Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών ΕΜΠ
4ο Εξάμηνο
ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

Πρώτη Ενότητα Διδακτέας Ύλης
Αριθμητική Επίλυση Μη-Γραμμικών Εξισώσεων

Κ.Χ. Γιαννάκογλου, Καθηγητής ΕΜΠ
kgianna@mail.ntua.gr

Αριθμητική Επίλυση Μη-Γραμμικών Εξισώσεων

- **Επίλυση (αριθμητική επίλυση, αντί της αναλυτικής επίλυσης) ΜΙΑΣ μόνο μη-γραμμικής εξίσωσης.**
- **Εννοείται ότι είναι μη-γραμμική! Αλλιώς δεν θα χρειαζόμαστε την Αριθμητική Ανάλυση.**
- **Αν και τη μη-γραμμική εξίσωση μπορούμε να τη λύσουμε αναλυτικά, προφανώς το προτιμάμε! Αν μη τι άλλο, για λόγους ακρίβειας.**
- **Με την ολοκλήρωση της ύλης για την αριθμητική επίλυση μιας μη-γραμμικής εξίσωσης, θα ακολουθήσει η γενίκευση για συστήματα εξισώσεων.**

Αριθμητική Επίλυση Μη-Γραμμικών Εξισώσεων

Το πρόβλημα: Δεδομένης της μη-γραμμικής συνάρτησης $F(x)$, να βρεθεί η τιμή $x=x_0$ ώστε $F(x_0)=0$ ή $F(x_0)=y$ (y=γνωστό).

$$\alpha+\beta\,\ell nx = y \qquad (x>0)$$

$$x_0 = e^{(y_0-\alpha)/\beta}$$

$$F(x)=\cosh(\sqrt{x^2+1}-e^x)+\log|six(x)|=0$$

$$F(x)=12.2(e^{2x}-1)+x=0$$

Μια γνωστή ειδική περίπτωση:

$$y=\alpha_n x^n+\alpha_{n-1}x^{n-1}+\alpha_{n-2}x^{n-2}+\ldots+\alpha_0$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Εξίσωση van der Waals

$$\left(P + \frac{\alpha}{V^2}\right)\left(V - b\right) = RT$$

α, b	**:**	**σταθερές του αερίου**
P	**:**	**πίεση του αερίου (N/m^2)**
V	**:**	**ειδικός όγκος του αερίου (m^3/kg)**
T	**:**	**θερμοκρασία του αερίου (K)**
R	**:**	**η σταθερά του αερίου (J/kg/K)**

Είναι ΓΡΑΜΜΙΚΗ ή ΜΗ-ΓΡΑΜΜΙΚΗ;;;;;

... εξαρτάται :

Όταν επιλύεται ως προς το T:

$$T = \frac{1}{R}\left(P + \frac{\alpha}{V^2}\right)(V - b)$$

Όταν επιλύεται ως προς το P:

$$P = \frac{RT}{V - b} - \frac{\alpha}{V^2}$$

Όταν επιλύεται ως προς το V:

δεν γράφεται ως $V = f(P, T)$ **!!!!!**

<u>Στόχος:</u>

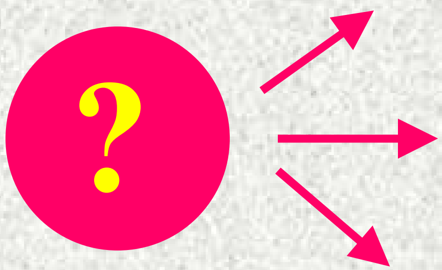
Αναζητούμε <u>αριθμητική-προσεγγιστική λύση</u> αντί της ακριβούς-αναλυτικής λύσης.

Ουσιαστικό τμήμα των γνώσεων που πρέπει να αποκτήσετε είναι ο τρόπος επιλογής μιας από τις διαθέσιμες μεθόδους (ή και από άλλες που δεν καλύπτονται από την ύλη του μαθήματος) για το συγκεκριμένο πρόβλημα.

Ενδιαφερόμαστε και για το υπολογιστικό κόστος που έχει η μέθοδος που θα επιλεγεί.

Ειδικά για το κεφάλαιο αυτό η παραλληλοποίηση λογισμικού είναι ήσσονος σημασίας. Γιατί?

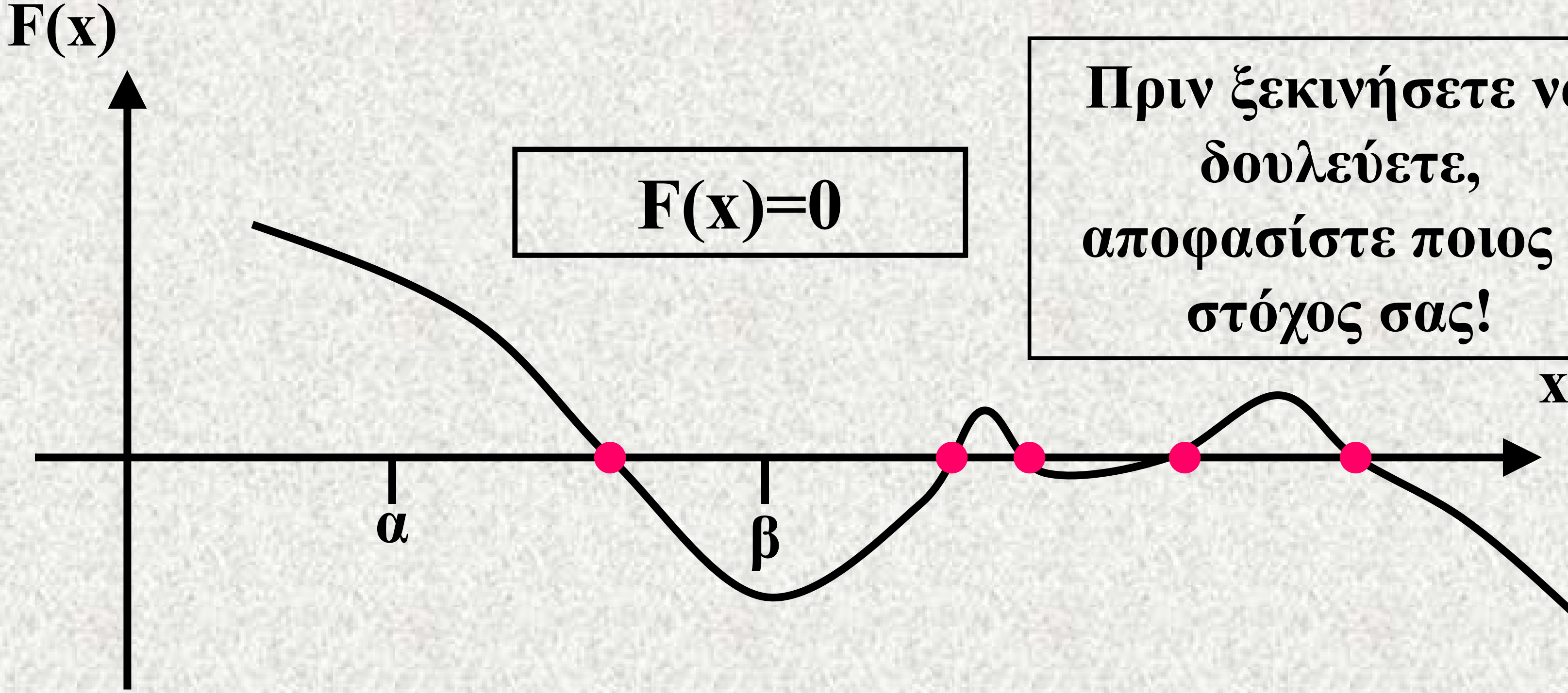
<u>Αριθμητική Επίλυση Μη-Γραμμικών Εξισώσεων</u>



Αναζήτηση <u>μιας</u> οποιασδήποτε λύσης

Αναζήτηση μιας λύσης σε <u>δεδομένο</u> (α,β)

Αναζήτηση <u>όλων</u> των λύσεων



$$\boxed{F(x)=0}$$

Πριν ξεκινήσετε να δουλεύετε, αποφασίστε ποιος ο στόχος σας!

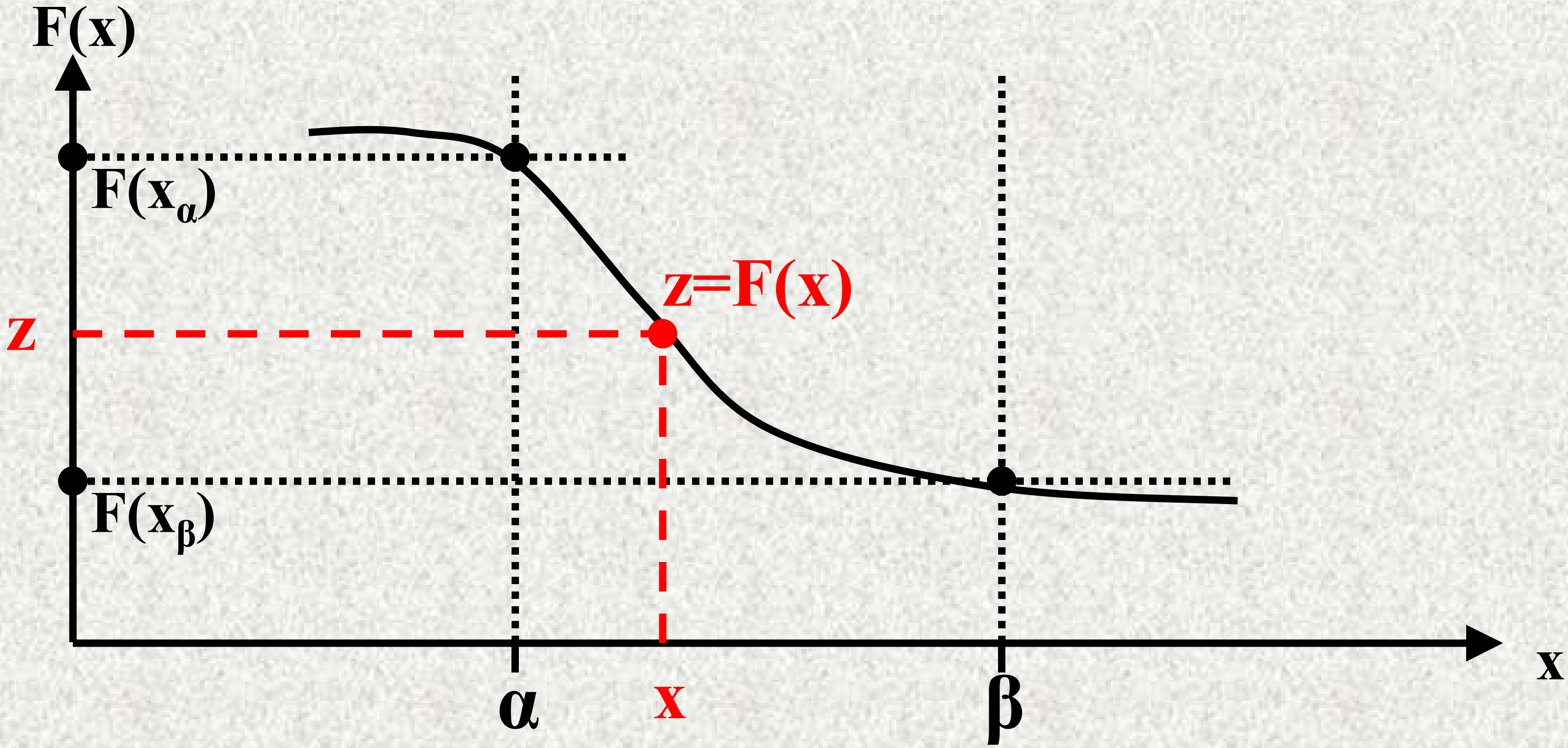
<u>Μέθοδοι Εντοπισμού του διαστήματος το οποίο περιέχει μια ρίζα της εξίσωσης:</u>

<u>Η Μέθοδος των Ισων Διαστημάτων</u>

Μερικές μέθοδοι για να ξεκινήσουν «να ψάχνουν τη λύση» πρέπει να τροφοδοτηθούν με το κάτω και το πάνω άκρο του διαστήματος μέσα στο οποίο θα βρίσκεται η λύση.

<u>Το Θεώρημα της Μέσης Τιμής:</u>

"Αν F συνεχής συνάρτηση στο [α,β] και z ένας πραγματικός αριθμός που F(α)≤z≤F(β), υπάρχει ένα τουλάχιστον x∈ [α,β] για το οποίο z=F(x)"



Αριθμητικό Παράδειγμα:

$$F(x) = x^2 - 4.3x + 3.52 = 0$$

(Ρίζες: x=1.1 και x=3.2)

Αναζητείται λύση στο διάστημα [α,β]=[0,2], διακριτοποιημένο με 10 ίσα διαστήματα.

Υπολογιστικό κόστος μετρούμενο με κλήσεις της συνάρτησης F(x).
<Function Calls>

x	F(x)
0.000000	3.520000
0.200000	2.700000
0.400000	1.960000
0.600000	1.300000
0.800000	0.720000
1.000000	0.220000
1.200000	-0.200000
1.400000	-0.540000
1.600000	-0.800000
1.800000	-0.980000
2.000000	-1.080000

<u>Αλλά:</u>

$$F(x) = x^2 - 2.25x + 1.265 = 0$$

(Ρίζες: x=1.1 και x=1.15)

Αναζητείται λύση στο διάστημα [α,β]=[0,2], διακριτοποιημένο με 10 ίσα διαστήματα.

Υπολογισμοί πάντα με ακρίβεια δεύτερης τάξης (double precision)

x	F(x)
0.000000	1.265000
0.200000	0.855000
0.400000	0.525000
0.600000	0.275000
0.800000	0.105000
1.000000	0.015000
1.200000	0.005000
1.400000	0.075000
1.600000	0.225000
1.800000	0.455000
2.000000	0.765000

?

Αν είναι τεχνικά εφικτό, βοηθά να ξεκινάμε από τη γραφική παράσταση συνάρτησης !!!

