **Αν και τη μη-γραμμική εξίσωση μπορούμε να τη λύσουμε αναλυτικά, προφανώς το προτιμάμε! Αν μη τι άλλο, για λόγους ακρίβειας.**

- **Με την ολοκλήρωση της ύλης για την αριθμητική επίλυση μιας μη-γραμμικής εξίσωσης, θα ακολουθήσει η γενίκευση για συστήματα εξισώσεων.**

Αριθμητική Επίλυση Μη-Γραμμικών Εξισώσεων

Το πρόβλημα: Δεδομένης της μη-γραμμικής συνάρτησης F(x), να βρεθεί η τιμή $x=x_0$ ώστε $F(x_0)=0$ ή $F(x_0)=y$ (y=γνωστό).

$$\alpha + \beta \, \ell n x = y \qquad (x > 0) \quad \rightarrow \quad x_0 = e^{(y_0 - \alpha)/\beta}$$

$$F(x) = \cosh(\sqrt{x^2+1} - e^x) + \log|six(x)| = 0$$

$$F(x) = 12.2(e^{2x} - 1) + x = 0$$

Μια γνωστή ειδική περίπτωση:

$$y = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \alpha_{n-2} x^{n-2} + \ldots + \alpha_0$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Εξίσωση van der Waals

$$\left(P + \frac{\alpha}{V^2}\right)\left(V - b\right) = RT$$

α, b	**:**	**σταθερές του αερίου**
P	**:**	**πίεση του αερίου (N/m^2)**
V	**:**	**ειδικός όγκος του αερίου (m^3/kg)**
T	**:**	**θερμοκρασία του αερίου (K)**
R	**:**	**η σταθερά του αερίου (J/kg/K)**

Είναι ΓΡΑΜΜΙΚΗ ή ΜΗ-ΓΡΑΜΜΙΚΗ;;;;;

... εξαρτάται :

Όταν επιλύεται ως προς το T:

$$T = \frac{1}{R}\left(P + \frac{\alpha}{V^2}\right)(V - b)$$

Όταν επιλύεται ως προς το P:

$$P = \frac{RT}{V - b} - \frac{\alpha}{V^2}$$

Όταν επιλύεται ως προς το V:

δεν γράφεται ως $V = f(P,T)$ **!!!!!**

<u>Στόχος:</u>

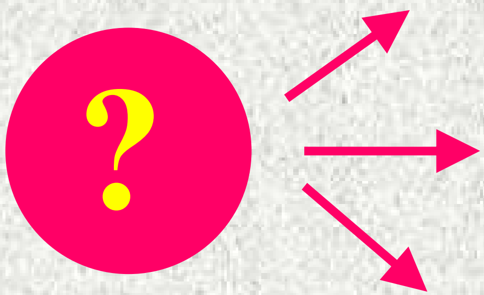
Αναζητούμε <u>αριθμητική-προσεγγιστική λύση</u> αντί της ακριβούς-αναλυτικής λύσης.

<u>Βασικό</u>: Πως επιλέγεται η «καλύτερη» από τις διαθέσιμες μεθόδους (ή και από άλλες που δεν καλύπτονται από την ύλη του μαθήματος) για το συγκεκριμένο πρόβλημα.

Ενδιαφερόμαστε και για το υπολογιστικό κόστος που έχει η μέθοδος που θα επιλεγεί.

Ειδικά για το κεφάλαιο αυτό η παραλληλοποίηση λογισμικού είναι ήσσονος σημασίας. Γιατί?

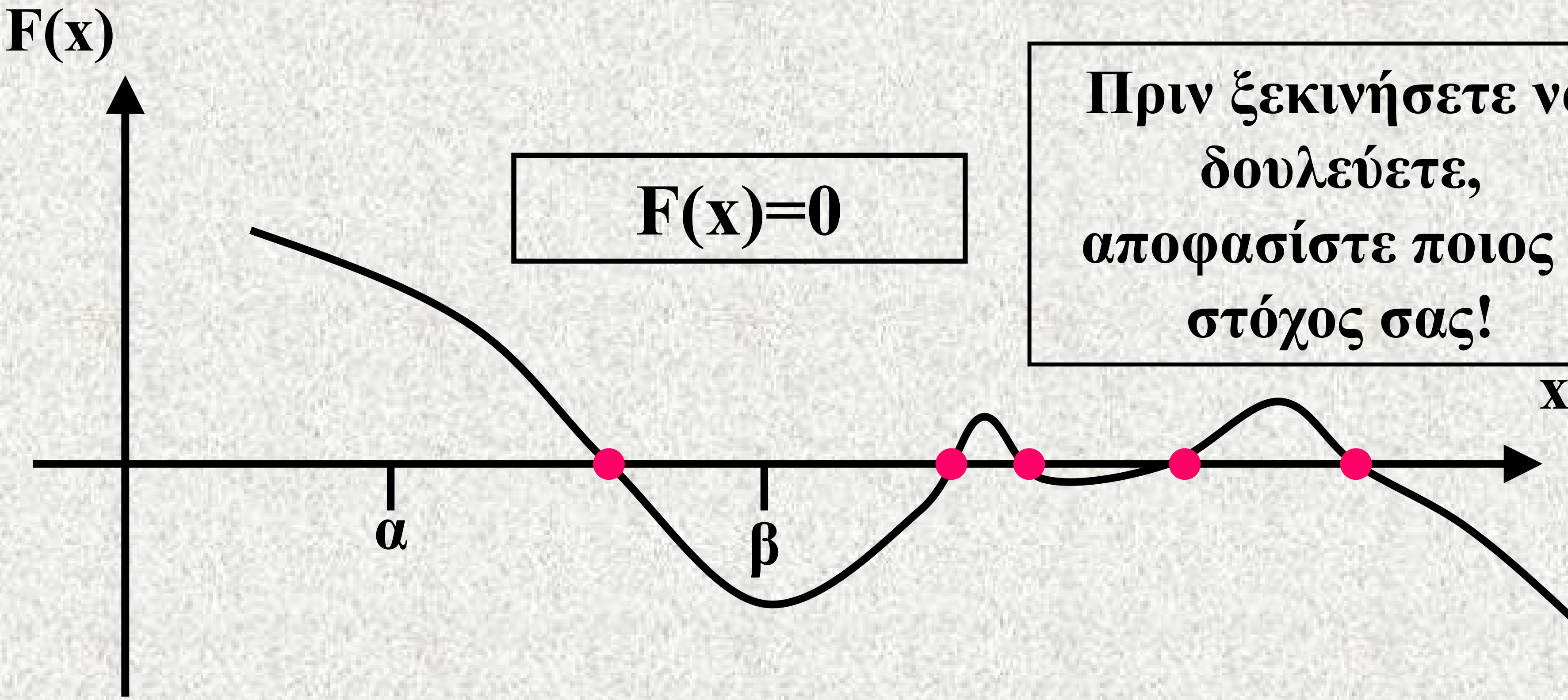
Αριθμητική Επίλυση Μη-Γραμμικών Εξισώσεων



Αναζήτηση μιας οποιασδήποτε λύσης

Αναζήτηση μιας λύσης σε δεδομένο (α,β)

Αναζήτηση όλων των λύσεων



F(x)=0

Πριν ξεκινήσετε να δουλεύετε, αποφασίστε ποιος ο στόχος σας!

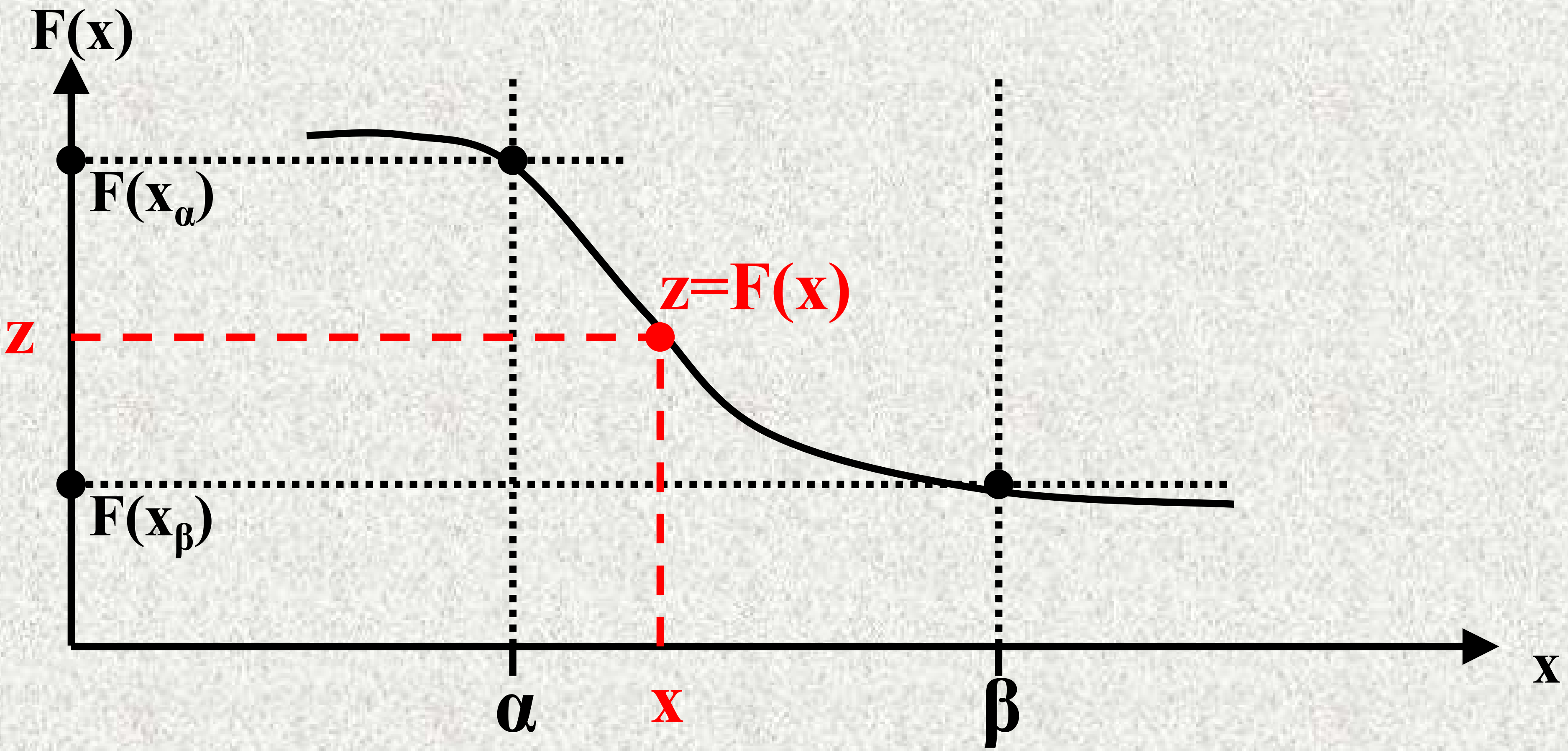
Μέθοδοι Εντοπισμού του διαστήματος το οποίο περιέχει μια ρίζα της εξίσωσης:

Η Μέθοδος των Ισων Διαστημάτων

Μερικές μέθοδοι για να ξεκινήσουν «να ψάχνουν τη λύση» πρέπει να τροφοδοτηθούν με το κάτω και το πάνω άκρο του διαστήματος μέσα στο οποίο θα βρίσκεται η λύση.

Το Θεώρημα της Μέσης Τιμής:

“Αν F συνεχής συνάρτηση στο [α,β] και z ένας πραγματικός αριθμός που F(α)≤z≤F(β), υπάρχει ένα τουλάχιστον xЄ [α,β] για το οποίο z=F(x)”



Αριθμητικό Παράδειγμα:

$$F(x) = x^2 - 4.3x + 3.52 = 0$$

(Ρίζες: x=1.1 και x=3.2)

Αναζητείται λύση στο διάστημα [α,β]=[0,2], διακριτοποιημένο με 10 ίσα διαστήματα.

Υπολογιστικό κόστος μετρούμενο με κλήσεις της συνάρτησης F(x).
<Function Calls>

x	F(x)
0.000000	3.520000
0.200000	2.700000
0.400000	1.960000
0.600000	1.300000
0.800000	0.720000
1.000000	0.220000
1.200000	-0.200000
1.400000	-0.540000
1.600000	-0.800000
1.800000	-0.980000
2.000000	-1.080000

Αλλά:

$$F(x) = x^2 - 2.25x + 1.265 = 0$$

(Ρίζες: x=1.1 και x=1.15)

Αναζητείται λύση στο διάστημα [α,β]=[0,2], διακριτοποιημένο με 10 ίσα διαστήματα.

Υπολογισμοί πάντα με ακρίβεια δεύτερης τάξης (double precision)

x	F(x)
0.000000	1.265000
0.200000	0.855000
0.400000	0.525000
0.600000	0.275000
0.800000	0.105000
1.000000	0.015000
1.200000	0.005000
1.400000	0.075000
1.600000	0.225000
1.800000	0.455000
2.000000	0.765000

?

Αν είναι τεχνικά εφικτό, βοηθά να ξεκινάμε από τη γραφική παράσταση συνάρτησης !!!

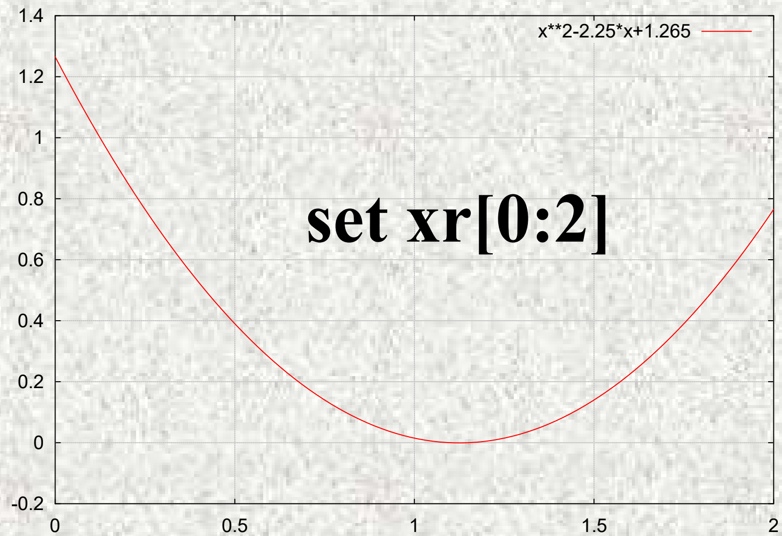
Συνιστάται η χρήση gnuplot:

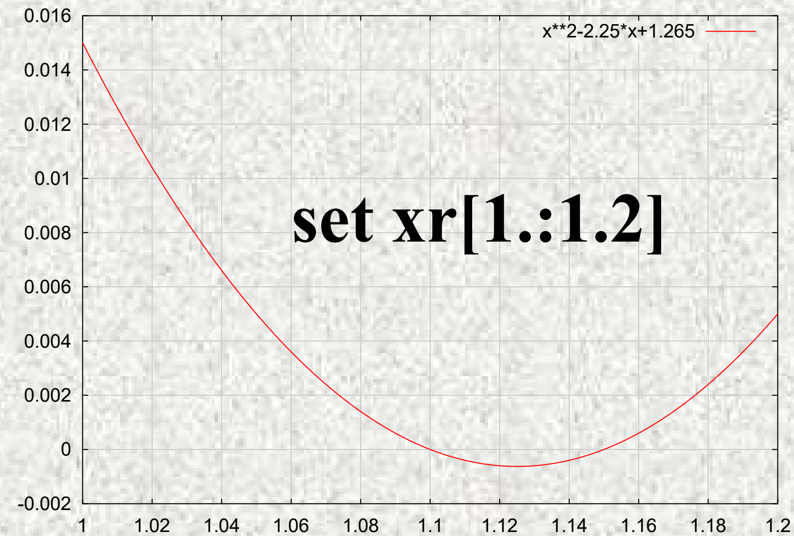
p x2-2.25*x+1.265**

set grid

rep

set xr[0:2]





Ένα έξυπνο τέχνασμα εντοπισμού του διαστήματος το οποίο περιέχει μια ρίζα της εξίσωσης:

Αν μπορείτε…, λύστε μια απλοποιημένη εκδοχή της ίδιας εξίσωσης

Λ.χ. αντί της

$$\left(P+\frac{\alpha}{V^2}\right)\left(V-b\right)=RT$$

αρχίστε με την

$$PV = RT$$

... και εκτιμήστε προσεγγιστικά (συν/πλην «κάτι») που «βρίσκονται» οι ρίζες ...

