ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ
3ο ΕΞΑΜΗΝΟ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΕΜΠ
ΔΙΔΑΣΚΟΝΤΕΣ: Ι. ΑΝΑΓΝΩΣΤΟΠΟΥΛΟΣ - Κ.Χ. ΓΙΑΝΝΑΚΟΓΛΟΥ
ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΠΕΡΙΟΔΟΣ: ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2013

Θέματα Εξετάσεων Σεπτεμβρίου 2013:

ΘΕΜΑ 1 (μονάδες 2.5)

Καμπύλη Bezier δημιουργείται από 3 σημεία ελέγχου, τα Α, Β και Γ κατά σειρά. Το Α είναι στην αρχή των αξόνων, δηλαδή είναι το (0,0). Το Γ έχει y=0 και x>0. Τέλος, το ενδιάμεσο σημείο ελέγχου Β έχει y>0 και αναγκαστικά βρίσκεται στην περιοχή του επιπέδου που εξασφαλίζει $dy/dx > 0$ σε κάθε σημείο της προκύπτουσας (από τα Α, Β και Γ) καμπύλης Bezier. Ας είναι I_T το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ των σημείων ελέγχου. Ας είναι I_B η ακριβής-αναλυτική τιμή του εμβαδού του χωρίου ανάμεσα στην προκύπτουσα καμπύλη Bezier και τον άξονα των x.
(α) Βρείτε μαθηματική έκφραση του λόγου I_B/I_T, στη γενική περίπτωση (δηλαδή για τυχαία x_B και y_B). Δώστε αριθμητική τιμή στο λόγο I_B/I_T, αν $x_Γ=4$, $x_B=3$ και $y_B=2$.
(β) Αν $x_Γ=4$ και $x_B=3$, ποιο το y_B ώστε $I_B/I_T=1/2$;
(γ) Απαντήστε ξανά στα (α) και (β) αν αντί του I_B (της ακριβούς τιμής του εμβαδού) χρησιμοποιηθεί η τιμή I_{BGL}, δηλαδή η προσέγγιση του ολοκληρώματος με μέθοδο Gauss-Legendre με δύο κόμβους ολοκλήρωσης (κόμβους Gauss).
(δ) Σχολιάστε ελεύθερα τι θα συνέβαινε αν αντικαθιστούσαμε το I_{BGL} με $I_{ΤΡΑΠ}$, δηλαδή με ολοκλήρωση με τη μέθοδο τραπεζίου. Λάβετε υπόψη σας ότι, εδώ, υπάρχει ένας ακόμη βαθμός ελευθερίας που είναι το πλήθος των σημείων ολοκλήρωσης. Είναι σωστή η πρόταση «υπάρχει ένα πλήθος κόμβων ολοκλήρωσης με τραπέζιο κάτω από το οποίο $I_{ΤΡΑΠ}<T_B$ ενώ πάνω από αυτό $I_{ΤΡΑΠ}>I_B$; Δεν ζητούνται πράξεις αλλά μόνο σχόλια.

ΘΕΜΑ 2 (μονάδες 2,5)

Δίνεται η σ.δ.ε.: $\frac{dy}{dx} + 2y - 2e^{-x} = 0$, με αρχική συνθήκη $y(0) = 1$.
Να βρείτε την τιμή του y για x = 0.6, εκτελώντας: α) 2 βήματα με τη μέθοδο Euler, και β) 1 βήμα με τη μέθοδο Runge-Kutta 2^{ης} τάξης. Ποιο αποτέλεσμα από τα δύο είναι θεωρητικά ακριβέστερο;

ΘΕΜΑ 3 (μονάδες 2,5)

Να δημιουργήσετε μια έκφραση πεπερασμένων διαφορών πρόσω παραγώγισης για τον αριθμητικό υπολογισμό της δεύτερης παραγώγου μιας συνάρτησης f(x), με σφάλμα τάξης h^2.
Στη συνέχεια, να χρησιμοποιήσετε την έκφραση αυτή και διαστήματα h = 0.1, για να υπολογίσετε τη δεύτερη παράγωγο της συνάρτησης $f(x) = x^2 e^{-4x}$, στο σημείο x = 1.
Κατόπιν, να επαναλάβετε τον προηγούμενο υπολογισμό, αλλά με διαστήματα h = 0.5, και τέλος, να εφαρμόσετε και τη μέθοδο Προεκβολής Richardson.
Να συγκρίνετε τα τρία αριθμητικά αποτελέσματα με τη σωστή τιμή: $f''(1) = +0.036631278$

Λύση Θέματος 1:

(α) Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι $I_T = \frac{1}{2} X_\Gamma Y_B$.