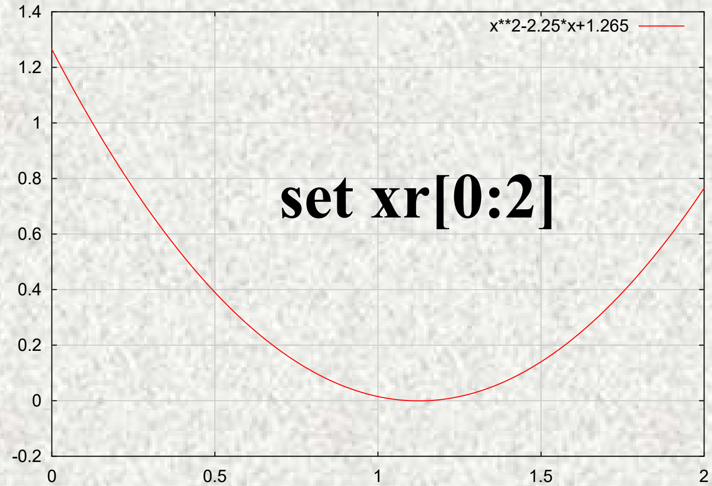
Συνιστάται η χρήση gnuplot:

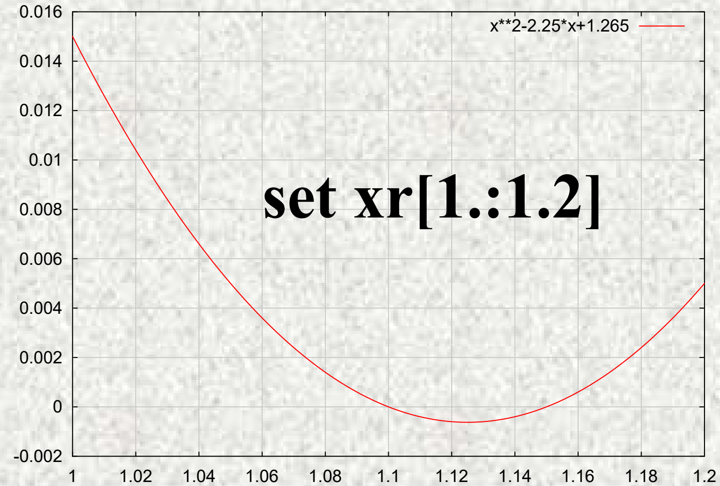
p x2-2.25*x+1.265**

set grid

rep

set xr[0:2]





<u>Άλλες Μέθοδοι Εντοπισμού του διαστήματος το οποίο περιέχει μια ρίζα της εξίσωσης:</u>

Ένα <u>έξυπνο</u> τέχνασμα, όταν και αν μπορεί να εφαρμοστεί: λύστε <u>μια απλοποιημένη εκδοχή</u> της ίδιας εξίσωσης

Αντί της

$$\left(P+\frac{\alpha}{V^2}\right)\left(V-b\right)=RT$$

Αρχίστε με την

$$PV = RT$$

... και εκτιμήστε προσεγγιστικά (συν/πλην) που «βρίσκονται» οι ρίζες ...

Ειδικά για πολυωνυμικές συναρτήσεις:

$$F(x)=\alpha_n x^n+\alpha_{n-1}x^{n-1}+\alpha_{n-2}x^{n-2}+\ldots+\alpha_0$$

όλες οι ρίζες (πραγματικές και μιγαδικές) βρίσκονται στην περιοχή ενός κυκλικού δακτυλίου με εξωτερική και εσωτερική ακτίνα:

$$R_o=1+\max\left(|a_{n-1}|,|a_{n-2}|,\ldots,|a_0|\right)/|a_n|$$

$$R_i=|a_n|/\left[|a_n|+\max\left(|a_n|,|a_{n-1}|,\ldots,|a_1|\right)\right]$$

Παράδειγμα:

$$F(x) = x^3 - 2.2x^2 - 0.8x + 2.4$$

(Ρίζες: x = 1.2 , x = 2.0 , x = -1)

(α_3 = 1 , α_2 = -2.2 , α_1 = -0.8 , α_0 = 2.4)

$$R_o = 1 + \max\left(|-2.2|, |-0.8|, |2.4|\right) / |1| = 3.4$$

$$R_i = |1| / \left[|1| + \max\left(|1|, |-2.2|, |-0.8|, |2.4|\right)\right] = 0.2941$$

Ο Μηχανικός πρέπει να διακρίνει:

- **Ακριβής/αναλυτική λύση της εξίσωσης**
- **Προσεγγιστική/αριθμητική λύση της εξίσωσης**
- **Ακριβής/αναλυτική λύση μιας προσεγγιστικής εξίσωσης**

Η Αριθμητική Ανάλυση:

- **Δεν βοηθά στο 1^{ο} και το 3^{ο}. Δεν βρίσκει αναλυτικές λύσεις!**
- **Η ύπαρξη (αριθμητικού) σφάλματος στη λύση που θα δώσει η μέθοδος της Αριθμητικής Ανάλυσης είναι δεδομένη.**
- **Όλες οι μέθοδοι λχ για μη-γραμμικές εξισώσεις δεν λύνουν κάθε πρόβλημα.**
- **Η επιλογή μεθόδου είναι κρίσιμη! Έχω δεδομένα για να την ξεκινήσω? Θα δώσει λύση? Με τι σφάλμα? Σε πόσο χρόνο?**

Γνωστές Μέθοδοι για την Αριθμητική Επίλυση Μη-Γραμμικών ή Υπερβατικών Εξισώσεων

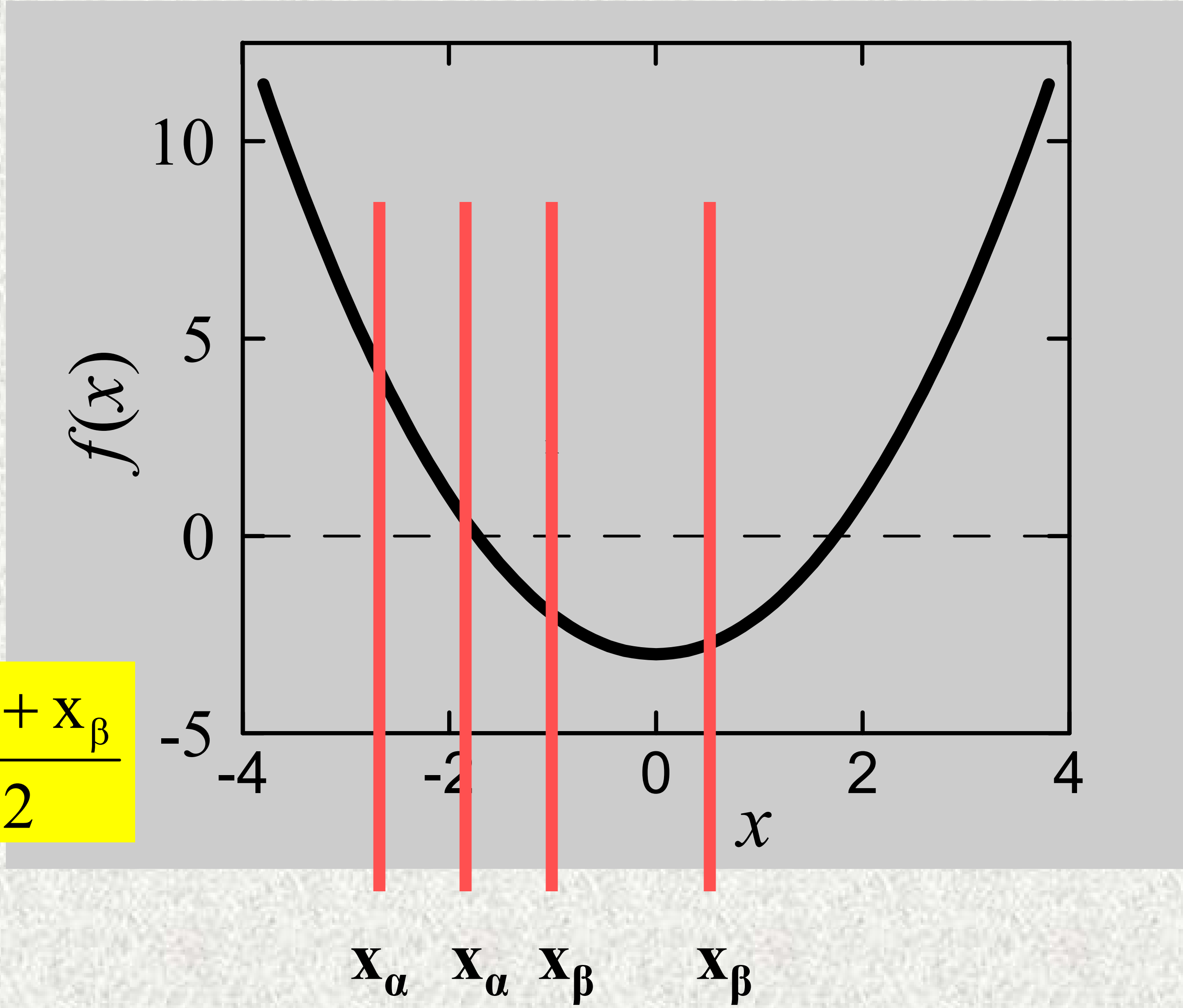
- **Μέθοδος Διαδοχικών Διχοτομήσεων**
- **Μέθοδος των Διαδοχικών Αντικαταστάσεων**
- **Μέθοδος Newton-Raphson**
- **Αλλες**

Μέθοδος Διαδοχικών Διχοτομήσεων

Bisection Method
or
Interval Halving Method

Η πιο απλή μέθοδος για την αριθμητική επίλυση της f(x)=0.
Απλή, όμως, δεν σημαίνει και γρήγορη!!!
Η έννοια των Επαναληπτικών Μεθόδων (Iterative Methods)

Μέθοδος Διαδοχικών Διχοτομήσεωνψ



$$x_m = \frac{x_\alpha + x_\beta}{2}$$

Κριτήρια Σύγκλισης:

* Μέγιστος Αριθμός Διχοτομήσεων

* Αν F(x)=0, όταν $|F(x)|<\varepsilon_1$

* Όταν η απόλυτη ή σχετική απόκλιση δύο διαδοχικών λύσεων είναι μικρότερη από ένα όριο ε_2

$$\varepsilon_{\alpha\pi o\lambda\upsilon\tau o} = \left| x^{(n)} - x^{(n-1)} \right| < \varepsilon_2$$

$$\varepsilon_{\sigma\chi\varepsilon\tau\iota\kappa o} = \frac{\left| x^{(n)} - x^{(n-1)} \right|}{|\, x^{(n)} \,|} < \varepsilon_2$$

Εκτίμηση πλήθους επαναλήψεων για δεδομένο [α,β] και επιθυμητό σφάλμα (ε_2)

Τερματισμός όταν

$$x^{(n)} - x^{(n-1)} < \varepsilon_2$$

Διαρκείς Διχοτομήσεις

$$\frac{\beta - \alpha}{\varepsilon_2} = 2^n$$

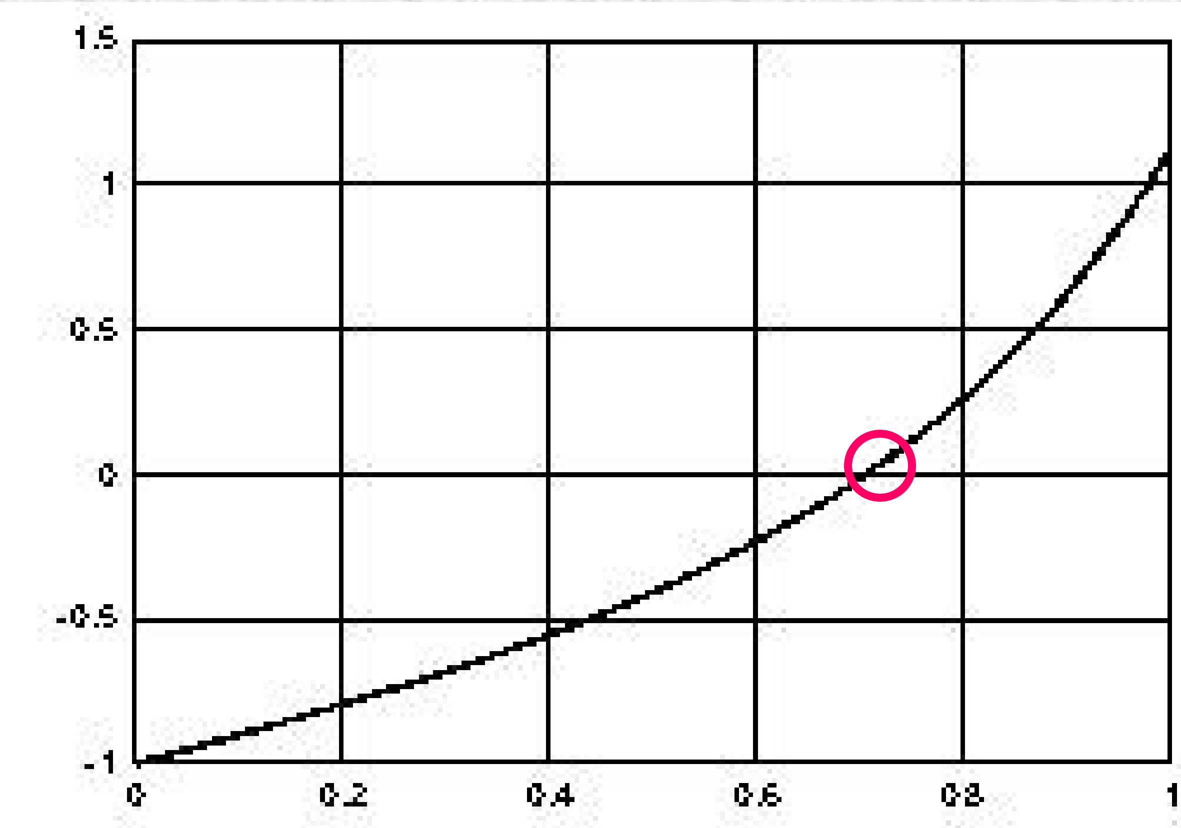
Εκτίμηση πλήθους επαναλήψεων

$$n = \ell n\left[\frac{\left(x_\beta - x_\alpha\right)}{\varepsilon_2}\right] \Big/ \ell n\, 2$$

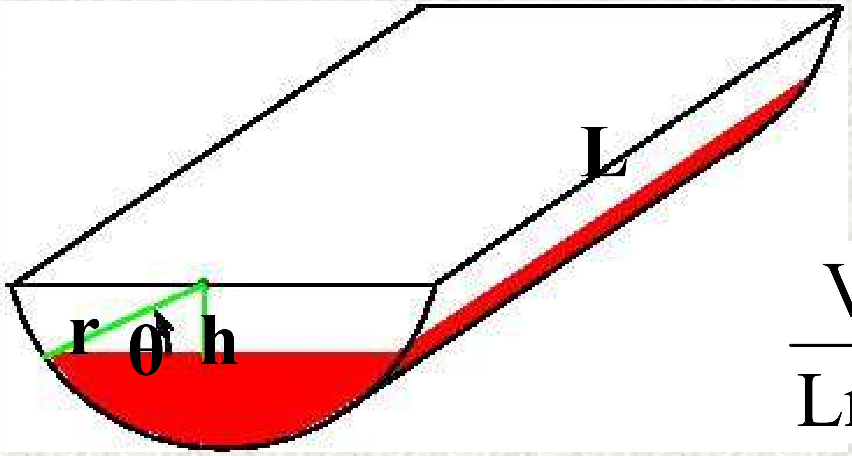
Παράδειγμα 1:

$$2\tan x - x - 1 = 0$$

Αναζήτηση λύσης στο [0,1]



