
Θέματα Εξετάσεων Φεβρουαρίου 2012:

ΘΕΜΑ 1 (μονάδες 4+1)

(α) Καμπύλη Bezier δημιουργείται από 4 σημεία ελέγχου, που κατά σειρά είναι τα: (0,0), (2,4), (3,1), (5,2). Βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου της καμπύλης αυτής που είναι πλησιέστερα στο σημείο (1,2). Μη-γραμμικές εξισώσεις πρέπει να λυθούν με μέθοδο Newton-Raphson.

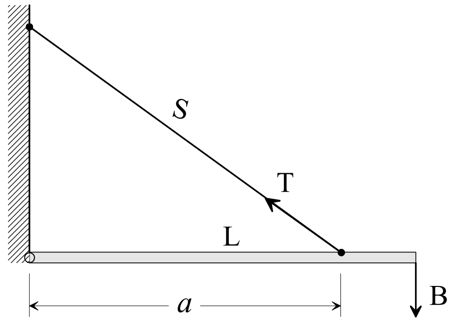
(β) … μια ερώτηση …;

Απαντήστε τα ερωτήματα, μην αντιγράφετε τη θεωρία από το βιβλίο σας! Δεν βαθμολογείται!

ΘΕΜΑ 2 (μονάδες 1.5 + 3.5)

Μια οριζόντια δοκός μήκους L, που θεωρείται αβαρής, δέχεται ένα φορτίο B στο ένα άκρο και στηρίζεται με άρθρωση στο άλλο άκρο της, καθώς και με ένα καλώδιο μήκους S σε απόσταση *a* από το άκρο αυτό, όπως στο σχήμα. Η τάση του καλωδίου δίνεται από τη σχέση:

$$T = \frac{B \cdot S \cdot L}{a \cdot \sqrt{S^2 - a^2}}$$



(α) Να βρείτε το σχετικό σφάλμα εκτίμησης της τάσης του καλωδίου και το εύρος διακύμανσης της τιμής της, λαμβάνοντας υπόψη ότι το σχετικό σφάλμα μέτρησης των μηκών S και L είναι ±3%, του φορτίου B ±5%, ενώ του μήκους *a* είναι 0.

(β) Χρησιμοποιώντας αριθμητική παραγώγιση και το σχήμα πρόσω-παραγώγισης με σφάλμα πρώτης τάξης, να εκτιμήσετε με προσέγγιση ±40 cm την απόσταση *a* πρόσδεσης του καλωδίου, για την οποία ελαχιστοποιείται η τάση του. Προσέξτε ότι το μήκος S του καλωδίου παραμένει σταθερό. Επαληθεύστε το αποτέλεσμα αυτό με τη χρήση ενός ακριβέστερου σχήματος αριθμητικής παραγώγισης (όποιου θέλετε).

Δεδομένα: L = 4 m, S = 6 m, B = 2500 N, και για το πρώτο ερώτημα: *a* = 3 m.

ΠΡΟΣΟΧΗ:

- Πρέπει να έχετε μαζί σας επίσημο έγγραφο επιβεβαίωσης της ταυτότητάς σας (όχι φοιτητική ταυτότητα).
- Επιτρέπεται μόνο το εγκεκριμένο βιβλίο του μαθήματος. Απαγορεύονται σημειώσεις και άλλα βιβλία.
- Το όνομά σας πρέπει να αναγράφεται σε κάθε φύλλο που υπάρχει στην επιφάνεια εργασίας σας.
- Απαγορεύεται αυστηρά η εμφάνιση και η χρήση κινητού τηλεφώνου.
- Διάρκεια εξέτασης 2 ώρες & 15 λεπτά. Αποχώρηση μετά την 1η ώρα. Υποχρεωτική παράδοση του φύλλου αυτού.

