ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ – Κ.Χ. ΓΙΑΝΝΑΚΟΓΛΟΥ
ΘΕΜΑΤΑ ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ ΑΠΟ ΤΟΝ ΔΙΔΑΣΚΟΝΤΑ
ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2021

1η Άσκηση στην Εξέταση με Φυσική Παρουσία (μόνο βοήθημα το βιβλίο)

Επιλύστε με μια μέθοδο πρόβλεψης–διόρθωσης 2 βημάτων (k=1), συνδυάζοντας μία σχέση ανοιχτής ολοκλήρωσης με r=1 και μία σχέση κλειστής ολοκλήρωσης με r=3, τη σ.δ.ε.: $\frac{dy}{dx} = y + 3x + 1$, με αρχική συνθήκη y(0) = 4. (α) Συγκεκριμένα, βρείτε την τιμή του y(x = 2) με βήμα Δx = 1, χρησιμοποιώντας, όπου και αν επικουρικά απαιτείται, τη μέθοδο Euler. (β) Μετά, στοχεύοντας σε ακριβέστερη λύση, κάντε δύο επιπλέον κλήσεις/επαναλήψεις του σχήματος διόρθωσης (corrector) και σχολιάστε (το γιατί μπορεί ίσως αξίζει να γίνει αυτό, αν στην περίπτωση αυτή μοιάζει να συγκλίνει και τι επιπλέον κόστος επιφέρει)

Λύση:

(α) Η επίλυση της $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ με $f(x,y) = y + 3x + 1$ και αρχική συνθήκη y(0)=4, με βήμα Δx=1, καλείται να υπολογίσει το y(1) και, μετά, το y(2). Η πρόβλεψη γίνεται με σχέση ανοιχτής ολοκλήρωσης με k=1, r=1, εξ.(6.91), δηλ. τη

$$y_{i+1} = y_{i-1} + 2\Delta x f(x_i, y_i) \qquad (1)$$

και η διόρθωση με σχέση κλειστής ολοκλήρωσης με k=1, r=3, εξ. (6.99), δηλ. τη

$$y_{i+1} = y_{i-1} + \frac{1}{3}\Delta x\left(f(x_{i+1}, y_{i+1}) + 4f(x_i, y_i) + f(x_{i-1}, y_{i-1})\right) \qquad (2)$$

Ως μη-αυτοεκκινούμενη, εφαρμόζεται στο πρώτο βήμα η μέθοδος Euler:

$y(1) = y(0) + \Delta x f(x_0, y_0) = 4 + 1 \cdot (4 + 3 \cdot 0 + 1) = 9$

ακολουθεί η πρόβλεψη (1):

$y(2) = y(0) + 2\Delta x f(x_1, y_1) = 4 + 2 \cdot (9 + 3 \cdot 1 + 1) = 30$

(προσωρινή τιμή) η οποία διορθώνεται με τη (2) ως:

$y(2) = 4 + \frac{1}{3} \cdot ((30 + 3 \cdot 2 + 1) + 4 \cdot (9 + 3 \cdot 1 + 1) + (4 + 3 \cdot 0 + 1)) = 35.333$

(β) Η επιπλέον δύο φορές εφαρμογή της διόρθωσης (2) δίνει:

$y(2) = 4 + \frac{1}{3} \cdot ((35.333 + 3 \cdot 2 + 1) + 4 \cdot (9 + 3 \cdot 1 + 1) + (4 + 3 \cdot 0 + 1)) = 37.111$

$y(2) = 4 + \frac{1}{3} \cdot ((37.111 + 3 \cdot 2 + 1) + 4 \cdot (9 + 3 \cdot 1 + 1) + (4 + 3 \cdot 0 + 1)) = 37.703$

Η πορεία του y(2) (35.333→37.111→37.703) δείχνει εμφανώς σύγκλιση. Το κόστος κάθε επιπλέον κλήσης της διόρθωσης (2) είναι μια κλήση στη συνάρτηση f(x,y) μιας και αλλάζει μόνο αυτός ο όρος.