Η παραμετρική εξίσωση της πρώτης καμπύλης Bezier, με 3 (άρα N=2) σημεία ελέγχου είναι η

$$x(t) = \sum_{i=0}^{N} C_i(t) X_i \qquad \text{και} \qquad y(t) = \sum_{i=0}^{N} C_i(t) Y_i$$

με $0 \le t \le 1$ και $(X_A, Y_A), (X_B, Y_B), (X_\Gamma, Y_\Gamma)$ τα σημεία ελέγχου. Είναι

$$\begin{bmatrix} C_0(t) \\ C_1(t) \\ C_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} t^0 \\ t^1 \\ t^2 \end{bmatrix}$$

και, συνεπώς, εδώ, η καμπύλη Bezier είναι η

$$x(t) = \left(2t - 2t^2\right) X_B + t^2 X_\Gamma$$
$$y(t) = (2t - 2t^2) \mathrm{Y_B}$$

Η ακριβής-αναλυτική τιμή του εμβαδού του χωρίου ανάμεσα στην προκύπτουσα καμπύλη Bezier και τον άξονα των x δίνεται από το ολοκλήρωμα

$$I_B = \int_0^{X_\Gamma} y dx = \int_0^1 y \dot{x} dt$$

όπου $\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt} = 2\mathrm{X_B} + 2(\mathrm{X_\Gamma} - 2\mathrm{X_B})t$. Η ολοκλήρωση γίνεται αναλυτικά και δίνει $I_B = \frac{1}{3} X_\Gamma Y_B$.
Συνεπώς, ο λόγος I_B/I_T, στη γενική περίπτωση (δηλαδή για τυχαία x_B και y_B) ισούται με 2/3. Η τιμή αυτή ισχύει, προφανώς, αν $x_\Gamma=4$, $x_B=3$ και $y_B=2$.

(β) Αν $x_\Gamma=4$ και $x_B=3$, προφανώς δεν υπάρχει y_B ώστε $I_B/I_T=1/2$, αφού πάντα είναι $I_B/I_T=2/3$.

(γ) Ο υπολογισμός του I_B προέκυψε από ολοκλήρωση πολυωνύμου τρίτου βαθμού ως προς t. Η ολοκλήρωση Gauss-Legendre με n+1 κόμβους Gauss είναι ακριβής αν το προς ολοκλήρωση πολυώνυμο είναι μέχρι και 2n+1 βαθμού. Με δύο κόμβους Gauss, δηλαδή για n=1, η ολοκλήρωση πολυωνύμου ως 2n+1=3^ου^ βαθμού είναι ακριβής. Όμως, τέτοιο πολυώνυμο ολοκληρώνεται εδώ. Άρα $I_{BGL}=I_T$ και όλες οι προηγούμενες απαντήσεις και σχόλια ισχύουν.

(δ) Λόγω της μορφής της καμπύλης, η μέθοδος τραπεζίου θα δίνει $I_{ΤΡΑΠ}<I_B$, πάντα, ανεξαρτήτως του πλήθους σημείων ολοκλήρωσης.

Λύση Θέματος 2:

Η σ.δ.ε. γράφεται: $\frac{dy}{dx} = 2e^{-x} - 2y, \quad y(0) = 1$.

α) Εκτελούμε δύο βήματα της μεθόδου Euler, με $\Delta x = 0.6/2 = 0.3$, και $x_0 = 0$, $y_0 = 1$.

1ο βήμα: $x_1 = 0.3$, $\quad y_1 = y_0 + \Delta x\, f(x_0, y_0) = 1 + 0.3\,(2\cdot e^{-0} - 2) = 1$

2ο βήμα: $x_2 = 0.6$, $\quad y_2 = y_1 + \Delta x\, f(x_1, y_1) = 1 + 0.3\,(2\cdot e^{-3} - 2) = 0.8445$

b) Εκτελούμε ένα βήμα με τη μέθοδο R-K 2ης τάξης, και $\Delta x = 0.6$, $\quad x_1 = 0.6$

$k_1 = \Delta x\, f(x_0, y_0) = 0.6\,(2\cdot e^{-0} - 2) = 0$

$k_2 = \Delta x\, f(x_1, y_0+k_1) = 0.6\, f(0.6, 1) = 0.6\,(2\cdot e^{-0.6} - 2\cdot 1) = -0.54143$

Και $\quad y_1 = y_0 + \frac{k_1 + k_2}{2} = 1 + \frac{0 - 0.54143}{2} = 0.7293$

Το σφάλμα της μεθόδου Euler είναι ανάλογο του $(\Delta x)^2$, δηλαδή εδώ του $0.3^2 = 0.09$, ενώ της μεθόδου R-K είναι ανάλογο του $(\Delta x)^3$, δηλαδή εδώ του $0.6^3 = 0.216$. Επομένως, θεωρητικά είναι ακριβέστερο το αποτέλεσμα της μεθόδου Euler, παρόλο που η τάξη ακρίβειάς της είναι χαμηλότερη, επειδή το βήμα ολοκλήρωσης είναι το μισό από αυτό της μεθόδου R-K.

