4ο ΕΞ. ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΕΜΠ
ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ – Διδάσκων: Κ. Γιαννάκογλου - Ιούνιος 2023
ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΤΗΣ ΕΞΕΤΑΣΗΣ

Άσκηση 1: Για την αριθμητική επίλυση μιας μη-γραμμικής εξίσωσης (y(x)=0), προτείνετε τη δική σας εκδοχή της μεθόδου Muller η οποία να βασίζεται σε πολυώνυμο πρώτου βαθμού. Δώστε τον τελικό τύπο που θα ανανεώνει τη λύση, δηλαδή θα βρίσκει το $x^{(n+1)}$ από (πόσες;;) προηγούμενες τιμές του x ($x^{(n)}, x^{(n-1)}$, κλπ). Εξηγήστε πως, στο επόμενο βήμα, θα χρησιμοποιηθεί η τελευταία τιμή του x που μόλις βρήκατε (αντί ποιας; ένα σκίτσο βοηθά πολύ). Εφαρμόστε ότι προτείνατε για να λύσετε την

$$\sqrt{10cos(x/4)} - x^{\frac{1}{3}} = 0$$

Για αρχικοποίηση, πάρτε $x^{(0)}=1$ και δημιουργήστε όσες ακόμη τιμές χρειάζεστε ($x^{(1)}$, $x^{(2)}$ κλπ) προσθέτοντας 0.10 στην προηγούμενη. Για αποφυγή σύγχυσης, βάζετε τους μετρητές των επαναλήψεων σε παρένθεση, ώστε να ξεχωρίζουν από τους εκθέτες. Πινακοποιήστε τα αποτελέσματά σας. Τρία βήματα είναι αρκετά. Πόσες κλήσεις της συνάρτησης y(x) ανά κύκλο θα χρειαστείτε; Μετά, λύστε την ίδια εξίσωση με αλγόριθμο σταθερού σημείου, ξεκινώντας από το $x^{(0)}$, κάνοντας και πάλι τρία βήματα.

Λύση:

Η "γραμμική" μέθοδος Müller ξεκινά από δυο σημεία, τα $(x^{(0)}, f(x^{0}))$ και $(x^{(1)}, f(x^{(1)}))$, υπολογίζει την ευθεία που τα ενώνει, η οποία είναι η: $y=ax+\beta$
με:

$$a=\frac{f(x^{(1)})-f(x^{(0)})}{x^{(1)}-x^{(0)}}, \quad \beta=f(x^{(1)})-ax^{(1)}$$

και βρίσκει το νέο σημείο, ή προσέγγιση της λύσης ως:

$$x^{(2)}=\frac{-\beta}{a}, \quad \text{όπου } f(x)=\sqrt{10\cos(x/4)}-x^{1/3}$$

Εύκολα γενικεύεται ότι γράφουμε με την αντιστοιχία:

$(0)\rightarrow(i-2)$, $(1)\rightarrow(i-1)$, $(2)\rightarrow(i)$.

Εδώ, ξεκινώντας από $x^{(0)}=1$ (με $f(x^{(0)})=2.1127$) και $x^{(1)}=1.10$ (με $f(x^{(1)})=2.0700$) παίρνουμε κατά σειρά:

$x^{(3)}=5.9457$ με $f(x^{(3)})=-0.8937$
$x^{(4)}=4.4845$ με $f(x^{(4)})=0.4357$
$x^{(5)}=4.9634$ με $f(x^{(5)})=9.411\times10^{-2}$
κ.ο.κ. (οδεύει προς σύγκλιση).

Εκτός απο το πρώτο βήμα που θέλει 2 κλήσεις της $f(x)$, κάθε επόμενο θέλει μόνο μία.