2η Άσκηση στην Εξέταση με Φυσική Παρουσία (μόνο βοήθημα το βιβλίο)

Καμπύλη Bezier (ας τη λέμε Κ) δημιουργείται από τα εξής 6 σημεία ελέγχου (στο επίπεδο (x,y), με τη σειρά που δίνονται): (0,0), (3,2), (6,6), (6,7), (2,4), (0,2). Διερευνούμε την ευαισθησία της Κ, σε μεταβολές/μετακινήσεις κατά x και y του τρίτου σημείου ελέγχου (δηλαδή του (6,6), ας το λέμε σημείο G). Την ευαισθησία ενός σημείου P της Κ εκφράζουν οι παράγωγοι των συντεταγμένων του x_P και y_P ως προς τις συντεταγμένες x_G και y_G. Ζητείται να βρείτε τα σημεία της Κ (αρκεί να βρείτε την τιμή της παραμέτρου t στο σημείο αυτό, δεν χρειάζονται οι x,y συντεταγμένες του) τα οποία έχουν τη μεγαλύτερη (κατ' απόλυτη τιμή) τιμή παραγώγου (α) του x_P ως προς x_G και (β) του y_P ως προς x_G. (γ) του x_P ως προς y_G και (δ) του y_P ως προς y_G. Για να μην «μπλέξετε», μην πολυασχοληθείτε με την «απόλυτη τιμή» (πάρτε τη «σκέτη» παράγωγο στη θέση της). Εξισώσεις μεγαλύτερου του 2^{ου} βαθμού λύνονται υποχρεωτικά με Newton-Raphson.

Λύση:

Με 6 σημεία ελέγχου, οι σχέσεις της καμπύλης Bezier K είναι οι $x(t) = \sum_0^5 C_i(t)\hat{X}_i$ και $y(t) = \sum_0^5 C_i(t)\hat{Y}_i$. Το σημείο ελέγχου G είναι εδώ το $(X_G, Y_G) = (\hat{X}_2, \hat{Y}_2)$ με αντίστοιχο συντελεστή τον $C_2(t)=10t^2-30t^3+30t^4-10t^5$. Για το σημείο P της καμπύλης K, αυτού με $t=t_P$, η ευαισθησία του x_P ως προς το x_G είναι η παράγωγος $\frac{\partial x(t_P)}{\partial X_G} = C_2(t_P)$. Όμοια είναι και $\frac{\partial y(t_P)}{\partial Y_G} = C_2(t_P)$, δηλαδή αυτές οι δύο παράγωγοι-ευαισθησίες είναι ίδιες. Αν δεν πολυασχοληθούμε με την «απόλυτη τιμή», το σημείο με τη μεγαλύτερη ευαισθησία (είτε του x_P ως προς X_G, είτε του y_P ως προς Y_G, μιας και είναι το ίδιο) είναι αυτό που έχει τιμή της παραμέτρου t ίση με αυτήν που μηδενίζει την παράγωγο του $C_2(t)$ ως προς t, δηλαδή η λύση της εξίσωσης:

$20t-90t^2+120t^3-50t^4=0$

ή, για να γίνει απλούστερη, της:

$2t-9t^2+12t^3-5t^4=0$

Αυτή λύνεται με Newton-Raphson:

$$t^{new} = t^{old} - \left(\frac{2t-9t^2+12t^3-5t^4}{2-18t+36t^3-20t^3}\right)^{old}$$

έστω με αρχικοποίηση t=0.5 και συγκλίνει ως εξής: 0.5→0.375→0.3966→…→0.40.

Ο έλεγχος της δεύτερης παραγώγου, ώστε να είναι όντως μέγιστο, είναι προφανής.

Άρα το σημείο P της καμπύλης στο t_P=0.40 έχει το περισσότερο ευαίσθητο x_P σε οποιαδήποτε μεταβολή του X_G (του σημείου ελέγχου G) και το περισσότερο ευαίσθητο y_P σε οποιαδήποτε μεταβολή του Y_G.

Επειδή δε το x_P δεν εξαρτάται από τα Y των σημείων ελέγχου και το ίδιο συμβαίνει για τα y_P ως προς τα X των σημείων ελέγχου, ισχύει $\frac{\partial x(t_P)}{\partial Y_G} = \frac{\partial y(t_P)}{\partial X_G} = 0$ (απόλυτη αναισθησία).

1η Άσκηση στη Μακρόθεν Εξέταση (ελεύθερα βοηθήματα)

Έχετε διδαχθεί τη μέθοδο της προεκβολής κατά Richardson όπως εφαρμόζεται σε μια ολοκλήρωση, λ.χ. υποστηριζόμενη από τη μέθοδο του τραπεζίου.

Την ίδια ιδέα μπορείτε να εφαρμόσετε για τη διαφόριση (αντί της ολοκλήρωσης), δηλαδή για να βρείτε με μεγαλύτερη ακρίβεια την πρώτη παράγωγο μιας συνάρτησης σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού της, με υποστήριξη από σχήματα πεπερασμένων διαφορών τα οποία έχετε διδαχθεί. Αυτό καλείστε να κάνετε και εδώ: να βρείτε τον τελικό τύπο της πρώτης παραγώγου και να κάνετε μια απλή επίδειξή του. Ακολουθήστε τα παρακάτω βήματα:

Ξεκινήστε γράφοντας το πως προκύπτει/αποδεικνύεται ο τύπος κεντρικών διαφορών για την πρώτη παράγωγο της f(x) ως προς x, σε μια τιμή του x, με βήμα Δx. Αυτός ο τύπος που γράψατε πρέπει να έχει ακρίβεια δεύτερης τάξης. Εσείς, όμως, γράψτε τον τύπο αυτό κρατώντας στο ανάπτυγμα μέχρι και τους όρους που περιέχουν το Δx5, πολλαπλασιασμένους με τις αντίστοιχες παραγώγους του f. Ξαναγράψτε τον ίδιο τύπο με βήμα Δx/2. Τέλος, σκεφτείτε πως θα βρείτε ένα νέο τύπο, στη λογική της προεκβολής κατά Richardson, που θα συνδυάζει τις δύο παραγωγίσεις με πεπερασμένες διαφορές που γράψατε και θα εκτιμά μια καλύτερη τιμή της παραγώγου του f ως προς x, στο x. Τι ακρίβεια έχει αυτός ο τύπος;

Αφού βρείτε και παραθέσετε τον τύπο (και αφού, πρώτα, σε 2-3 γραμμές παρουσιάσετε ένα-ένα τα βήματα που κάνει κάποιος για να τον εφαρμόσει), διαλέξτε μια απλή συνάρτηση (λχ. το x3 ή το cos(2x) ή το xsin(x) κλπ κλπ – μην πάρετε κάποιαν από αυτές, αυτοσχεδιάστε και πάρτε τη δική σας συνάρτηση), εφαρμόσετε τον τύπο που προτείνετε σε κάποια τιμή του x, συγκρίνετε με την αναλυτική τιμή της πρώτης παραγώγου και σχολιάστε.

Λύση:

Στην ολοκλήρωση, η προεκβολή κατά Richardson υπολογίζει λ.χ. με τραπέζιο το ίδιο ολοκλήρωμα δύο φορές (με απόσταση Δx και Δx/2) και τελικά μια ακριβέστερη τιμή του ολοκληρώματος προέρχεται από το άθροισμα αυτών πολλ/νων με κατάλληλα βάρη. Εδώ ζητείται να γίνει το ίδιο, όχι στην ολοκλήρωση, αλλά στη διαφόριση (στις πεπερασμένες διαφορές). Γράφοντας το Taylor ανάπτυγμα για τα f(x+Δx) και f(x-Δx) και αφαιρώντας κατά μέλη προκύπτει ότι:

$$f^{/}(x) = \frac{f(x+\Delta x)-f(x-\Delta x)}{2} - \left[\frac{\Delta x^2}{3!} f^{(3)} f(x) + \frac{\Delta x^4}{5!} f^{(5)}(x)\right] + \cdots$$

(γνωστή σχέση και από τις κεντρικές διαφορές). Αν $\tau(\Delta x) = \frac{f(x+\Delta x)-f(x-\Delta x)}{2}$, τότε η σχέση συντομεύεται σε (είναι εμφανές τι ονομάσαμε k_2 και k_4)

$$f^{/}(x) = \tau(\Delta x) + k_2 \Delta x^2 + k_4 \Delta x^4 + \cdots \qquad (1)$$

Η ίδια σχέση ξαναγράφεται και για βήμα Δx/2, ως

$$f^{/}(x) = \tau(\Delta x/2) + \frac{k_2}{4}\Delta x^2 + \frac{k_4}{16}\Delta x^4 + \cdots \qquad (2)$$

Πολλαπλασιάζουμε την (1) με 1 και τη (2) με 4 και τις αφαιρούμε ώστε να εξαφανιστεί ο όρος με Δx^2 και προκύπτει ο ζητούμενος τύπος

$$f^{/}(x) = -\frac{1}{3}\tau(\Delta x) + \frac{4}{3}\tau\left(\frac{\Delta x}{2}\right) + O(\Delta x^4) + \cdots \qquad (3)$$

Εφαρμογή αν $f(x)=x^3$. Για x=1, βρείτε ότι τ(Δx=0.1)=3.01, ότι τ(Δx/2=0.05)=3.0025, και εφαρμόστε τη σχέση (3) για να πάρετε $f^{/}(1) = -\frac{1}{3}\cdot 3.01 + \frac{4}{3}\cdot 3.0025$=3 που είναι ακριβώς (γιατί?) η παράγωγος του x^3 στο x=1.

2η Άσκηση στη Μακρόθεν Εξέταση (ελεύθερα βοηθήματα)

Όλοι προφανώς γνωρίζετε την ισορροπία δυνάμεων σε μια μάζα m η οποία κρέμεται από ένα γραμμικό ελατήριο αρχικού μήκους L_0 και σταθεράς ελατηρίου k. Οι δύο αυτές ποσότητες είναι άγνωστες. Για να βρεθούν εκτελείτε τρία πειράματα κρεμώντας μάζες 0.25, 0.50 και 0.75kg. Μετράμε, με όση ακρίβεια μπορούμε, το μήκος του παραμορφωμένου ελατηρίου σε κάθε πείραμα. Για τις τρεις προαναφερθείσες μάζες, τα τελικά μήκη μετρώνται ίσα με 0.45, 0.60 και 0.80 cm, αντιστοίχως. Για ευκολία, έστω g=10 m/s^2. Εκτιμήστε τα L_0 και k.

Λύση:

Η εξίσωση του ελατηρίου είναι $mg = k(L - L_0) = kL - \gamma$, όπου βολεύει να ονομάσουμε $\gamma = kL_0$. Στη λογική των ελαχίστων τετραγώνων μηδενίζουμε τις παραγώγους του ολικού σφάλματος $E = \frac{1}{2}\sum_{\iota=1}^{3}(m_i g - kL_i + \gamma)^2$ ως προς k και γ και εύκολα παίρνουμε ένα 2x2 σύστημα, το:

$$\begin{bmatrix} -\sum_{i=1}^{3} L_i^2 & \sum_{i=1}^{3} L_i \\ \sum_{i=1}^{3} L_i & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} k \\ \gamma \end{bmatrix} = g \begin{bmatrix} -\sum_{i=1}^{3} m_i L_i \\ \sum_{i=1}^{3} m_i \end{bmatrix}$$

Ή, με αριθμητική αντικατάσταση,

$$\begin{bmatrix} -1.2025 & 1.85 \\ 1.85 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} k \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10.125 \\ 15 \end{bmatrix}$$

Αυτό έχει λύση k=14.1892 και kL_0=3.75 ή L_0=0.264285 (αντίστοιχες μονάδες).