Ειδικά για πολυωνυμικές συναρτήσεις:

$$F(x)=\alpha_n x^n+\alpha_{n-1}x^{n-1}+\alpha_{n-2}x^{n-2}+\ldots+\alpha_0$$

όλες οι ρίζες (πραγματικές και μιγαδικές) βρίσκονται στην περιοχή ενός κυκλικού δακτυλίου με εξωτερική και εσωτερική ακτίνα:

$$R_o=1+\max\left(|a_{n-1}|,\ |a_{n-2}|,\ldots,\ |a_0|\right)/\,|a_n|$$

$$R_i=|a_n|\,/\left[|a_n|+\max\left(|a_n|,\ |a_{n-1}|,\ldots,\ |a_1|\right)\right]$$

<u>Παράδειγμα:</u>

$$F(x) = x^3 - 2.2x^2 - 0.8x + 2.4$$

(Ρίζες: x = 1.2 , x = 2.0 , x = -1)

($\alpha_3 = 1$, $\alpha_2 = -2.2$, $\alpha_1 = -0.8$, $\alpha_0 = 2.4$)

$$R_o = 1 + \max\left(|-2.2|, |-0.8|, |2.4|\right) / |1| = 3.4$$

$$R_i = |1| / \left[|1| + \max\left(|1|, |-2.2|, |-0.8|, |2.4|\right)\right] = 0.2941$$

Ο Μηχανικός πρέπει να διακρίνει:

- **Ακριβής/αναλυτική λύση της εξίσωσης**
- **Προσεγγιστική/αριθμητική λύση της εξίσωσης**
- **Ακριβής/αναλυτική λύση μιας προσεγγιστικής εξίσωσης**

Η Αριθμητική Ανάλυση:

- **Δεν βοηθά στο 1ο και το 3ο. Δεν βρίσκει αναλυτικές λύσεις!**
- **Η ύπαρξη (αριθμητικού) σφάλματος στη λύση που θα δώσει η μέθοδος της Αριθμητικής Ανάλυσης είναι δεδομένη.**
- **Όλες οι μέθοδοι λχ για μη-γραμμικές εξισώσεις δεν λύνουν κάθε πρόβλημα.**
- **Η επιλογή μεθόδου είναι κρίσιμη! Έχω δεδομένα για να την ξεκινήσω? Θα δώσει λύση? Με τι σφάλμα? Σε πόσο χρόνο?**

Γνωστές Μέθοδοι για την Αριθμητική Επίλυση Μη-Γραμμικών ή Υπερβατικών Εξισώσεων

- Μέθοδος Διαδοχικών Διχοτομήσεων
- Μέθοδος των Διαδοχικών Αντικαταστάσεων
- Μέθοδος Newton-Raphson
- Αλλες

<u>Μέθοδος Διαδοχικών Διχοτομήσεων</u>

<u>Bisection Method</u>
<u>or</u>
<u>Interval Halving Method</u>

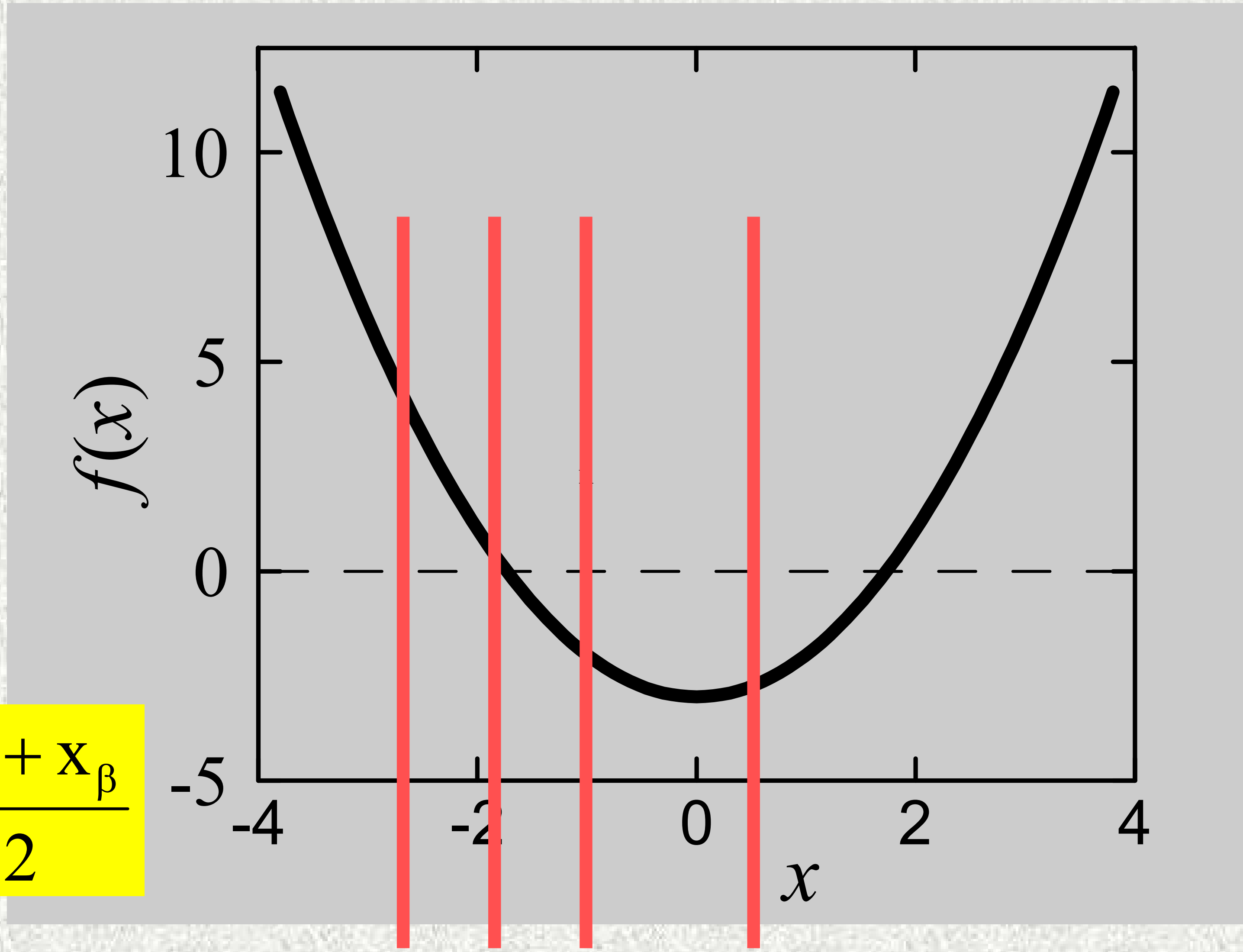
Η πιο απλή μέθοδος για την αριθμητική επίλυση της f(x)=0.

Απλή, όμως, δεν σημαίνει και γρήγορη!!!

Η έννοια των Επαναληπτικών Μεθόδων (Iterative Methods)

Μέθοδος Διαδοχικών Διχοτομήσεωνψ

$$x_m = \frac{x_\alpha + x_\beta}{2}$$



$\mathbf{x_\alpha}$ $\mathbf{x_\alpha}$ $\mathbf{x_\beta}$ $\mathbf{x_\beta}$

Κριτήρια Σύγκλισης:

* Μέγιστος Αριθμός Διχοτομήσεων (άρα max. calls F(x))

* Το F(x)=0 στην Αρ.Ανάλυση (στον ΗΥ) γίνεται $|F(x)|<\varepsilon_1$

* Σταματήστε όταν η απόλυτη ή η σχετική απόκλιση δύο διαδοχικών λύσεων είναι μικρότερη από ένα όριο ε_2 (προσέξτε! Άλλη τιμή σε κάθε κριτήριο)

$$\varepsilon_{\alpha\pi o\lambda\upsilon\tau o} = \left| x^{(n)} - x^{(n-1)} \right| < \varepsilon_2$$

$$\varepsilon_{\sigma\chi\varepsilon\tau\iota\kappa o} = \frac{\left| x^{(n)} - x^{(n-1)} \right|}{| x^{(n)} |} < \varepsilon_2$$

Εκτίμηση πλήθους επαναλήψεων για δεδομένο [α,β] και επιθυμητό σφάλμα (ε_2)

Αν τερματισμός όταν

$$x^{(n)} - x^{(n-1)} < \varepsilon_2$$

Μετά από n Διχοτομήσεις

$$\frac{\beta - \alpha}{\varepsilon_2} = 2^n$$

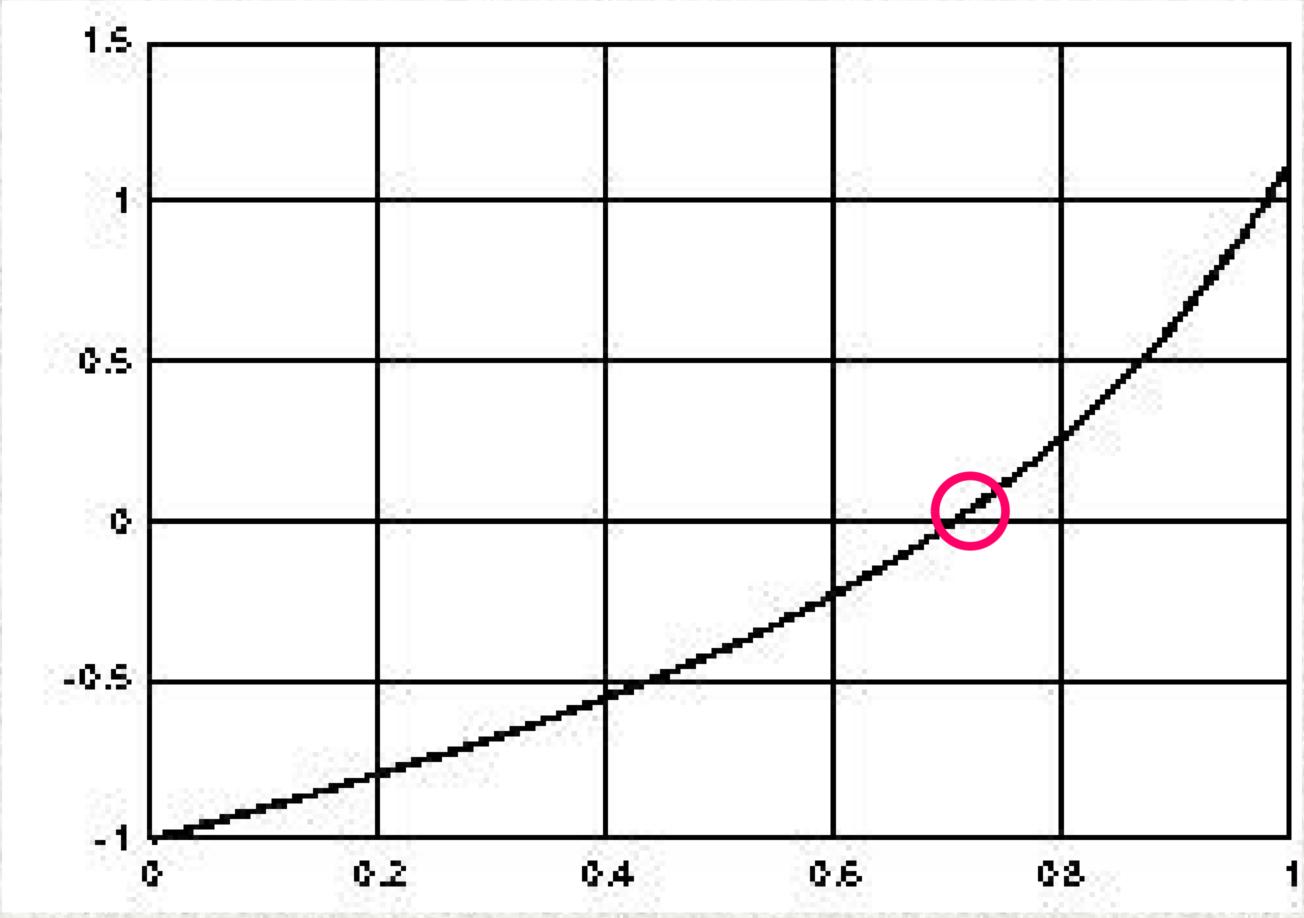
Εκτίμηση πλήθους επαναλήψεων

$$n = \ell n \left[\frac{\left(x_\beta - x_\alpha\right)}{\varepsilon_2} \right] \Big/ \ell n\, 2$$

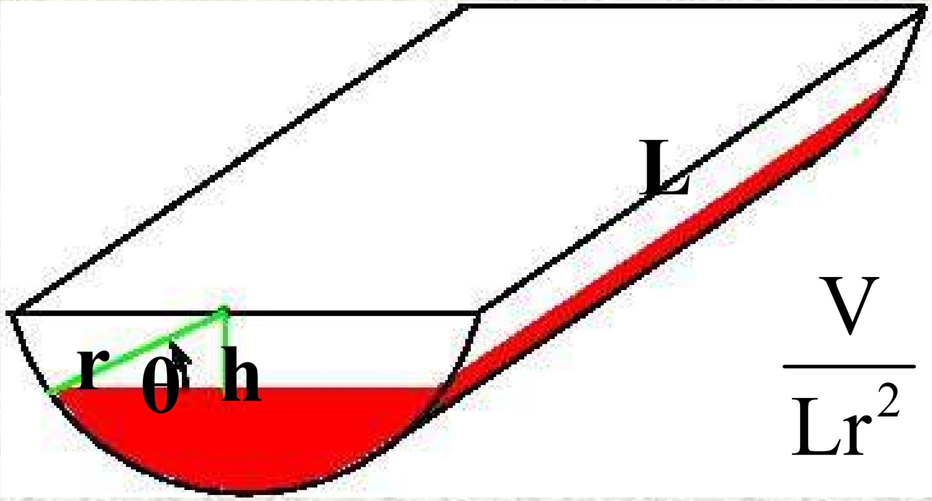
Παράδειγμα για να το δοκιμάσετε μόνοι σας:

$$2\tan x - x - 1 = 0$$

Αναζήτηση λύσης στο [0,1]



Παράδειγμα για να το δοκιμάσετε μόνοι σας:



$$\frac{V}{Lr^2} = \frac{\pi}{2} - \arcsin x - x\left(1 - x^2\right)^{1/2}$$

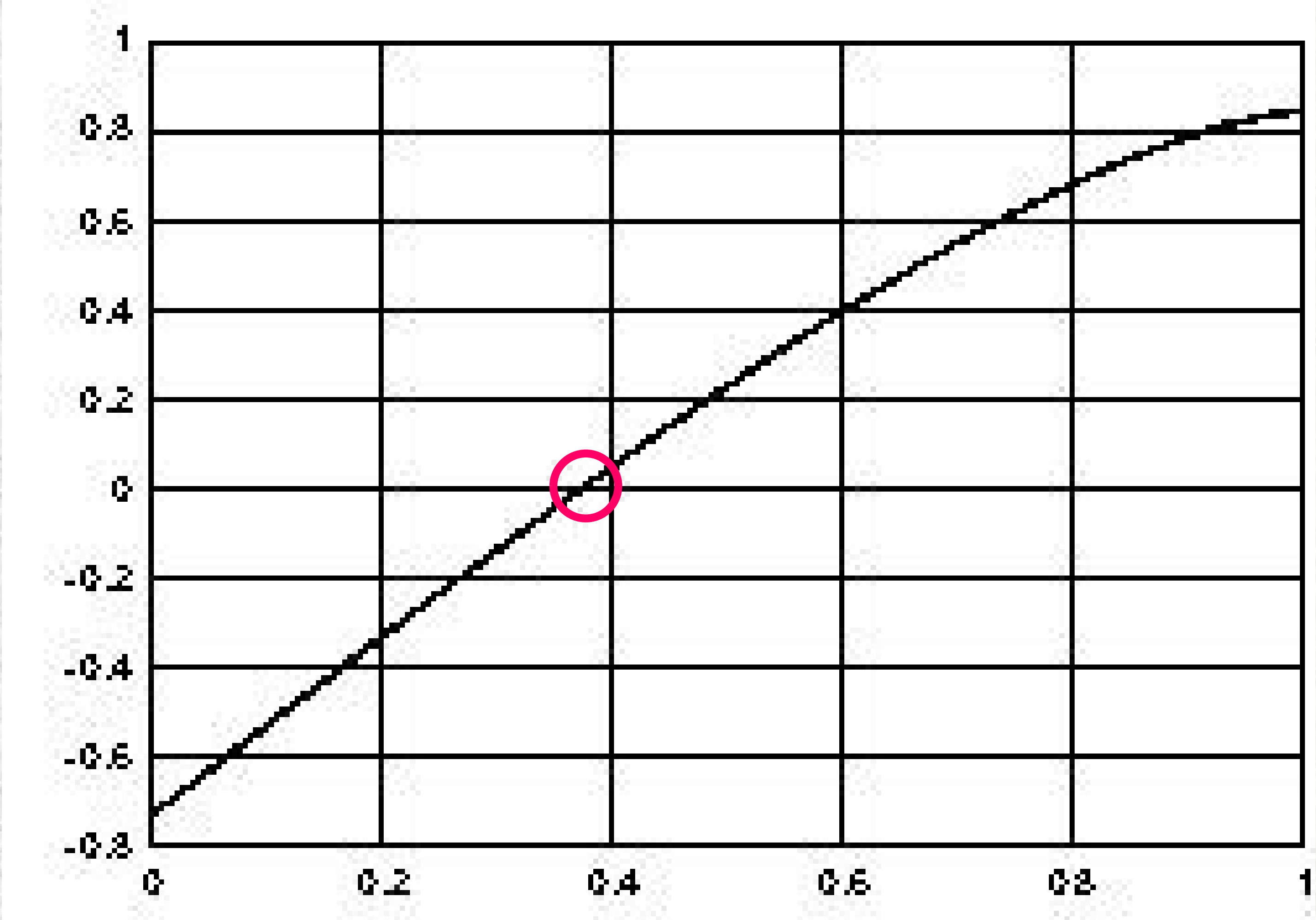
$$L = 2m$$

$$r = 0.4m$$

$$V = 270lt = 0.27m^3$$

$$h = xL$$

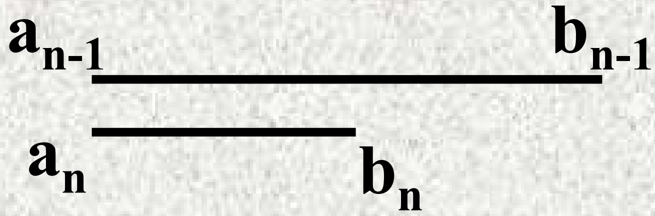
$$\frac{V}{Lr^2} - \frac{\pi}{2} + \arcsin x + x\left(1 - x^2\right)^{1/2}$$



$$x = h / L$$

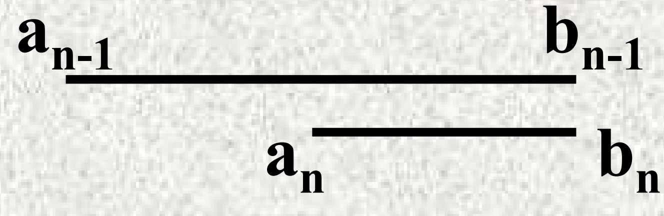
<u>Μια Απλή Άσκηση:</u> **Αν $[\alpha_0,\beta_0]$, $[\alpha_1,\beta_1]$, $[\alpha_2,\beta_2]$, ... τα διαδοχικά διαστήματα αναζήτησης λύσης στη μέθοδο της διχοτόμησης, δείξτε ότι:**

$$a_n b_n + a_{n-1} b_{n-1} = a_{n-1} b_n + a_n b_{n-1}$$



=κ **=λ** **=μ**

$$\kappa\lambda + \kappa\mu = \kappa\lambda + \kappa\mu$$



=κ **=λ** **=μ**

$$\lambda\mu + \kappa\mu = \kappa\mu + \lambda\mu$$

Σύγκλιση της Μεθόδου Διχοτόμησης

Επειδή το σφάλμα περίπου μειώνεται στο μισό σε κάθε επανάληψη (λόγω διχοτόμησης), άρα η σύγκλιση του αλγορίθμου είναι (σχεδόν) <u>ΓΡΑΜΜΙΚΗ</u>

<u>Καλό ή κακό??????</u>

ΓΕΝΙΚΑ:

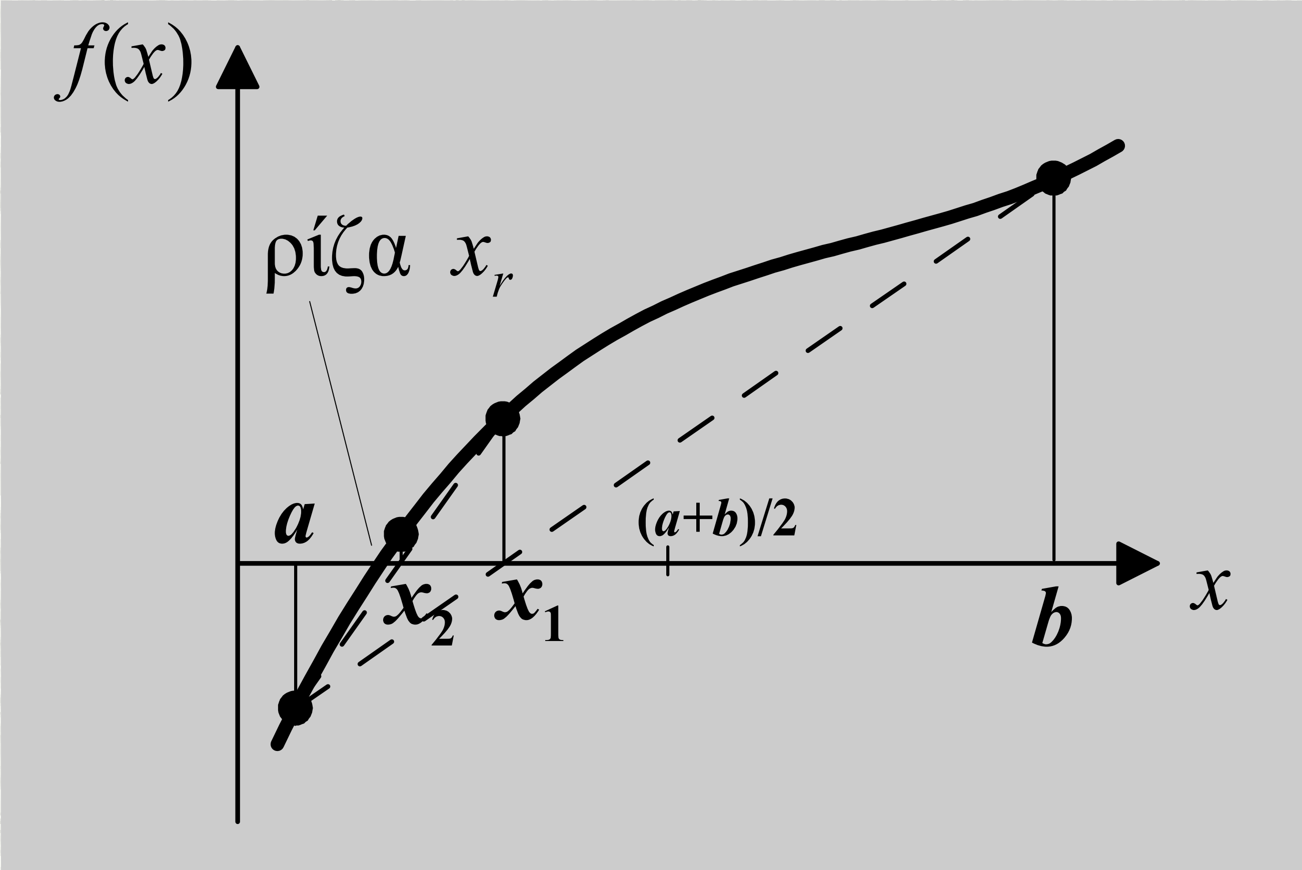
Κριτήρια Επιλογής της «Κατάλληλης» Μεθόδου

- Προϋποθέσεις σύγκλισης
- Ρυθμός σύγκλισης προς τη λύση, δηλ. υπολογιστικό κόστος
- Εξάρτηση από δεδομένα αρχικοποίησης
- Αυτο-εκκινούμενη ή όχι

Μέθοδος Εσφαλμένης Θέσης
ή
Μέθοδος Γραμμικής Παρεμβολής

Method of False Position
or
Regula Falsi Method

Μια «λογική» επέκταση της μεθόδου των Διαδοχικών Διχοτομήσεων



$$\cancel{x_1 = \frac{a+b}{2}}$$

$$\frac{x_1 - a}{b - a} = \frac{f(x_1) - f(a)}{f(b) - f(a)} \Rightarrow \qquad x_1 = a - \frac{f(a)\cdot(b-a)}{f(b)-f(a)}$$

Σύγκλιση της Regula Falsi

- **απαιτεί «περισσότερες» πράξεις από άλλες μεθόδους που θα γνωρίσουμε**
- **συγκλίνει ταχύτερα από αυτήν της διχοτόμησης όταν η συνάρτηση είναι σχεδόν γραμμική στην περιοχή της ρίζας**
- **μπορεί να γίνει πολύ πιο αργή**

Υπολογιστικό κόστος: Μια κλήση της f(x) ανά επανάληψη (πλην της πρώτης).

Ανοικτές Επαναληπτικές Μέθοδοι Προσέγγισης Ριζών

\+ **Δεν χρειάζονται [α,β] για να ξεκινήσουν**

\+ **Πιο γρήγορες από ότι οι διαδοχικές διχοτομήσεις**

\+ **Μπορούν να βρουν πολλαπλές λύσεις**

\- **Δεν έχουν εξασφαλισμένη σύγκλιση**

Επαναληπτικός Αλγόριθμος:

$$x^{(0)} \rightarrow x^{(1)} \rightarrow x^{(2)} \rightarrow x^{(3)} \rightarrow \ldots.$$

$$x^{(n)} = g\left(x^{(n-1)}\right)$$

$$x^{(new)} = g\left(x^{(old)}\right)$$

Γενίκευση:

$$x^{(n)} = g\left(x^{(n-1)}, x^{(n-2)}, x^{(n-3)}, x^{(n-4)}, \ldots, x^{(n-k)}\right)$$

συνήθως k=1

Μέθοδος Διαδοχικών Αντικαταστάσεων
ή
Μέθοδος Σταθερού Σημείου

Method of Successive Substitutions
or
Fixed Point Iteration Method

Ανοικτή μέθοδος

Μέθοδος Διαδοχικών Αντικαταστάσεων
(Μέθοδος Σταθερού Σημείου)

$$f(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = g(x) \quad \Rightarrow \quad x^{(n)} = g\left(x^{(n-1)}\right)$$

Η έννοια των επαναλήψεων-iterations:

$$x^{(0)} \rightarrow x^{(1)} \rightarrow x^{(2)} \rightarrow x^{(3)} \rightarrow \ldots.$$

Παράδειγμα 1:

$$2\tan x - x - 1 = 0$$

$$x^{(n)} = g\left(x^{(n-1)}\right)$$

$$x^{(n)} = 2\tan x^{(n-1)} - 1$$

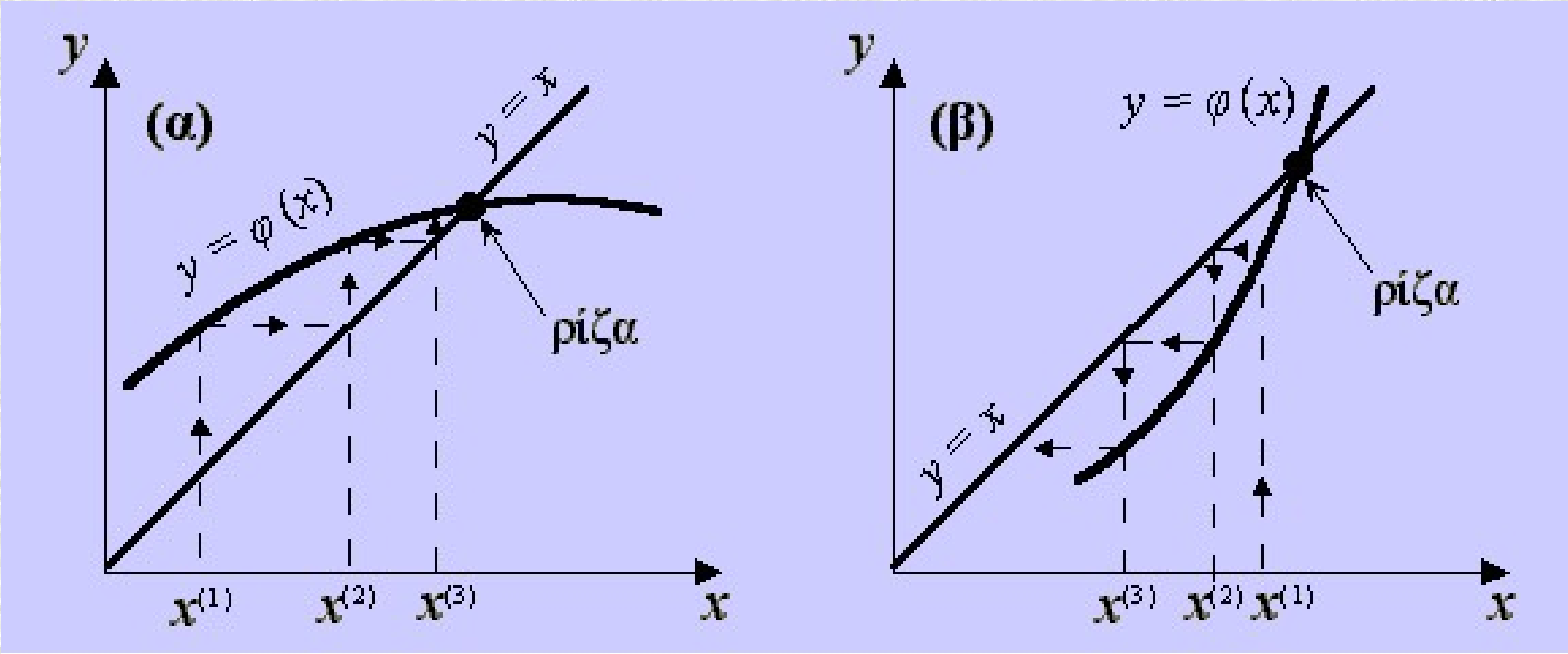
$$x^{(n)} = a\tan\left(\frac{x^{(n-1)}+1}{2}\right)$$

$$g(x) = 2\tan x - 1$$

$$g(x) = a\tan\left(\frac{x^{(n-1)}+1}{2}\right)$$

Ποιο από τα δύο πρέπει να χρησιμοποιήσω;;;;

