Θέματα Εξετάσεων Σεπτεμβρίου 2012:

ΘΕΜΑ 1 (μονάδες 5)

Καμπύλη Bezier δημιουργείται από 5 σημεία ελέγχου, που κατά σειρά είναι τα: (0,0), (?,?), (2,2), (?,?) και (4,0). Ας συμβολίζουμε αυτές τις συντεταγμένες με $\left(\hat{X}_i, \hat{Y}_i\right)$. Τις συντεταγμένες των σημείων ελέγχου που συμβολίζονται με το ? θα τις ορίσετε εσείς, έτσι ώστε τα σημεία ελέγχου να σχηματίζουν ένα πολύγωνο που θα μοιάζει με το κεφαλαίο γράμμα Μ, καμία πλευρά του οποίου δεν πρέπει να είναι οριζόντια ή κατακόρυφη (όλες να είναι πλάγιες ως προς το σύστημα συντεταγμένων). Όμως, υποχρεωτικά, το πολύγωνο αυτό πρέπει να είναι συμμετρικό ως προς την ευθεία x=2. Είστε ελεύθεροι να δώσετε εσείς τιμές στα ? και να κάνετε κάθε άλλη παραδοχή (όσο αφορά στους αριθμούς αυτούς) που θα σας ευκολύνει στην επίλυση. Από την προκύπτουσα καμπύλη Bezier κρατήστε μόνο το αριστερό μισό της.
Ζητούμενο είναι να δημιουργήσετε μια νέα καμπύλη Bezier με 5 νέα σημεία ελέγχου, που θα συμβολίζονται με $\left(\tilde{X}_i, \tilde{Y}_i\right)$, η οποία ολόκληρη (δηλαδή για το εύρος τιμών της παραμέτρου της t: $0 \le t \le 1$) θα αναπαράγουν επακριβώς <u>το αριστερό μισό</u> της αρχικής καμπύλης. Βρείτε τις συντεταγμένες $\left(\tilde{X}_i, \tilde{Y}_i\right)$. Δικαιολογήστε κάθε επιλογή σας.
Στο τέλος, σχολιάστε γιατί και η νέα καμπύλη έπρεπε να έχει 5 σημεία ελέγχου. Θα μπορούσε να είχε 4; (ναι ή όχι – και, κυρίως, γιατί)

Απαντήστε τα ερωτήματα, μην αντιγράφετε τη θεωρία από το βιβλίο σας! Δεν βαθμολογείται!

ΘΕΜΑ 2 (μονάδες 3 + 2)

α) Να εφαρμόσετε τη μέθοδο Runge-Kutta $2^{ης}$ τάξης για την επίλυση της σ.δ.ε.:

$$\frac{dy}{dx} = 4x^7 - 6x^5 + 2x^3 - 0.1,$$

με αρχική συνθήκη y(0)=0.2, ώστε να βρείτε την τιμή του y για x=1, χρησιμοποιώντας αρχικά 1 βήμα και στη συνέχεια 2 βήματα. Επίσης, να βρείτε την τιμή y(1) αναλυτικά και να τη συγκρίνετε με τις δύο προηγούμενες αριθμητικές λύσεις, σχολιάζοντας και επεξηγώντας τις όποιες διαφορές, με βάση τη σχετική θεωρία.

β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα της συνάρτησης $f(x) = 4x^7 - 6x^5 + 2x^3 - 0.1$ στο διάστημα [0, 1], με τη μέθοδο ολοκλήρωσης Gauss-Legendre και χρήση τριών σημείων παρεμβολής. Πώς σχετίζεται το αποτέλεσμα που θα βρείτε με εκείνο του προηγούμενου ερωτήματος (α);

Λύση Θέματος 1:

Για λόγους ευκολίας επιθυμώ τα σημεία ελέγχου της πρώτης καμπύλης να ισαπέχουν κατά x (γνωρίζετε τι κερδίζω από αυτό;). Έτσι, διαλέγω τα σημεία ελέγχου $\left(\hat{X}_i,\hat{Y}_i\right)$, με $0 \le i \le 4$, να είναι κατά σειρά τα: (0,0), (1,4), (2,2), (3,4) και (4,0). Κάντε μόνοι σας τα σχετικά σχέδια, τόσο του πολύγωνου όσο και της προκύπτουσας καμπύλης Bezier. Οτιδήποτε αφορά αυτήν την καμπύλη (θα τη λέμε «πρώτη») θα συμβολίζεται με ^.