<u>Παράδειγμα 2:</u>



$$\frac{V}{Lr^2} = \frac{\pi}{2} - \arcsin x - x\left(1 - x^2\right)^{1/2}$$

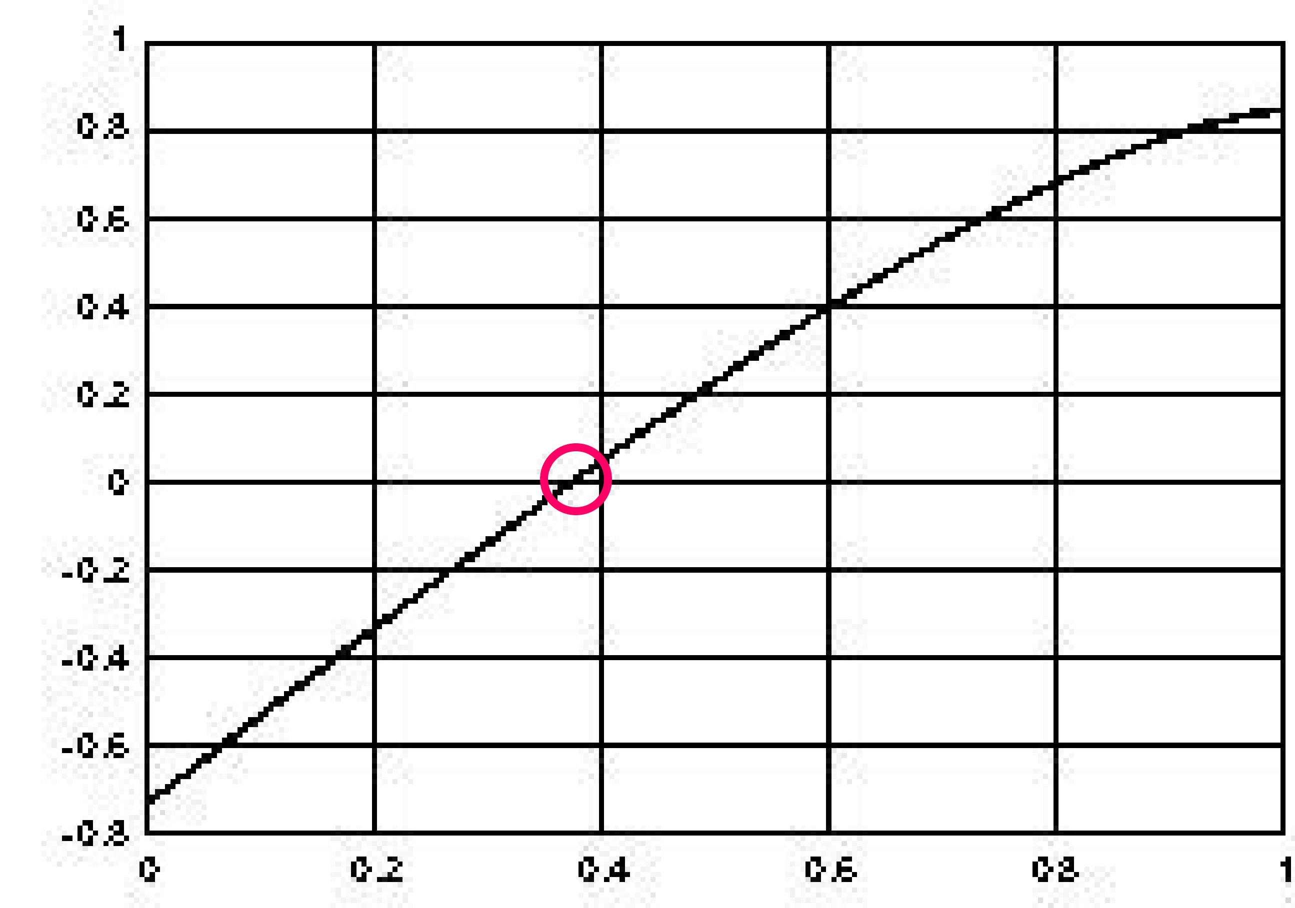
$$L = 2m$$

$$r = 0.4m$$

$$V = 270lt = 0.27m^3$$

$$h = xL$$

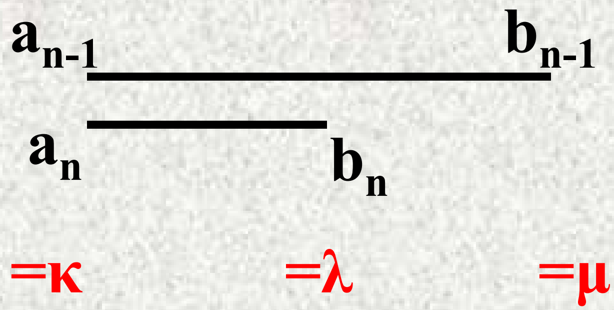
$$\frac{V}{Lr^2} - \frac{\pi}{2} + \arcsin x + x\left(1 - x^2\right)^{1/2}$$

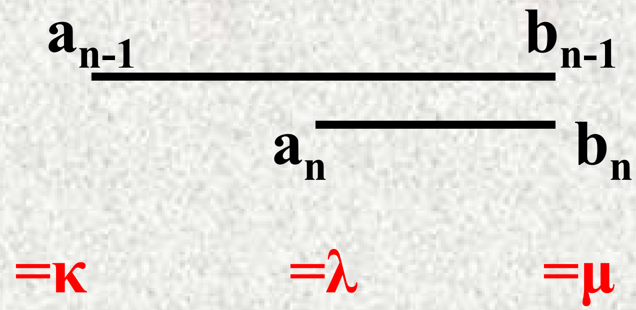


$$x = h / L$$

<u>Ασκηση:</u> Αν $[\alpha_0,\beta_0]$, $[\alpha_1,\beta_1]$, $[\alpha_2,\beta_2]$, ... τα διαδοχικά διαστήματα αναζήτησης λύσης στη μέθοδο της διχοτόμησης, δείξτε ότι:

$$a_n b_n + a_{n-1} b_{n-1} = a_{n-1} b_n + a_n b_{n-1}$$





$$\kappa\lambda + \kappa\mu = \kappa\lambda + \kappa\mu$$

$$\lambda\mu + \kappa\mu = \kappa\mu + \lambda\mu$$

<u>Σύγκλιση της Μεθόδου Διχοτόμησης</u>

Επειδή το σφάλμα περίπου μειώνεται στο μισό σε κάθε επανάληψη (λόγω διχοτόμησης), άρα η σύγκλιση του αλγορίθμου είναι (σχεδόν) <u>ΓΡΑΜΜΙΚΗ</u>

<u>Καλό ή κακό??????</u>

ΓΕΝΙΚΑ:

Κριτήρια Επιλογής της «Κατάλληλης» Μεθόδου

- **Προϋποθέσεις σύγκλισης**
- **Ρυθμός σύγκλισης προς τη λύση, δηλ. υπολογιστικό κόστος**
- **Εξάρτηση από δεδομένα αρχικοποίησης**
- **Αυτο-εκκινούμενη ή όχι**

Έχετε Υπόψη:

Η εφαρμογή κάποιας μεθόδου είναι (παν)εύκολη και γίνεται με την υλοποίηση διαθέσιμων σχέσεων (ή λογισμικού). Πρέπει:

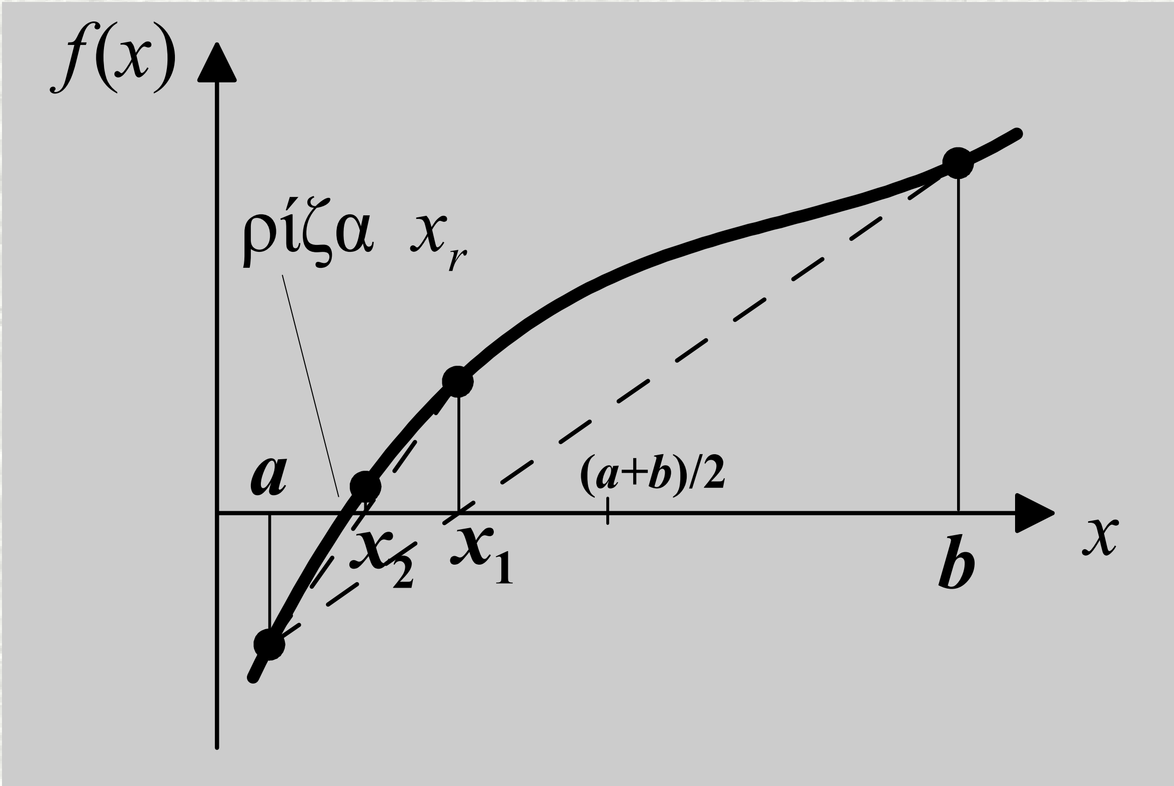
- **Η μέθοδος να βρει τη λύση που επιθυμούμε.**
- **Να τη βρει με αποδεκτό/ελάχιστο υπολογιστικό κόστος.**

Άρα, έχει μεγάλη σημασία η επιλογή της μεθόδου που είναι ευθύνη του μηχανικού.

Μέθοδος Εσφαλμένης Θέσης
ή
Μέθοδος Γραμμικής Παρεμβολής

Method of False Position
or
Regula Falsi Method

Μια «λογική» επέκταση της μεθόδου των Διαδοχικών Διχοτομήσεων



$$\cancel{x_1 = \frac{a+b}{2}}$$

$$\frac{x_1 - a}{b - a} = \frac{\cancelto{0}{f(x_1)} - f(a)}{f(b) - f(a)} \Rightarrow \boxed{x_1 = a - \frac{f(a)\cdot(b-a)}{f(b) - f(a)}}$$

Σύγκλιση της Regula Falsi

•απαιτεί «περισσότερες» πράξεις από άλλες μεθόδους που θα γνωρίσουμε

•συγκλίνει ταχύτερα από αυτήν της διχοτόμησης όταν η συνάρτηση είναι σχεδόν γραμμική στην περιοχή της ρίζας

•μπορεί να γίνει πολύ πιο αργή

Υπολογιστικό κόστος: Μια κλήση της f(x) ανά επανάληψη (πλην της πρώτης).

<u>Ανοικτές Επαναληπτικές Μέθοδοι Προσέγγισης Ριζών</u>

+ **Δεν χρειάζονται [α,β] για να ξεκινήσουν**
+ **Πιο γρήγορες από ότι οι διαδοχικές διχοτομήσεις**
+ **Μπορούν να βρουν πολλαπλές λύσεις**
- **<u>Δεν</u> έχουν εξασφαλισμένη σύγκλιση**

Επαναληπτικός Αλγόριθμος:

$$x^{(0)} \rightarrow x^{(1)} \rightarrow x^{(2)} \rightarrow x^{(3)} \rightarrow \ldots.$$

$$x^{(n)} = g\left(x^{(n-1)}\right)$$

$$x^{(new)} = g\left(x^{(old)}\right)$$

Γενίκευση:

$$x^{(n)} = g\left(x^{(n-1)}, x^{(n-2)}, x^{(n-3)}, x^{(n-4)}, \ldots, x^{(n-k)}\right)$$

συνήθως k=1

Μέθοδος Διαδοχικών Αντικαταστάσεων
ή
Μέθοδος Σταθερού Σημείου

Method of Successive Substitutions
or
Fixed Point Iteration Method

Ανοικτή μέθοδος

Μέθοδος Διαδοχικών Αντικαταστάσεων
(Μέθοδος Σταθερού Σημείου)

$$f(x)=0 \quad \Rightarrow \quad x=g(x) \quad \Rightarrow \quad x^{(n)}=g\left(x^{(n-1)}\right)$$

Η έννοια των επαναλήψεων-iterations:

$$x^{(0)} \rightarrow x^{(1)} \rightarrow x^{(2)} \rightarrow x^{(3)} \rightarrow \ldots.$$

Παράδειγμα 1:

$$2\tan x - x - 1 = 0$$

$$x^{(n)} = g\left(x^{(n-1)}\right)$$

$$x^{(n)} = 2\tan x^{(n-1)} - 1$$

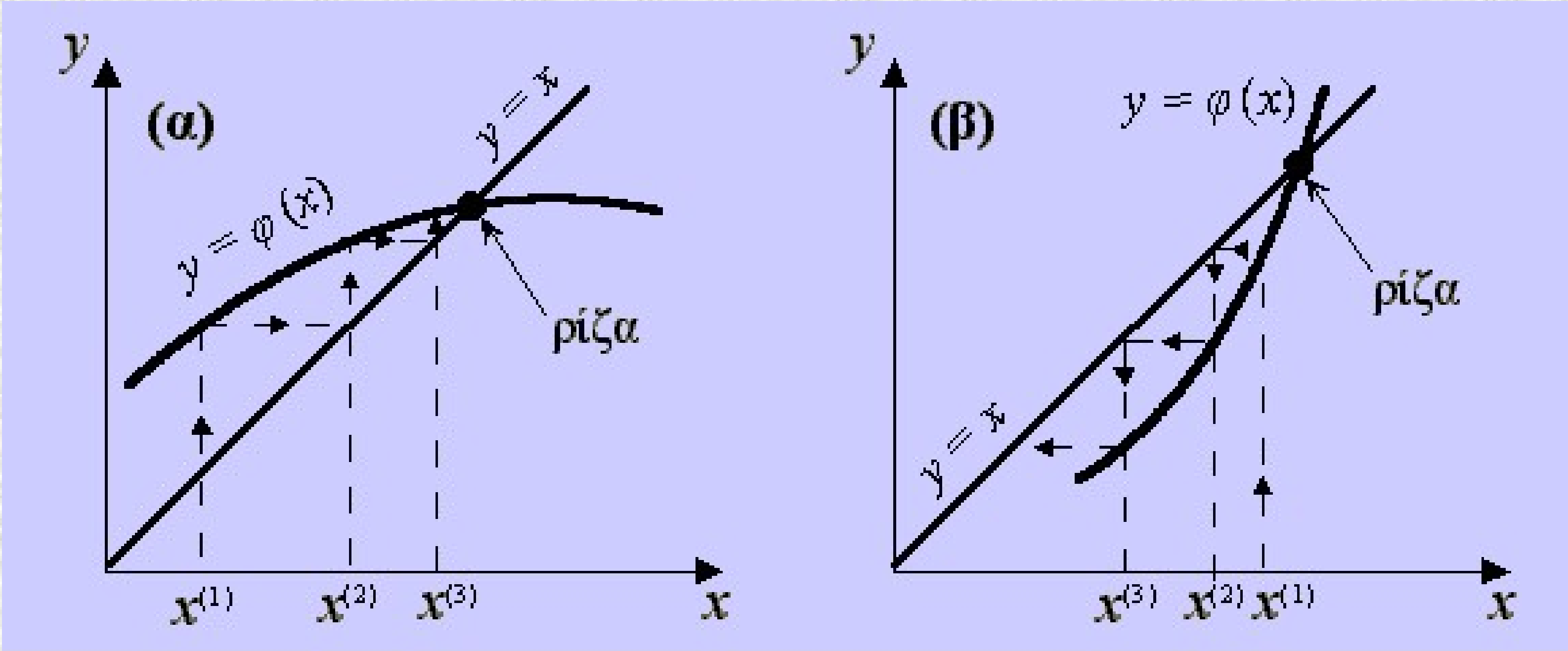
$$g(x) = 2\tan x - 1$$

$$x^{(n)} = a\tan\left(\frac{x^{(n-1)} + 1}{2}\right)$$

$$g(x) = a\tan\left(\frac{x^{(n-1)} + 1}{2}\right)$$

Ποιο από τα δύο πρέπει να χρησιμοποιήσω;;;;