Λύση Θέματος 3:

Για τάξη παραγώγου n = 2 και τάξη σφάλματος αποκοπής m = 2, η ζητούμενη έκφραση πρόσω παραγώγισης θα περιλαμβάνει m + n = 4 σημεία, δηλαδή τα σημεία: x_i, x_{i+1}, x_{i+2} και x_{i+3}

Γράφουμε τα ακόλουθα σχέσεις – αναπτύγματα σε σειρές Taylor ως προς το x_i:

$$f(x_i) = f(x_i) \tag{1}$$

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)\cdot h + f''(x_i)\frac{h^2}{2} + f'''(x_i)\frac{h^3}{6} + O(h^4) \tag{2}$$

$$f(x_{i+2}) = f(x_i) + f'(x_i)\cdot 2h + f''(x_i)\frac{4h^2}{2} + f'''(x_i)\frac{8h^3}{6} + O(h^4) \tag{3}$$

$$f(x_{i+3}) = f(x_i) + f'(x_i)\cdot 3h + f''(x_i)\frac{9h^2}{2} + f'''(x_i)\frac{27h^3}{6} + O(h^4) \tag{4}$$

Θα πολλαπλασιάσουμε τις παραπάνω τέσσερις εξισώσεις με τους αριθμούς a, b, c και d αντιστοίχως και θα τις προσθέτουμε. Προκειμένου η συνδυασμένη έκφραση που θα προκύψει να περιέχει στο δεξί μέλος μόνο τη δεύτερη παράγωγο της συνάρτησης, θα πρέπει να μηδενίζονται τα αθροίσματα των όρων f(x), f΄(x) και f΄΄΄(x). Επομένως, πρέπει να ισχύουν οι σχέσεις:

$$a + b + c + d = 0 \tag{5}$$

$$b + 2c + 3d = 0 \tag{6}$$

$$b + 8c + 27d = 0 \tag{7}$$

Για την επίλυση του συστήματος θέτουμε έστω a = 1, οπότε εύκολα προκύπτει, αφαιρώντας την (5) από τις (6) και (7), το σύστημα:

$c + 2d = 1 \qquad (8)$

$7c + 26d = 1 \qquad (9),$

η λύση του οποίου είναι: $c = 2$ και $d = -0.5$

Και από την (6) προκύπτει: $b = -2.5$

Για ευκολία στις πράξεις παίρνουμε τις ακέραιες (διπλάσιες) τιμές: $a = 2$, $b = -5$, $c = 4$ και $d = -1$

Τέλος, πολλαπλασιάζουμε τις (1) – (4) και τις προσθέτουμε κατά μέλη:

a x (1) + b x (2) + c x (3) + d x (4) →

$$2f(x_i) - 5f(x_{i+1}) + 4f(x_{i+2}) - f(x_{i+3}) = f''(x_i)h^2\left(-\frac{5}{2} + -\frac{16}{2} - \frac{9}{2}\right) + O(h^4) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f''(x_i) = \frac{2f(x_i) - 5f(x_{i+1}) + 4f(x_{i+2}) - f(x_{i+3})}{h^2} + O(h^2) \qquad (10)$$

που αποτελεί τη ζητούμενη έκφραση.

Εφαρμογή:

Υπολογίζουμε πρώτα την τιμή της συνάρτησης f(x) στα σημεία που απαιτείται για h = 0.1:

$f(x_i) = f(1) = e^{-4}$

$f(x_{i+1}) = f(1.1) = 1.21\ e^{-4.4}$

$f(x_{i+2}) = f(1.2) = 1.44\ e^{-4.8}$

$f(x_{i+3}) = f(1.3) = 1.69\ e^{-5.2}$

Εφαρμόζουμε τη σχέση (10) και λαμβάνουμε μετά τις πράξεις: $f''(1) = 0.043372$

Στη συνέχεια, υπολογίζουμε την τιμή της συνάρτησης στα σημεία που απαιτείται για h = 0.5:

$f(x_i) = f(1) = e^{-4}$

$f(x_{i+1}) = f(1.5) = 2.25\ e^{-6}$

$f(x_{i+2}) = f(2.0) = 4\ e^{-8}$

$f(x_{i+3}) = f(2.5) = 6.25\ e^{-10}$

Εφαρμόζουμε πάλι τη σχέση (10) και λαμβάνουμε μετά τις πράξεις: $f''(1) = 0.055316$

Για την εφαρμογή της μεθόδου Προεκβολής Richardson λαμβάνουμε τη σχέση 5.60 των Σημειώσεων, παρόλο που δεν αντιστοιχεί στη συγκεκριμένη σχέση των δύο διαστημάτων 0.1 και 0.5 (κάθε άλλη έκφραση που χρησιμοποιήθηκε μετά από σχετική απόδειξη, θεωρήθηκε επίσης ως σωστή)

$$f''(1) \cong \frac{4}{3}f''(1)_{h-0.1} - \frac{1}{3}f''(1)_{h-0.5} = \frac{4}{3}\cdot 0.043372 - \frac{1}{3}\cdot 0.055316 = 0.039391$$

Παρατηρούμε ότι σύμφωνα με τη θεωρία το αποτέλεσμα με h=0.1 είναι ακριβέστερο αυτού με h=0.5, ενώ με τη μέθοδο Richardson πλησιάζει ακόμη πιο πολύ στη σωστή τιμή, $f''(1) = 0.036631278$