Η παραμετρική εξίσωση της πρώτης καμπύλης Bezier, με 5 (άρα N=4) σημεία ελέγχου είναι η

$$x(\hat{t}) = \sum_{i=0}^{N} C_i(\hat{t})\hat{X}_i \qquad \text{και} \qquad y(\hat{t}) = \sum_{i=0}^{N} C_i(\hat{t})\hat{Y}_i$$

με $0 \le \hat{t} \le 1$ και $\left(\hat{X}_0,\hat{Y}_0\right),\ldots,\left(\hat{X}_4,\hat{Y}_4\right)$ τα σημεία ελέγχου. Είναι

$$\begin{bmatrix} C_0(\hat{t}) \\ C_1(\hat{t}) \\ C_2(\hat{t}) \\ C_3(\hat{t}) \\ C_4(\hat{t}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ 0 & 4 & -12 & 12 & -4 \\ 0 & 0 & 6 & -12 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{t}^0 \\ \hat{t}^1 \\ \hat{t}^2 \\ \hat{t}^3 \\ \hat{t}^4 \end{bmatrix}$$

και, συνεπώς, εδώ, η πρώτη καμπύλη είναι η

$$\hat{x}(\hat{t}) = 4\hat{t}$$
$$\hat{y}(\hat{t}) = 16\hat{t} - 36\hat{t}^2 + 40\hat{t}^3 - 20\hat{t}^4$$

Το αριστερό μισό της καμπύλης αυτής τερματίζει στο σημείο $\hat{t} = 0.5$ οπότε, με εκτέλεση πράξεων στις παραπάνω σχέσεις το σημείο αυτό έχει συντεταγμένες (2,2.75). Αυτό θα αποτελεί και το τελευταίο σημείο της νέας-ζητούμενης καμπύλης Bezier (θα τη λέμε «δεύτερη», πάλι με N=4) με σημεία ελέγχου τα $\left(\tilde{X}_i,\tilde{Y}_i\right)$. Θα είναι δηλαδή $\left(\tilde{X}_4,\tilde{Y}_4\right)=(2,2.75)$. Προφανώς θα είναι $\left(\tilde{X}_0,\tilde{Y}_0\right)=(0,0)$.

Η συμμετρία ως προς τον κατακόρυφο άξονα στο x=2 της «πρώτης» καμπύλης Bezier σημαίνει ότι στο σημείο με συντεταγμένες (2,2.75), εκεί όπου $\hat{t} = 0.5$, η εφαπτόμενή της είναι οριζόντια. Με βάση τα όσα πρέπει να γνωρίζετε για τις ιδιότητες των καμπυλών Bezier, αυτό σημαίνει ότι για τη «δεύτερη» καμπύλη θα είναι $\tilde{Y}_3 = 2.75$. Άρα η «δεύτερη» καμπύλη Bezier, η οποία θα διέπεται από τις ίδιες με την «πρώτη» εξισώσεις (μόνο που, αντί του ^, θα συμβολίζονται με ~) θα έχει κατά σειρά τα εξής σημεία ελέγχου:

$$(0,0),\ \left(\tilde{X}_1,\tilde{Y}_1\right),\ \left(\tilde{X}_2,\tilde{Y}_2\right),\ \left(\tilde{X}_3,2.75\right),\ (2,2.75)$$

Για τους ίδιους λόγους με πριν συμφέρει να ισαπέχουν τα $\tilde{X}_i$. Άρα, ουσιαστικά, τα σημεία ελέγχου της «δεύτερης» καμπύλης θα είναι τα

$$(0,0),\ \left(0.5,\tilde{Y}_1\right),\ \left(1,\tilde{Y}_2\right),\ (1.5,2.75),\ (2,2.75)$$

