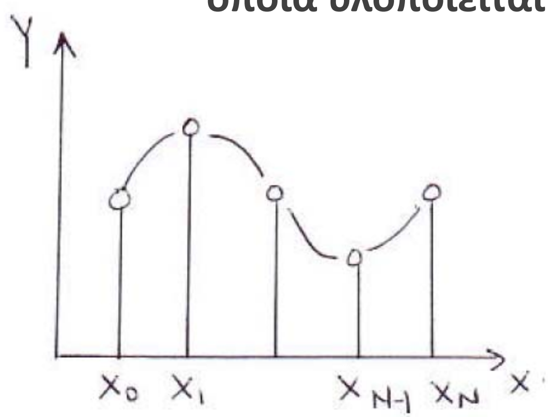
NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY OF ATHENS
School of Mechanical Engineering
Lab. Of Thermal Turbomachines
Parallel CFD & Optimization Unit (PCOpt/NTUA)

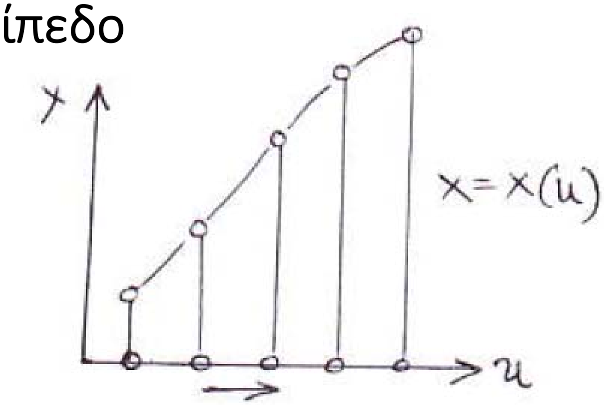
Πολυώνυμα Bezier-Bernstein

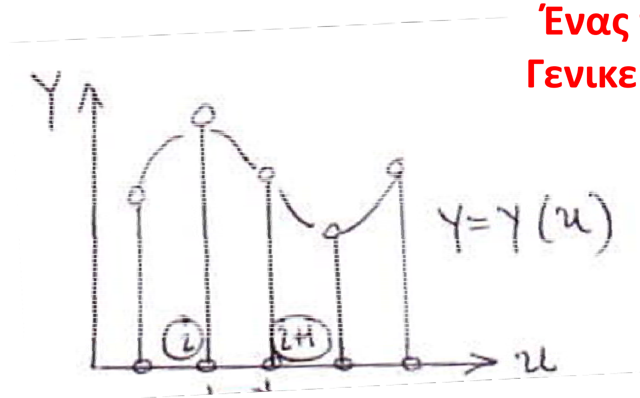
Kyriakos C. GIANNAKOGLOU, Professor NTUA
kgianna@mail.ntua.gr
http://velos0.ltt.mech.ntua.gr/research

Παραμετρική Περιγραφή Καμπύλης στο Επίπεδο

N+1 σημεία επί της καμπύλης στην οποία υλοποιείται παρεμβολή





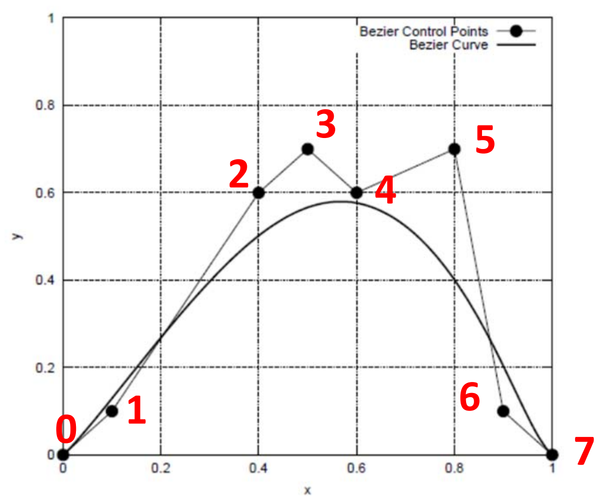


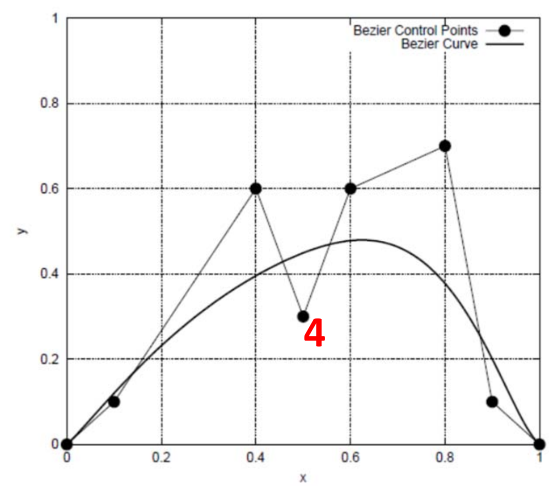
Ένας πιθανός τρόπος. Γενικεύεται με πολλούς τρόπους

ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΗ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ:

Αντί της y=y(x), η καμπύλη περιγράφεται ως x=x(u) και y=y(u), όπου u παράμετρος.