Μέθοδος Διαδοχικών Αντικαταστάσεων



$$x^{(1)} = \text{given}$$

$$x^{(2)} = g(x^{(1)})$$

$$x^{(3)} = g(x^{(2)})$$

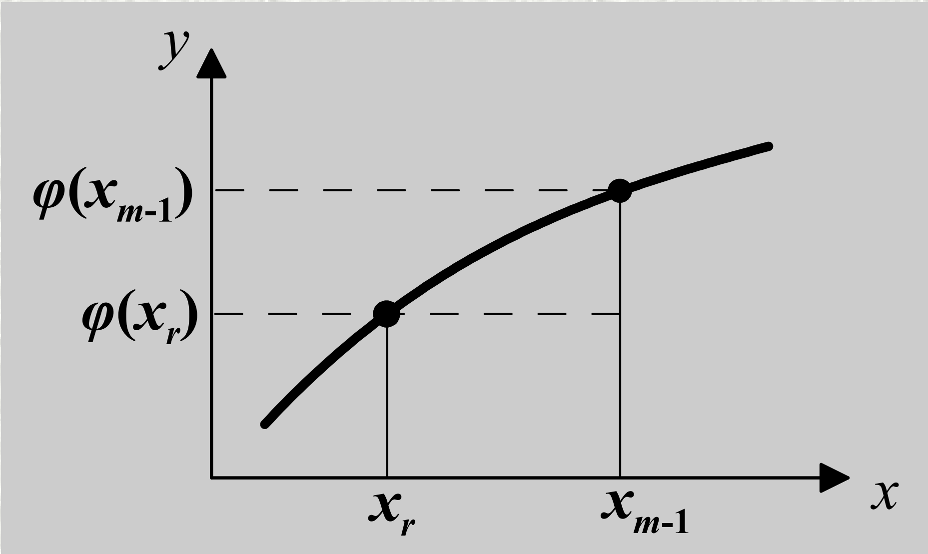
Σύγκλιση της Μεθόδου:

$$x^{(n)} = g\left(x^{(n-1)}\right)$$

x_r=λύση

$$\left| x^{(n)} - x_r \right| < \left| x^{(n-1)} - x_r \right|$$

$$\left| x^{(n)} - x_r \right| = \left| g(x^{(n-1)}) - g(x_r) \right| = \left| \frac{dg}{dx}(x_r) \right| . \left| x^{(n-1)} - x_r \right|$$



αν κοντά στη λύση

$$\left| g'\left(x_r\right) \right| < 1$$

<u>ΑΝΑΓΚΑΙΑ</u>, ΟΧΙ ΙΚΑΝΗ!

εξαρτάται από το σημείο εκκίνησης

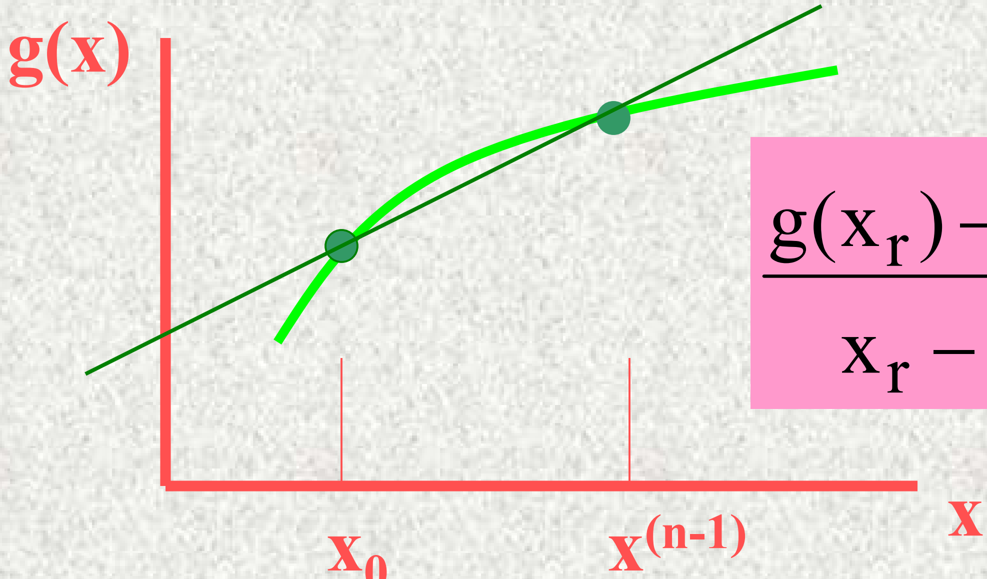
Κριτήρια Σύγκλισης (1):

$$x^{(n)} = g(x^{(n-1)})$$

$$x_r = g(x_r)$$

x_r=τελική λύση=σταθερό σημείο

$$x_r - x^{(n)} = g(x_r) - g(x^{(n-1)}) \cong \left[x_r - x^{(n-1)}\right] g'\left(x^{(n-1)}\right)$$



$$\frac{g(x_r) - g(x^{(n-1)})}{x_r - x^{(n-1)}} = g'(x^{(n-1)})$$

Κριτήρια Σύγκλισης (2):

$$\sigma^{(n)} = x_r - x^{(n)}$$

$$\sigma^{(n)} = \sigma^{(n-1)} g'\left(x^{(n-1)}\right)$$

$$\left|\sigma^{(n)} / \sigma^{(n-1)}\right| < 1$$

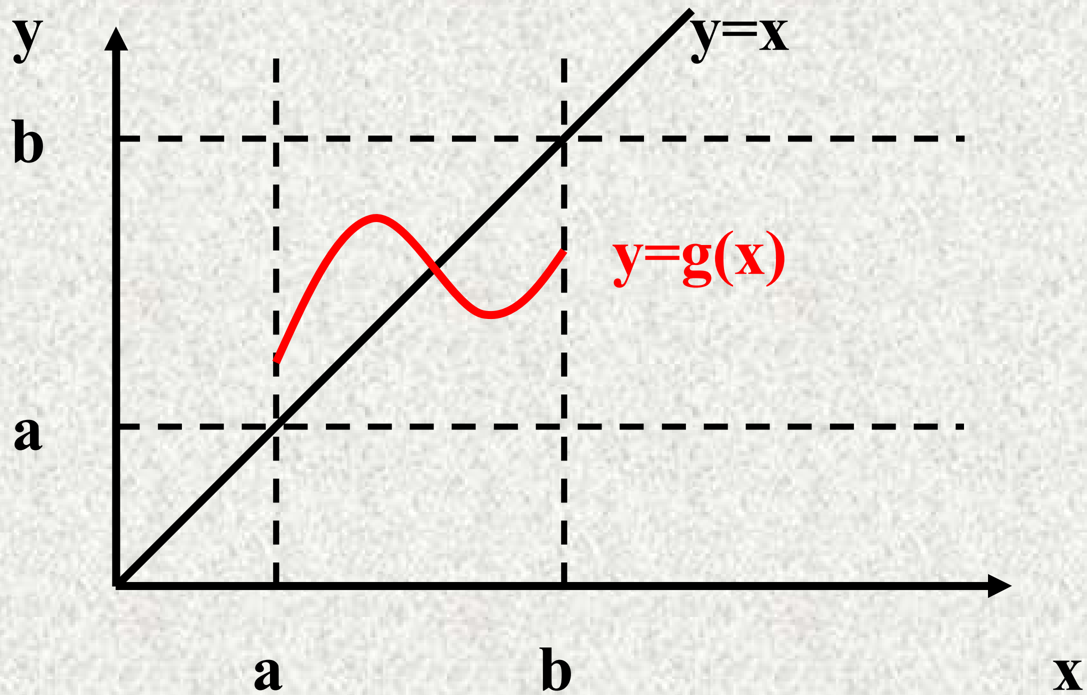
Αναγκαία, όχι ικανή συνθήκη

$$\left|g'(x)\right| < 1$$

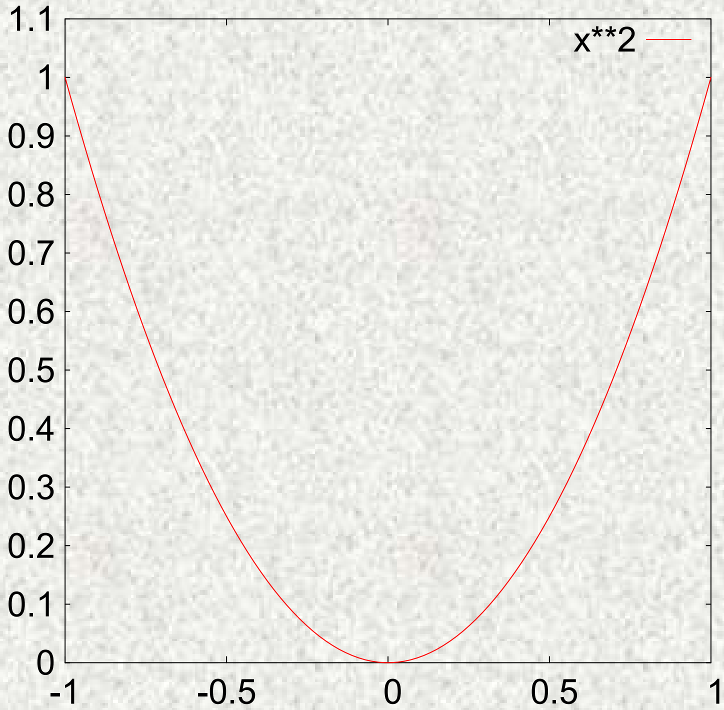
<u>Εξήγηση της Ονομασίας:</u>

<u>Ορισμός:</u> Ένα σημείο x^* του πεδίου ορισμού μιας συνάρτησης g(x) λέγεται <u>σταθερό</u> <u>σημείο</u> της αν ισχύει $g(x^*)=x^*$

<u>Πρόταση:</u> Κάθε συνεχής συνάρτηση g:[a,b]→[a,b] έχει στο διάστημα [a,b] (τουλάχιστον) ένα σταθερό σημείο



Η συνθήκη της πρότασης είναι ικανή, αλλά όχι και αναγκαία



λ.χ. Η συνεχής συνάρτηση

$g:[-1:1] \rightarrow [0,2]$, $g(x):=2x^2$

Σταθερά Σημεία τα 0 και ½

χωρίς να ισχύει η συνθήκη !

Παράδειγμα 1: $2\tan x - x - 1 = 0$

$$x^{(n)} = 2\tan x^{(n-1)} - 1$$

$$g(x) = 2\tan x - 1$$

$$g'(x) = 2/\cos^2 x$$

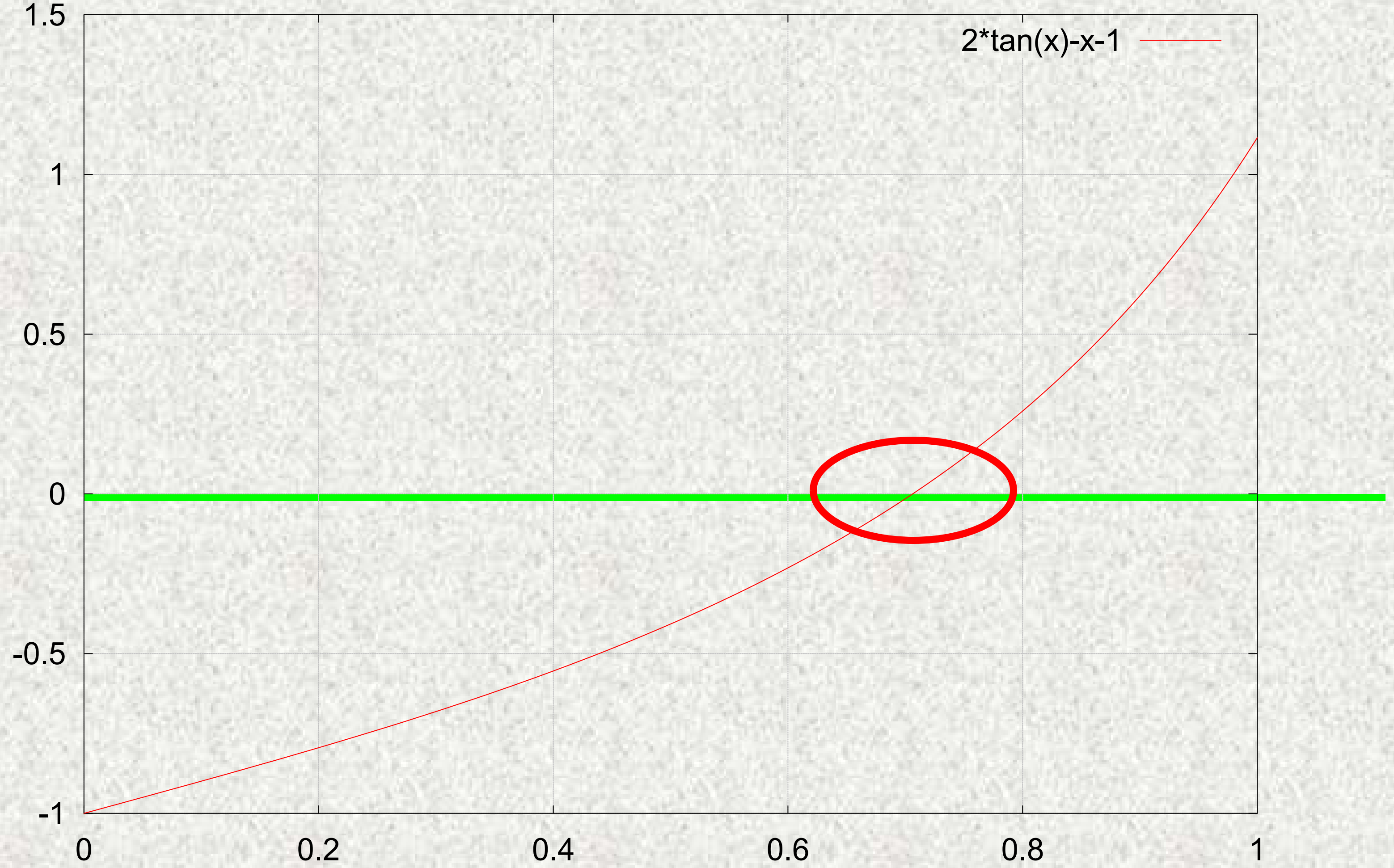
$$x^{(n)} = a\tan\left(\frac{x^{(n-1)} + 1}{2}\right)$$

$$g(x) = a\tan\left(\frac{x^{(n-1)} + 1}{2}\right)$$

$$g'(x) = \left[1 + \frac{(x+1)^2}{4}\right]^{-1}$$

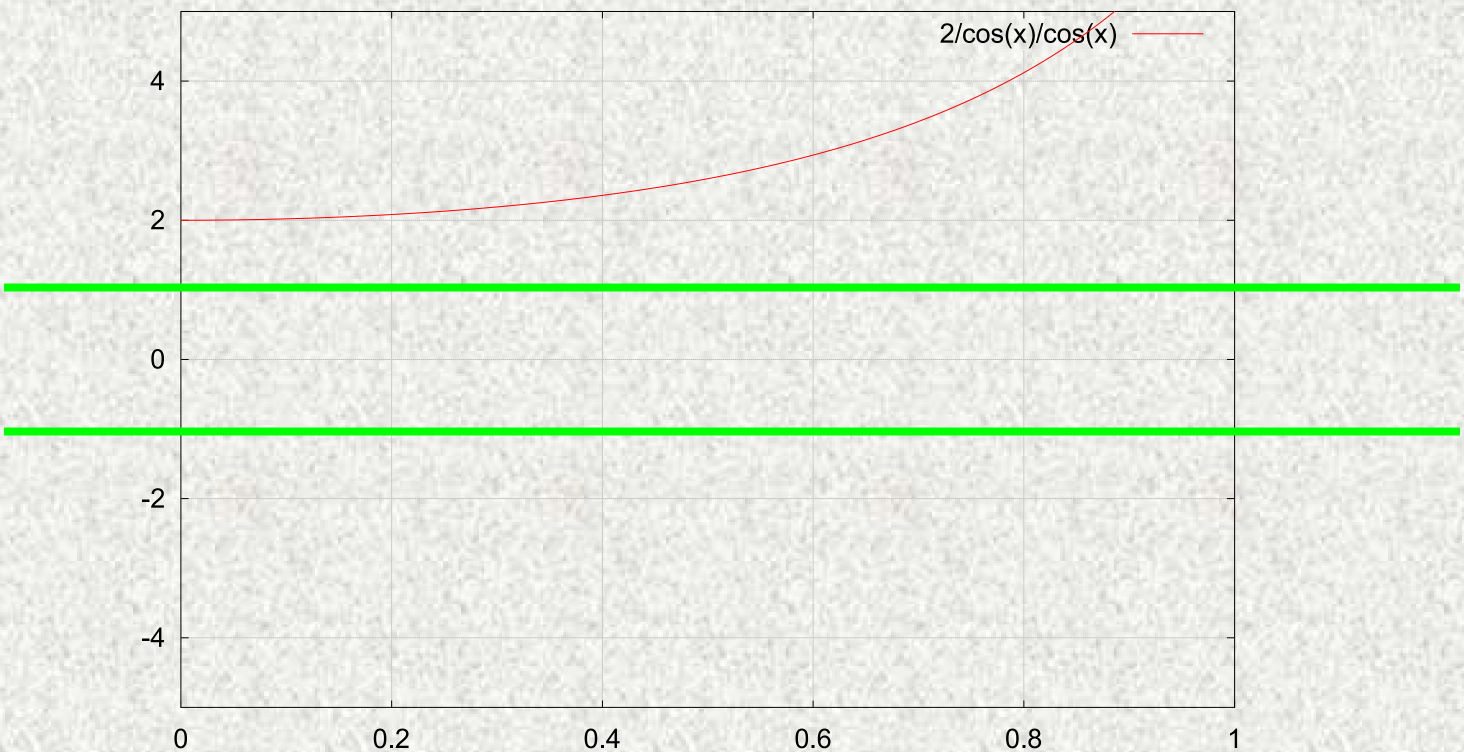
$$2\tan x - x - 1 = 0$$ **στο [-10,10]**

$$2\tan x - x - 1 = 0$$ **στο [0,1]**

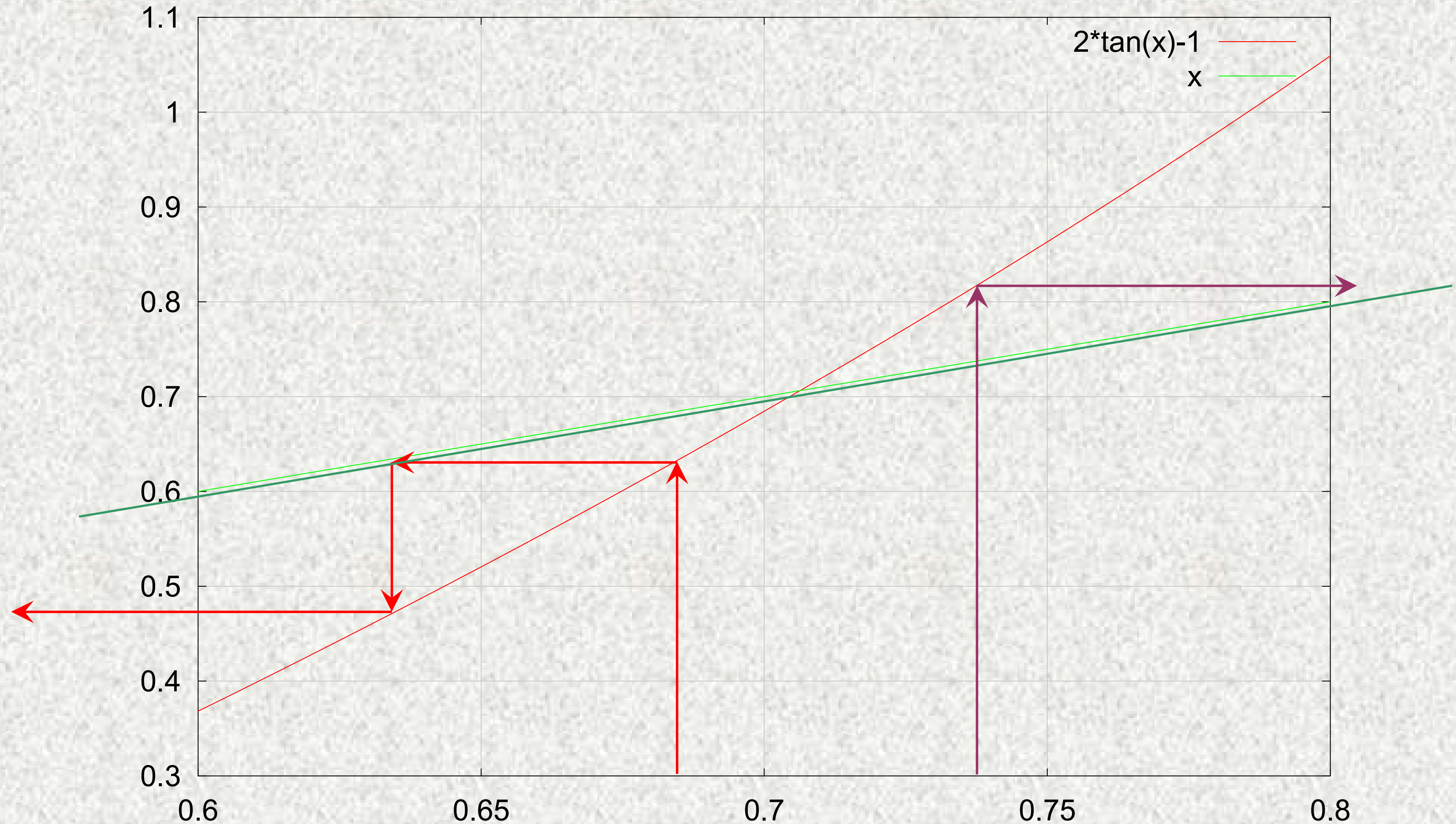


$$\boxed{x^{(n)} = 2\tan x^{(n-1)} - 1}$$

$$\underbrace{g'(x) = 2/\cos^2 x}$$

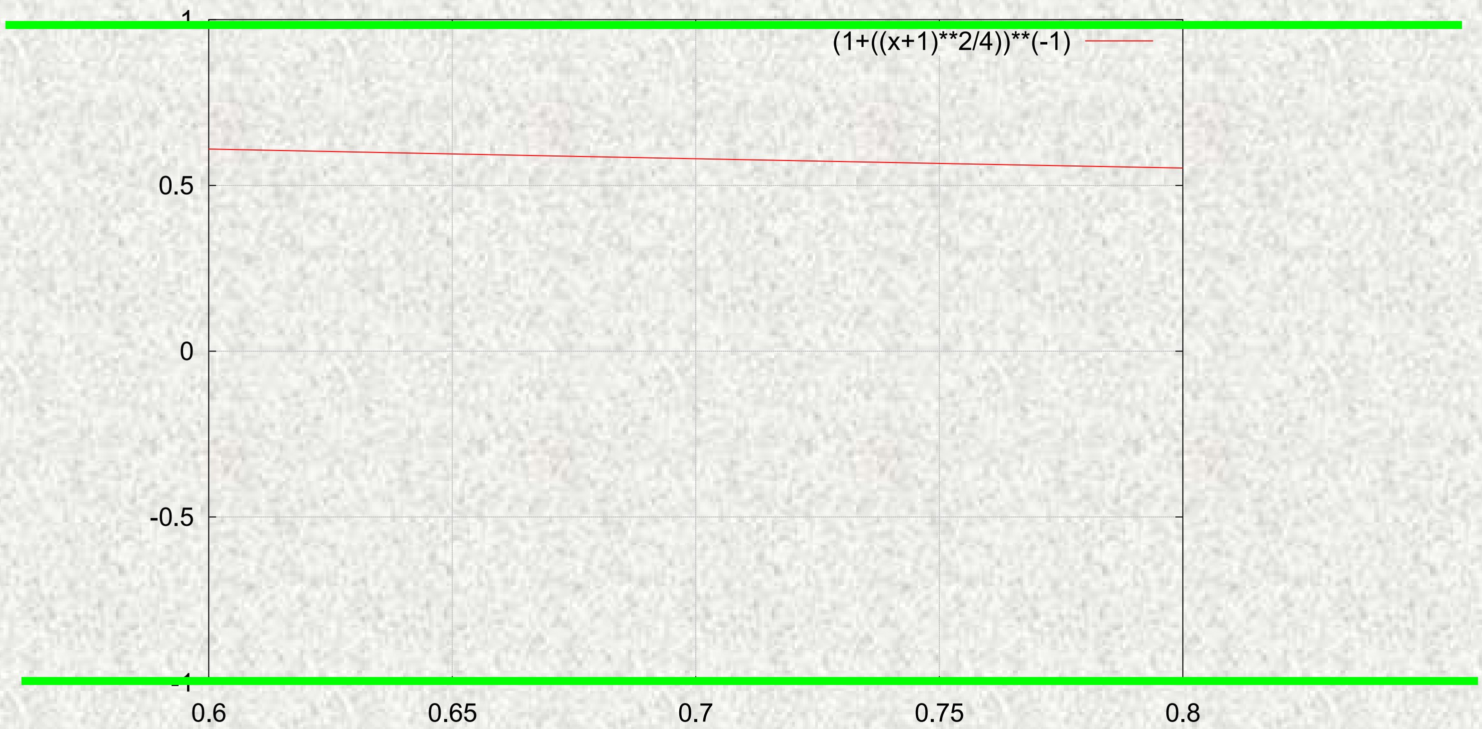


$$x^{(n)} = 2\tan x^{(n-1)} - 1$$

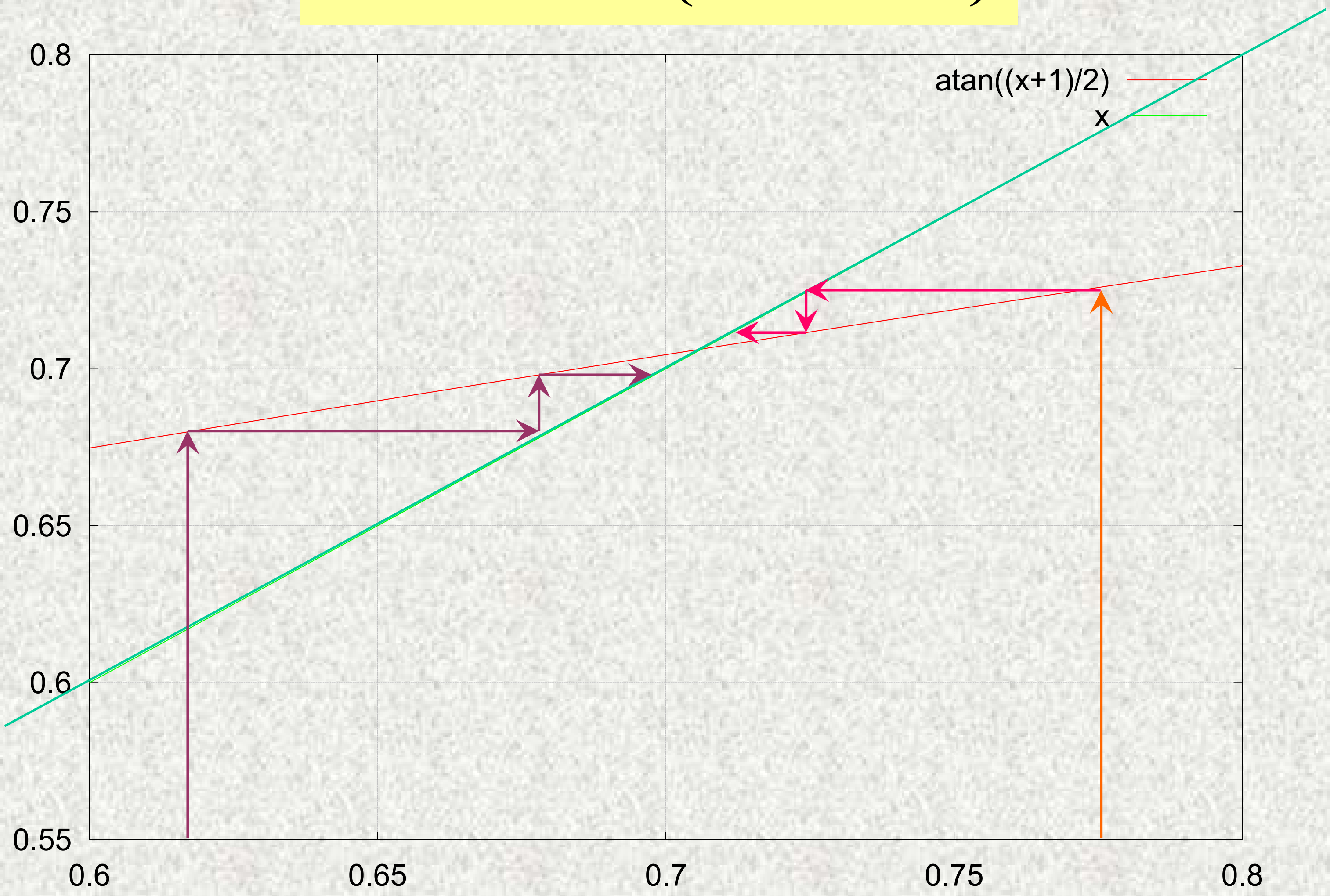


$$x^{(n)} = a\tan\left(\frac{x^{(n-1)}+1}{2}\right)$$

$$g'(x) = \left[1+\frac{(x+1)^2}{4}\right]^{-1}$$



$$x^{(n)} = a\tan\left(\frac{x^{(n-1)}+1}{2}\right)$$



Παράδειγμα 2:

$$x^2 = A$$

$$x^{(n)} = A / x^{(n-1)}$$

$$x^{(n)} = \frac{1}{2}\left[\frac{A}{x} + x\right]$$

$$g(x) = \frac{A}{x}$$

$$g(x) = \frac{1}{2}\left[\frac{A}{x} + x\right]$$

$$g'(x) = -\frac{A}{x^2}$$

$$g'(x) = -\frac{A}{2x^2} + \frac{1}{2}$$

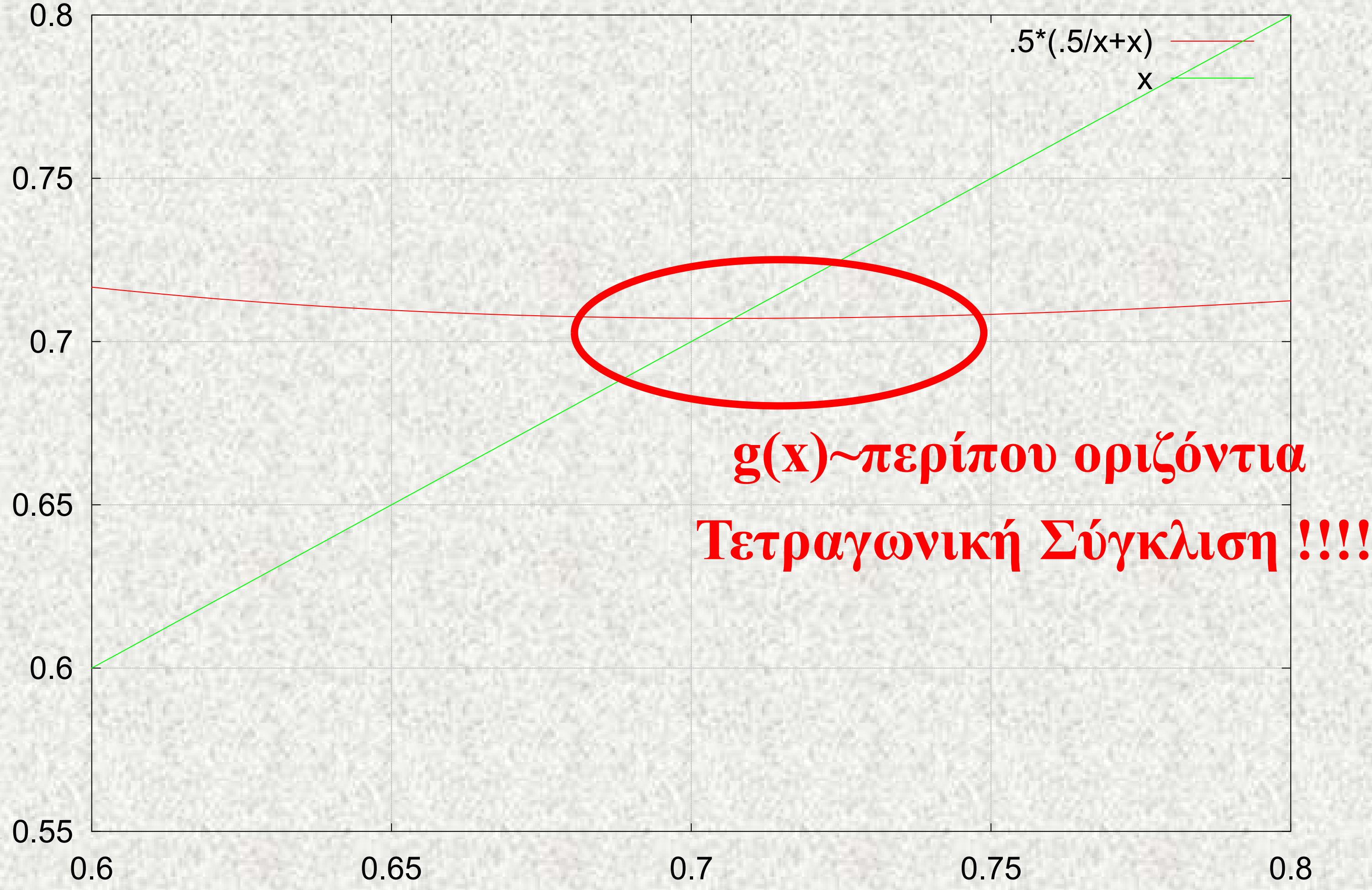
Στη λύση:

$$g'(\sqrt{A}) = -\frac{A}{\sqrt{A}^2} = -1$$

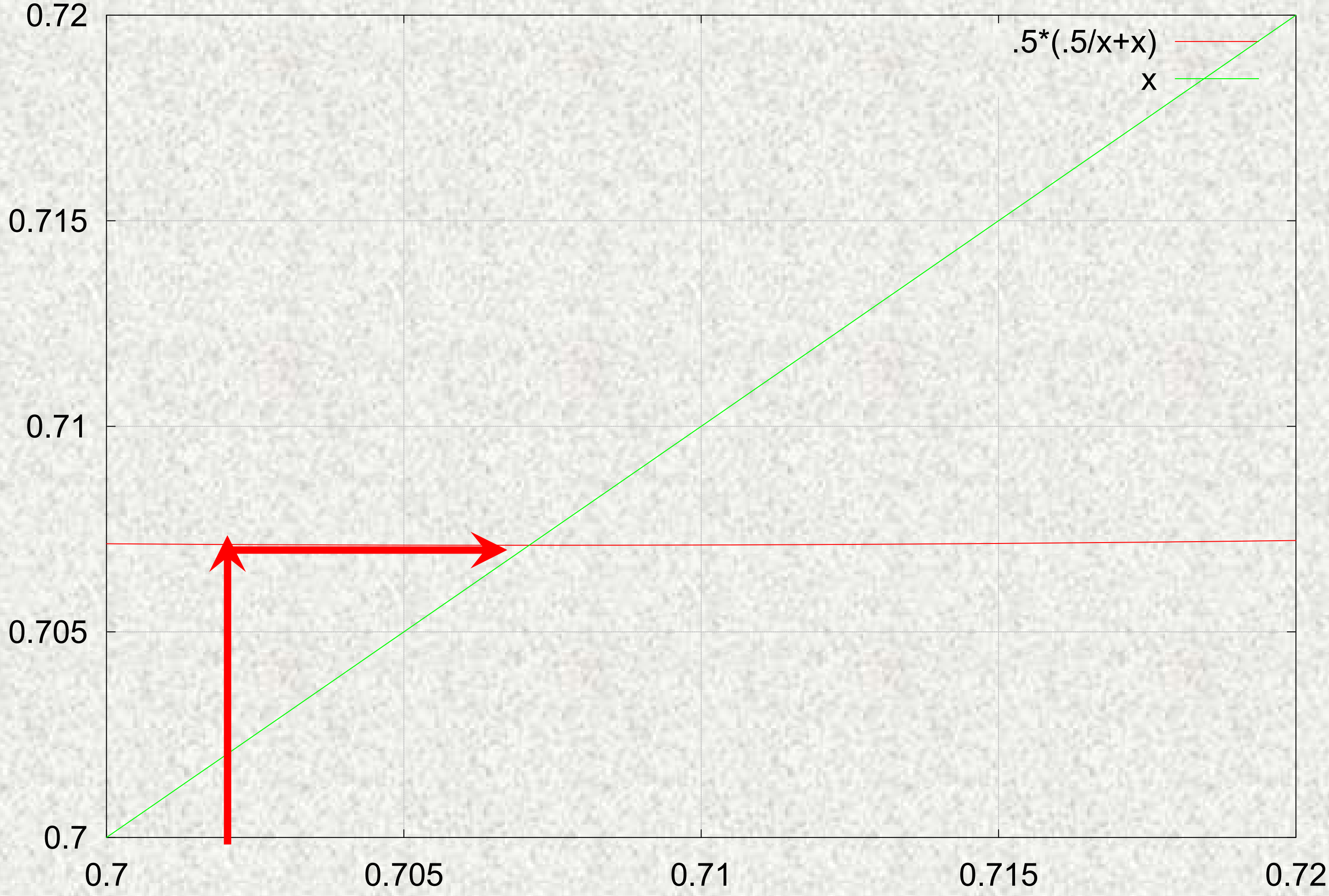
$$g'\left(\sqrt{A}\right) = -\frac{A}{2\sqrt{A}^2} + \frac{1}{2} = 0$$

$$x^{(n)} = \frac{1}{2}\left[\frac{A}{x} + x\right]$$

Για (A=1/2)

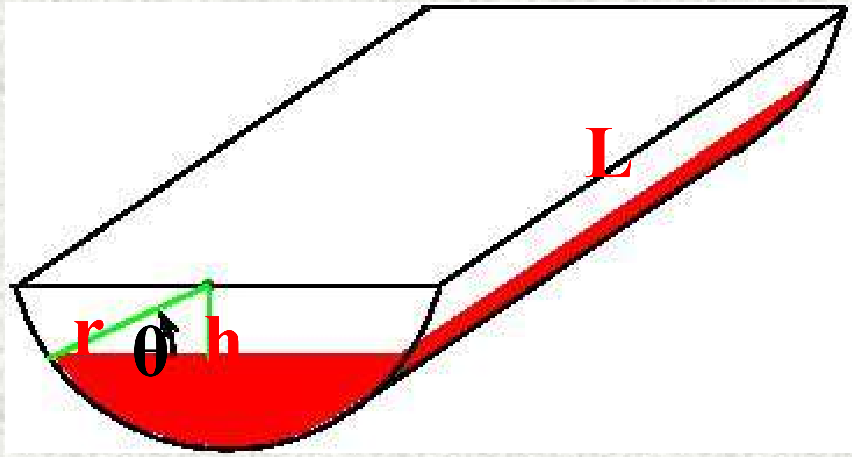


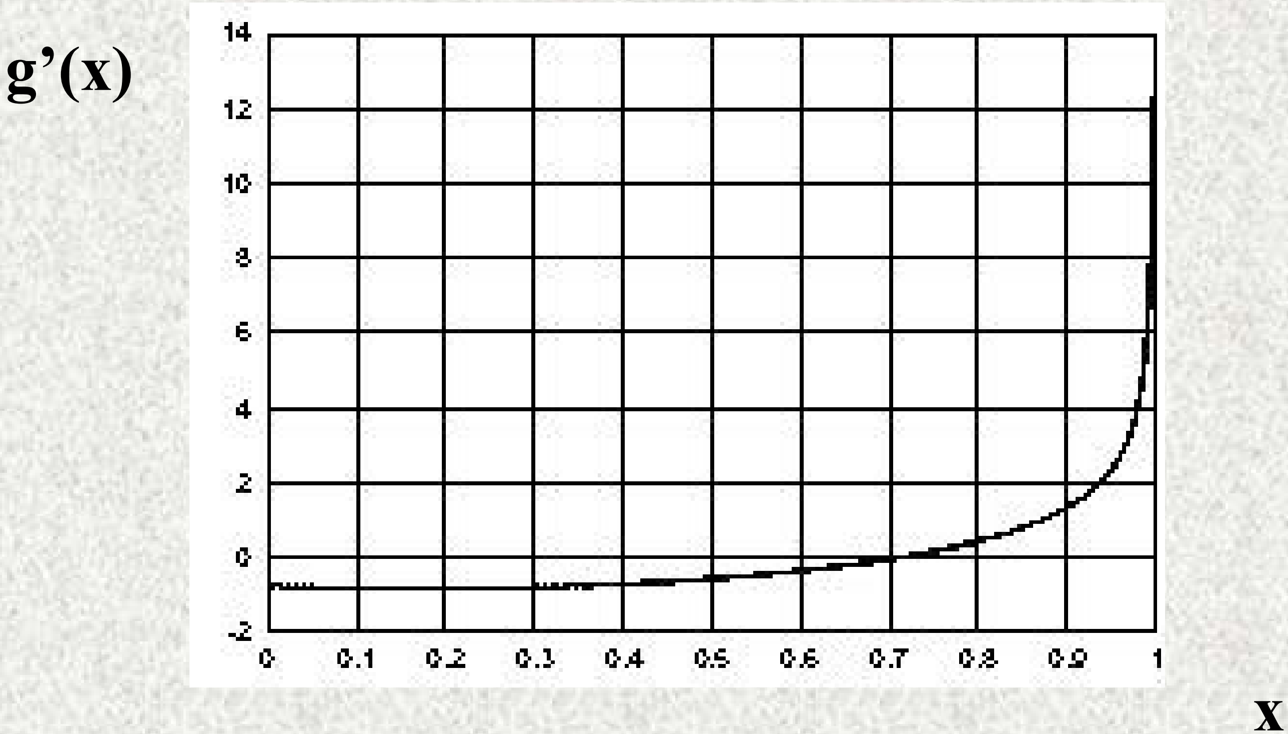
στο [0.70,0.72]