Μέθοδος Διαδοχικών Αντικαταστάσεων



$$x^{(1)} = \text{given}$$

$$x^{(2)} = g(x^{(1)})$$

$$x^{(3)} = g(x^{(2)})$$

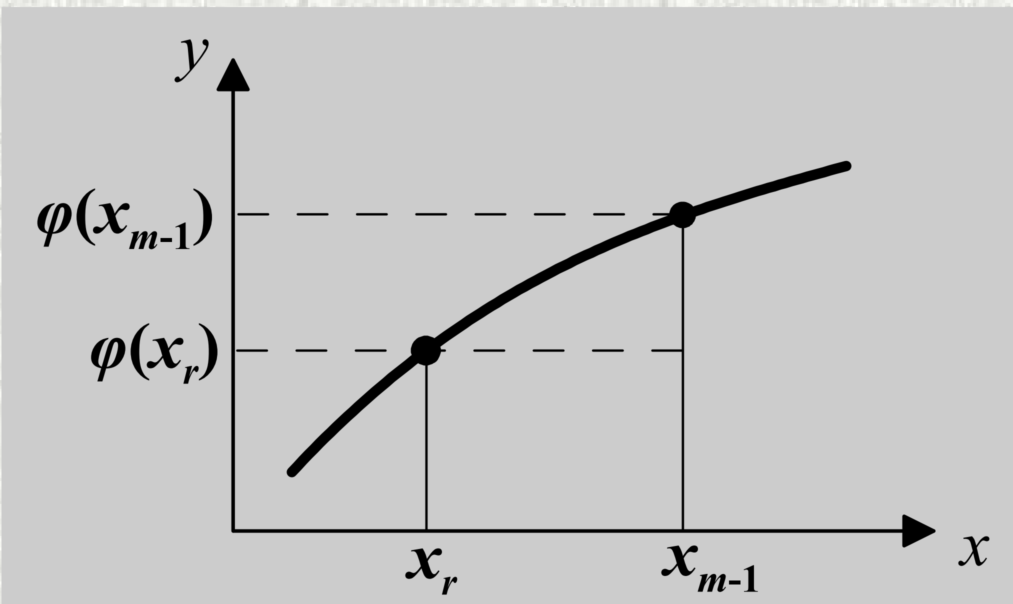
Σύγκλιση της Μεθόδου:

$$x^{(n)} = g\left(x^{(n-1)}\right)$$

x_r=λύση

$$\left| x^{(n)} - x_r \right| < \left| x^{(n-1)} - x_r \right|$$

$$\left| x^{(n)} - x_r \right| = \left| g(x^{(n-1)}) - g(x_r) \right| = \underbrace{\left| \frac{dg}{dx}(x_r) \right| . \left| x^{(n-1)} - x_r \right|}_{\text{αν κοντά στη λύση}}$$



$$\left| g'(x_r) \right| < 1$$

ΑΝΑΓΚΑΙΑ, ΟΧΙ ΙΚΑΝΗ,
εξαρτάται από το σημείο εκκίνησης

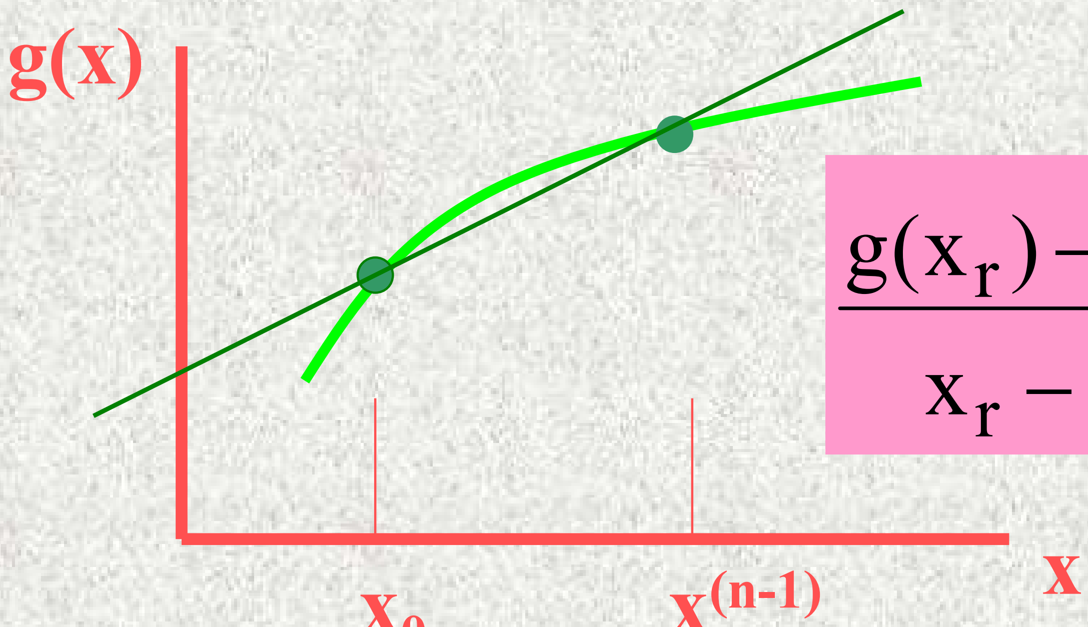
Κριτήρια Σύγκλισης (1):

$$x^{(n)} = g(x^{(n-1)})$$

$$x_r = g(x_r)$$

x_r=τελική λύση=σταθερό σημείο

$$x_r - x^{(n)} = g(x_r) - g(x^{(n-1)}) \cong \left[x_r - x^{(n-1)}\right] g'\left(x^{(n-1)}\right)$$



$$\frac{g(x_r) - g(x^{(n-1)})}{x_r - x^{(n-1)}} = g'(x^{(n-1)})$$

Κριτήρια Σύγκλισης (2):

$$\sigma^{(n)} = x_r - x^{(n)}$$

$$\sigma^{(n)} = \sigma^{(n-1)} g'\left(x^{(n-1)}\right)$$

$$\left|\sigma^{(n)} / \sigma^{(n-1)}\right| < 1$$

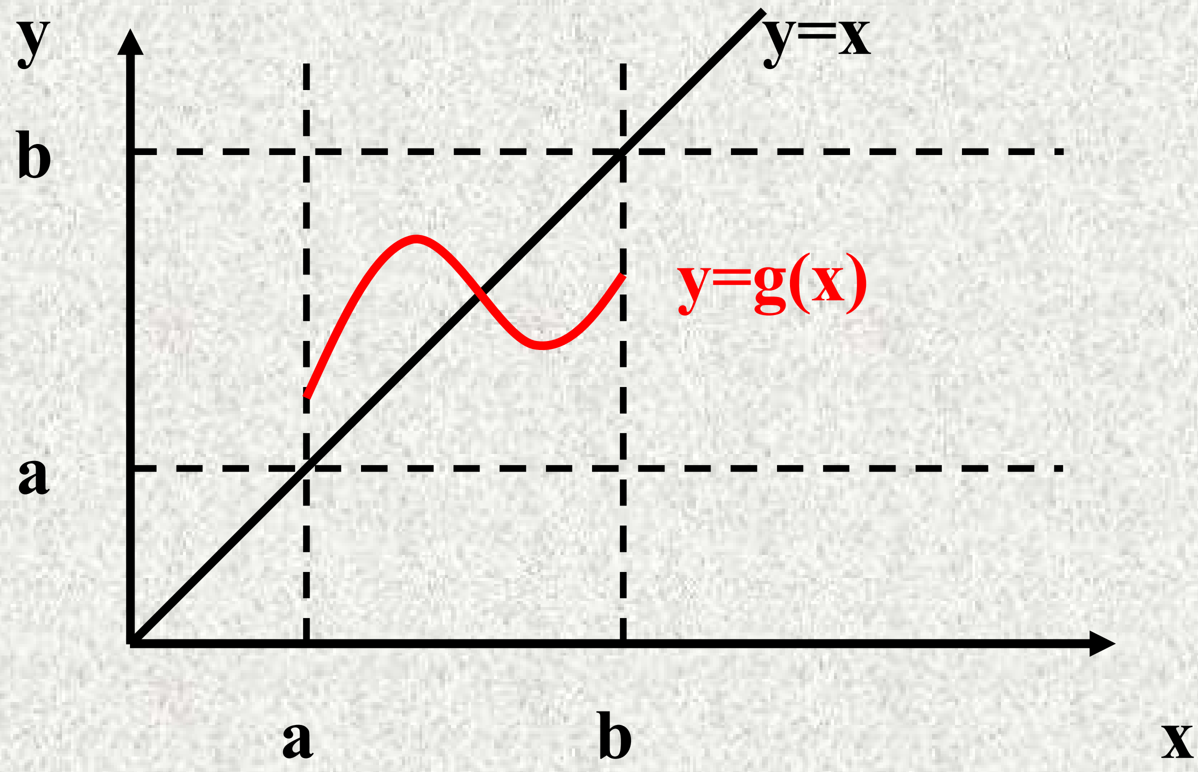
Αναγκαία, όχι ικανή συνθήκη

$$\left|g'(x)\right| < 1$$

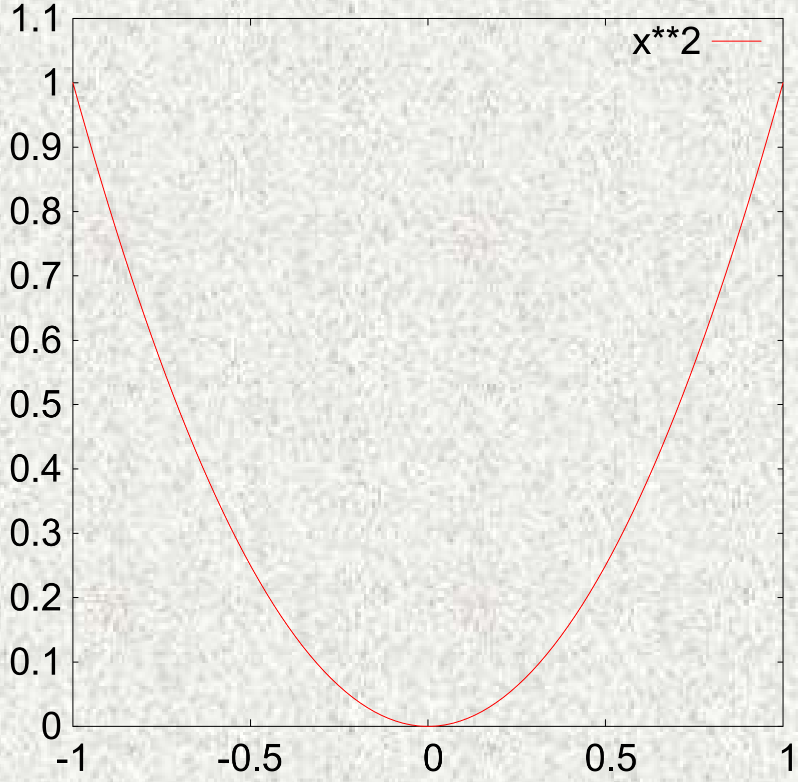
<u>Εξήγηση της Ονομασίας:</u>

<u>Ορισμός:</u> Ένα σημείο x^* του πεδίου ορισμού μιας συνάρτησης $g(x)$ λέγεται <u>σταθερό σημείο</u> της αν ισχύει $g(x^*)=x^*$

<u>Πρόταση:</u> Κάθε συνεχής συνάρτηση $g:[a,b]\rightarrow[a,b]$ έχει στο διάστημα $[a,b]$ (τουλάχιστον) ένα σταθερό σημείο



Η συνθήκη της πρότασης είναι ικανή, αλλά όχι και αναγκαία



λ.χ. Η συνεχής συνάρτηση

$g:[-1:1] \rightarrow [0,2]$, $g(x):=2x^2$

Σταθερά Σημεία τα 0 και ½

χωρίς να ισχύει η συνθήκη !

Παράδειγμα 1: $2\tan x - x - 1 = 0$

$$x^{(n)} = 2\tan x^{(n-1)} - 1$$

$$x^{(n)} = a\tan\left(\frac{x^{(n-1)}+1}{2}\right)$$

$$g(x) = 2\tan x - 1$$

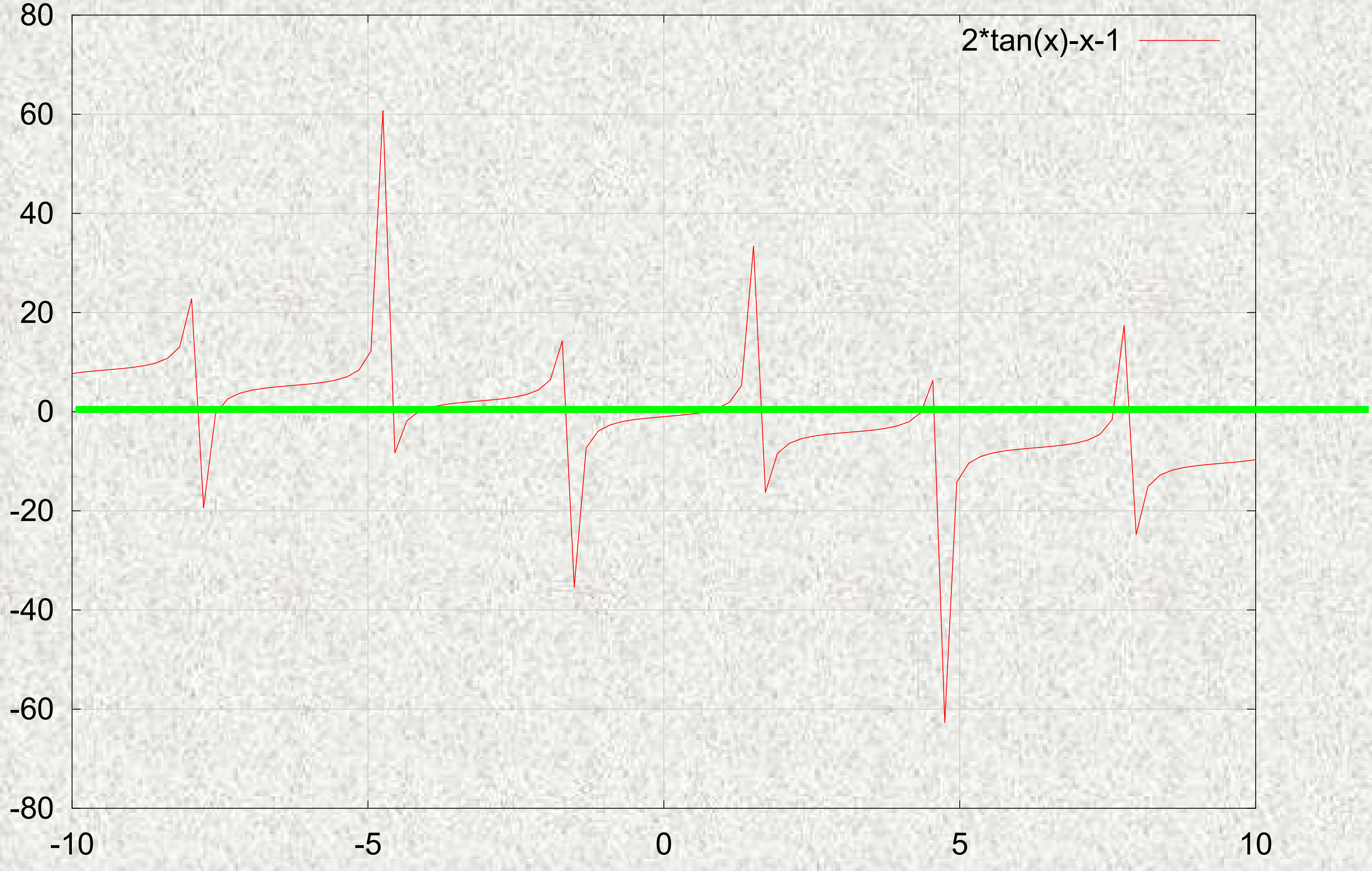
$$g(x) = a\tan\left(\frac{x^{(n-1)}+1}{2}\right)$$