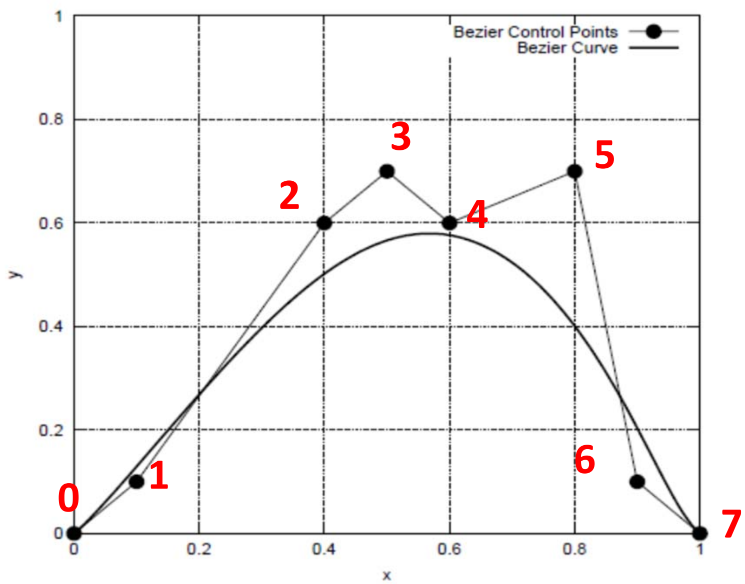
Πολυώνυμα Bezier-Bernstein – Χρήση

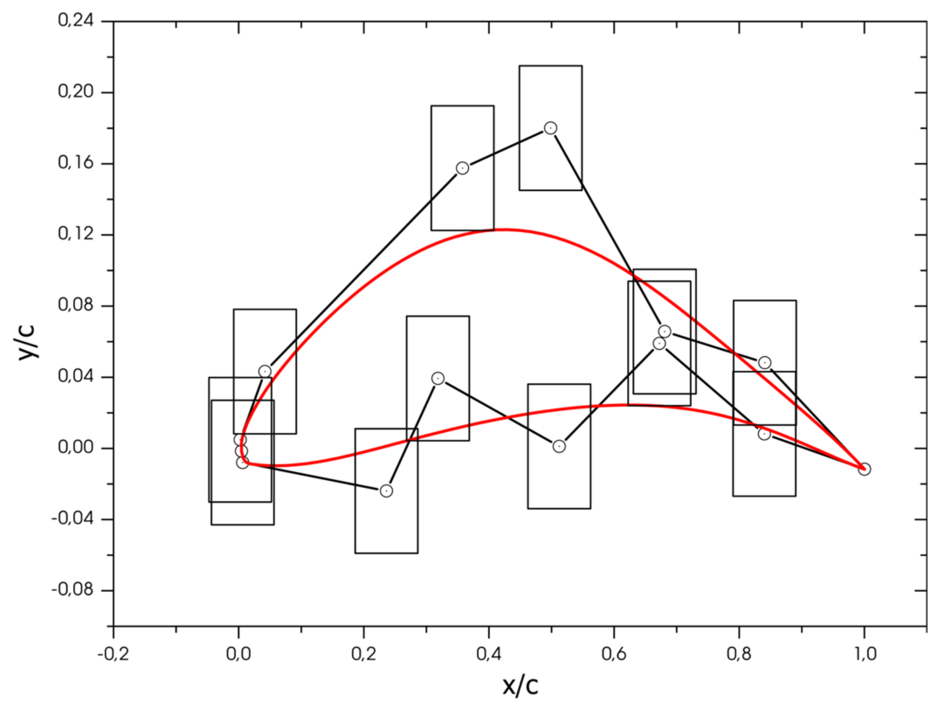




Παραμετροποίηση Bezier-Bernstein

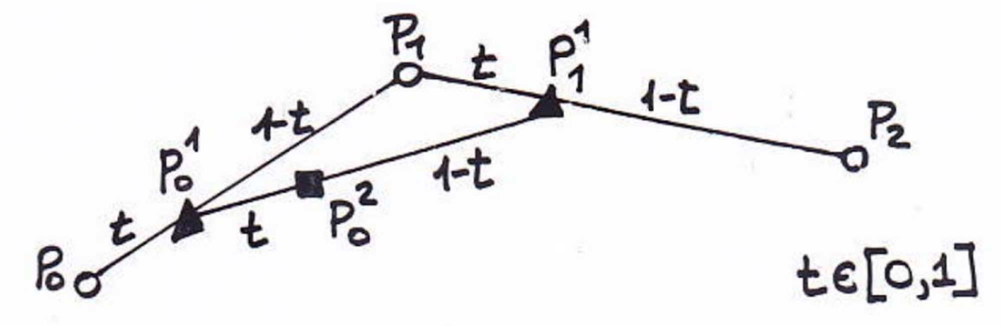
Τι πάμε να επιτύχουμε?