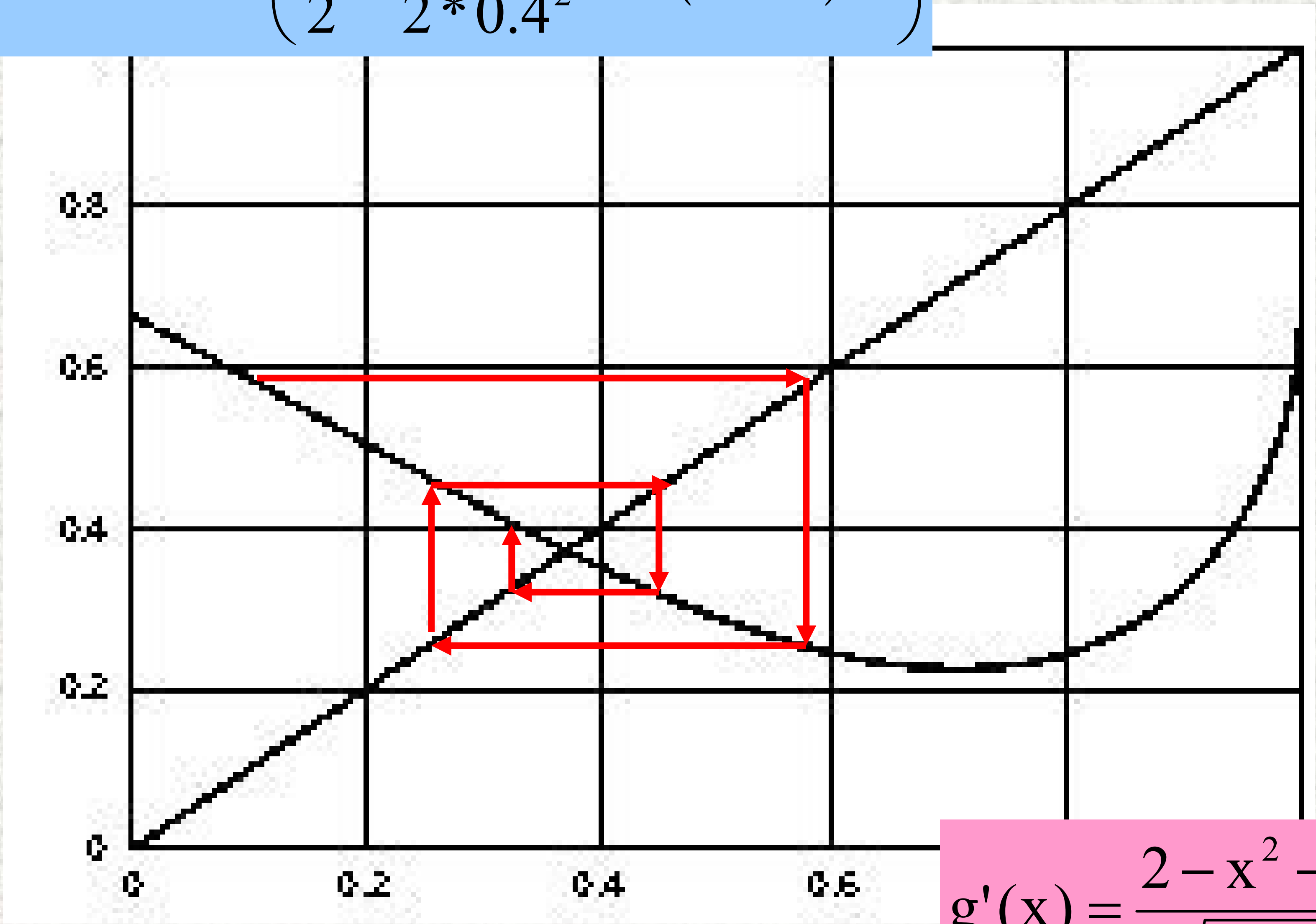
Παράδειγμα 3:

$$\frac{.27}{2*0.4^2}=\frac{\pi}{2}-\arcsin x - x\left(1-x^2\right)^{1/2}$$

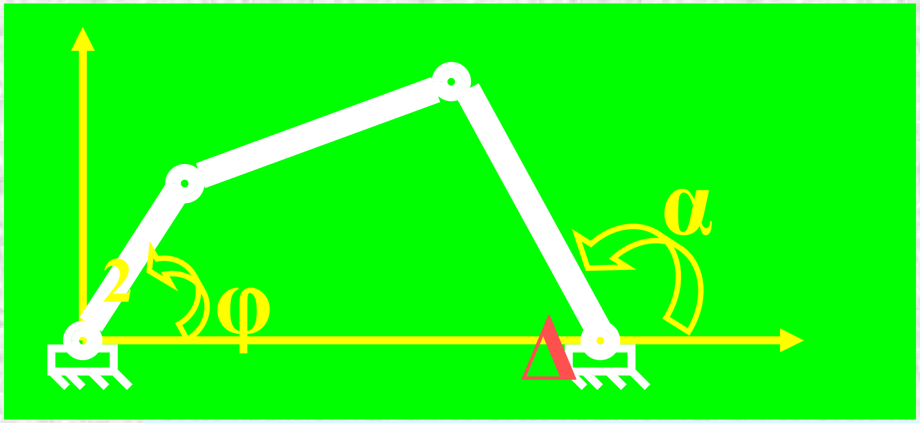




$$x = g(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{.27}{2*0.4^2} - x\left(1-x^2\right)^{1/2}\right)$$



$$g'(x) = \frac{2-x^2-x}{\sqrt{1-x^2}}$$



Παράδειγμα 3:

Για α=10°

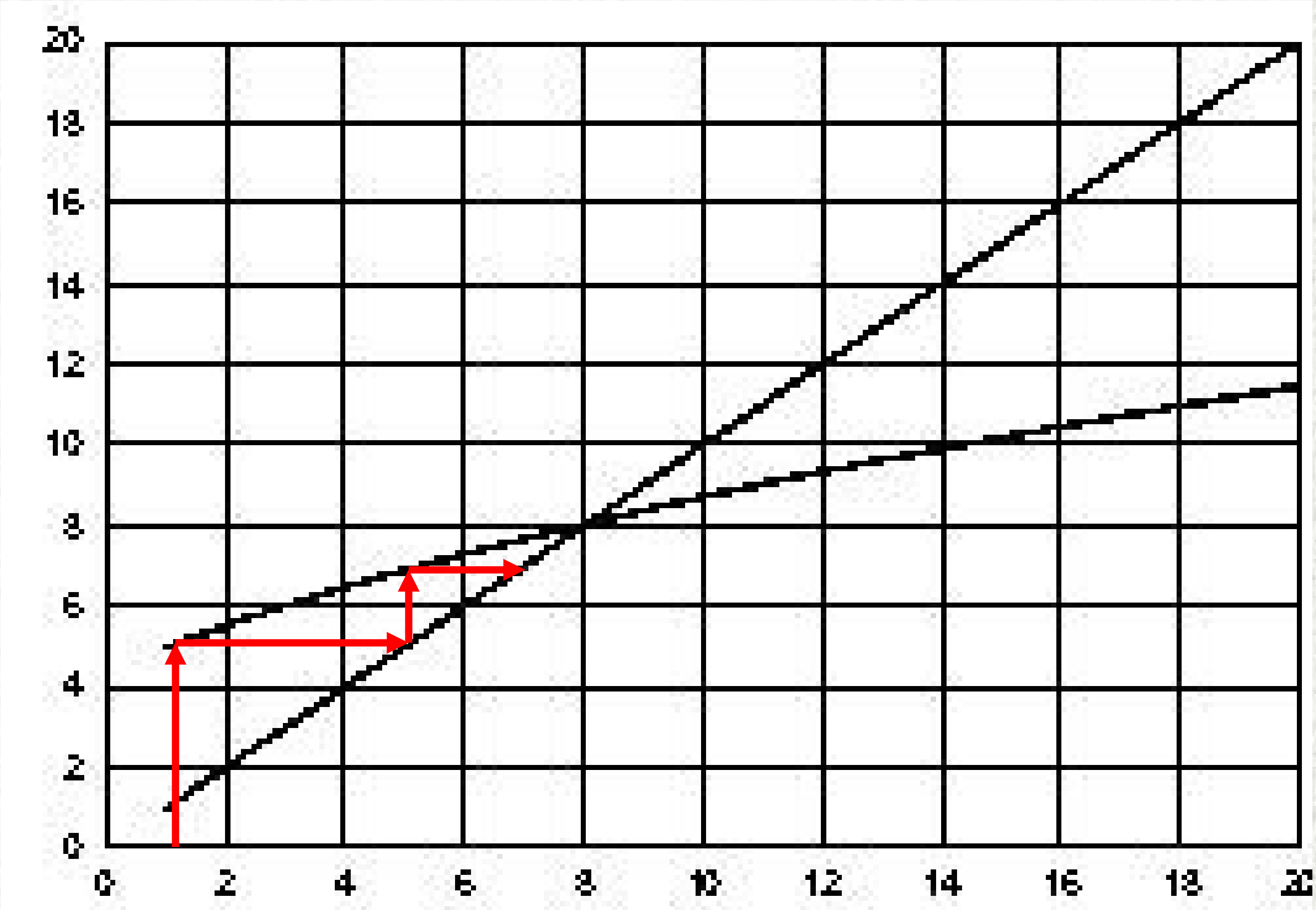
$$\frac{5}{3}\cos\alpha - \frac{5}{2}\cos\phi + \frac{11}{6} - \cos(\alpha-\phi) = 0$$

$$\phi = g(\phi) = \arccos\left[\frac{2}{5}\left(\frac{5}{3}\cos\alpha + \frac{11}{6} - \cos(\alpha-\phi)\right)\right] \qquad \textbf{(α)}$$

(β)

$$\phi = g(\phi) = \arccos\left[\frac{\frac{5}{3}\cos a + \frac{11}{6} - \sin a \sin\phi}{\frac{5}{2} + \cos a}\right]$$

Όρια φ=[1,20] (β) τρόπος



Μέθοδος Newton-Raphson

Μέθοδος Newton-Raphson

$$f(x)=0$$

$$x_0 = x^{(1)} + h$$ **Πότε;;;**

Πραγματική λύση **Αρχική λύση**

Πρέπει: $$f(x^{(1)}+h)=0$$

$$f\left(x^{(1)}+h\right)=f\left(x^{(1)}\right)+\frac{h}{1!}f'\left(x^{(1)}\right)+\cancel{\frac{h^2}{2!}f''\left(x^{(1)}\right)+\ldots.}$$

$$h=-\frac{f\left(x^{(1)}\right)}{f'\left(x^{(1)}\right)}$$ **Πότε;;;**

Μέθοδος Newton-Raphson

$$x^{(2)} = x^{(1)} - \frac{f\left(x^{(1)}\right)}{f'\left(x^{(1)}\right)}$$

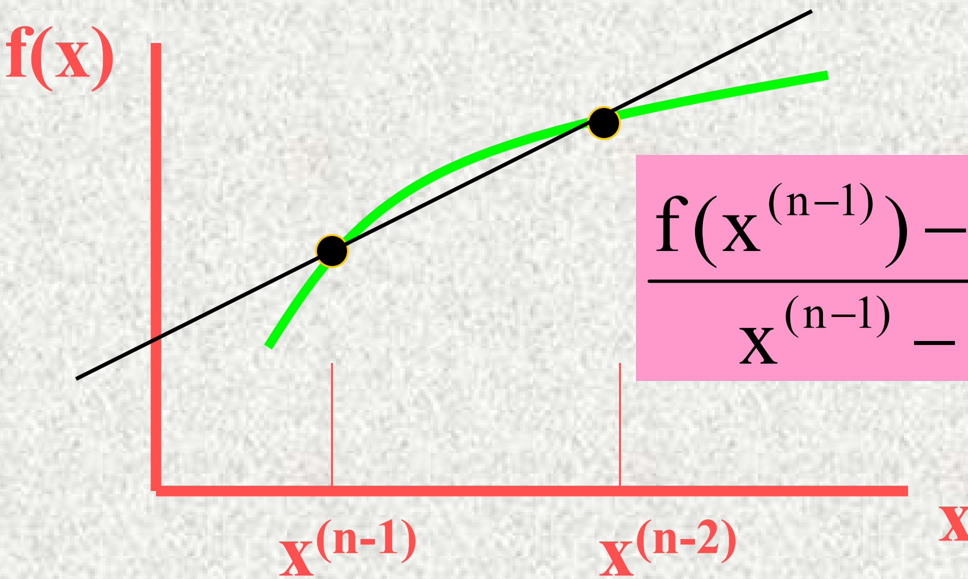
$$x^{(n)} = x^{(n-1)} - \frac{f\left(x^{(n-1)}\right)}{f'\left(x^{(n-1)}\right)}$$

Προετοιμασία (εύρεση παραγώγων) στο χαρτί ....

Μέθοδος Newton-Raphson (με προσεγγιστική παράγωγο)=Μέθοδος της Τέμνουσας

$$x^{(n)} = x^{(n-1)} - \frac{x^{(n-1)} - x^{(n-2)}}{f\left(x^{(n-1)}\right) - f\left(x^{(n-2)}\right)} f(x^{(n-1)})$$

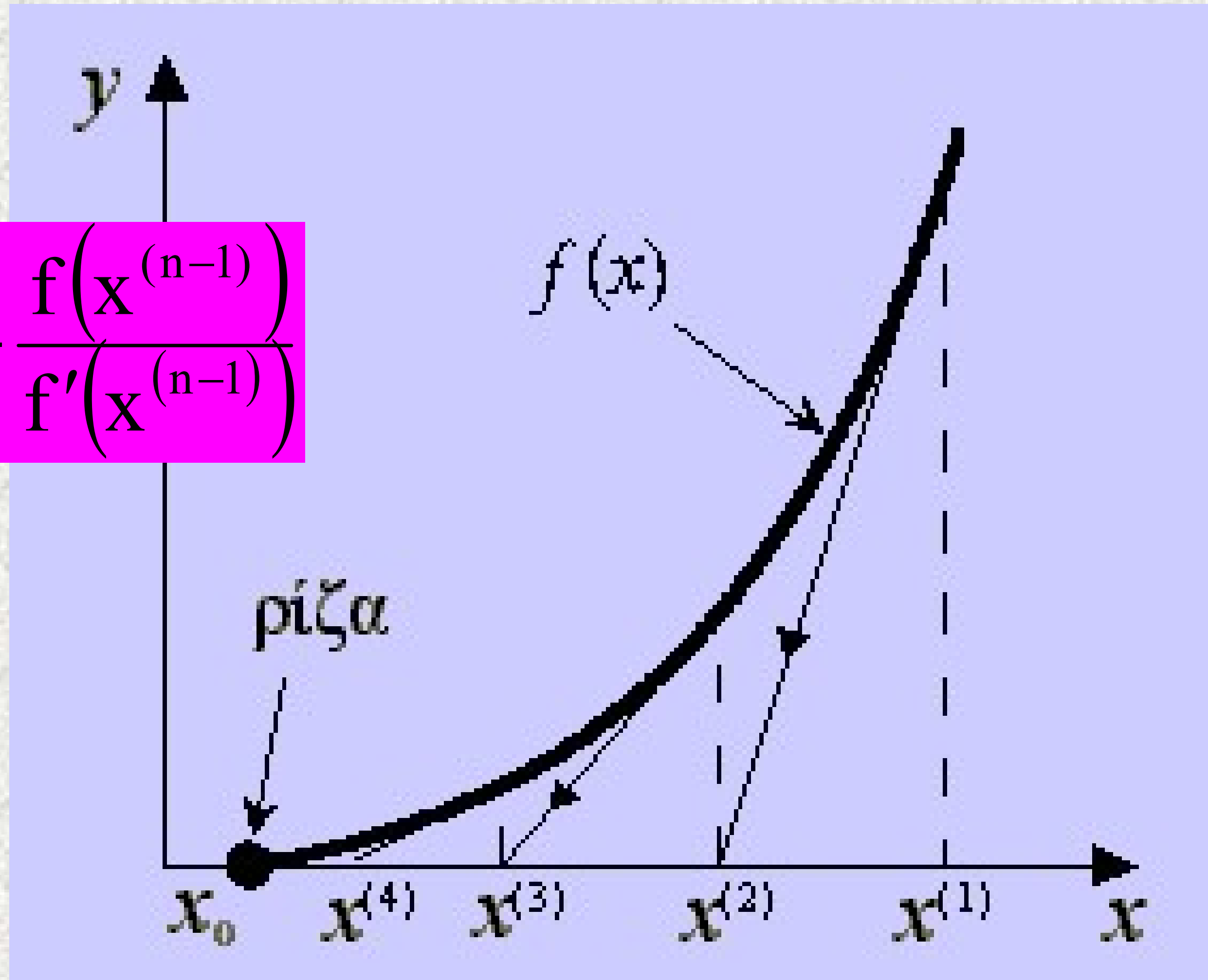
Αυτο-εκκίνηση ;;;;;



$$\frac{f(x^{(n-1)}) - f(x^{(n-2)})}{x^{(n-1)} - x^{(n-2)}} = f'(x^{(n-1)})$$

Μέθοδος Newton-Raphson

$$x^{(n)} = x^{(n-1)} - \frac{f\left(x^{(n-1)}\right)}{f'\left(x^{(n-1)}\right)}$$