Συνεπώς, οι δύο προς υπολογισμό άγνωστοι είναι τα $\widetilde{Y}_1$ και $\widetilde{Y}_2$. Οι σχέσεις που δίνουν τις συντεταγμένες της «δεύτερης» καμπύλης Bezier είναι οι (με $0 \le \widetilde{t} \le 1$)

$$\widetilde{x}(\widetilde{t}) = 2\widetilde{t}$$

$$\widetilde{y}(\widetilde{t}) = \left[4\widetilde{Y}_1\right]\widetilde{t} + \left[-12\widetilde{Y}_1 + 6\widetilde{Y}_2\right]\widetilde{t}^{\,2} + \left[12\widetilde{Y}_1 - 12\widetilde{Y}_2 + 11\right]\widetilde{t}^{\,3} + \left[-4\widetilde{Y}_1 + 6\widetilde{Y}_2 - 8.25\right]\widetilde{t}^{\,4}$$

Το να ταυτίζονται η αριστερή-μισή της «πρώτης» καμπύλης (το τμήμα της, δηλαδή, για $0 \le \hat{t} \le 0.5$) με ολόκληρη τη «δεύτερη» καμπύλη (για $0 \le \widetilde{t} \le 1$) απαιτεί καταρχήν να ισχύει η σχέση $\widetilde{t} = 2\hat{t}$ και, στη συνέχεια οι

$$16 = 2\left[4\widetilde{Y}_1\right]$$
$$-36 = 4\left[-12\widetilde{Y}_1 + 6\widetilde{Y}_2\right]$$
$$40 = 8\left[12\widetilde{Y}_1 - 12\widetilde{Y}_2 + 11\right]$$
$$-20 = 16\left[-4\widetilde{Y}_1 + 6\widetilde{Y}_2 - 8.25\right]$$

Η πρώτη εξίσωση δίνει ότι $\widetilde{Y}_1 = 2$ και η δεύτερη ότι $\widetilde{Y}_2 = 2.5$. Με αυτές τις τιμές, οι άλλες δύο εξισώσεις ικανοποιούνται ταυτοτικά.

<u>**ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:**</u> Προφανώς η άσκηση μπορεί να λυθεί και χωρίς να γίνει η υπόθεση ότι τα σημαεία ελέγχου ισαπέχουν κατά x. Μόνο που τότε οι πράξεις γίνονται περισσότερες. Το να ισαπέχουν κατά x επιτρέπει την καμπύλη να γραφεί στη μορφή y=y(x) (και όχι, πλέον, παραμετρικά) οπότε το πρόβλημα που λύθηκε απάντησε πρακτικά στο ερώτημα «πότε δύο πολυώνυμα $4^{ου}$ βαθμού της μορφής y=y(x) ταυτίζονται!». Αυτό, ουσιαστικά, απαντά και στο τελευταίο ερώτημα για το ποιο θα έπρεπε να είναι το N της «δεύτερης» καμπύλης.

Λύση Θέματος 2:

(α) $f(x,y) = f(x) = 4x^7 - 6x^5 + 2x^3 - 0.1$, δηλ. είναι συνάρτηση μόνο του x.

Επίλυση με R-K $2^{ης}$ τάξης και 1 βήμα: $\Delta x = 1$, $x_0 = 0$ και $x_1 = 1$

$k_1 = \Delta x \cdot f(x_0,y_0) = 1. \cdot f(0) = 1. \cdot (-0.1) = -0.1$

$k_2 = \Delta x \cdot f(x_1,y_1) = 1. \cdot f(1) = 1. \cdot (-0.1) = -0.1$

και $y_1 = y_0 + (k_1 + k_2) / 2. = 0.2 - 0.1 = 0.1$

Επίλυση με R-K $2^{ης}$ τάξης και 2 βήματα: $\Delta x = 0.5$, $x_0 = 0$, $x_1 = 0.5$ και $x_2 = 1$