Αλγόριθμος Casteljau

Έστω N+1=3 ΔΕΔΟΜΕΝΑ σημεία = σημεία ελέγχου (Control Points, CPs):



Κάντε την παραπάνω διαδικασία για κάθε τιμή της παραμέτρου t στο διάστημα [0,1]. Παρατηρήστε, ειδικά, τι συμβαίνει για t=0 και t=1.

1ο Βήμα:

$$\vec{r}_0^{\,1}(t)=(1-t)\vec{r}_0+t\,\vec{r}_1$$
$$\vec{r}_1^{\,1}(t)=(1-t)\vec{r}_1+t\,\vec{r}_2$$

2ο Βήμα:

$$\vec{r}_0^{\,2}(t)=(1-t)\vec{r}_0^{\,1}+t\,\vec{r}_1^{\,1}$$

N (N=2)

Συνολικά:

$$\vec{r}_0^{\,2}(t)=(1-t)^2\vec{r}_0+2t(t-1)\vec{r}_1+t^2\vec{r}_2$$

Πολυώνυμα Bezier-Bernstein – Βασική Θεωρία

Γενίκευση για N+1 σημεία ελέγχου (CPs):

$$\vec{r}_i^{\,\alpha} = (1-t)\,\vec{r}_i^{\,\alpha-1} + t\,\vec{r}_{i+1}^{\,\alpha-1}$$

$$\mu\grave{\varepsilon} \quad \vec{r}_i^{\,0} = \vec{r}_i \quad , \quad i = \emptyset \rightarrow N$$

Ψευδοκώδικας που θα τρέξει για καθένα από τα σημεία θέλουμε να προκύψουν επί της καμπύλης Bezier (καθένα για διαφορετική τιμή του t στο διάστημα [0,1]) :

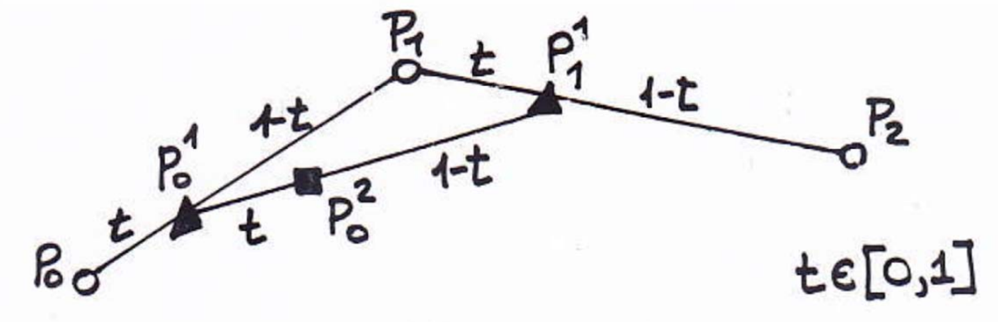
```
DO α=1,N
  DO i=Ø,N-α
    r_i^α(t) = (1-t) r_i^(α-1) + t r_(i+1)^(α-1)
  ENDDO
ENDDO
```

$$\longrightarrow \left[\, \vec{r}_0^{\,N}(t) = \ldots\ldots \,\right]$$

<u>Προσοχή:</u> Η παράμετρος t είναι συνολική & διατρέχει όλη την καμπύλη καθώς κινείται στο [0,1]

Πολυώνυμα Bezier-Bernstein – Βασική Θεωρία

Μητρωική Διατύπωση του Αλγόριθμου Casteljau για N+1 σημεία ελέγχου (CPs):



1ο Βήμα:

$$\vec{r}_0^{\,1}(t) = (1-t)\,\vec{r}_0 + t\,\vec{r}_1$$

$$\vec{r}_1^{\,1}(t) = (1-t)\,\vec{r}_1 + t\,\vec{r}_2$$

2ο Βήμα:

$$\vec{r}_0^{\,2}(t) = (1-t)\,\vec{r}_0^{\,1} + t\,\vec{r}_1^{\,1}$$

$$\begin{bmatrix}
\vec{r}_0 & & & & & \\
\vec{r}_1 & \vec{r}_0^{\,1} & & & & \\
\vec{r}_2 & \vec{r}_1^{\,1} & \vec{r}_0^{\,2} & & & \\
\vec{r}_3 & \vec{r}_2^{\,1} & \vec{r}_1^{\,2} & & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & & & \\
\vec{r}_N & \vec{r}_{N-1}^{\,1} & \vec{r}_{N-2}^{\,2} & \cdots\cdots & \vec{r}_1^{\,N-1} & \vec{r}_0^{\,N}
\end{bmatrix}$$

Τελικό σημείο για την επιλεγείσα τιμή t

Έκφραση μέσω Πολυωνύμων Bernstein

$$\vec{r}_o^{\,N}(t) = \sum_{i=0}^{N} \vec{r}_i \, B_i^N(t)$$

Συντεταγμένες των σημείων της καμπύλης Bezier (για κάθε τιμή του t, στο [0,1])

Συντεταγμένες των CPs

όπου

$$B_i^N(t) = \binom{N}{i} t^i (1-t)^{N-i}$$

με

$$\binom{N}{i} = \frac{N!}{i!\,(N-i)!}$$

Ή, γενικά,

$$B_i^a(t) = \binom{a}{i} t^i (1-t)^{a-i}$$

Μητρωική Γραφή των Πολυωνύμων Bernstein

$$
[B] = \begin{bmatrix}
B_0^0(t) \equiv 1 & B_0^1(t) & B_0^2(t) & \ldots\ldots & B_0^N(t) \\
 & B_1^1(t) & B_1^2(t) & \ldots\ldots & B_1^N(t) \\
 & & B_2^2(t) & \ldots\ldots & B_2^N(t) \\
 & & & & \vdots \\
 & & & & B_N^N(t)
\end{bmatrix}
$$

Τελικά, προς χρήση, πολυώνυμα Bernstein

Μητρωική Γραφή των Πολυωνύμων Bernstein

Βασικές Ιδιότητες τους:

1) $$B_i^{a}(t)=(1-t)\,B_i^{\alpha-1}(t)+t\,B_{i-1}^{\alpha-1}(t)$$

2) $$\sum_{i=\emptyset}^{N} B_i^{N}(t)\equiv 1$$

Καταλάβετε καλά τη φυσική σημασία της 2ης ιδιότητας.

Δείξτε ότι (& «απομυθοποιήστε» τα πολυώνυμα Bernstein):

$$[B]=\left|\begin{array}{ccccc}
1 & 1-t & (1-t)^2 & (1-t)^3 & (1-t)^4 \\
 & t & 2t(1-t) & 3t(1-t)^2 & 4t(1-t)^3 \\
 & & t^2 & 3t^2(1-t) & 6t^2(1-t)^2 \\
 & & & t^3 & 4t^3(1-t) \\
 & & & & t^4
\end{array}\right.$$

Πολυώνυμα Bezier-Bernstein – Συγκεντρωτικοί Τύποι

Για N+1 σημεία ελέγχου (Control Points, CPs):

Γενική Γραφή:

$$\vec{r}_N(t) \equiv \vec{r}(t) = \sum_{i=0}^{N} C_i(t)\, \vec{r}_i$$

ή, ανά συντεταγμένη:

$$\boxed{x(t)} = \sum_{i=0}^{N} C_i(t) \boxed{x_i}$$

$$\boxed{y(t)} = \sum_{i=0}^{N} C_i(t) \boxed{y_i}$$

Συντεταγμένες των σημείων της καμπύλης Bezier (για κάθε τιμή του t, στο [0,1])

Συντεταγμένες των CPs

όπου

$$\begin{bmatrix} C_0(t) \\ C_1(t) \\ \vdots \\ C_N(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{0,0} & m_{0,1} & \dots & m_{0,N} \\ m_{1,0} & m_{1,1} & \dots & m_{1,N} \\ & & \vdots & \\ m_{N,0} & m_{N,1} & \dots & m_{N,N} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} t^0 \\ t^1 \\ \vdots \\ t^N \end{bmatrix}$$

με

$$m_{i,j} = (-1)^{j-i} \begin{pmatrix} N \\ j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j \\ i \end{pmatrix}$$

Πολυώνυμα Bezier-Bernstein – Χρήσιμες μορφές του Μητρώου m_{ij}

Για N+1=3 CPs, δηλ. για N=2:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Για N+1=4 CPs, δηλ. για N=3:

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Τα 4 αυτά μητρώα να τα μεταφέρετε στο βιβλίο σας ώστε να τα έχετε έτοιμα στην εξέταση!

