4ο ΕΞ. ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΕΜΠ
ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ – Διδάσκων: Κ. Γιαννάκογλου - Ιούνιος 2025
<u>Εξέταση Αριθμητικής Ανάλυσης – Σεπτέμβριος 2025</u>

Ακολουθούν λύσεις των θεμάτων της εξέτασης από τον διδάσκοντα. Οι μονάδες που αντιστοιχούν στα 5 θέματα είναι: 2 + 3.5 + 1 + 2 +1.5 (σύνολο 10)

Σε <u>κάθε</u> ερώτημα της εξέτασης, το $\varphi(x)$ αντιστοιχεί στη συνάρτηση $\varphi(x) = \frac{sinx}{1+cosx}$.

(Ε1) Λύστε την $\frac{dy}{dx} = \varphi(x)$, με $y(0) = 0$, με Runge-Kutta 2ης τάξης, κάνοντας 4 βήματα, με βήμα $\Delta x = \pi/8$ και, εν τέλει, υπολογίστε το $y(\pi/2)$. Να φαίνονται όλα τα ενδιάμεσα k_1, k_2 κλπ, και να πινακοποιήσετε τα αριθμητικά σας αποτελέσματα (κρατήστε 4 ή 5 σημαντικά ψηφία, με στρογγυλοποίηση στο τελευταίο):

y(0)=	y(π/8)=	y(π/4)=	y(3π/8)=	y(π/2)=
0.000	0.03956	0.15944	0.37197	0.69951

Τι ιδιαιτερότητα, σχετική με το κόστος της μεθόδου, παρατηρήσατε κατά την επίλυση; Σχεδιάστε με ευπρεπή κλίμακα τα 5 σημεία στο επίπεδο (x,y) ενόψει του (Ε2).

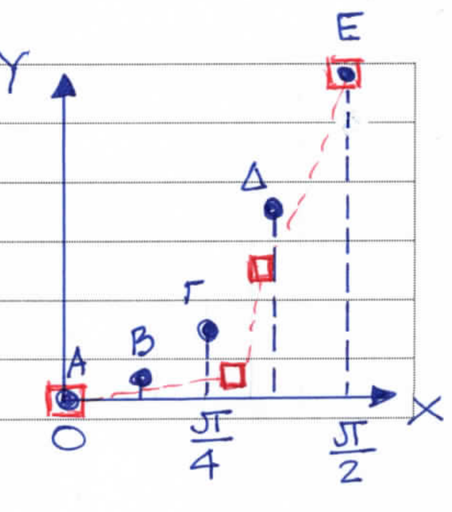
<u>Λύση:</u>

Λύνεται με άμεση εφαρμογή των σχέσεων της Runge-Kutta 2. Η ιδιαιτερότητα είναι ότι το φ(x) δεν συναρτάται του y, άρα το k_1 κάθε νέου βήματος είναι το k_2 του προηγούμενου βήματος, άρα κάθε βήμα κοστίζει μια (αντί δύο) κλήσεις της φ(x) → "Μισό" (του αναμενόμενου) υπολογιστικό κόστος.
Τό σκίτσο φαίνεται στό (Ε2)

(Ε2) Βρείτε την καμπύλη Bezier με τα <u>ελάχιστα</u> σημεία ελέγχου που παρεμβάλλει (περνά από) τα 5 σημεία που σχεδιάσατε στο (Ε1). Δικαιολογήστε με σαφήνεια το γιατί επιλέξατε αυτό το συνολικό πλήθος σημείων ελέγχου (γράψτε το πλήθος στο δίπλα κουτάκι). Δώστε το μη-γραμμικό σύστημα που πρέπει να λυθεί, και ως προς ποιους αγνώστους, για να βρεθεί η καμπύλη Bezier. Δεν ζητείται να το λύσετε! Αρκεί να φτάσετε ως ένα σημείο όπου, αν κάποιος/α ξέρει λχ να χρησιμοποιεί τη Newton-Raphson, και έχει χρόνο, θα μπορούσε να το λύσει.