<u>Λύση Θέματος 1:</u>

(α) Η παραμετρική εξίσωση της καμπύλης Bezier, με 4 (άρα N=3) σημεία ελέγχου είναι η

$$x(t) = \sum_{i=0}^{N} C_i(t)\widehat{X}_i \qquad \text{και} \qquad y(t) = \sum_{i=0}^{N} C_i(t)\widehat{Y}_i$$

με $0 \le t \le 1$ και $\left(\widehat{X}_0, \widehat{Y}_0\right), \ldots, \left(\widehat{X}_3, \widehat{Y}_3\right)$ τα δοσμένα σημεία ελέγχου. Είναι

$$\begin{bmatrix} C_0(t) \\ C_1(t) \\ C_2(t) \\ C_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} t^0 \\ t^1 \\ t^2 \\ t^3 \end{bmatrix}$$

άρα

$$x(t) = \left(1 - 3t + 3t^2 - t^3\right)\cdot 0 + \left(3t - 6t^2 + 3t^3\right)\cdot 2 + \left(3t^2 - 3t^3\right)\cdot 3 + \left(t^3\right)\cdot 5 = 6t - 3t^2 + 2t^3$$
$$y(t) = \left(1 - 3t + 3t^2 - t^3\right)\cdot 0 + \left(3t - 6t^2 + 3t^3\right)\cdot 4 + \left(3t^2 - 3t^3\right)\cdot 1 + \left(t^3\right)\cdot 2 = 12t - 21t^2 + 11t^3$$

Το τετράγωνο της απόστασης D(t) κάθε σημείου αυτής της καμπύλης (καθοριζόμενου από μια τιμή της παραμέτρου t, με $0 \le t \le 1$), από το σημείο (1,2), είναι

$$D^2(t) = [x(t) - 1]^2 + [y(t) - 2]^2$$

Αναζητείται η τιμή της παραμέτρου t που θα ελαχιστοποιήσει την παραπάνω απόσταση (στο τετράγωνο, για λόγους πιο εύκολων πράξεων!) ή που θα ικανοποιήσει την

$$\frac{dD^2(t)}{dt} = 2[x(t) - 1]\frac{dx}{dt} + 2[y(t) - 2]\frac{dy}{dt} = 0$$

(με ένα απλό σκίτσο μπορεί να φανεί ότι το σημείο της μικρότερης απόστασης από το (1,2) είναι στο εσωτερικό της καμπύλης και όχι ένα από τα δύο ακραία της σημεία - τι διαφορετικό θα ίσχυε τότε;;; - εννοείται ότι πρέπει να ελεγχθεί και η δεύτερη παράγωγος… αυτό όμως εδώ παραλείπεται), όπου

$$\frac{dx(t)}{dt} = 6 - 6t + 6t^2$$
$$\frac{dy(t)}{dt} = 12 - 42t + 33t^2$$

Με αριθμητική αντικατάσταση και προφανείς απαλοιφές προκύπτει ότι πρέπει να λυθεί η

$$F(t) = -30 + 270t - 882t^2 + 1476t^3 - 1185t^4 + 375t^5 = 0$$

η οποία πρέπει να λυθεί με τη μέθοδο Newton-Raphson, ως εξής:

$$t^{new} = t^{old} - \frac{F(t^{old})}{F'(t^{old})}$$

Με αρχική τιμή την t=0, επαναληπτικά παίρνουμε:

t=0.00 → 0.1111 →0.18399 →0.21423 →0.22134 →0.22277 → 0.22306 → 0.22311 → κοκ

Για την τελική λύση t=0.22313, προκύπτει ότι το πλησιέστερο σημείο της καμπύλης Bezier στο σημείο (1,2) έχει συντεταγμένες

$$x(t = 0.22313) = 6 \cdot 0.22313 - 3 \cdot 0.22313^2 + 2 \cdot 0.22313^3$$

$$y(t) = 12 \cdot 0.22313 - 21 \cdot 0.22313^2 + 11 \cdot 0.22313^3$$

<u>Λύση Θέματος 2:</u>

(α) Για τα δεδομένα του προβλήματος προκύπτει η εκτιμώμενη τιμή της τάσης

$$T_a = \frac{B \cdot S \cdot L}{a \cdot \sqrt{S^2 - a^2}} = \frac{2500 \cdot 6 \cdot 4}{3 \cdot \sqrt{6^2 - 3^2}} = 3849.0\,N$$

Το σχετικό σφάλμα της τάσης του καλωδίου εκτιμάται από τη σχέση

$$|\varepsilon_a| \cong \left|\frac{\partial T_a}{\partial B} \cdot \frac{B_a}{T_a} \cdot \varepsilon_{a,B}\right| + \left|\frac{\partial T_a}{\partial S} \cdot \frac{S_a}{T_a} \cdot \varepsilon_{a,S}\right| + \left|\frac{\partial T_a}{\partial L} \cdot \frac{L_\alpha}{T_a} \cdot \varepsilon_{a,L}\right|,$$

στην οποία δεν περιλαμβάνεται η μερική παράγωγος ως προς το μήκος α, επειδή το αντίστοιχο σφάλμα είναι μηδέν.