Για N+1=5 CPs, δηλ. για N=4:

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ 0 & 4 & -12 & 12 & -4 \\ 0 & 0 & 6 & -12 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Για N+1=6 CPs, δηλ. για N=5:

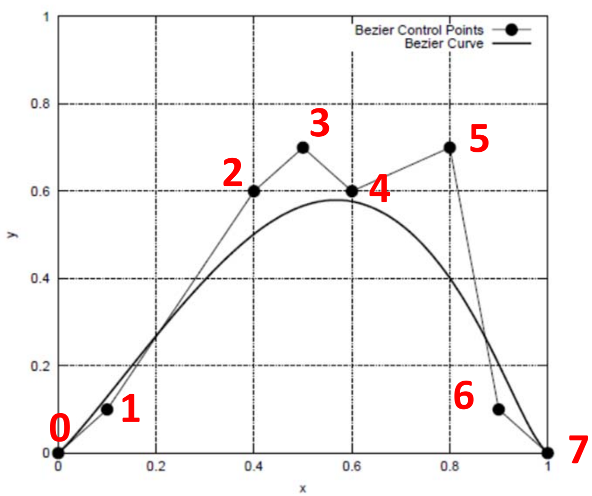
$$\begin{bmatrix} 1 & -5 & 10 & -10 & 5 & -1 \\ 0 & 5 & -20 & 30 & -20 & 5 \\ 0 & 0 & 10 & -30 & 30 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & -20 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

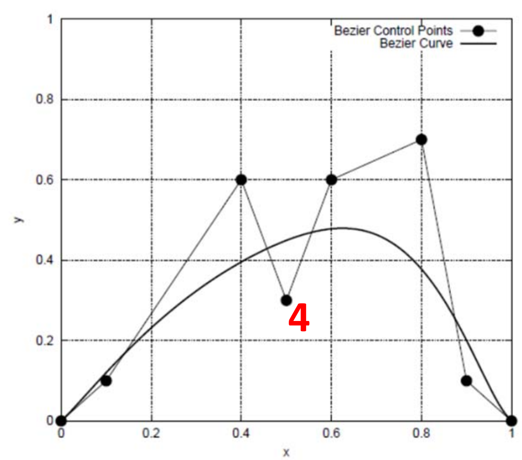
Πολυώνυμα Bezier-Bernstein – Δυο Χρησιμότατες Ιδιότητες

… που καθορίζουν την ΚΛΙΣΗ στην αρχή και το τέλος της προκύπτουσας καμπύλης:

$$\frac{d\vec{r}(t=0)}{dt} = N(\vec{r}_0 - \vec{r}_1) \qquad \frac{d\vec{r}(t=1)}{dt} = N(\vec{r}_N - \vec{r}_{N-1})$$

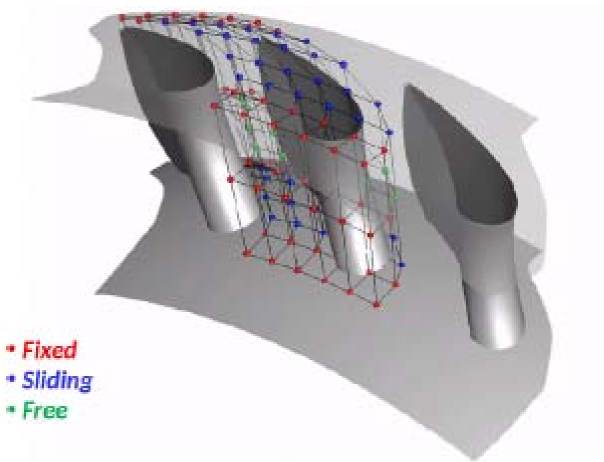
… και γενικεύστε το για τις υψηλότερες παραγώγους!