$1^{ο}$ βήμα:

$k_1 = \Delta x \cdot f(x_0,y_0) = 0.5 \cdot f(0) = 0.5 \cdot (-0.1) = -0.05$

$k_2 = \Delta x \cdot f(x_1,y_1) = 0.5 \cdot f(0.5) = 0.5 \cdot (-0.00625) = -0.003125$

και $y_1 = y_0 + (k_1 + k_2) / 2. = 0.2 - 0.0265625 = 0.1734375$

$2^{ο}$ βήμα:

$k_1 = \Delta x \cdot f(x_1,y_1) = 0.5 \cdot f(0.5) = -0.003125$

$k_2 = \Delta x \cdot f(x_2,y_2) = 0.5 \cdot f(1) = 0.5 \cdot (-0.1) = -0.05$

και $y_2 = y_1 + (k_1 + k_2) / 2. = 0.1734375 - 0.0265625 = 0.146875$

Αναλυτική λύση:

$$y_1 = y_0 + \int_0^1 \left(4x^7 - 6x^5 + 2x^3 - 0.1\right)dx = y_0 + \left(\frac{4}{8}x^8 - x^6 + \frac{2}{4}x^4 - 0.1x\right)\Bigg|_0^1 = 0.2 + (-0.1) = 0.1$$

Παρατηρούμε ότι η αριθμητική λύση με 1 βήμα της μεθόδου R-K δίνει απόλυτη ακρίβεια, ενώ με 2 βήματα έχει σημαντική απόκλιση, με σχετικό σφάλμα 47%. Αυτό συμβαίνει επειδή εντελώς συμπτωματικά η κλίση της συνάρτησης στο σχημείο $x_0 = 0$ είναι τέτοια ώστε να προκύπτει το σωστό αποτέλεσμα με ένα βήμα, ενώ λαμβάνοντας υπόψη και δεύτερο σημείο το αποτέλεσμα μεταβάλλεται. Και στις δύο περιπτώσεις, το διάστημα ολοκλήρωσης είναι σχετικά μεγάλο και δεν μπορεί να δώσει αξιόπιστα αποτελέσματα. Όσο μειώνεται το διάστημα και αυξάνεται ο αριθμός των βημάτων, τόσο θα πλησιάζει το αριθμητικό αποτέλεσμα στη σωστή τιμή.

(β) Επειδή τα όρια ολοκλήρωσης δεν είναι μεταξύ -1 και +1, χρησιμοποιούμε τον μετασχηματισμό:

$$x_i = \frac{x_i'(b-a)+b+a}{2} = \frac{x_i'+1}{2}$$

Και τα αντίστοιχα των σημείων παρεμβολής $x_1' = -0.7745966692,\ x_2' = 0,\ x_3' = 0.7745966692$,
θα είναι τα σημεία: $x_1 = 0.112701665,\ x_2 = 0.5,\ x_3 = 0.887298335$.

Έτσι, το ζητούμενο αριθμητικό ολοκλήρωμα γράφεται:

$$I = \frac{b-a}{2}\sum_{i=0}^{2} w_i \cdot f(x_i) = \frac{1}{2}\left[0.555555556 \cdot f(x_1) + 0.888888889 \cdot f(x_2) + 0.555555556 \cdot f(x_3)\right] = -0.105$$

Το αποτέλεσμα αυτό αποτελεί αριθμητική λύση της διαφορικής εξίσωσης του ερωτήματος (α) στο σημείο $x_1 = 1$, αφού

$$y_1 = y_0 + \int_0^1 f(x)dx \approx 0.2 - 0.105 = 0.095$$

Παρατηρούμε μάλιστα ότι η λύση αυτή έχει σημαντικά μεγαλύτερη ακρίβεια από τη μέθοδο R-K 2ης τάξης με δύο βήματα, επειδή η ακρίβεια της μεθόδου Gauss-Legendre για τρία σημεία είναι 5ης τάξης (για n=2 το σφάλμα είναι ανάλογο της 2n+2=6ης παραγώγου).