
Θέματα Εξετάσεων Σεπτεμβρίου 2014:

ΘΕΜΑ 1 (μονάδες 7)

Βλήμα βάλλεται υπό κλίση ως προς το έδαφος, το οποίο αντιστοιχεί στην ευθεία y=0. Το σημείο βολής είναι το $(0,y_0)$, υπερυψωμένο ως προς το έδαφος $(y_0>0)$. Το βλήμα βάλλεται, προς τα θετικά x, με ταχύτητα v_0 και γωνία ως προς το έδαφος ίση με φ_0. Η πορεία που διαγράφει (κάνετε ένα σκίτσο) δίνεται από την εξίσωση:

$$y = x \cdot \tan\phi_0 - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2\phi_0} x^2 + y_0$$

(α) Για βολή με v_0=18m/s, y_0=1.5m, για την οποία το βλήμα προσγειώνεται στο έδαφος στη θέση x=25m, υπολογίστε, με Newton-Raphson (δύο βήματα είναι αρκετά), τη γωνία φ_0. Αρκεί να βρεθεί <u>μία</u> λύση. Είναι g=9.81m/s^2. <u>*Προσέξτε*</u>*: το να αντικαταστήσετε με βάση τη σχέση* $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$ *και αναλύσετε μια δευτεροβάθμια δεν είναι αποδεκτή λύση σε ένα τέτοιο μάθημα και δεν βαθμολογείται. Θα λύσετε την εξίσωση στη μορφή που σας δίνετε με τη μέθοδο που προαναφέρθηκε.* **(β)** Υπολογίστε το εμβαδόν που σχηματίζεται κάτω από την τροχιά του βλήματος και μέχρι το έδαφος, με κατά Gauss ολοκλήρωση (Gauss-Legendre, σχέση δύο κόμβων Gauss). **(γ)** Προτείνετε μία καμπύλη Bezier με τρία σημεία ελέγχου (δώστε τις συντεταγμένες αυτών σε έναν πίνακα) η οποία να περνά από το σημείο βολής, να έχει εκεί κλίση ίση με αυτήν της βολής και επίσης να περνά από το σημείο πρόσπτωσης του βλήματος στο έδαφος. **(δ)** Αν θεωρηθεί μια δεύτερη καμπύλη Bezier, που έχει το πρώτο και το τελευταίο σημείο ελέγχου ίδια με την προηγούμενη, αλλά το μεσαίο σημείο της να είναι διπλό (έχει δηλαδή 4 σημεία ελέγχου – φτιάξτε τον αντίστοιχο πίνακα με πριν), τι επιπλέον ιδιότητα θα έχει αυτή;

(οι υπόλοιπες 3 μονάδες αντιστοιχούσαν σε πέντε σύντομες ερωτήσεις)

Λύση Θέματος 1:

(α) Φτάνοντας στο έδαφος, το βλήμα είναι σε x=20m και y=0 και αυτό το ζεύγος ικανοποιεί την εξίσωση κίνησης. Άρα πρέπει να λυθεί ως προς φ_0 η μη-γραμμική εξίσωση

$$F(\phi_0) = 20 \cdot \tan\phi_0 - \frac{9.81}{2 \cdot 18^2 \cos^2 \phi_0} 20^2 + 1.15 = 0$$

με παράγωγο

$$F^{/}(\phi_0) = \frac{20}{\cos^2 \phi_0} - \frac{2 \cdot 9.81 \cdot \sin\phi_0}{2 \cdot 18^2 \cos^3 \phi_0} 20^2$$

Η μέθοδος Newton-Raphson

$$\phi_0^{new} = \phi_0^{old} - \frac{F\left(\phi_0^{old}\right)}{F^{/}\left(\phi_0^{old}\right)}$$

με αρχική τιμή φ_0=0.2rad, δίνει στην πρώτη επανάληψη φ_0=0.241070rad και στη δεύτερη επανάληψη φ_0=0.241321rad που, έτσι κι αλλιώς, είναι εξαιρετικά κοντά στην πραγματική λύση.

(Μπορείτε, «στο πρόχειρο», να λύσετε ως προς cosφ_0 τη δευτεροβάθμια εξίσωση που μπορεί να προκύψει, με τον τρόπο που ειπώθηκε να αποφευχθεί στη λύση, και να ελέγξετε το αποτέλεσμα. Είναι καλό να σκεφτείτε αν υπάρχει και άλλη λύση, τι φυσική σημασία έχει και το γιατί εδώ εντοπίστηκε η παραπάνω ή τι θα έπρεπε να κάνετε για να εντοπισθεί η άλλη)

(β) Πρέπει να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int_0^{20} g(x)dx$, όπου $g(x) = -0.016055x^2 + 0.246x + 1.5$ με βάση το αριθμητικό αποτέλεσμα του προηγούμενου ερωτήματος. Μέθοδος ολοκλήρωσης η με κατά Gauss ολοκλήρωση (Gauss-Legendre, σχέση δύο κόμβων Gauss). Αλλάζοντας τα όρια ολοκλήρωσης στο -1 ως +1, πρέπει πλέον να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = 10\int_{-1}^{1} w(t)dt$, όπου $w(t) = -1.6055t^2 - 0.751t + 2.3545$. Είναι w(t=-0.5773)=2.252978 και w(t=0.5773)=1.385782. Το αριθμητικό αποτέλεσμα της ολοκλήρωσης είναι το

$$I = \int_0^{20} g(x)dx = 10\int_{-1}^{1} w(t)dt = 10 \cdot \left(1 \cdot w(-0.5773) + 1 \cdot w(0.5773)\right) = 26.38m^2$$

(Βρείτε αναλυτικά το ολοκλήρωμα που ζητείται και θα δείτε ότι η τιμή του I=36.3872 είναι εκπληκτικά κοντά στο αριθμητικό αποτέλεσμα)

(γ) Η καμπύλη Bezier θα έχει τρία σημεία ελέγχου, με πρώτο το (0,1.5), τρίτο το (20,0) και ενιάμεσο-δεύτερο ένα οποιοδήποτε σημείο κείμενο στην ημιευθεία (προς τα θετικά x) που περνά από το (0,1.5) και έχει κλίση 0.241321rad=13.82^o.

(Διαλέξτε όποιο ενδιάμεσο σημείο επιθυμείτε, υπάρχουν άπειρα και δημιουργήστε τον ζητούμενο πίνακα)

(δ) Η νέα καμπύλη Bezier με τα 4 σημεία ελέγχου θα σηκώνεται υψηλότερα («θα την έλκει ισχυρότερα» το διπλό σημείο ελέγχου) και θα έχει μηδενική καμπυλότητα στην αφετηρία.

(Χρησιμοποιήστε το λογισμικό καμπυλών Bezier που διατίθεται στο site του μαθήματος, σχεδιάστε την καμπύλη του (γ) και του (δ) και τότε θα καταλάβετε την απάντηση – ουσιαστική κατανόηση, πέραν της μαθηματικής!)