
Θέμα Εξετάσεων Ιουλίου 2022:

Η ΜΙΑ ΑΣΚΗΣΗ (μονάδες 7)

Παρεμβάλλετε τα εξής 4 σημεία στο επίπεδο (x,y): (0,0), (10,0), (10,10), (0,10) με (φυσικές) κυβικές splines.Στη συνέχεια, κάνετε ακριβώς το ίδιο για την ακόλουθη 4άδα σημείων: (21,0), (11,0), (11,10), (21,10).

(Α1) Βρείτε όλα τα σημεία τομής των δύο καμπυλών παρεμβολής, χρησιμοποιώντας υποχρεωτικά Newton-Raphson για οποιαδήποτε μη-γραμμική εξίσωση ή σύστημα εξισώσεων.

(**Α2**) Βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που οριοθετείται από την πρώτη καμπύλη splines και την ευθεία x=10. Χρησιμοποιήστε ολοκλήρωση κατά Gauss με τόσους κόμβους Gauss όσα και τα σημεία τομής που βρήκατε στο (α). Τα σημεία τομής να ταυτίζονται με τους κόμβους Gauss. Είναι το αποτέλεσμα της ολοκλήρωσής σας ακριβές ή έχει μη-μηδενικό σφάλμα;

Συμβουλή: Στα (Α1) & (Α2), χρησιμοποιήστε την παρατηρητικότητα και τις γνώσεις σας και θα δείτε ότι απαιτούνται δραματικά λιγότερες πράξεις από όσες δίνει η πρώτη εντύπωση. Αρκεί όπως να δικαιολογείτε τις αποφάσεις σας. Προσεκτικά σκίτσα βοηθούν.

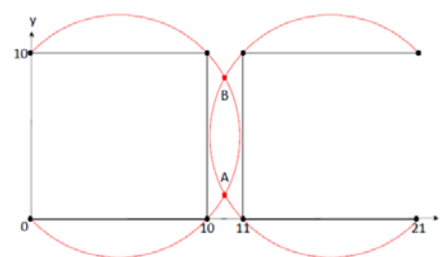
(Α3) Επαναλάβετε ότι κάνατε στο ερώτημα (Α1), προσθέτοντας στην y συντεταγμένη κάθε σημείου της δεύτερης καμπύλης μια μικρή θετική ποσότητα (δηλαδή τα νέα σημεία που θα παρεμβληθούν είναι: (21,ε), (11,ε), (11,10+ε), (21,10+ε). Προσέξτε: δεν ζητούνται αριθμητικές πράξεις (εξάλλου δεν δίνεται η τιμή του ε). Απαντάτε περιγραφικά, δίνοντας τις νέες εξισώσεις, τι αλλάζει στις εξισώσεις που θα λύσετε. Τονίστε κυρίως τις διαφορές από το (Α1)!

(οι υπόλοιπες 3 μονάδες αντιστοιχούσαν σε 4 σύντομες ερωτήσεις)

Λύση:

(Α1) Με βάση το πρόχειρο σκίτσο, η τομή των δύο κυβικών splines θα γίνει στο δεύτερο (από τα τρία) τμήμα καθεμιάς, σε δύο σημεία, έστω τα Α και Β. Λόγω απόλυτης συμμετρίας, θα είναι $x_A=x_B=10.5$ και $y_A=10-y_B$. Υπολογίζονται οι συν/στές $M_0,..M_3$ της πρώτης spline για τα x, λύνοντας το σύστημα:

$$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\1&4&1&0\\0&1&4&1\\0&0&0&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}M_0\\M_1\\M_2\\M_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\-60\\-60\\0\end{bmatrix}$$



το οποίο έχει $M_0=M_3=0$ και άρα εκφυλίζεται σε ένα τετριμμένο σύστημα 2x2 με αγνώστους τα $M_1=-12$, $M_2=-12$. Έτσι, η εξίσωση του x στο δεύτερο τμήμα της πρώτης spline θα είναι η $x(u)=-6u^2+6u+10$.
Όμοια, υπολογίζονται οι συν/στές $Q_0,..Q_3$ της πρώτης spline για τα y, λύνοντας το σύστημα:

$$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\1&4&1&0\\0&1&4&1\\0&0&0&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}Q_0\\Q_1\\Q_2\\Q_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\60\\-60\\0\end{bmatrix}$$

το οποίο έχει $Q_0=Q_3=0$ και άρα εκφυλίζεται σε ένα τετριμμένο σύστημα 2x2 με αγνώστους τα $Q_1=20$, $Q_2=-20$. Έτσι, η εξίσωση του y στο δεύτερο τμήμα της πρώτης spline θα είναι η $y(u)=20(-2u^3+3u^2+2u)/6$.
Οι δύο τομές Α και Β θα γίνουν στις δύο λύσεις της $-6u^2+6u+10=10.5$ η οποία λύνεται εύκολα με Newton-Raphson. Οι δύο λύσεις είναι $u_A=0.0918$ και $u_B=0.9082$. Με βάση τις παραπάνω εκφράσεις για τα x και y τα σημεία τομής είναι: (10.5, 0.6907) το Α και (10.5, 9.3093) το Β.

(Α2) Πρέπει να υπολογιστεί το $I=\int_0^{10}(x(u)-10)dy$, και προφανώς όχι το $\int_0^{10} y(u)dx$ που έγραψαν πολλές/οί (επειδή "από συνήθεια" στα ολοκληρώματα βάζουμε dx!). Είναι

$$I=\int_0^{10}(x(u)-10)\frac{dy}{du}du=(20/6)\int_0^{10}(-6u^2+6u)(-6u^2+6u+2)du=\int_0^{10}f(u)du$$

όπου $f(u)=20(-6u^2+6u)(-6u^2+6u+2)/6$.
Κατά Gauss (πρακτικά δεν χρειάζεται καν να το μετασχηματίσετε στο διάστημα [-1,1] - γιατί;;), το ολοκλήρωμα θα δοθεί από τη σχέση

$I=\int_0^{10} f(u)du = w_0 f(u_0) + w_1 f(u_1)$

όπου u_0=u_A=0.0918 και u_1=u_B=0.9082. Άμεσα προκύπτει ότι w_0=w_1=1 (ώστε αν η συνάρτηση είναι η f(u)=1, το ολοκλήρωμα να είναι ακριβές) και συνεπώς $I = f(u_0) + f(u_1)$. Το αποτέλεσμα προκύπτει από απλή αντικατάσταση και δεν είναι ακριβές.

(Α3) Και πάλι σας ενδιαφέρει το δεύτερο κομμάτι και ανάλογα με την τιμή του ε θα υπάρχουν το πολύ δύο λύσεις. Το πλεονέκτημα της συμμετρίας δεν υπάρχει πλέον. Πρέπει να γραφτούν οι εξισώσεις των x(u) και y(u) και για τις δύο splines, με διαφορετικές παραμέτρους (u και v) η καθεμιά και να ταυτιστούν τα x και y ώστε να βρεθούν τα σημεία τομής λύνοντας μη-γραμμικά συστήματα, κλπ.