Μέθοδος Newton-Raphson – Σύγκλιση

$$x^{(n+1)} = x^{(n)} - \frac{f\left(x^{(n)}\right)}{f'\left(x^{(n)}\right)}$$

$$\underbrace{x_r - x^{(n+1)}}_{\sigma^{(n+1)}} = \underbrace{x_r - x^{(n)}}_{\sigma^{(n)}} + \frac{f\left(x_r - \sigma^{(n)}\right)}{f'\left(x_r - \sigma^{(n)}\right)}$$

$$\sigma^{(n+1)} = x_r - x^{(n+1)} \qquad \sigma^{(n)} = x_r - x^{(n)}$$

$$\sigma^{(n+1)} = \sigma^{(n)} + \left[f(x_r) - \sigma^{(n)} f'(x_r) + \sigma^{(n)^2} / 2 f''(x_r) - \sigma^{(n)^3} / 3! f'''(x_r) + \ldots \right] /$$

$$/ \left[f'(x_r) - \sigma^{(n)} f''(x_r) + \frac{\sigma^{(n)^2}}{2} f'''(x_r) - \right]$$

Μέθοδος Newton-Raphson – Σύγκλιση

Με απλοποιήσεις:

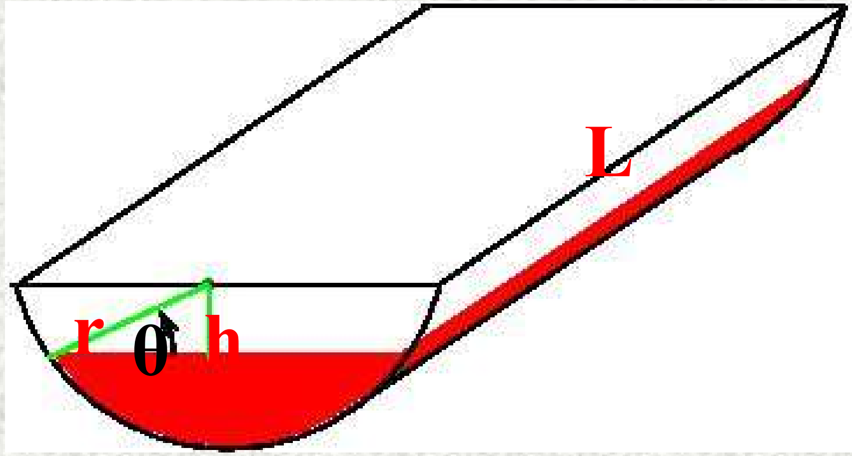
$$\sigma^{(n+1)} = -\frac{1}{2}(\sigma^{(n)})^2 \frac{f''(x_0)}{f'(x_0)}$$

‘Οταν κοντά στη ρίζα:

$$\left|\frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}\right| < 1.$$

Παράδειγμα 2:

$$\frac{.27}{2*0.4^2} = \frac{\pi}{2} - \arcsin x - x\left(1 - x^2\right)^{1/2}$$



$$\frac{V}{Lr^2} - \frac{\pi}{2} + \arcsin x + x\left(1 - x^2\right)^{1/2}$$

$$x = h / L$$

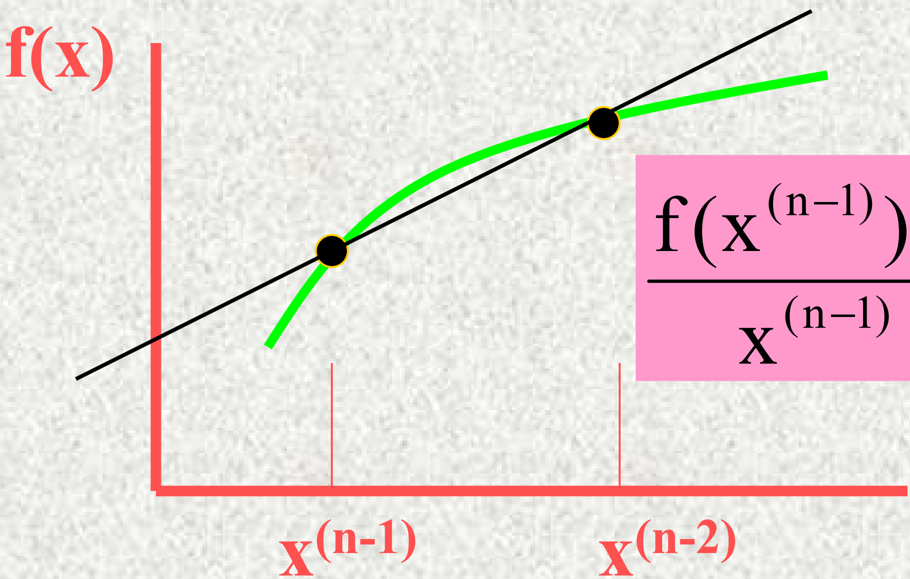
Άλλες Συναφείς Ανοικτές Μέθοδοι:

1. **Μέθοδος της Τέμνουσας**
2. **Μέθοδος Muller**

Μέθοδος Newton-Raphson (με προσεγγιστική παράγωγο)=Μέθοδος της Τέμνουσας

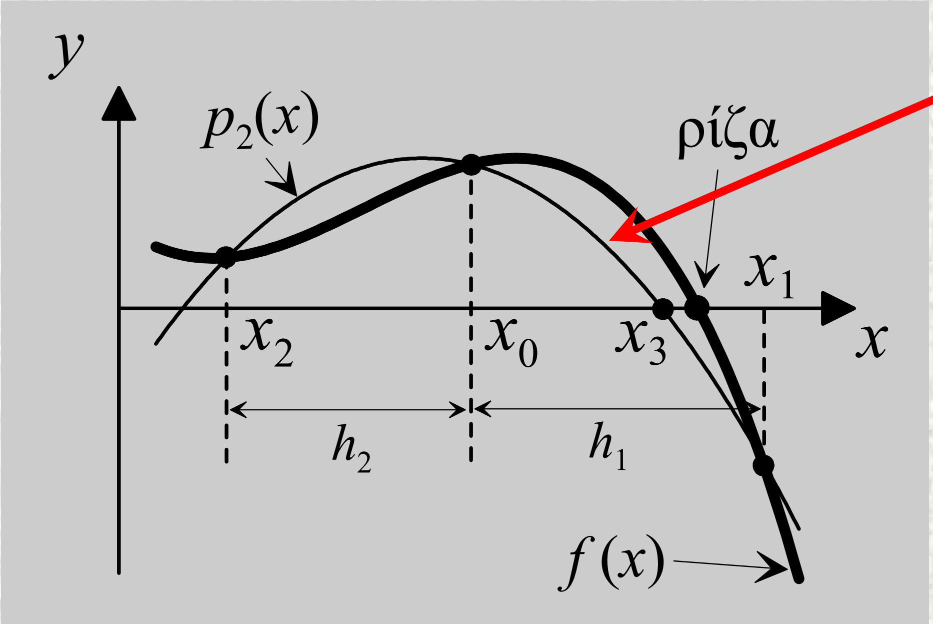
$$x^{(n)} = x^{(n-1)} - \frac{x^{(n-1)} - x^{(n-2)}}{f\left(x^{(n-1)}\right) - f\left(x^{(n-2)}\right)} f(x^{(n-1)})$$

Αυτο-εκκίνηση ;;;;;



$$\frac{f(x^{(n-1)}) - f(x^{(n-2)})}{x^{(n-1)} - x^{(n-2)}} = f'(x^{(n-1)})$$

Μέθοδος Mϋller



$$p_2(x) = \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0$$

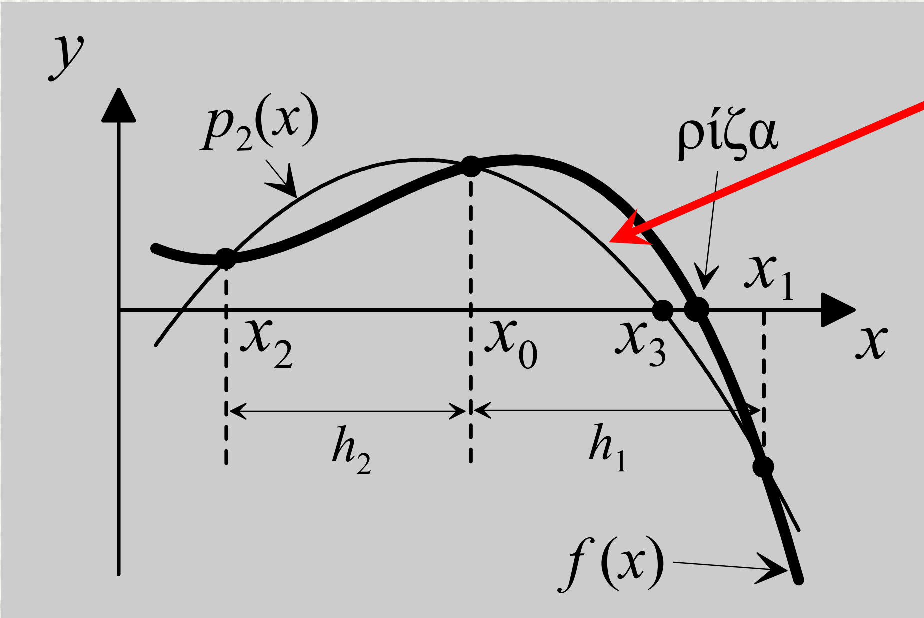
$(x_0, x_1, x_2) \longrightarrow x_3$

Αυτο-εκκίνηση ;;;;;

Βήματα:

1. **Υπολογισμός των συντελεστών α_i**
2. **Λύση της δευτεροβάθμιας**
3. **Επιλογή ως x_3 της πλησιέστερης στο x_0 ρίζας του**

Μέθοδος Mϋller



$$p_2(x) = \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0$$

$$\alpha_2 = \frac{h_2 \cdot f(x_1) - (h_1 + h_2) \cdot f(x_0) + h_1 \cdot f(x_2)}{h_1 h_2 \cdot (h_1 + h_2)},$$

$$\alpha_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0) - \alpha_2 \cdot h_1^2}{h_1},$$

$$\alpha_0 = f(x_0)$$

$$x_3 = x_0 - \frac{-2\alpha_0}{\alpha_1 \pm \sqrt{\alpha_1^2 - 4\alpha_2\alpha_0}}$$

Εύρεση Ριζών Πολυωνύμων:

Μέθοδος Newton

<u>Βασικά Θεωρήματα:</u>

- Ένα πολυώνυμο k βαθμού έχει ακριβώς k ρίζες (πραγματικές ή μιγαδικές), όπου μια ρίζα πολλαπλότητας ρ προσμετράται ρ φορές.
- Από k+1 σημεία περνά ακριβώς <u>μόνο ένα</u> πολυώνυμο k βαθμού.
- <u>Κανόνας του προσήμου του Descartes:</u> Οι θετικές πραγματικές ρίζες ενός πολυωνύμου $p_k(x) = 0$ είναι τόσες όσες και οι μεταβολές στο πρόσημο των (πραγματικών) συντελεστών του, α_i, $i = k, k\text{-}1, \ldots, 0$ ή λιγότερες κατά έναν άρτιο αριθμό. Το ίδιο ισχύει για τις αρνητικές ρίζες, όταν λαμβάνονται υπόψη τα πρόσημα του $p_k(-x) = 0$.

$$p_k(x) = \alpha_k x^k + \alpha_{k-1} x^{k-1} + \alpha_{k-2} x^{k-2} + \ldots + \alpha_0$$

Μέθοδος Horner για υπολογισμό τιμής πολυωνύμου

$$p_k(x) = \alpha_k x^k + \alpha_{k-1} x^{k-1} + \alpha_{k-2} x^{k-2} + \ldots + \alpha_0$$

k(k+1)/2 πολλαπλασιασμοί

και

k προσθέσεις

$$p_k(x) = \alpha_0 + x\left(\alpha_1 + x\left(\alpha_2 + \ldots + x\left(\alpha_{k-1} + x\alpha_k\right)\right)\right)$$

k πολλαπλασιασμοί

και

k προσθέσεις

Ελάχιστο

Μέθοδος Newton για Πολυώνυμα (1)

$$p_k(x) = \alpha_k x^k + \alpha_{k-1} x^{k-1} + \alpha_{k-2} x^{k-2} + \ldots + \alpha_0$$

Παραγοντοποίηση του $p_n(x)$ κατά Horner. Βασικές σχέσεις:

$$p_k(x) = (x - t) \cdot g_{k-1}(x) + r_k \quad \Rightarrow \quad p_k(t) = r_k$$

$$p_k'(t) = g_{k-1}(t)$$

$$\boxed{g_{k-1}(x) = b_{k-1} x^{k-1} + b_{k-2} x^{k-2} + \ldots + b_0}$$

$$b_{k-1} = a_k$$

$$b_i = a_{i+1} + t \cdot b_{i+1} \quad , \quad i = k\text{-}2,\ k\text{-}3,\ \ldots,\ 0.$$

$$r_k = a_0 + t \cdot b_0$$

Μέθοδος Newton για Πολυώνυμα (2)

$$p_k(x) = \alpha_k x^k + \alpha_{k-1} x^{k-1} + \alpha_{k-2} x^{k-2} + \ldots + \alpha_0$$

$$p_k(x) = (x - t) \cdot g_{k-1}(x) + r_k \quad \Rightarrow \quad p_k(t) = r_k$$

$$p_k'(t) = g_{k-1}(t)$$

$$x^{(n+1)} = x^{(n)} - \frac{f\left(x^{(n)}\right)}{f'\left(x^{(n)}\right)}$$

$$x^{(n+1)} = x^{(n)} - \frac{p_k\left(x^{(n)}\right)}{p_k'\left(x^{(n)}\right)}$$