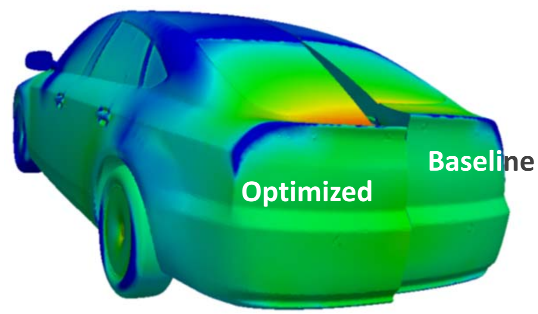


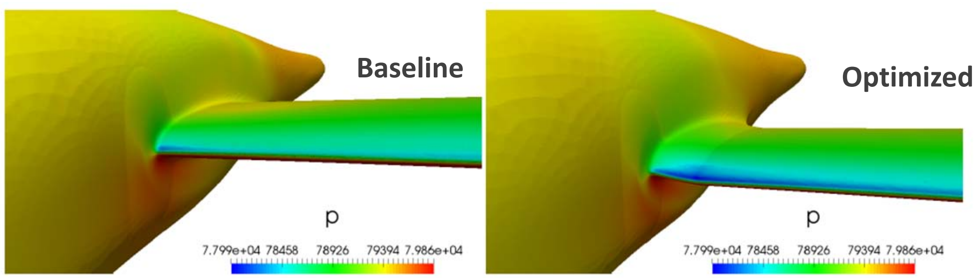


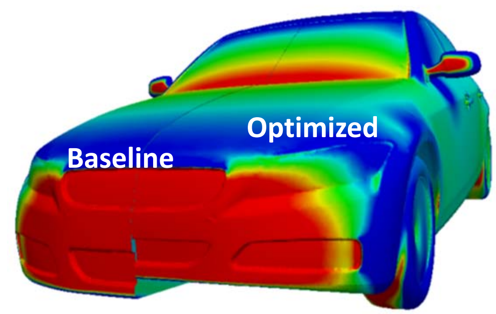
Πολύγωνο Ελέγχου της καμπύλης Bezier

Πολυώνυμα Bezier-Bernstein – Κάποιες Εφαρμογές

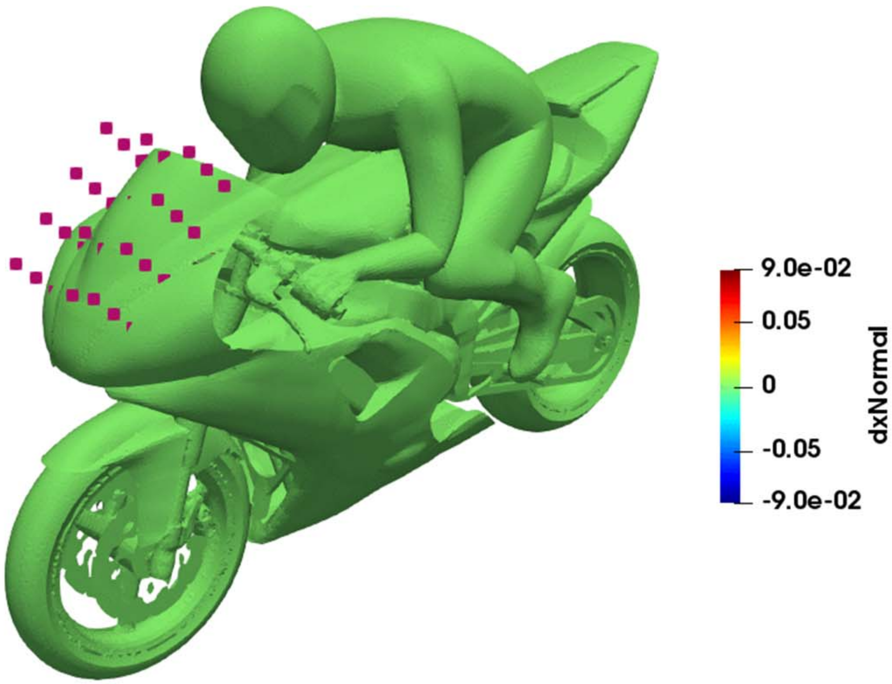








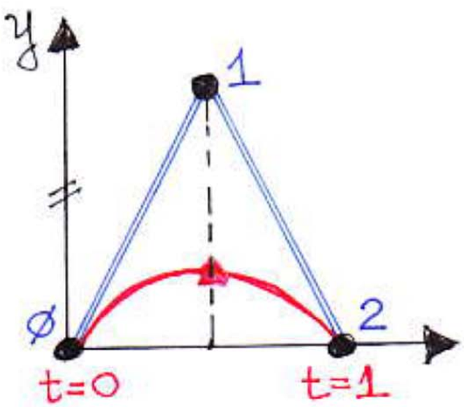
Πολυώνυμα Bezier-Bernstein – Κάποιες Εφαρμογές



Από τη Διπλωματική Εργασία του σπουδαστή Πάνου Φυκούρα, για τον αεροδυναμικό σχεδιασμό / βελτιστοποίηση fairing αγωνιστικής μοτοσυκλέτας.

Άσκηση Κατανόησης 1

Σχεδιάστε ισοσκελές τρίγωνο με κορυφές τα σημεία (0,0), (1,100) και (2,0) που θα γίνουν σημεία ελέγχου (CPs) καμπύλης Bezier. Βρείτε (α) το y του ψηλότερου σημείου της καμπύλης, (β) την αναλυτική έκφραση του εμβαδού που περικλείει η καμπύλη Bezier και ο άξονας y=0.