Με τόν αλγόριθμο σταθερού σημείου (με $x^{(0)}=1$) μπορείτε νά δοκιμάσετε τό:

$$x = \left[10\cos\left(\frac{x}{4}\right)\right]^{3/2}$$ αλλά, θά δείτε, αποκλίνει

ή τό:

$$10\cos(x/4) = x^{2/3} \Rightarrow x = 4\cos^{-1}\left(\frac{x^{2/3}}{10}\right)$$

Το οποίο συγκλίνει με πορεία:

$1 \rightarrow 5.8825 \rightarrow 4.9554 \rightarrow 5.103501 \rightarrow \ldots$

οδεύοντας πρός την τιμή 5.082768

Παρατηρήσεις:

(1) Στο κομπιουτεράκι μην ξεχνάτε νά κάνετε τίς πράξεις με ΑΚΤΙΝΙΑ

(2) Δεν παίρνουμε τον έτοιμο τύπο του βιβλίου γιά πολυώνυμο δευτέρου βαθμού $a_2x^2+a_1x+a_0$ και βάζουμε το $a_2=0$ στους τελικούς τύπους!

Άσκηση 2: Με ολοκλήρωση κατά Gauss (GQ, δύο κόμβοι Gauss ανά κατεύθυνση), υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int_0^\infty \int_0^{x^2} xe^{y-x}dydx$.

Λύση:

$$I = \int_0^\infty \int_0^{x^2} xe^{y-x}dydx = \int_0^\infty xe^{-x}\int_0^{x^2} e^{y}dydx$$

όπου το εξω-ολοκλήρωμα (κατά x) απαιτεί Gauss-Laguerre με: $f(x) = x\int_0^{x^2} e^{y}dy$

δηλαδή θα είναι:

$$I \cong 0.853553\, f(0.585786) + 0.146447\, f(3.41421).$$

όπου:

- $f(0.585786) = 0.585786 \int_0^{0.343145} e^{y}dy$, κάνω το μετ/σμό:

$$\begin{cases} y = \dfrac{0.343145}{2}t + \dfrac{0.343145}{2} = 0.17157t + 0.17157 \\ dy = 0.17157dt. \end{cases}$$

οπότε:

$$\cdots = 0.585786 \cdot 0.17157 \int_{-1}^{+1} \underbrace{e^{0.17157t+0.17157}}_{g(t)}dt =$$

$$= 0.10050 \cdot \left[g(-0.57735) + g(0.57735)\right] =$$

$$= 0.10050 \cdot \left[1.075208 + 1.31078\right] = 0.2398$$

- $f(3.41421) = 3.41421 \int_0^{11.6568} e^{y}dy = \cdots$

Κάνω το μετ/σμό:

$$\begin{cases} y = \dfrac{11.6568}{2} + \dfrac{11.6568}{2} = 5.8284t + 5.8284 \\ dy = 5.8284dt \end{cases}$$

οπότε:

$$\cdots = 3.41421 \cdot 5.8284 \int_{-1}^{1} \underbrace{e^{5.8284t+5.8284}}_{g(t)}dt =$$

$$= 19.899 \cdot \left[g(-0.57735) + g(0.57735)\right] =$$

$$= 19.899 \cdot \left[11.744 + 9832.28\right] = 195886.35$$

Άρα, η τελική τιμή του ολοκληρώματος είναι:

$$I = 0.853553 \cdot 0.2398 + 0.146447 \cdot 195886.35 =$$
$$= 28687.17.$$

Παρατηρήσεις:

(1) Μην σπάτε το $\int_0^\infty$ σε δύο ολοκληρώματα, όπως σωστά μάθατε στα μαθηματικά!! Πρώτον, γιατί ποτέ δεν έγινε έτσι στο μάθημα, δεύτερον γιατί εξετάζεστε στην Αριθμητική Ανάλυση και όχι στα μαθηματικά και τρίτο (και σημαντικότερο) γιατί αν το μετατρέψετε σε 2 ολοκληρώματα δεν θα μπορέσετε να έχετε τελικά 2 κόμβους Gauss.

(2) Στο ψηφοπάρισμα των όρων, αφήστε το e^{-x} στο κατά x-ολοκλήρωμα, αλλιώς θα σας λείψει στην Gauss-Laguerre ολοκλήρωση!!