

Χρήσιμα Σχόλια στη λύση της άσκησης (7 μονάδων) της Δια Ζώσης Εξέτασης

Δίνονται τα εξής τρία σημεία στο επίπεδο (x,y) : $(0.2,-0.5)$, $(0.5,-0.5)$ και $(0.8,+0.5)$. Τα y των σημείων είναι μετρήσεις σε ένα πείραμα που έλαβε ο πειραματικός φυσικός. Ο θεωρητικός φυσικός που ασχολείται με το ίδιο φαινόμενο έχει καταλήξει ποιοτικά στο «νόμο» $y(x)=a_2x^2+a_1x+a_0\sin(x)$ και αναζητεί τους συντελεστές. Επιπλέον, θεωρητικά έχει αποδείξει ότι το ολοκλήρωμα του $y(x)$ από το $x=0$ ως το $x=1$ πρέπει υποχρεωτικά να ισούται με μηδέν, αλλιώς το μοντέλο του θα ήταν «αφύσικο». Συνδυάζοντας τη δουλειά των δύο φυσικών βρείτε την αριθμητική έκφραση του παραπάνω νόμου, εκτιμήστε δηλ. τους συντελεστές στη λογική των ελαχίστων τετραγώνων.

1. Η χρήση «κατά γράμμα» των σχέσεων του βιβλίου (ελάχιστα τετράγωνα) είναι άσχετη γιατί εκείνοι οι τύποι αναφέρονται σε πολυώνυμο, λχ της μορφής $y(x)=a_2x^2+a_1x+a_0$ και όχι τη συνάρτηση $y(x)=a_2x^2+a_1x+a_0\sin(x)$. Έτσι κι αλλιώς, θα ήθελαν μικρή προσαρμογή λόγω της παρουσίας του $\sin(x)$.
2. Η χρήση μεθόδου ελαχίστων τετραγώνων, χωρίς να είναι λάθος (θα βγάλει τα ίδια με περισσότερο κόπο και πράξεις), είναι ουσιαστικά περιττή αν έχουμε 3 σημεία και 3 συντελεστές. Ελάχιστα τετράγωνα χρησιμοποιούμε αν οι άγνωστοι είναι λιγότεροι από τις πληροφορίες-εξισώσεις που είναι διαθέσιμες.
3. Όπως ειπώθηκε, για διευκόλυνση, σε κάθε τάξη, το να είναι μηδέν το ολοκλήρωμα, έπρεπε να είναι το πρώτιστο μέλημα. Άρα, πρώτα ολοκληρώνουμε αναλυτικά από 0 στο 1 το $y(x)=a_2x^2+a_1x+a_0\sin(x)$, το εξισώνουμε με το μηδέν και αυτή είναι μια σχέση που μπορεί λχ να εκφράσει το $a_2=a_2(a_1,a_0)$. Έτσι, ξαναγράφουμε την $y(x)=a_2x^2+a_1x+a_0\sin(x)$ συναρτήσει μόνο δύο αγνώστων, των a_0 και a_1 , και πλέον κάνουμε ελάχιστα τετράγωνα γιατί έχουμε δύο αγνώστους και τρεις πληροφορίες-εξισώσεις.
4. Το να κάνει κάποιος πρώτα τα ελάχιστα τετράγωνα, μετά να πετάξει μια (ποιά; και γιατί αυτήν και όχι άλλη;) από τις εξισώσεις των ελαχίστων τετραγώνων και να την αντικαταστήσει με τη συνθήκη «ολοκλήρωμα=0» είναι μαθηματικά αίολη και μπορεί να δώσει πολύ λάθος λύση (σίγουρα όχι αυτή με το ελάχιστο σφάλμα). Όποια/ος θέλει δοκιμάζει τους δύο τρόπους και βλέπει τις διαφορές.