$N+1=3$, $N=2$

$i=$	Ø	1	2
$\hat{X}_i$	Ø	1	2
$\hat{Y}_i$	Ø	100	Ø

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$x(t) = (1-2t+t^2)\hat{X}_0 + (2t-2t^2)\hat{X}_1 + t^2\hat{X}_2$$

$$y(t) = (1-2t+t^2)\hat{Y}_0 + (2t-2t^2)\hat{Y}_1 + t^2\hat{Y}_2$$

‘Άσκηση Κατανόησης 1

Hints:

- **Η σειρά των CP στο πολύγωνο ελέγχου έχει ΣΗΜΑΣΙΑ.**
- **Το πρώτο και το τελευταίο CP είανισ ημεία της καμπύλης Bezier**
- **Η βολικότητα να ισαπέχουν τα CPs σε έναν από τους δύο άξονες**
- **Η βολικότητα το πρώτο CP να είναι στο (0,0)**
- **Συμμετρία!**
- **Αν χρειαστείτε παραγώγους σκεφτείτε ότι x=x(t) και y=y(t),.**

$$x(t) = (1-2t+t^2)\hat{X}_0 + (2t-2t^2)\hat{X}_1 + t^2\hat{X}_2$$

$$y(t) = (1-2t+t^2)\hat{Y}_0 + (2t-2t^2)\hat{Y}_1 + t^2\hat{Y}_2$$

$$y(t) = (\hat{Y}_0 - 2\hat{Y}_1 + \hat{Y}_2)t^2 + (-2\hat{Y}_0 + 2\hat{Y}_1)t + \hat{Y}_0$$

$$y'(t) = 2(\hat{Y}_0 - 2\hat{Y}_1 + \hat{Y}_2)t + (-2\hat{Y}_0 + 2\hat{Y}_1)$$

$$y''(t) = 2(\hat{Y}_0 - 2\hat{Y}_1 + \hat{Y}_2)$$

‘Ασκηση Κατανόησης 1

Hints:

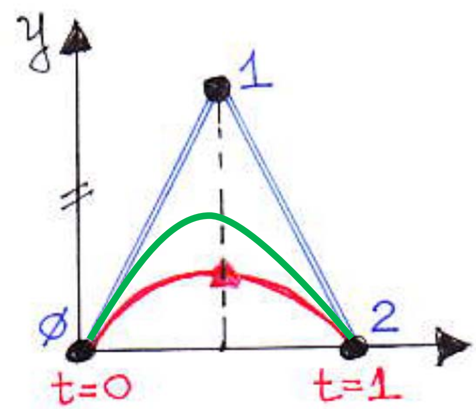
- **Πολλαπλά CPs**
- **Υπολογισμός εμβαδού**
- **Υπολογισμός εμβαδού εκ περιστροφής επιφάνειας**
- **Υπολογισμός όγκου, κλπ**
- **Προσοχή στις εφαπτόμενες αρχής και τέλους**

$N+1=4 \; , \; N=3$

$i=$	$\emptyset$	1	2	3
$\hat{X}_i$	$\emptyset$	1	1	2
$\hat{Y}_i$	$\emptyset$	100	100	$\emptyset$

$$E = \int_{x=0}^{2} y(t)\, dx(t) \qquad dx(t) = x'(t)\, dt$$

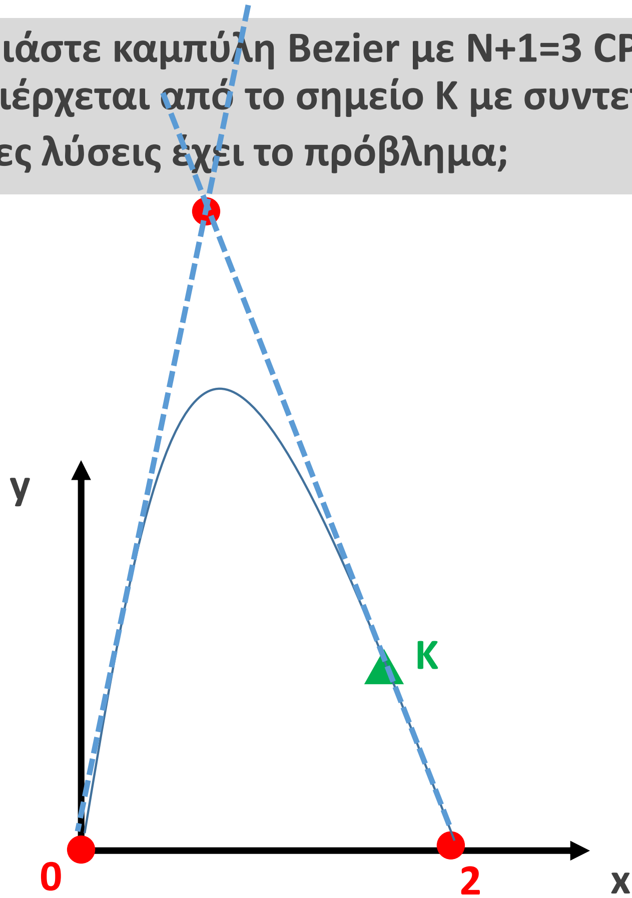
$$E = \int_{t=0}^{1} y(t)\, x'(t)\, dt$$



‘Ασκηση Κατανόησης 2

Σχεδιάστε καμπύλη Bezier με N+1=3 CPs που να ξεκινά με πρώτο CP το (0,0), να τερματίζει στο (2,0) και να διέρχεται από το σημείο Κ με συντεταγμένες x=1.6, y=1.