Βρίσκουμε αναλυτικά τους παραπάνω όρους:

$$\left|\frac{\partial T_a}{\partial B} \cdot \frac{B_a}{T_a}\right| = \left|\frac{T_a}{B_a} \cdot \frac{B_a}{T_a}\right| = 1.0, \qquad \text{και ομοίως:} \qquad \left|\frac{\partial T_a}{\partial L} \cdot \frac{L_a}{T_a}\right| = 1.0$$

$$\left|\frac{\partial T_a}{\partial S} \cdot \frac{S_a}{T_a}\right| = \left|\frac{B_a \cdot L_a}{\alpha} \cdot \frac{\partial}{\partial S}\left[1 - \left(\frac{\alpha}{S}\right)^2\right]^{-1/2} \cdot \frac{\alpha \cdot \left(S^2 - \alpha^2\right)^{1/2}}{B_a \cdot L_a}\right| = \left|\frac{1}{2} \cdot \left(2\alpha^2 \cdot S^{-3}\right) \cdot \left[1 - \left(\frac{\alpha}{S}\right)^2\right]^{-3/2} \cdot S \cdot \left[1 - \left(\frac{\alpha}{S}\right)^2\right]^{1/2}\right| =$$

$$= \left|\alpha^2 \cdot \left(S^2 - \alpha^2\right)^{-1}\right| = \left|\frac{3^2}{\left(6^2 - 3^2\right)}\right| = 0.3333$$

Επομένως:

$$|\varepsilon_a| \cong |\varepsilon_{a,B}| + |0.3333 \cdot \varepsilon_{a,S}| + |\varepsilon_{a,L}| = 0.05 + 0.3333 \cdot 0.03 + 0.03 = 0.09$$

Και το εύρος διακύμανσης της τιμής της τάσης θα είναι

$$\left(1 - \varepsilon_a\right) \cdot T_a \le T \le \left(1 + \varepsilon_a\right) \cdot T_a \Rightarrow \left(1 - 0.09\right) \cdot 3849 \le T \le \left(1 + 0.09\right) \cdot 3849 \Rightarrow 3502.6 \le T \le 4195.4$$

(β) Επίλυση για τα εξής δεδομένα: L = 4 m, S = 5 m, B = 2000 N, επιθυμητή προσέγγιση ±40 cm.

Βρίσκουμε την τιμή της τάσης σε διάφορα σημεία κατά μήκος της δοκού, ανά 40 cm (δα = 0.4), αρχίζοντας από το ελεύθερο άκρο της. Παράλληλα, υπολογίζουμε την τιμή της πρώτης παραγώγου της συνάρτησης T χρησιμοποιώντας το σχήμα προσω-παραγώγισης 1ης τάξης: $\frac{\partial T}{\partial \alpha} = \frac{T_{\iota+1} - T_\iota}{\delta \alpha}$

α = 4.0 → T = 3333.3

α = 3.6 → T = 3202.2 → $\frac{\partial T}{\partial \alpha} = \frac{3333.3 - 3202.2}{0.4} = 327.75$

α = 3.2 → T = 3253.6 → $\frac{\partial T}{\partial \alpha} = -136.0$

α = 2.8 → T = 3448.6 → $\frac{\partial T}{\partial \alpha} = -480.0$

Η θέση στην οποία ελαχιστοποιείται η απόλυτη τιμής της πρώτης παραγώγου είναι η α = 3.2 m.

Για επαλήθευση χρησιμοποιούμε το σχήμα κεντρικών διαφορών που έχει ακρίβεια 2ης τάξης:

$$\frac{\partial T}{\partial \alpha} = \frac{T_{\iota+1} - T_{\iota-1}}{2 \cdot \delta \alpha}$$

Στη θέση α = 3.2 το σχήμα αυτό δίνει: $\frac{\partial T}{\partial \alpha} = \frac{3202.2 - 3448.6}{0.8} = -308.0$

ενώ στη θέση α = 3.6 δίνει: $\frac{\partial T}{\partial \alpha} = \frac{3333.3 - 3253.6}{0.8} = 99.6$

Επομένως, η τάση του καλωδίου θα είναι μικρότερη στη θέση α = 3.6 και όχι στην α = 3.2 που βρήκαμε με το σχήμα 1ης τάξης.