ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ
3ο ΕΞΑΜΗΝΟ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΕΜΠ
ΔΙΔΑΣΚΟΝΤΕΣ: Ι. ΑΝΑΓΝΩΣΤΟΠΟΥΛΟΣ - Κ.Χ. ΓΙΑΝΝΑΚΟΓΛΟΥ
ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΠΕΡΙΟΔΟΣ: ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΣ 2011

Θέματα Εξετάσεων Φεβρουαρίου 2011:

ΘΕΜΑ 1 (μονάδες 5)

Πρέπει με κυβικές b-splines να παρεμβάλετε, κατά σειρά, τα εξής 6 σημεία: (1,1), (3,4), (4,3), (5,8), (7,6) και (10,2). Ας είναι αυτά (x_0,y_0) ως και (x_5,y_5), αντίστοιχα

(α) Γνωρίζετε ότι θα χρειαστεί να λύσετε δύο γραμμικά συστήματα. Διατυπώστε τα (χωρίς να τα λύσετε) σε μητρωϊκή γραφή. Χρησιμοποιήστε σύμβολα με ΚΕΦΑΛΑΙΑ γράμματα (και κατάλληλους δείχτες) για τους αγνώστους τους και κάντε παραδοχές για ότι δεν δίνεται (αφού το αναφέρετε).

(β) Αν δεχθούμε ότι το να λύσω ένα σύστημα (ως τα προηγούμενα) στοιχίζει όσο να υπολογιστεί ο αντίστροφος του μητρώου των συντελεστών, αξίζει ή όχι εδώ να υπολογίσουμε τον αντίστροφο του ή των μητρώου/ων. Βαθμολογούνται μόνο δικαιολογημένες απαντήσεις.

(γ) Έστω ότι λύσατε τα συστήματα! Επειδή δεν έχετε όμως τώρα τα αριθμητικά αποτελέσματα, στη συνέχεια, για τους αγνώστους (γνωστούς πλέον!) των συστημάτων χρησιμοποιήστε τα ΚΕΦΑΛΑΙΑ σύμβολά τους. Με τις κυβικές b-splines δημιουργείτε καμπύλη 301 σημείων, τα οποία ισαπέχουν στον παραμετρικό χώρο. Δώστε την τελική έκφραση των συντεταγμένων (x,y) του σημείου της καμπύλης που αντιστοιχεί στην τιμή 121/300 της αδιάστατης παραμέτρου. Η ζητούμενη έκφραση θα έχει αριθμητικούς συντελεστές και ΚΕΦΑΛΑΙΑ σύμβολα.

ΘΕΜΑ 2 (μονάδες 3+2)

Ένα ραντάρ της Τροχαίας καταγράφει την ταχύτητα ενός αυτοκινήτου κάθε 4 δευτερόλεπτα και παρέχει τα ακόλουθα δεδομένα

Χρόνος (sec)	0	4	8	12	16	20	24	28	32
Ταχύτητα (km/h)	63	75	88	94	100	101	98	93	88

Ζητείται:

(α) Να βρείτε τη συνολική απόσταση που έχει διανύσει το αυτοκίνητο στα 32 sec, χρησιμοποιώντας τις μεθόδους Τραπεζίου και Simpson 1/3, και να συγκρίνετε τα δύο αποτελέσματα.

(β) Να προσεγγίσετε τη συνάρτηση ταχύτητας-χρόνου του αυτοκινήτου με πολυώνυμο $2^{ου}$ βαθμού, χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των Ελαχίστων Τετραγώνων. Στη συνέχεια, να βρείτε αναλυτικά την απόσταση που διανύει το αυτοκίνητο και να τη συγκρίνετε με τα αποτελέσματα του (α).

ΓΕΝΙΚΕΣ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ:

Στις εξετάσεις του μαθήματος επιτρέπεται να έχετε μαζί σας το βιβλίο του μαθήματος, χωρίς πρόσθετες ασκήσεις κλπ γραμμένες σε αυτό. Τα βιβλία ελέγχονται. Άλλα βοηθήματα ή σημειώσεις (συμπεριλαμβανομένων αυτών των λυμένων ασκήσεων) δεν επιτρέπονται.

Μην ξεχνάτε τον υπολογιστή τσέπης σας. Δεν επιτρέπεται η χρήση κινητού τηλεφώνου για την εκτέλεση πράξεων! Και, προφανώς, μην παραλείπετε την εκτέλεση των πράξεων όπου ζητείται, απαντώντας περιγραφικά!

Λύση Θέματος 1:

(α) Σύμφωνα με τη θεωρία των κυβικών b-splines, για N=5 (6 σημεία), οι συντεταγμένες των παραμετρικών κομβικών σημείων, με σύμβολα (X_{-1},Y_{-1}) ως και (X_6,Y_6), δίνονται από τη λύση του συστήματος:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_{-1} \\ X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \\ X_6 \end{bmatrix} = 6 \begin{bmatrix} 0 \\ x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ 0 \end{bmatrix} = 6 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 7 \\ 10 \\ 0 \end{bmatrix}$$

και ενός «αντίστοιχου» συστήματος για τα Y (γράψτε το). Τα δύο συστήματα διαφέρουν μόνο στα δεξιά τους μέλη. Έγινε η υπόθεση ότι υπάρχουν μηδενικές παράγωγοι στο πρώτο και τελευταίο σημείο (d_0=d_N=0, με βάση τις σχέσεις του βιβλίου). Σκεφτείτε πριν βιαστικά πείτε, με βάση τους τύπους του βιβλίου, ότι στην πρώτη και στην τελευταία γραμμή του τετραγωνικού πίνακα έπρεπε οι μη-μηδενικοί συντελεστές να είναι ίσοι με N, αντί με τη μονάδα!

(β) Θεωρητικά αξίζει, αρκεί να μην μας ενοχλεί η ανάγκη αποθήκευσης του αντίστροφου πίνακα. Εν τούτοις, η μικρή διάσταση (8x8) κάνει πρακτικά το κέρδος ασήμαντο. Εξάλλου, αν σκεφτείτε με ποια μέθοδο θα λύνατε το κάθε σύστημα, θα ήταν ίσως πιο έξυπνο να χειριζόσαστε μαζί τα δύο συστήματα, μιας και διαφέρουν μόνο στα δεξιά τους μέλη.

(γ) Στην κυβική b-splines καμπύλη των 301 σημείων (ισαπεχόντων στον παραμετρικό χώρο), το 122^o σημείο θα έχει (αδιάστατη, στο [0,1]) τιμή της παραμέτρου (έστω v) ίση με $v = \frac{122-1}{301-1} = \frac{121}{300} = 0.4033$. Ζητούνται οι συντεταγμένες (x,y) αυτού του σημείου.

Τα (N+1) σημεία που δίνονται για την παρεμβολή τους, ισαπέχουν κατά $\delta v = \frac{1}{\mathrm{N}} = \frac{1}{5} = 0.2$, αντιστοιχούν δηλαδή στις τιμές $v_0 = 0, v_1 = 0.2, v_2 = 0.4, v_3 = 0.6, v_4 = 0.8, v_5 = 1$. Άρα το ζητούμενο σημείο θα βρίσκεται μεταξύ των (x_2,y_2) και (x_3,y_3), επηρεαζόμενο από τις συναρτήσεις βάσεις που δομούνται με κέντρα τα σημεία (x_1,y_1), (x_2,y_2), (x_3,y_3) και (x_4,y_4). Η συμμετοχή καθενός από αυτά τα τέσσερα στις συντεταγμένες του ζητούμενου σημείου καθορίζεται από τις τιμές των συναρτήσεων των πολυώνυμων βάσης, που είναι (για το σημείο L της παρεμβολής) οι εξής (βλ. βιβλίο μαθήματος, με μικρή προσαρμογή των συμβόλων):

$$B^L(u)=\begin{cases} b_\alpha^L(u)=\frac{1}{6}(2+u)^3 & ,\alpha\nu\ -2\le u\le -1\\ b_\beta^L(u)=\frac{1}{6}\left(4-6u^2-3u^3\right) & ,\alpha\nu\ -1\le u\le 0\\ b_\gamma^L(u)=\frac{1}{6}\left(4-6u^2+3u^3\right) & ,\alpha\nu\ 0\le u\le 1\\ b_\delta^L(u)=\frac{1}{6}(2-u)^3 & ,\alpha\nu\ 1\le u\le 2\end{cases}$$

(εννοείται «μηδέν» στα υπόλοιπα διαστήματα). Με βάση τα ανωτέρω, μας ενδιαφέρουν τιμές-επιρροές από τα (x_1,y_1), (x_2,y_2), (x_3,y_3) και (x_4,y_4). Παρακάτω, προσέξτε τη διάκριση ανάμεσα στην ολική παράμετρο v και την τοπική (δηλαδή γύρω από κάθε κόμβο L) παράμετρο u. Θυμηθείτε N=5.

Για το σημείο (x_1,y_1) (L=1 ή v_1=0.2), η τιμή $v=0.4033$ αντιστοιχεί σε $u=5(0.4033-0.2)=1.0165$, οπότε $b_\delta^1(1.0165)=\frac{1}{6}(2-1.0165)^3=0.1586$. Για το σημείο (x_2,y_2) (L=2 ή v_2=0.4), η τιμή $v=0.4033$ αντιστοιχεί σε $u=5(0.4033-0.4)=0.0165$, οπότε $b_\gamma^2(0.0165)=\frac{1}{6}\left(4-6u^2+3u^3\right)=0.6664$. Για το σημείο (x_3,y_3) (L=3 ή v_3=0.6), η τιμή $v=0.4033$ αντιστοιχεί σε $u=5(0.4033-0.6)=-0.9835$, οπότε $b_\beta^3(-0.9835)=\frac{1}{6}\left(4-6u^2-3u^3\right)=0.1750$. Για το σημείο (x_4,y_4) (L=4 ή v_4=0.8), η τιμή $v=0.4033$ αντιστοιχεί σε $u=5(0.4033-0.8)=-1.9835$, οπότε $b_\alpha^4(-1.9835)=\frac{1}{6}(2+u)^3=7.5\times10^{-7}$.

Άρα, το σημείο με $v=0.4033$ θα έχει συντεταγμένες

$$x(v=0.4033)=b_\delta^1(1.0165)\cdot X_1+b_\gamma^2(1.0165)\cdot X_2+b_\beta^3(1.0165)\cdot X_3+b_\alpha^4(1.0165)\cdot X_4=$$
$$=0.1586\cdot X_1+0.6664\cdot X_2+0.1750\cdot X_3+7.5\times10^{-7}\cdot X_4$$

και

$$y(v=0.4033)=b_\delta^1(1.0165)\cdot Y_1+b_\gamma^2(1.0165)\cdot Y_2+b_\beta^3(1.0165)\cdot Y_3+b_\alpha^4(1.0165)\cdot Y_4=$$
$$=0.1586\cdot Y_1+0.6664\cdot Y_2+0.1750\cdot Y_3+7.5\times10^{-7}\cdot Y_4$$

Λύση Θέματος 2:

(α) Η ολοκλήρωση στο χρόνο, με τη μέθοδο τραπεζίου από a=0 sec ως b=32 sec, για N+1=9 ισαπέχοντα σημεία (άρα N=8), δίνεται από τη σχέση

$$I_{trap} = (b-a)\frac{f(x_0)+f(x_N)+2\sum\limits_{i=1}^{N-1} f(x_i)}{2N}\cdot\frac{1000}{3600}$$

όπου το τελευταίο κλάσμα-συντελεστής μετατρέπει τις μονάδες της ταχύτητας από km/h σε m/sec. Είναι, προφανώς, $x_0=0$, $f(x_0)=63$, κοκ. Με αριθμητική αντικατάσταση (κάντε την!) προκύπτει $I_{trap} = 805\,m$. Όταν η ολοκλήρωση γίνεται κατά Simpson 1/3, εφαρμόζεται η σχέση

$$I_{S13} = (b-a)\frac{f(x_0)+f(x_N)+4\sum\limits_{i=1,3,5}^{N-1} f(x_i)+2\sum\limits_{i=2,4,6}^{N-2} f(x_i)}{3N}\cdot\frac{1000}{3600}$$

και με αριθμητική αντικατάσταση (κάντε την!) προκύπτει $I_{S13} = 805.555\,m$. Η σύγκριση των δύο αριθμητικών αποτελεσμάτων σχολιάζεται εύκολα.

(β) Υιοθετώντας ένα πολυώνυμο δεύτερου βαθμού για την ταχύτητα f, συναρτήσει του χρόνου x, ήτοι το $g(x)=\alpha_0+\alpha_1 x+\alpha_2 x^2$, η θεωρία της προσέγγισης καμπυλών με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων οδηγεί στο σύστημα

$$\begin{bmatrix} N+1 & \sum\limits_{i=0}^{N} x_i & \sum\limits_{i=0}^{N} x_i^2 \\ \sum\limits_{i=0}^{N} x_i & \sum\limits_{i=0}^{N} x_i^2 & \sum\limits_{i=0}^{N} x_i^3 \\ \sum\limits_{i=0}^{N} x_i^2 & \sum\limits_{i=0}^{N} x_i^3 & \sum\limits_{i=0}^{N} x_i^4 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\alpha_0\\ \alpha_1\\ \alpha_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\sum\limits_{i=0}^{N} y_i \\ \sum\limits_{i=0}^{N} y_i x_i \\ \sum\limits_{i=0}^{N} y_i x_i^2\end{bmatrix} \quad \text{ή} \quad \begin{bmatrix} 9 & 144 & 3264 \\ 144 & 3264 & 82944 \\ 3264 & 82944 & 2245632 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\alpha_0\\ \alpha_1\\ \alpha_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}800\\ 13524\\ 305840\end{bmatrix}$$

Το σύστημα επιλύεται με απαλοιφή κατά Gauss και υπολογίζονται οι τρεις συντελεστές του δευτεροβάθμιου πολυωνύμου ως $\alpha_0=62.6909$, $\alpha_1=3.782305$ και $\alpha_2=-0.094629$. Άρα το ζητούμενο πολυώνυμο είναι το $g(x)= 62.6909+3.782305x-0.094629x^2$ (η απόκρισή του είναι σε km/h). Η απόσταση που συνολικά έχει διανυθεί μπορεί να προσεγγιστεί από την ακριβή/αναλυτική ολοκλήρωση του προσεγγιστικού πολυωνύμου (και να συγκριθεί με την προσεγγιστική/αριθμητική ολοκλήρωση πραγματικών δεδομένων, όπως έγινε στο(α)). Είναι

$$I_{LSQ} = \frac{1000}{3600}\cdot\int_0^{32} g(x)dx = \frac{1000}{3600}\cdot\int_0^{32}(62.6909+3.782305\text{x} - 0.094629\text{x}^2)dx =$$

$$= \frac{1000}{3600}\cdot\left[62.6909\text{x} + 3.782305\frac{\text{x}^2}{2} - 0.094629\frac{\text{x}^3}{3}\right]_0^{32} = 856.16m$$

Τα σχόλια από τη σύγκριση είναι δικά σας.

ΤΥΠΙΚΟ ΛΑΘΟΣ:

Στη δεύτερη άσκηση να μην προσεχτεί η αλλαγή μονάδων και να παραλειφθεί ο συντελεστής 1000/3600!