$$g'(x) = 2/\cos^2 x$$

$$g'(x) = \left[1 + \frac{(x+1)^2}{4}\right]^{-1}$$

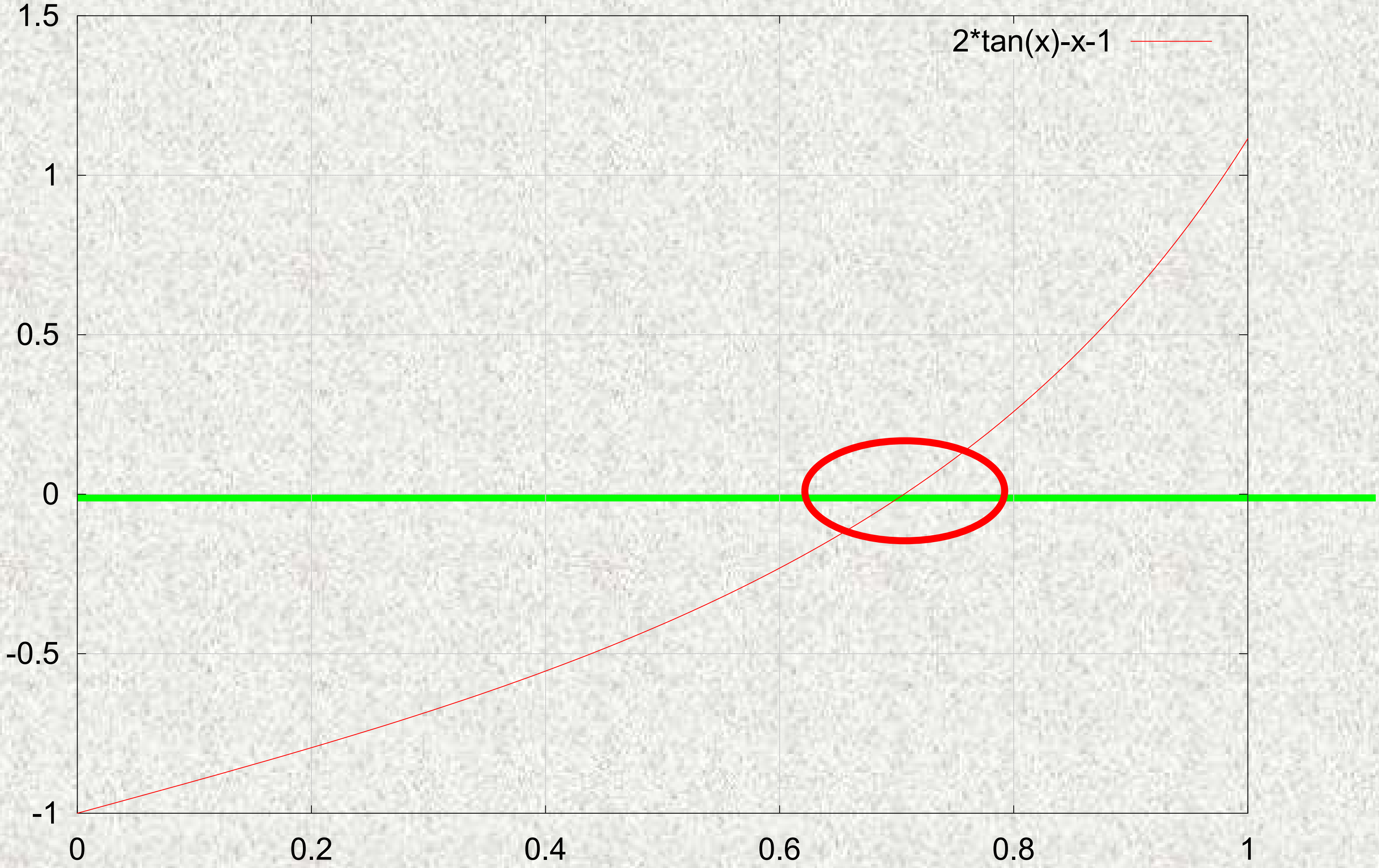
$$2\tan x - x - 1 = 0$$

στο [-10,10]



$$2\tan x - x - 1 = 0$$

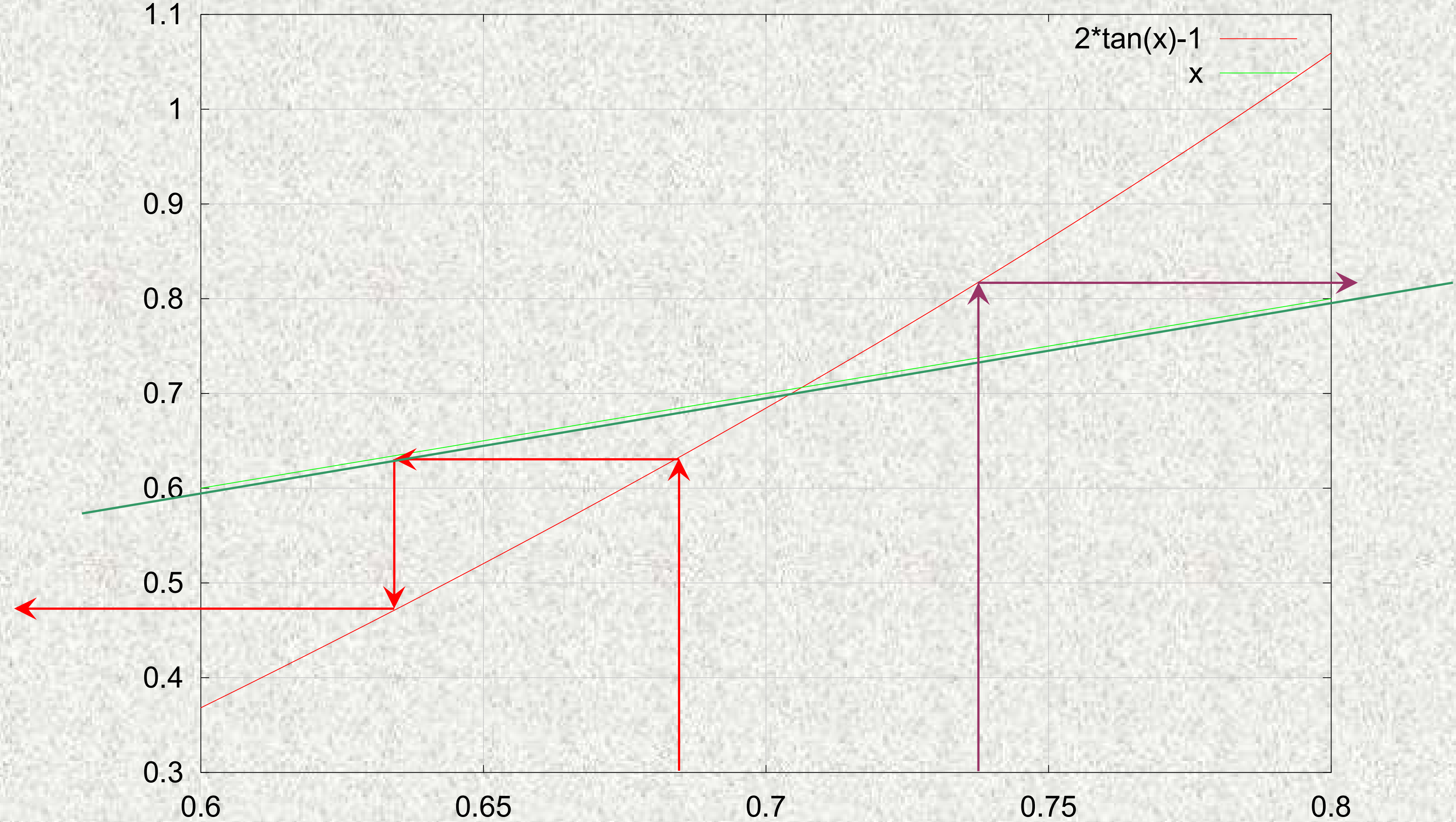
στο [0,1]



$$\boxed{x^{(n)} = 2\tan x^{(n-1)} - 1}$$

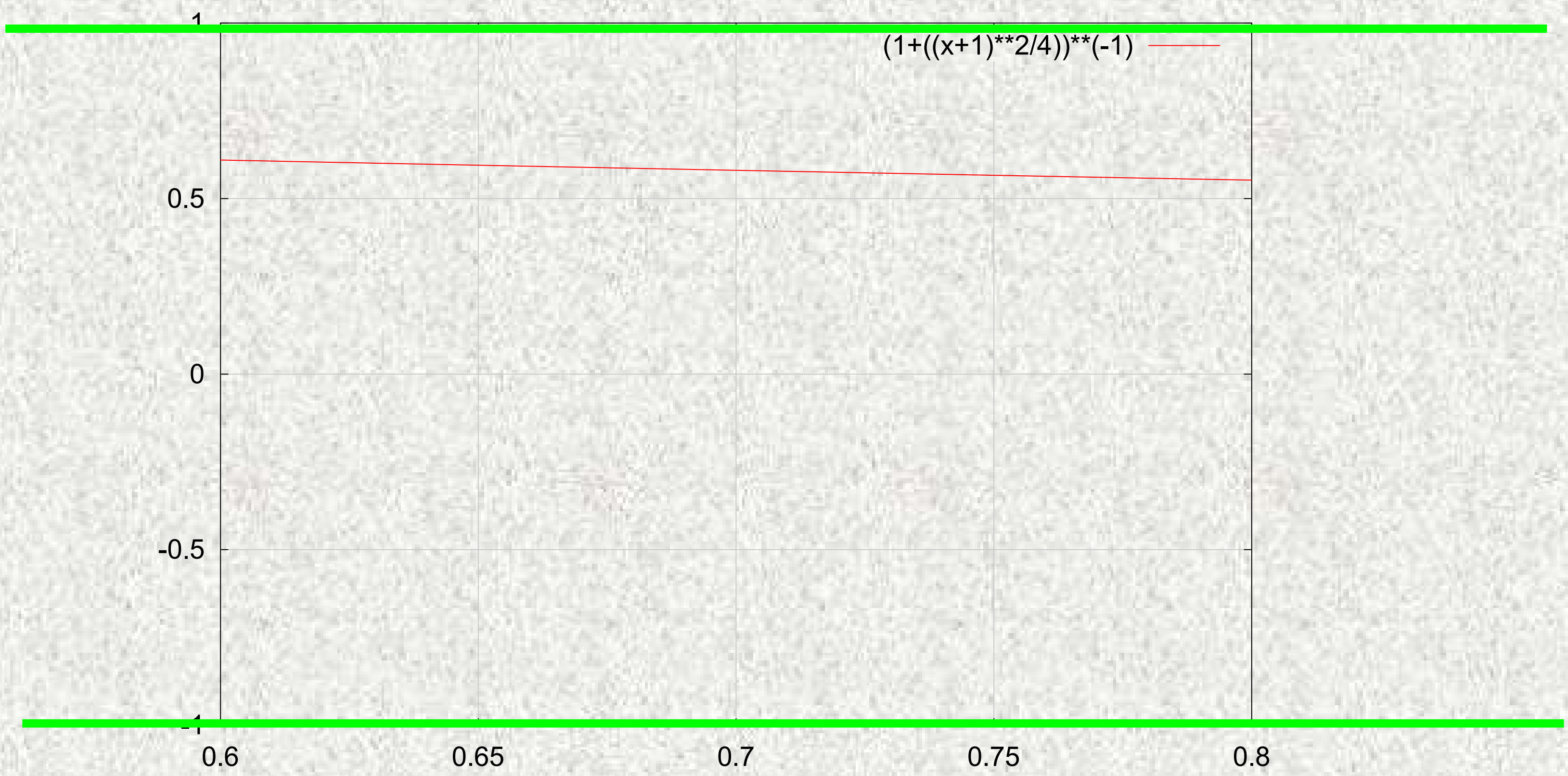
$$g'(x) = 2/\cos^2 x$$

$$x^{(n)} = 2\tan x^{(n-1)} - 1$$

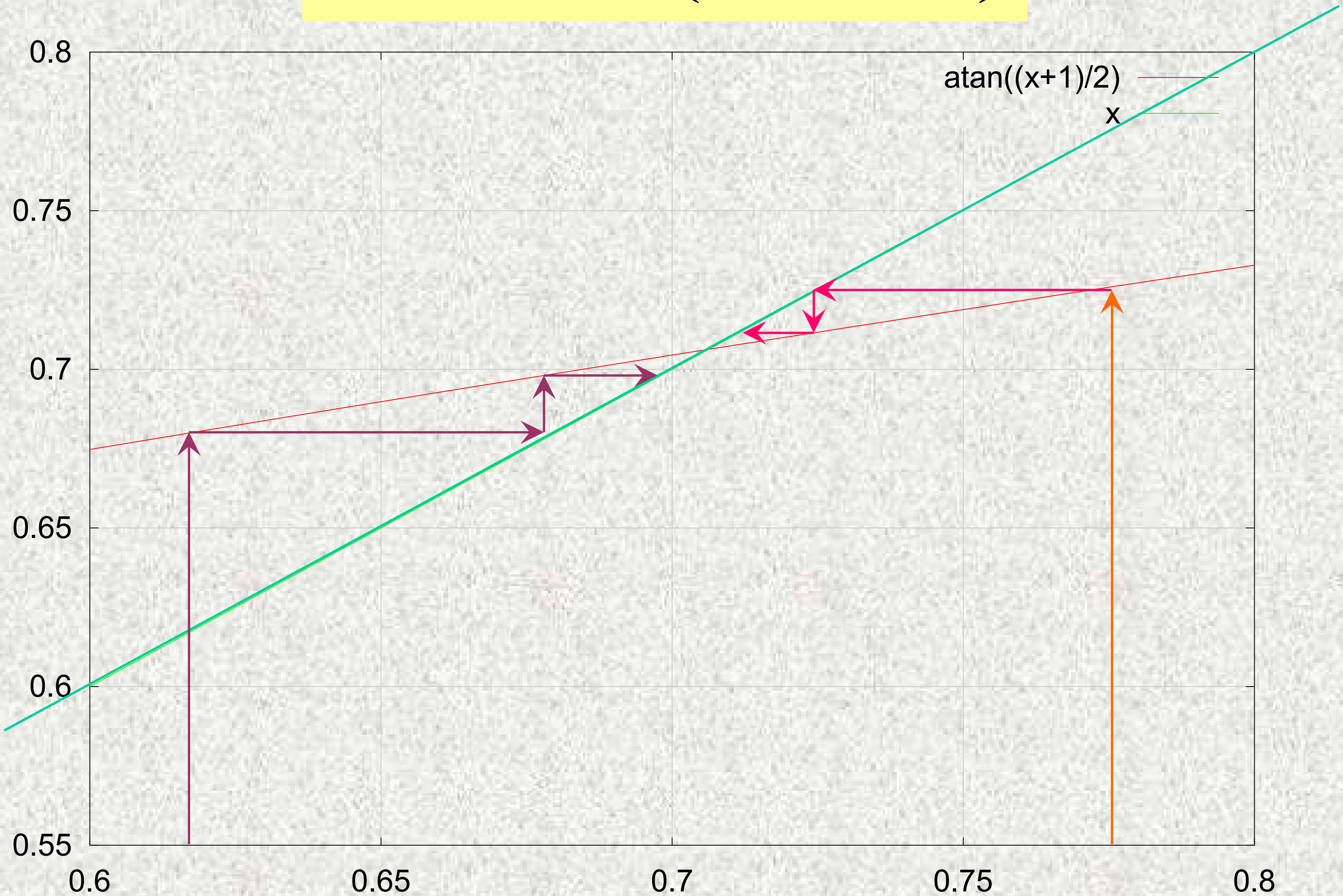


$$x^{(n)} = a\tan\left(\frac{x^{(n-1)}+1}{2}\right)$$

$$g'(x) = \underbrace{\left[1+\frac{(x+1)^2}{4}\right]^{-1}}$$



$$x^{(n)} = a\tan\left(\frac{x^{(n-1)}+1}{2}\right)$$



Παράδειγμα 2:

$$x^2 = A$$

$$x^{(n)} = A / x^{(n-1)}$$

$$x^{(n)} = \frac{1}{2}\left[\frac{A}{x} + x\right]$$

$$g(x) = \frac{A}{x}$$

$$g(x) = \frac{1}{2}\left[\frac{A}{x} + x\right]$$

$$g'(x) = -\frac{A}{x^2}$$

$$g'(x) = -\frac{A}{2x^2} + \frac{1}{2}$$

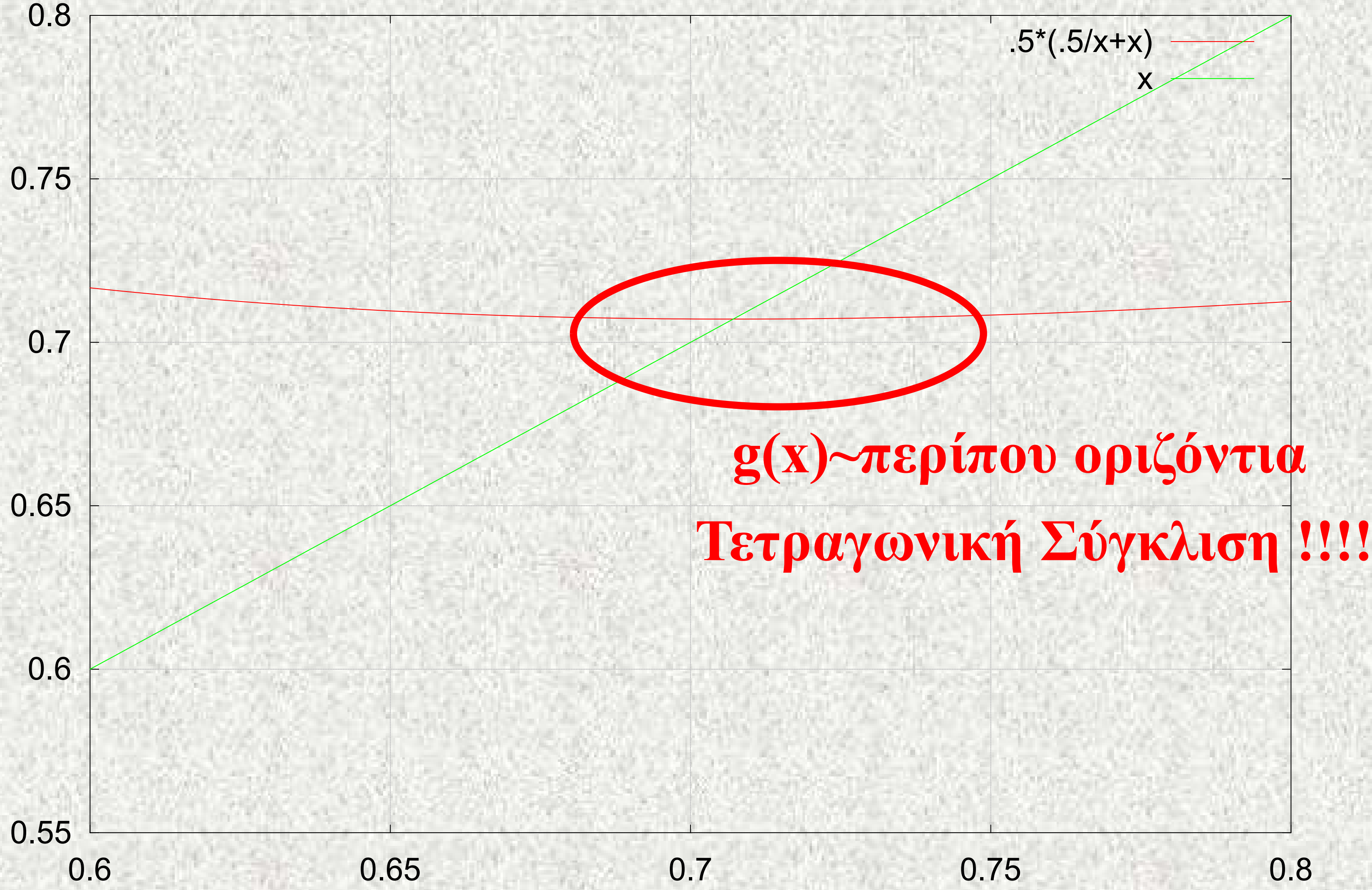
Στη λύση:

$$g'(\sqrt{A}) = -\frac{A}{\sqrt{A}^2} = -1$$

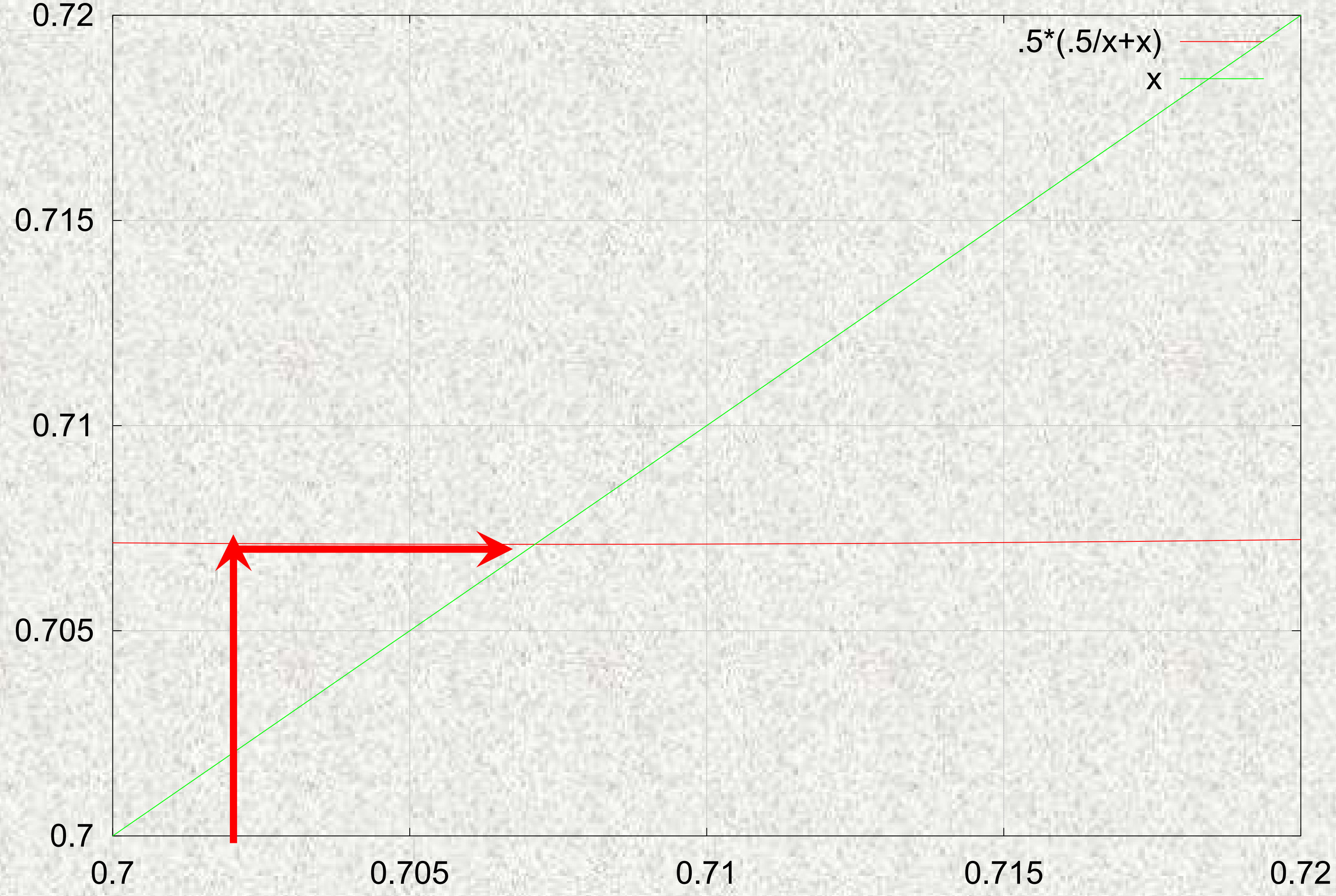
$$g'\left(\sqrt{A}\right) = -\frac{A}{2\sqrt{A}^2} + \frac{1}{2} = 0$$

$$x^{(n)} = \frac{1}{2}\left[\frac{A}{x} + x\right]$$

Για (A=1/2)

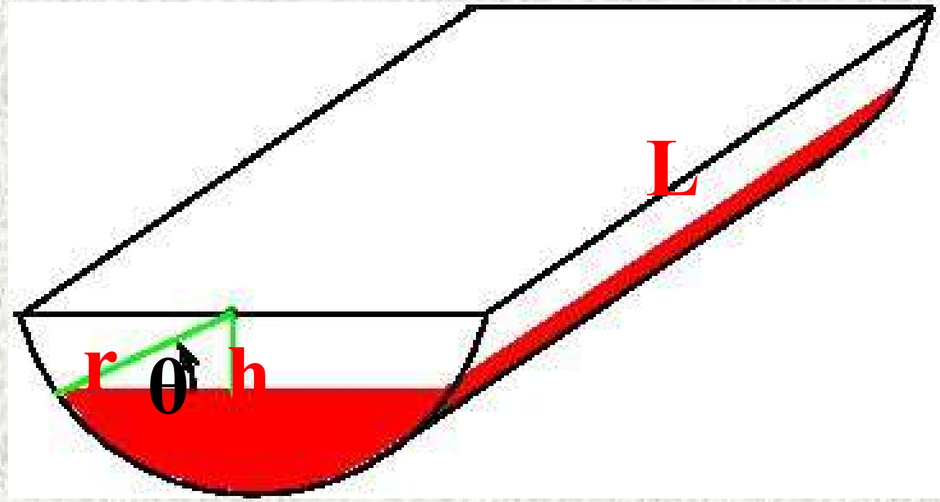


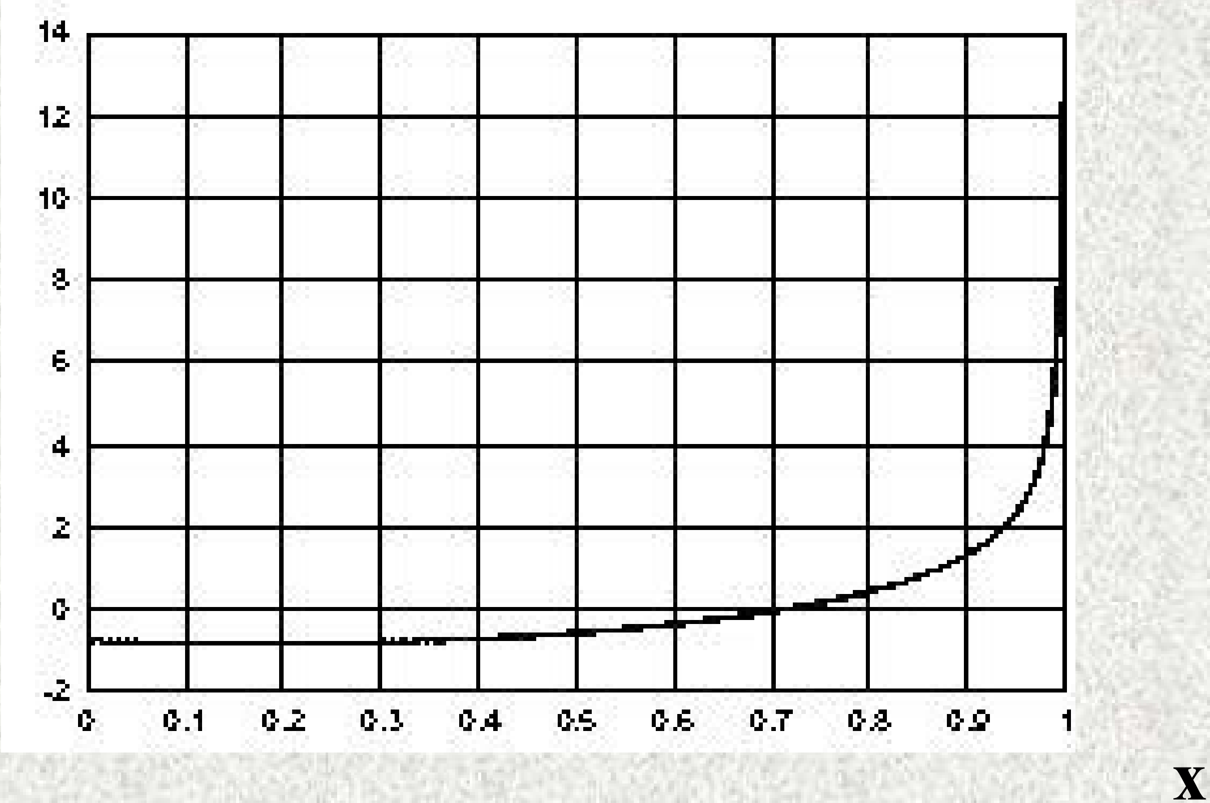
στο [0.70,0.72]



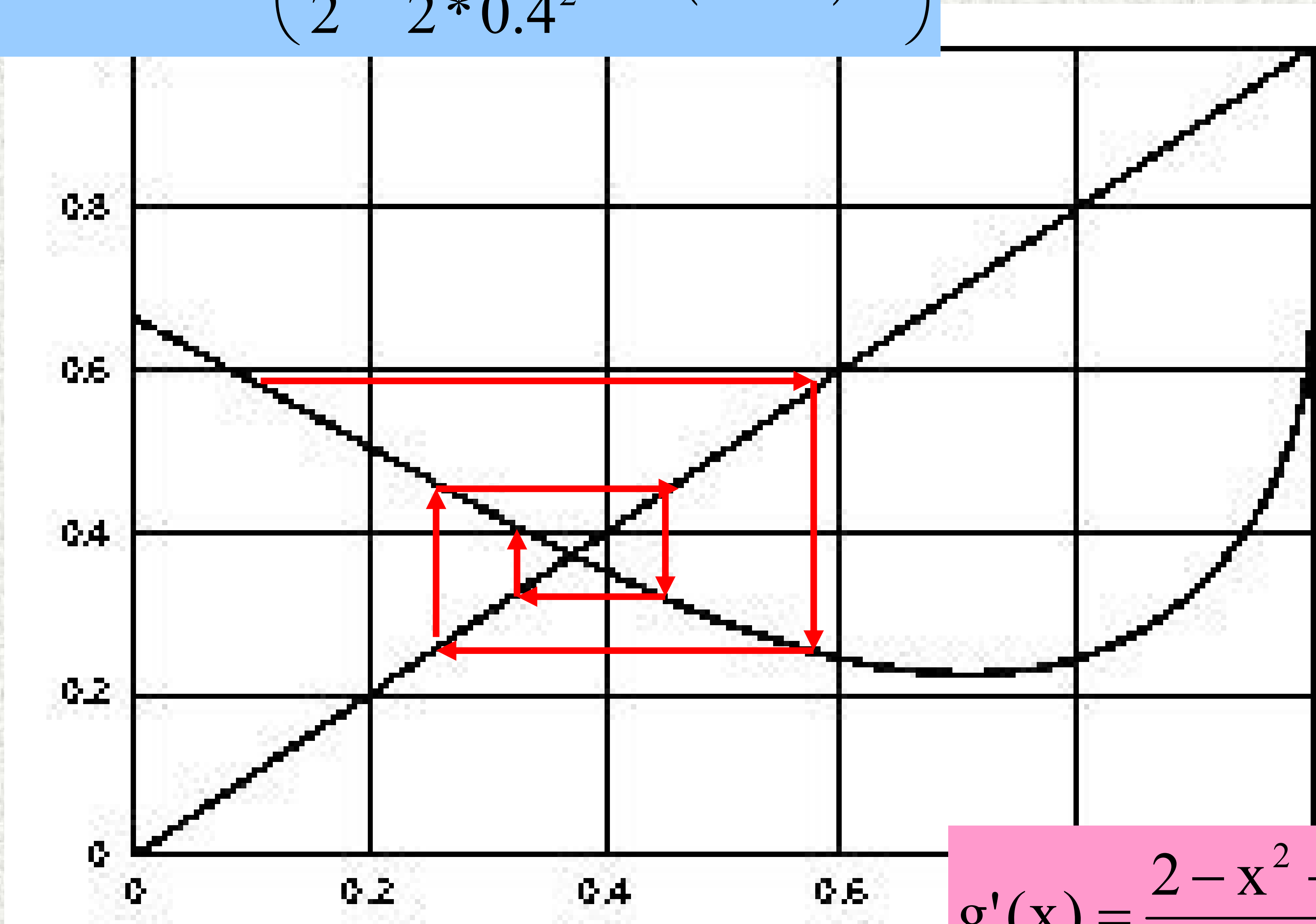
<u>Παράδειγμα 3:</u>

$$\frac{.27}{2*0.4^2} = \frac{\pi}{2} - \arcsin x - x\left(1 - x^2\right)^{1/2}$$

