
Θέματα Εξετάσεων Σεπτεμβρίου 2011:

ΘΕΜΑ 1 (μονάδες 2.5)

Η ωριαία μεταβολή της ηλιακής ακτινοβολίας, q, που προσπίπτει στην επιφάνεια ηλιακού συλλέκτη με συντελεστή απορρόφησης 80% δίνεται στον παρακάτω πίνακα, σε μονάδες Watt/m^2.

ώρα	0-6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20-24
q	0	12	46	95	160	233	267	300	280	250	215	172	105	34	0

Να υπολογίσετε την επιφάνεια του συλλέκτη ώστε να καλύπτει τις ανάγκες θέρμανσης νερού μιας κατοικίας, οι οποίες εκτιμώνται σε 10 kWh το 24ωρο, χρησιμοποιώντας τις μεθόδους Τραπεζίου και Simpson 1/3.

ΘΕΜΑ 2 (μονάδες 2.5)

Να εφαρμόσετε τη μέθοδο Newton με το σχήμα του Horner για να υπολογίσετε με ακρίβεια τριών σημαντικών ψηφίων όλες τις ρίζες του πολυωνύμου:

$$x^3 + 4x^2 + x - 6 = 0$$

ΘΕΜΑ 3 (μονάδες 5– (α) και (β) όχι ισοδύναμα)

Έστω N_{ALL}=40 σημεία στο επίπεδο, που περιγράφονται με τις (X_i,Y_i) συντεταγμένες τους. Η σειρά με την οποία δίνονται έχει σημασία. Από αυτά τα σημεία γνωρίζετε τις συντεταγμένες 8 διαδοχικών (συγκεκριμένα αυτές του 20^{ου} μέχρι και το 27^{ο} σημείο). Αυτές, κατά σειρά είναι οι:
(-4,3), (-3,5), (-1,1), (2,5), (3,5), (5,-10), (6,-5), (8,-12).
Τα υπόλοιπα σημεία δεν δίνονται αλλά γνωρίζετε ότι η αλληλουχία (όλων) των N_{ALL} τετμημένων X_i είναι γνησίως αύξουσα.
(α) Αν τα N_{ALL} σημεία χρησιμοποιηθούν ως σημεία ελέγχου μιας καμπύλης Bezier, αποφανθείτε αν στο διάστημα $-4<x<8$ η προκύπτουσα καμπύλη διπλώνει και, αν ναι, βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής. Δικαιολογήστε κάθε απάντησή σας.
(β) Αν τα N_{ALL} σημεία αποτελούν τα παραμετρικά κομβικά σημεία μιας παρεμβολής με κυβικές b-splines κάποιων άλλων (N_{ALL}-2) σημείων (δηλαδή το αποτέλεσμα της επίλυσης εκείνων των δύο συστημάτων της σχετικής θεωρίας), βρείτε το σημείο της προκύπτουσας καμπύλης με το μεγαλύτερο y, σε οποιοδήποτε υποδιάστημα του [-4,8] τα παραπάνω δεδομένα επαρκούν για να απαντήσετε. Να δικαιολογήσετε την επιλογή του υποδιαστήματος.

ΓΕΝΙΚΕΣ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ:

Στις εξετάσεις του μαθήματος επιτρέπεται να έχετε μαζί σας το βιβλίο του μαθήματος, χωρίς πρόσθετες ασκήσεις κλπ γραμμένες σε αυτό. Τα βιβλία ελέγχονται. Άλλα βοηθήματα ή σημειώσεις (συμπεριλαμβανομένων αυτών των λυμένων ασκήσεων) δεν επιτρέπονται.

Μην ξεχνάτε τον υπολογιστή τσέπης σας. Δεν επιτρέπεται η χρήση κινητού τηλεφώνου για την εκτέλεση πράξεων! Και, προφανώς, μην παραλείπετε την εκτέλεση των πράξεων όπου ζητείται, απαντώντας περιγραφικά!

Λύση Θέματος 1:

Η θερμική ενέργεια της προσπίπτουσας ηλιακής ακτινοβολίας σε ένα 24ωρο θα προκύψει με αριθμητική ολοκλήρωση της συνάρτησης q(t).

Μη-μηδενική ακτινοβολία έχουμε από τις 6 π.μ. έως τις 20 μ.μ., επομένως ο αριθμός των ωριαίων υποδιαστημάτων είναι n=14 (άρτιος), και ο αριθμός των σημείων είναι n+1=15 (με αρίθμηση: 0, 1, ... 14 τις αντίστοιχες ώρες 6, 7, ... 20).

Μέθοδος Τραπεζίου:

$$I_T = (20-6)\frac{q(6)+q(20)+2\cdot(q(7)+q(8)+...+q(19))}{2\cdot 14} = 14\frac{0+0+2\cdot(12+46+...+34)}{2\cdot 14} = 2169\ Wh/m^2$$

Μέθοδος Simpson 1/3:

$$I_S = (20-6)\frac{q(6)+q(20)+4\cdot(q(7)+q(9)+...+q(19))+2\cdot(q(8)+q(10)+...+q(18))}{2\cdot 14} =$$
$$= 14\frac{0+0+4\cdot 1096+2\cdot 1073}{3\cdot 14} = 2176.7\ Wh/m^2$$

Η επιφάνεια του συλλέκτη πρέπει να είναι: A = Συνολικά απαιτούμενη ενέργεια / προσπίπτουσα ενέργεια ανά m^2 / συντελεστής απορρόφησης. Επομένως:

Με τη μέθοδο Τραπεζίου: $A_T = \dfrac{10000}{I_T\cdot 0.8} = 5.76\,m^2$

και με τη μέθοδο Simpson 1/3: $A_S = \dfrac{10000}{I_S\cdot 0.8} = 5.74\,m^2$

Παρατηρούμε ότι οι δύο μέθοδοι δίνουν παρόμοια αποτελέσματα, επειδή ο αριθμός των σημείων είναι σχετικά μεγάλος.

Λύση Θέματος 2:

Οι συντελεστές του πολυωνύμου $p_3(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6$ είναι: $\alpha_0 = -6$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 4$ και $\alpha_3 = 1$.

Βρίσκουμε την πρώτη ρίζα με τη μέθοδο Newton-Raphson και αρχική εκτίμηση: $x_0 = -\dfrac{a_0}{a_1} = 6.$

Η παράγωγος της πολυωνυμικής συνάρτησης είναι: $p'_3(x) = 3x^2 + 8x + 1$

Και η αναδρομική σχέση της μεθόδου γράφεται: $x_m = x_{m-1} - \left(\dfrac{x^3 + 4x^2 + x - 6}{3x^2 + 8x + 1} \right)_{m-1}$

Για ακρίβεια τριών σημαντικών ψηφίων το κριτήριο τερματισμού είναι: $\varepsilon_a = \left| \dfrac{x_m - x_{m-1}}{x_m} \right| \leq 0.5 \cdot 10^{-3}$

Με διαδοχικές επαναλήψεις λαμβάνουμε:

$x_0 = 6.$
$x_1 = 3.707$, $\varepsilon_\alpha = 0.62$
$x_2 = 2.266$, $\varepsilon_\alpha = 0.636$
$x_3 = 1.442$, $\varepsilon_\alpha = 0.571$
$x_4 = 1.082$, $\varepsilon_\alpha = 0.333$
$x_5 = 1.004$, $\varepsilon_\alpha = 0.078$
$x_6 = 1.000$, $\varepsilon_\alpha = 0.0037$
$x_7 = 1.000$, $\varepsilon_\alpha = 0.78e\text{-}5$

Άρα η πρώτη ρίζα είναι η x = 1.00

Το πολυώνυμο κατώτερου βαθμού θα είναι: $g_2(x) = b_2 x^2 + b_1 x + b_0$, με:

$b_2 = a_3 = 1.$
$b_1 = a_2 + t \cdot b_2 = 4 + t$
$b_0 = a_1 + t \cdot b_1 = 1 + t \cdot (4 + t) = 1 + 4t + t^2$

Επομένως, θέτοντας όπου t την ρίζα x = 1.0, προκύπτει: $g_2(x) = x^2 + 5x + 6$

Και $g'_2(x) = 2x + 5$

Βρίσκουμε μία ρίζα της $g_2(x)=0$ με τη μέθοδο Newton-Raphson και αρχική εκτίμηση: $x_0 = -\dfrac{b_0}{b_1} = -1.2$

Η αναδρομική σχέση της μεθόδου γίνεται τώρα: $x_m = x_{m-1} - \left(\dfrac{x^2 + 5x + 6}{2x + 5} \right)_{m-1}$

Με διαδοχικές επαναλήψεις λαμβάνουμε:

$x_0 = -1.2$
$x_1 = -1.754$, $\varepsilon_\alpha = 0.316$
$x_2 = -1.959$, $\varepsilon_\alpha = 0.105$
$x_3 = -1.998$, $\varepsilon_\alpha = 0.0196$
$x_4 = -2.000$, $\varepsilon_\alpha = 0.76e\text{-}3$
$x_5 = -2.000$, $\varepsilon_\alpha = 0.12e\text{-}5$

Άρα η δεύτερη ρίζα είναι η x = –2.00

Το πολυώνυμο κατώτερου βαθμού θα είναι: $q_1(x) = c_1 x + c_0$, με:

$c_1 = b_2 = 1.$

$c_0 = b_1 + t \cdot c_1 = 5 + t$

Θέτοντας όπου t την ρίζα x = –2.0, προκύπτει: $q_1(x) = x + 3$

Άρα η τρίτη ρίζα της πολυωνυμικής εξίσωσης $p_3(x)=0$ είναι η x = –3.00.

<u>Λύση Θέματος 3:</u>

(α) Δύο απαντήσεις οι: (α1) αφού η αλληλουχία (όλων) των N_{ALL} τετμημένων X_i είναι γνησίως αύξουσα και (α2) δεν γνωρίζω γιατί σε μια καμπύλης Bezier όλα τα σημεία ελέγχου ελέγχουν κάθε σημείο της προκύπτουσας καμπύλης, είναι εξίσου ορθές. Αναμένονταν μάλλον η απάντηση (α2) γιατί, η μαθηματικά σωστή απάντηση (α1) δεν ήταν γνωστή στους σπουδαστές και, εξάλλου, έπρεπε να δικαιολογηθεί η απάντηση (δηλαδή να δοθεί μαθηματική απόδειξη) κάτι που ασφαλώς ξέφευγε από τα όρια των εξετάσεων. Τονίζεται ότι, παραπάνω, αναφέρθηκε και η απάντηση (α1) για λόγους πληρότητας και μόνο!

(β) Σύμφωνα με το συμβολισμό της θεωρίας του μαθήματος, τα 8 δεδομένα σημεία είναι κάποια από τα $\vec{R}_i$ (υπάρχουν N_{ALL} παραμετρικά κομβικά σημεία με συντεταγμένες $\vec{R}_i = (X_i, Y_i), i = -1,0,...,N+1$). Άρα $N+3= N_{ALL}$. Με τη «νέα» αυτή αρίθμηση, το πρώτο δοσμένο σημείο (το (-4,3)) αντιστοιχεί στο $\vec{R}_{18}$ και το όγδοο (το (8,-12)) στο $\vec{R}_{25}$.

Κάνοντας χρήση μόνο των οκτώ δοσμένων παραμετρικών κομβικών σημείων, το πρώτο σημείο της καμπύλης των κυβικών b-splines που μπορεί να υπολογισθεί είναι το

$$\vec{r}_{19} = \frac{1}{6}\vec{R}_{18} + \frac{4}{6}\vec{R}_{19} + \frac{1}{6}\vec{R}_{20} = \frac{1}{6}(-4,3) + \frac{4}{6}(-3,5) + \frac{1}{6}(-1,1) = (-2.833,4)$$

ενώ, αντίστοιχα, το τελευταίο σημείο της καμπύλης των κυβικών b-splines που μπορεί να υπολογισθεί είναι το

$$\vec{r}_{24} = \frac{1}{6}\vec{R}_{23} + \frac{4}{6}\vec{R}_{24} + \frac{1}{6}\vec{R}_{25} = \frac{1}{6}(5,-10) + \frac{4}{6}(6,-5) + \frac{1}{6}(8,-12) = (-6.166,7)$$

Συνεπώς, μπορούμε να αποφανθούμε για το σημείο της προκύπτουσας καμπύλης με το μεγαλύτερο y μόνο στο (υπο)διάστημα [-2.833,6.166].

Αν, με χρήση της τοπικής παραμέτρου u, χρησιμοποιήσω τις συναρτήσεις βάσης

$$B^L(u) = \begin{cases} b_\alpha^L(u) = \frac{1}{6}(2+u)^3 & ,\alpha\nu\ -2 \le u \le -1 \\ b_\beta^L(u) = \frac{1}{6}\left(4-6u^2-3u^3\right) & ,\alpha\nu\ -1 \le u \le 0 \\ b_\gamma^L(u) = \frac{1}{6}\left(4-6u^2+3u^3\right) & ,\alpha\nu\ 0 \le u \le 1 \\ b_\delta^L(u) = \frac{1}{6}(2-u)^3 & ,\alpha\nu\ 1 \le u \le 2 \end{cases}$$

τότε, σε κάθε επιμέρους διάστημα $[\vec{R}_i, \vec{R}_{i+1}]$, με $19 \le i \le 24$, τα σημεία της καμπύλης παρεμβολής θα δίνονται από τη σχέση

$$\vec{r}(u) = b_\delta^{i-1}(u+1)\vec{R}_{i-1} + b_\gamma^i(u)\vec{R}_i + b_\beta^{i+1}(u-1)\vec{R}_{i+1} + b_\alpha^{i+2}(u-2)\vec{R}_{i+2}$$

με το u να μεταβάλλεται στο κλειστό διάστημα τιμών [0,1] (πρώτη τιμή για το $\vec{R}_i$, τελευταία τιμή για το $\vec{R}_{i+1}$). Με αντικατάσταση

$$\vec{r}(u) = \frac{1}{6}\left(2-(u+1)\right)^3\vec{R}_{i-1} + \frac{1}{6}\left(4-6u^2+3u^3\right)\vec{R}_i + \frac{1}{6}\left(4-6(u-1)^2-3(u-1)^3\right)\vec{R}_{i+1} + \frac{1}{6}\left(2+(u-2)\right)^3\vec{R}_{i+2}$$

ή, τελικά,

$$\vec{r}(u) = \frac{1}{6}\left(1-3u+3u^2-u^3\right)\vec{R}_{i-1} + \frac{1}{6}\left(4-6u^2+3u^3\right)\vec{R}_i + \frac{1}{6}\left(1+3u+3u^2-3u^3\right)\vec{R}_{i+1} + \frac{1}{6}u^3\vec{R}_{i+2}$$

Για να βρεθεί το σημείο της καμπύλης με το μεγαλύτερο y πρέπει η τελευταία σχέση να εφαρμοστεί πέντε φορές, μια φορά για καθένα από τα επιμέρους διαστήματα $[\vec{R}_{19}, \vec{R}_{20}]$, $[\vec{R}_{20}, \vec{R}_{21}]$, $[\vec{R}_{21}, \vec{R}_{22}]$, $[\vec{R}_{22}, \vec{R}_{23}]$ και $[\vec{R}_{23}, \vec{R}_{24}]$. Η παράμετρος u μεταβάλλεται, όπως ήδη λέχθηκε, στο διάστημα τιμών [0:1] για καθένα από αυτά. Στα πέντε αυτά διαστήματα, με αριθμητική αντικατάσταση των συντεταγμένων $\vec{R}_i$ και παραγώγιση της εκάστοτε συνάρτησης $y(u)$ υπολογίζεται το μέγιστο σημείο. Οι πράξεις παραλείπονται (υποδείχθηκε, προφορικά, να γίνει το ίδιο και στις εξετάσεις).