Πόσες λύσεις έχει το πρόβλημα;



i=	0	1	2
X_CP(i)	0.0	**α=?**	2.0
Y_CP(i)	0.0	**β=?**	0.0

$$x(t) = (1-2t+t^2)\hat{X}_0 + (2t-2t^2)\hat{X}_1 + t^2\hat{X}_2$$
$$y(t) = (1-2t+t^2)\hat{Y}_0 + (2t-2t^2)\hat{Y}_1 + t^2\hat{Y}_2$$

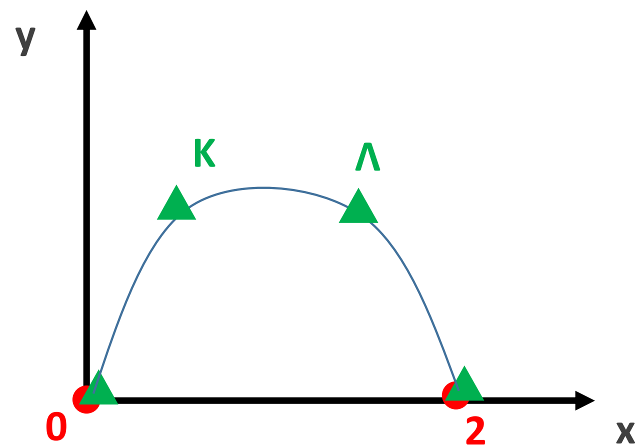
‘Ασκηση Κατανόησης 3

Σχεδιάστε καμπύλη Bezier με N+1=4 CPs που να παρεμβάλει (να περνά ακριβώς από αυτά) 4 κατά-x ισαπέχοντα σημεία ημικυκλίου μοναδιαίας διαμέτρου και να σέβεται τις κλίσεις του ημικυκλίου στην αρχή και στο τέλος

Hint:

- **Εκμεταλλευτείτε τη ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ!**

i=	0	1	2	3
X_CP(i)	0.0	**α=?**	**α=?**	1.0
Y_CP(i)	0.0	**β=?**	**β=?**	1.0



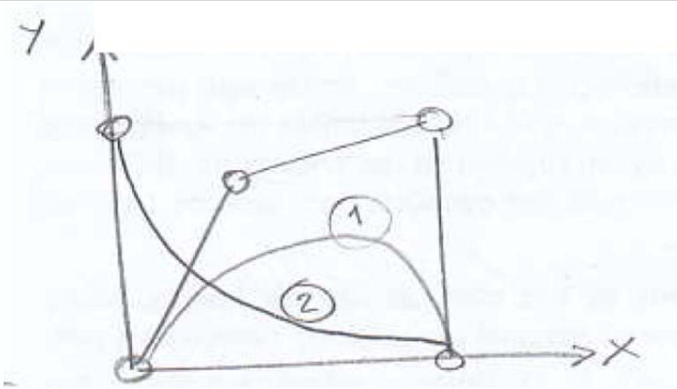
$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$x(t) = 3t^2 - 3t^3 + t^3 = 3t^2 - 2t^3$$

$$y(t) = \left(3t - 6t^2 + 3t^3\right)\hat{Y}_1 + \left(3t^2 - 3t^3\right)\hat{Y}_2$$

‘Ασκηση Κατανόησης 4

Η καμπύλη Bezier [B1] δημιουργείται από τέσσερα σημεία ελέγχου, κατά σειρά τα: (0,0), (2,3), (5,5), (5,0). Η καμπύλη Bezier [B2] δημιουργείται από τρία σημεία ελέγχου, κατά σειρά τα: (0,5), (0,0), (4,0). Βρείτε το σημείο τομής τους.



i=	0	1	2	3
X_CP(i)	0.0	2	5	5.0
Y_CP(i)	0.0	3	5	0.0

B1

i=	0	1	2
X_CP(i)	0.0	0.0	5
Y_CP(i)	5	0.0	0.0

B2

$$x(t) = 6t + 3t^2 - 4t^3$$
$$y(t) = 9t - 3t^2 - 6t^3$$

B1

$$x(\tau) = 5\tau^2$$
$$y(\tau) = 5 - 10\tau + 5\tau^2$$

B2

… και μετά?