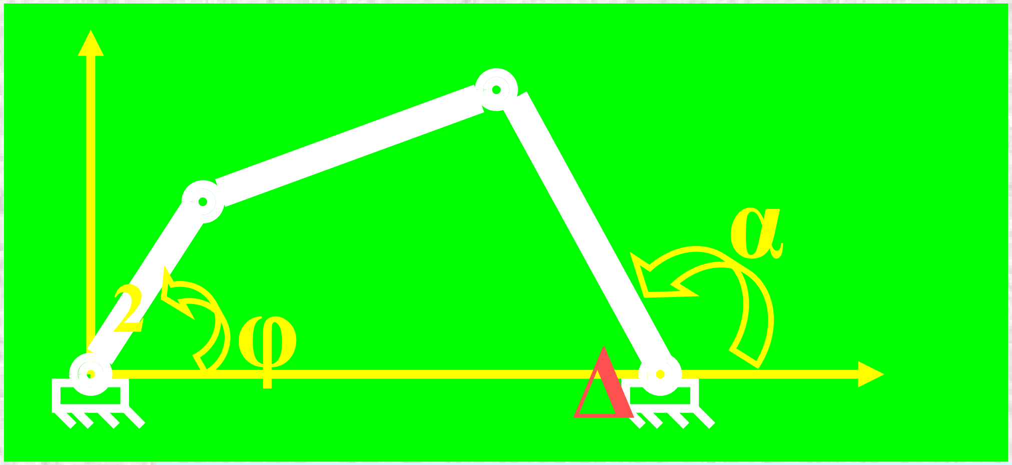




$$x = g(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{.27}{2*0.4^2} - x\left(1 - x^2\right)^{1/2}\right)$$



$$g'(x) = \frac{2 - x^2 - x}{\sqrt{1 - x^2}}$$



Παράδειγμα 3:

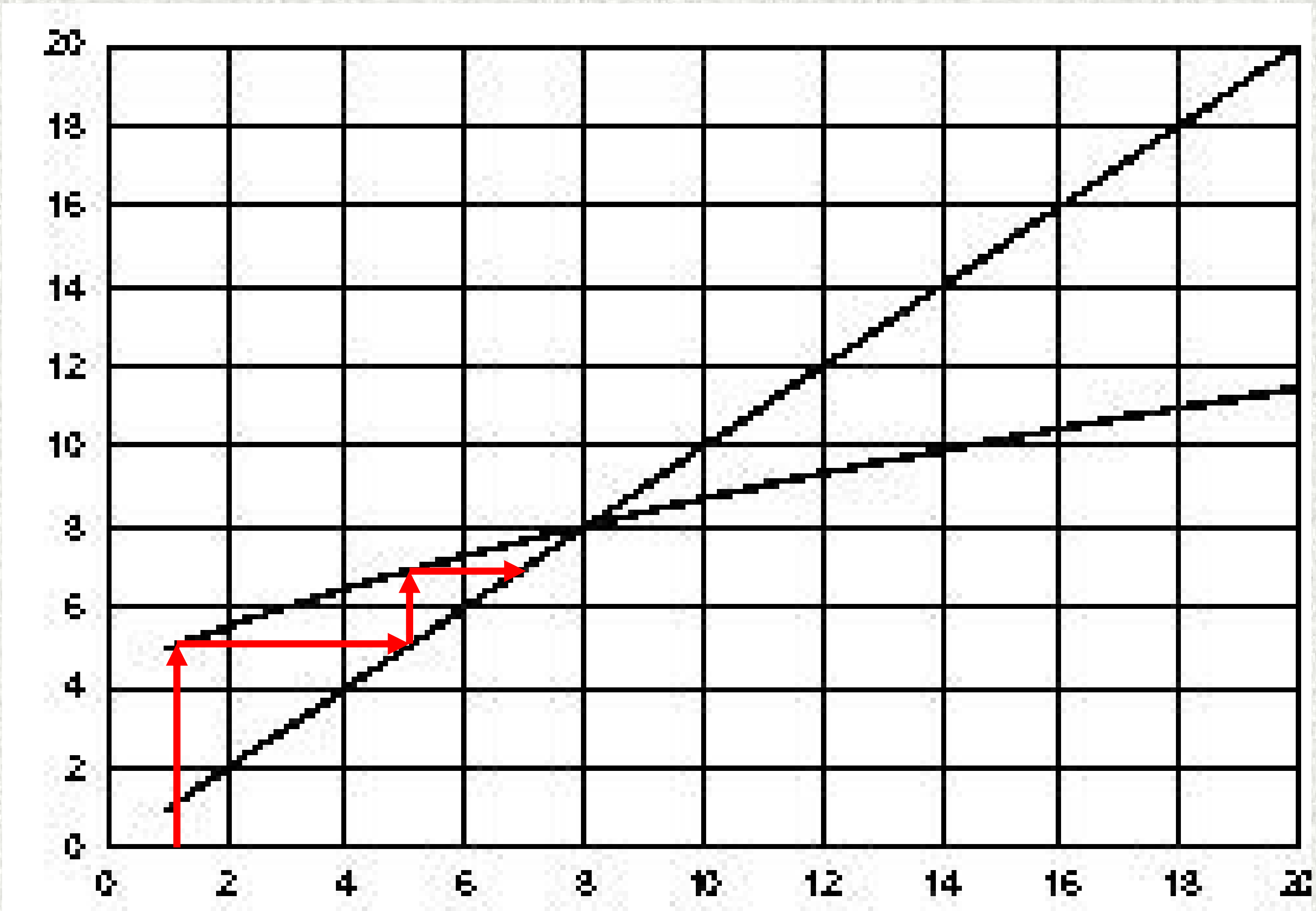
Για α=10°

$$\frac{5}{3}\cos\alpha-\frac{5}{2}\cos\phi+\frac{11}{6}-\cos(\alpha-\phi)=0$$

$$\phi=g(\phi)=\arccos\left[\frac{2}{5}\left(\frac{5}{3}\cos\alpha+\frac{11}{6}-\cos(\alpha-\phi)\right)\right]$$ **(α)**

(β) $$\phi=g(\phi)=\arccos\left[\frac{\frac{5}{3}\cos a+\frac{11}{6}-\sin a\sin\phi}{\frac{5}{2}+\cos a}\right]$$

Όρια φ=[1,20] (β) τρόπος



<u>Μέθοδος Newton-Raphson</u>

Μέθοδος Newton-Raphson

$$f\left(x\right)=0$$

$$x_0 = x^{(1)} + h$$ **Πότε;;;**

Πραγματική λύση **Αρχική λύση**

Πρέπει: $$f(x^{(1)}+h)=0$$

$$f\left(x^{(1)}+h\right)=f\left(x^{(1)}\right)+\frac{h}{1!}f'\left(x^{(1)}\right)+\cancel{\frac{h^2}{2!}f''\left(x^{(1)}\right)}+....$$

$$h=-\frac{f\left(x^{(1)}\right)}{f'\left(x^{(1)}\right)}$$ **Πότε;;;**

Μέθοδος Newton-Raphson

$$x^{(2)} = x^{(1)} - \frac{f\left(x^{(1)}\right)}{f'\left(x^{(1)}\right)}$$

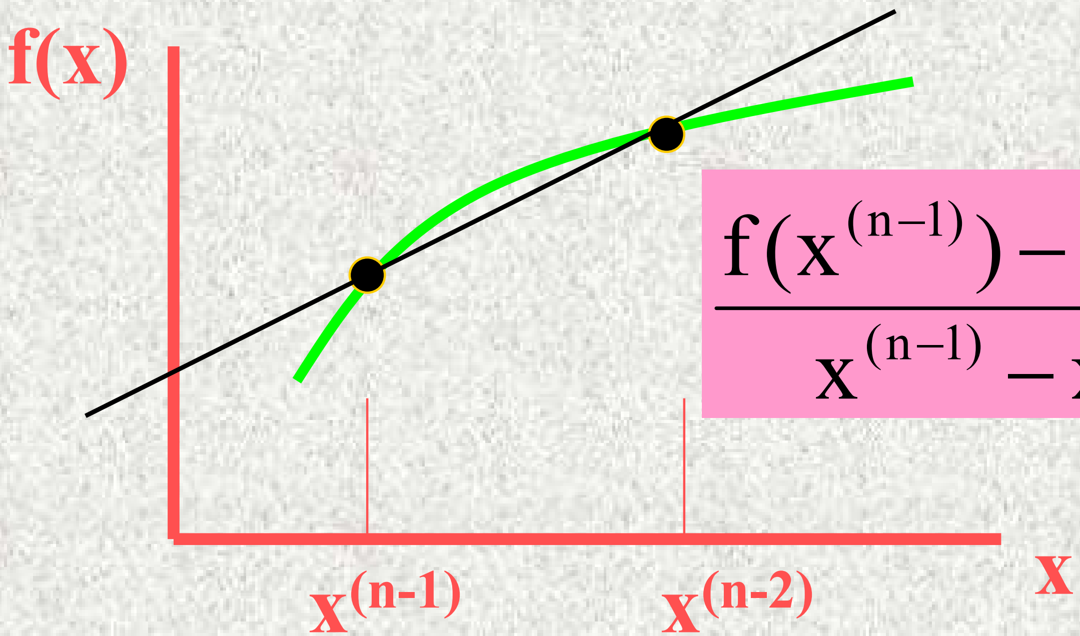
$$x^{(n)} = x^{(n-1)} - \frac{f\left(x^{(n-1)}\right)}{f'\left(x^{(n-1)}\right)}$$

Προετοιμασία (εύρεση παραγώγων) στο χαρτί ....

Μέθοδος Newton-Raphson (με προσεγγιστική παράγωγο)=Μέθοδος της Τέμνουσας

$$x^{(n)} = x^{(n-1)} - \frac{x^{(n-1)} - x^{(n-2)}}{f\left(x^{(n-1)}\right) - f\left(x^{(n-2)}\right)} f(x^{(n-1)})$$

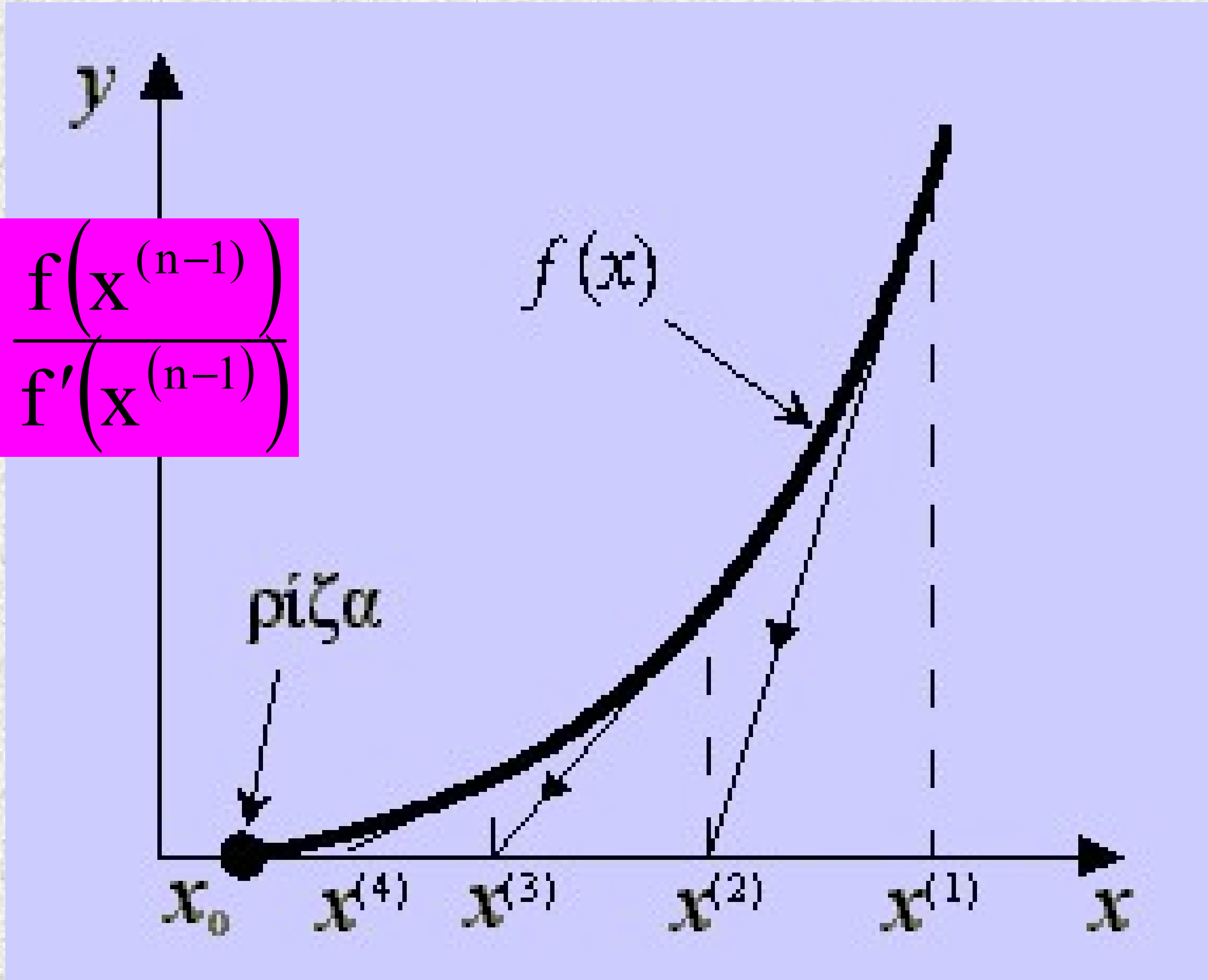
Αυτο-εκκίνηση ;;;;;



$$\frac{f(x^{(n-1)}) - f(x^{(n-2)})}{x^{(n-1)} - x^{(n-2)}} = f'(x^{(n-1)})$$

Μέθοδος Newton-Raphson

$$x^{(n)} = x^{(n-1)} - \frac{f\left(x^{(n-1)}\right)}{f'\left(x^{(n-1)}\right)}$$



Μέθοδος Newton-Raphson – Σύγκλιση

$$x^{(n+1)} = x^{(n)} - \frac{f\left(x^{(n)}\right)}{f'\left(x^{(n)}\right)}$$

$$\underbrace{x_r - x^{(n+1)}}_{\sigma^{(n+1)} = x_r - x^{(n+1)}} = \underbrace{x_r - x^{(n)}}_{\sigma^{(n)} = x_r - x^{(n)}} + \frac{f\left(x_r - \sigma^{(n)}\right)}{f'\left(x_r - \sigma^{(n)}\right)}$$

$$\sigma^{(n+1)} = x_r - x^{(n+1)} \qquad \sigma^{(n)} = x_r - x^{(n)}$$

$$\sigma^{(n+1)} = \sigma^{(n)} + \left[f(x_r) - \sigma^{(n)} f'(x_r) + {\sigma^{(n)}}^2 / 2 f''(x_r) - {\sigma^{(n)}}^3 / 3! f'''(x_r) + \ldots \right] /$$

$$/ \left[f'(x_r) - \sigma^{(n)} f''(x_r) + \frac{{\sigma^{(n)}}^2}{2} f'''(x_r) - \right]$$

Μέθοδος Newton-Raphson – Σύγκλιση

Με απλοποιήσεις:

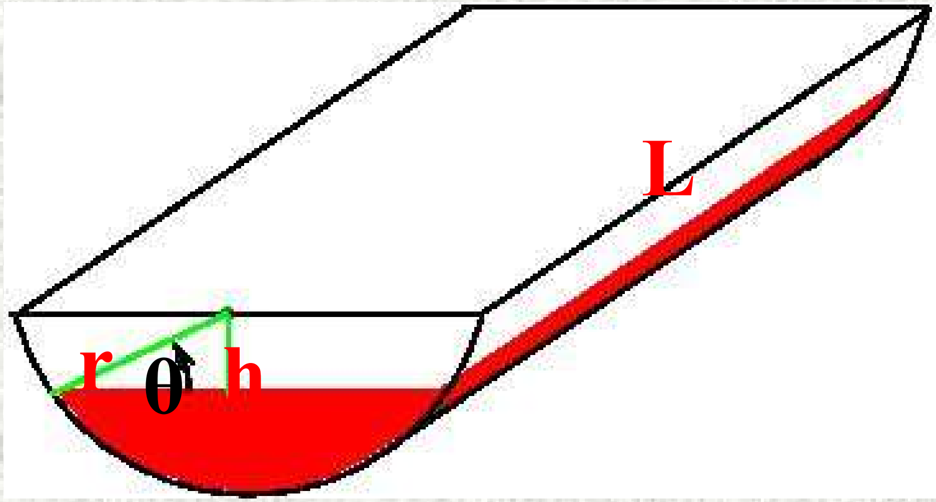
$$\sigma^{(n+1)} = -\frac{1}{2}\left(\sigma^{(n)}\right)^{2} \frac{f''(x_0)}{f'(x_0)}$$

‘Οταν κοντά στη ρίζα:

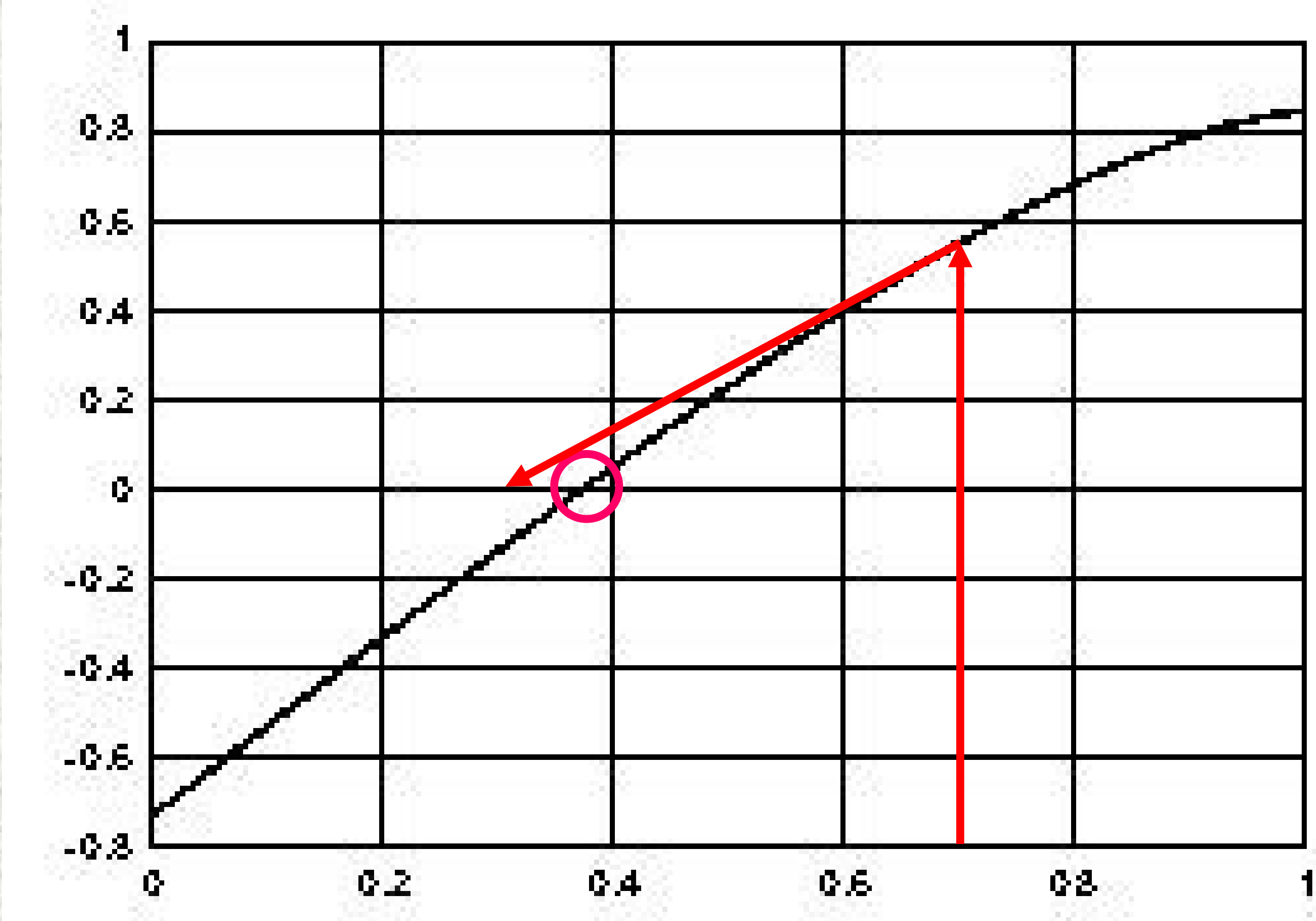
$$\left|\frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}\right| < 1.$$

<u>Παράδειγμα 2:</u>

$$\frac{.27}{2*0.4^2}=\frac{\pi}{2}-\arcsin x - x\left(1-x^2\right)^{1/2}$$



$$\frac{V}{Lr^2} - \frac{\pi}{2} + \arcsin x + x\left(1 - x^2\right)^{1/2}$$



$$x = h / L$$

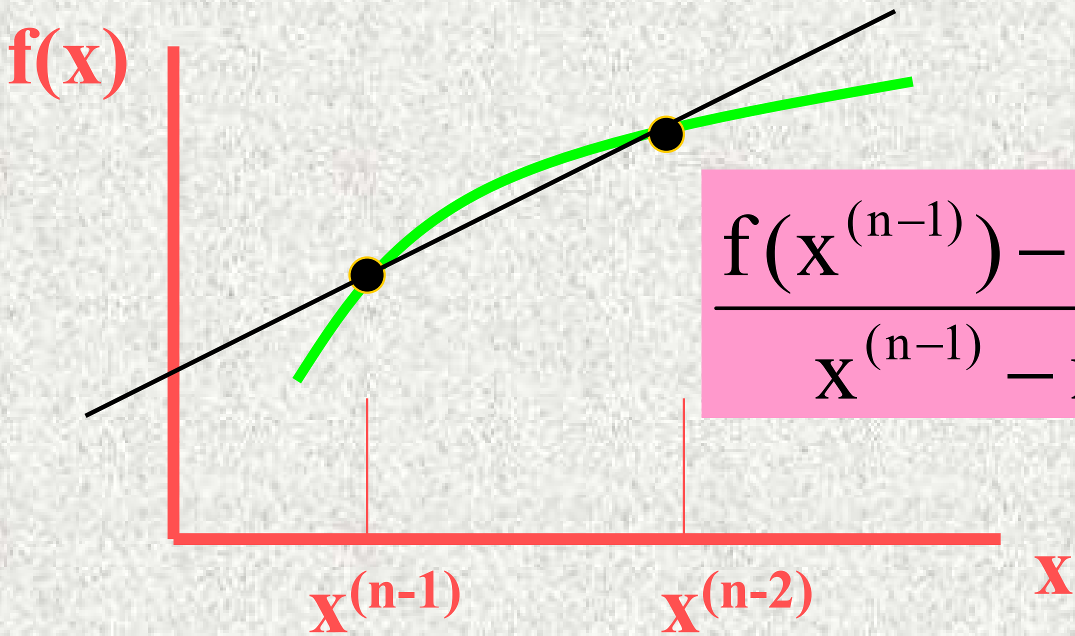
Άλλες Συναφείς Ανοικτές Μέθοδοι:

1. **Μέθοδος της Τέμνουσας**
2. **Μέθοδος Muller**

Μέθοδος Newton-Raphson (με προσεγγιστική παράγωγο)=Μέθοδος της Τέμνουσας

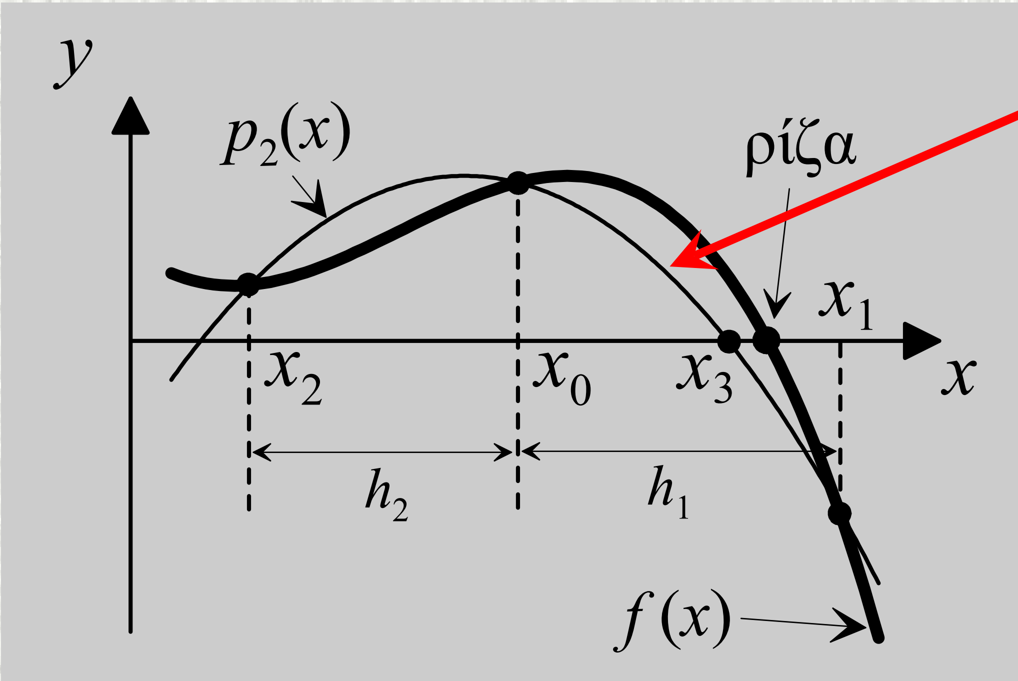
$$x^{(n)} = x^{(n-1)} - \frac{x^{(n-1)} - x^{(n-2)}}{f\left(x^{(n-1)}\right) - f\left(x^{(n-2)}\right)} f(x^{(n-1)})$$

Αυτο-εκκίνηση ;;;;;



$$\frac{f(x^{(n-1)}) - f(x^{(n-2)})}{x^{(n-1)} - x^{(n-2)}} = f'(x^{(n-1)})$$

Μέθοδος Mϋller



$$\boxed{p_2(x) = \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0}$$

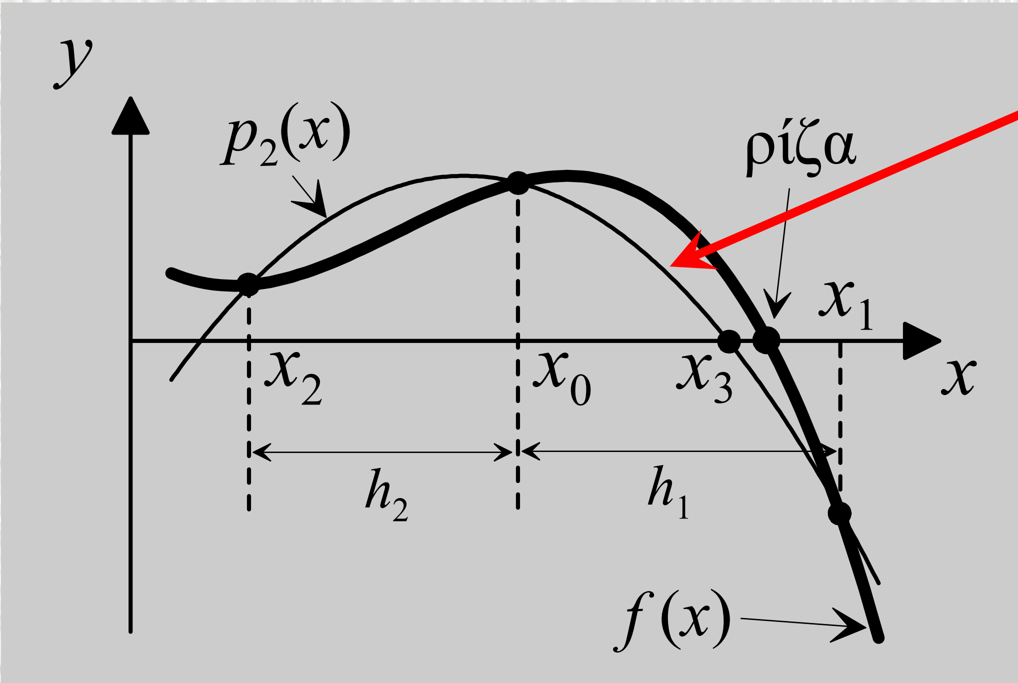
$(x_0, x_1, x_2) \longrightarrow x_3$

Αυτο-εκκίνηση ;;;;;

Βήματα:

1. **Υπολογισμός των συντελεστών α_i**
2. **Λύση της δευτεροβάθμιας**
3. **Επιλογή ως x_3 της πλησιέστερης στο x_0 ρίζας του**

Μέθοδος Mϋller



$$\boxed{p_2(x) = \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0}$$

$$\alpha_2 = \frac{h_2 \cdot f(x_1) - (h_1 + h_2) \cdot f(x_0) + h_1 \cdot f(x_2)}{h_1 h_2 \cdot (h_1 + h_2)},$$

$$\alpha_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0) - \alpha_2 \cdot h_1^2}{h_1},$$

$$\alpha_0 = f(x_0)$$

$$x_3 = x_0 - \frac{-2\alpha_0}{\alpha_1 \pm \sqrt{\alpha_1^2 - 4\alpha_2\alpha_0}}$$

Εύρεση Ριζών Πολυωνύμων:

Μέθοδος Newton

Βασικά Θεωρήματα:

- **Ένα πολυώνυμο k βαθμού έχει ακριβώς k ρίζες (πραγματικές ή μιγαδικές), όπου μια ρίζα πολλαπλότητας ρ προσμετράται ρ φορές.**
- **Από k+1 σημεία περνά ακριβώς μόνο ένα πολυώνυμο k βαθμού.**
- **Κανόνας του προσήμου του Descartes: Οι θετικές πραγματικές ρίζες ενός πολυωνύμου $p_k(x) = 0$ είναι τόσες όσες και οι μεταβολές στο πρόσημο των (πραγματικών) συντελεστών του, α_i, $i = k, k$-1, …, 0 ή λιγότερες κατά έναν άρτιο αριθμό. Το ίδιο ισχύει για τις αρνητικές ρίζες, όταν λαμβάνονται υπόψη τα πρόσημα του $p_k(-x) = 0$.**

$$p_k(x) = \alpha_k x^k + \alpha_{k-1} x^{k-1} + \alpha_{k-2} x^{k-2} + \ldots + \alpha_0$$

Μέθοδος Horner για υπολογισμό τιμής πολυωνύμου

$$p_k(x) = \alpha_k x^k + \alpha_{k-1} x^{k-1} + \alpha_{k-2} x^{k-2} + \ldots + \alpha_0$$

k(k+1)/2 πολλαπλασιασμοί

και

k προσθέσεις

$$p_k(x) = \alpha_0 + x\left(\alpha_1 + x\left(\alpha_2 + \ldots + x\left(\alpha_{k-1} + x\alpha_k\right)\right)\right)$$

k πολλαπλασιασμοί

και

k προσθέσεις

Ελάχιστο

Μέθοδος Newton για Πολυώνυμα (1)

$$p_k(x) = \alpha_k x^k + \alpha_{k-1} x^{k-1} + \alpha_{k-2} x^{k-2} + \ldots + \alpha_0$$

Παραγοντοποίηση του $p_n(x)$ κατά Horner. Βασικές σχέσεις:

$$p_k(x) = (x - t) \cdot g_{k-1}(x) + r_k \quad \Rightarrow \quad p_k(t) = r_k$$

$$p_k'(t) = g_{k-1}(t)$$

$$g_{k-1}(x) = b_{k-1} x^{k-1} + b_{k-2} x^{k-2} + \ldots + b_0$$

$$b_{k-1} = a_k$$

$$b_i = a_{i+1} + t \cdot b_{i+1} \quad , \quad i = k\text{-}2,\ k\text{-}3,\ \ldots,\ 0.$$

$$r_k = a_0 + t \cdot b_0$$

Μέθοδος Newton για Πολυώνυμα (2)

$$p_k(x) = \alpha_k x^k + \alpha_{k-1} x^{k-1} + \alpha_{k-2} x^{k-2} + \ldots + \alpha_0$$

$$p_k(x) = (x - t) \cdot g_{k-1}(x) + r_k \quad \Rightarrow \quad p_k(t) = r_k$$

$$p_k'(t) = g_{k-1}(t)$$

$$x^{(n+1)} = x^{(n)} - \frac{f\left(x^{(n)}\right)}{f'\left(x^{(n)}\right)}$$

$$x^{(n+1)} = x^{(n)} - \frac{p_k\left(x^{(n)}\right)}{p_k'\left(x^{(n)}\right)}$$