N+1=	σημεία ελέγχου

<u>Λύση:</u>



Τά 5 σημεία από τά οποία πρέπει να περνά ή Bézier σκιτσάρονται δίπλα (•). Είναι οι πινακοποιημένες λύσεις του (Ε1). Η Bézier θά ξεκινά αναγκαστικά από το πρώτο καί θά τερματίζει στο τελευταίο από αυτά. Τά σημεία ελέγχου της Bézier

σχεδιάζονται με κόκκινα τετράγωνα (□).
Τα σημεία ελέγχου της Bézier θα είναι τόσα (= N+1) που θα
εξασφαλίζουν ότι οι άγνωστοι του προβλήματος θα είναι
οπωσδήποτε ≥ του πλήθους των εξισώσεων που πρέπει να
ικανοποιήσω (αλλιώς δεν θα μπορώ να τις ικανοποιήσω!)
Μετρώ εξισώσεις: Η Bézier περνά εξ ορισμού από τα A & E,
άρα πρέπει να περάσει και από τα B, Γ, Δ. Έχω δυο εξισώσεις
ανά σημείο (να ικανοποιεί το x και το y) του σημείου, άρα
έχω 6 εξισώσεις.
Μετρώ αγνώστους: Άγνωστοι θα είναι οι τιμές του t που
ισχύουν ακριβώς στα B, Γ και Δ (3 τιμές t) και οι συν/νες
$\hat{X}_i$ και $\hat{Y}_i$ των εσωτερικών σημείων ελέγχου, άρα $(N-1)\cdot 2$
Συνολικό πλήθος αγνώστων $3+2(N-1)=2N+1$
Πρέπει:
(#αγνώστων) ≥ (#εξισώσεων) $\Rightarrow 2N+1 \geq 6 \Rightarrow N \geq 5/2$
άρα $N=3$ (το ελάχιστο!)
Άρα χρειάζονται $N+1=4$ σημεία ελέγχου (2 οριακά + 2 εσωτ.)
Επιστρέφουμε στο σχήμα και σχεδιάζουμε συμβολικά τα
εσωτερικά σημεία (δυο εσωτερικά □)
ΑΥΤΕΣ ΗΤΑΝ ΟΛΕΣ ΟΙ ΠΡΑΞΕΙΣ ΠΟΥ ΕΠΡΕΠΕ ΝΑ ΚΑΝΕΤΕ!!)

(E3) Πόσες διαφορετικές λύσεις έχει το πρόβλημα της (E2); Δικαιολογήστε την απάντησή σας και μεταφέρετέ την μονολεκτικά στο δίπλα κουτάκι.

Απειρες
Λύσεις (Καμπ. Bezier)

Λύση:

Αφού έχω 7 αγνώστους (δυο $\hat{X}_i$, δύο $\hat{Y}_i$, τρία t) και
6 εξισώσεις να ικανοποιήσω, έναν άγνωστο τον ορίζω
αυθαίρετα. Συνεπώς, έχω ΑΠΕΙΡΙΑ καμπύλων Bézier που
παρεμβάλλουν τα Α, Β, Γ, Δ, Ε

(E4) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $I=\int_0^{\pi/2}\varphi(x)\,dx$ το οποίο με ολοκλήρωση κατά Gauss (Gauss Quadrature), χρησιμοποιώντας 2 κόμβους Gauss.

I= 0,691567

Να φανούν όλες οι πράξεις σας. Γράψτε το αποτέλεσμα στο δίπλα κουτάκι. Τι σχέση έχει το y(π/2) (της (E1)) με το ολοκλήρωμα που μόλις βρήκατε;

Λύση:

ΟΧΙ ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΞΕΤΑΣΗ

Είναι ευθεία εφαρμογή της GQ με δυο κόμβους Gauss.
Μην ξεχάσετε να αλλάξετε τα όρια ολοκλήρωσης στο $[-1,1]$.
Με βάση τις σχέσεις του βιβλίου: $\mu=\lambda=\pi/4$.

$$I=\mu\int_{-1}^{1}F(t)dt \quad \text{, οπου } F(t)=\varphi\left(\frac{\pi}{4}(1+t)\right)=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}(1+t)\right)}{1+\cos\left(\frac{\pi}{4}(1+t)\right)}$$

Ενώ $F(-1/\sqrt{3}) = 0,167490$
$F(+1/\sqrt{3}) = 0,713041$.

$$I=\mu\left\{F\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+F\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right\}=0,691567$$

Πολύ κοντά στην απάντηση (Ε1) ← Θεωρητικά ίσα

(E5) Λύστε με 3 βήματα του αλγόριθμου σταθερού σημείου τη $\varphi(x)=0.25$. Να φανούν όλες οι πράξεις σας. Γράψτε το τελικό αποτέλεσμα στο δίπλα κουτάκι.

λύση= 0,4899

Λύση:

Εφαρμόστε λ.χ. το επαναληπτικό σχήμα:

$x=\sin^{-1}\left[0.25(1+\cos x)\right]$. Εύκολα θα βρείτε 0,4899.

(Μην δίνετε το αποτέλεσμα σε μοίρες! Δεν σας είπε κανείς ότι είναι γωνία! Γυρίστε το κομπιουτεράκι σας σε RAD!)

ΟΧΙ ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΞΕΤΑΣΗ