
Θέματα Εξετάσεων Σεπτεμβρίου 2010:

ΘΕΜΑ 1 (μονάδες 5)

Στο επίπεδο (x,y) ορίζεται χωρίο που περικλείεται από τον άξονα των x (δηλ. την οριζόντια ευθεία που περνά από το σημείο (0,0)) και την καμπύλη Bezier που ορίζουν τα εξής 5 σημεία ελέγχου (με τη σειρά που δίνονται):

$$(3,0),\quad (4,4),\quad (6,7),\quad (8,3),\quad (10,0)$$

Υπολογίστε το εμβαδόν του χωρίου αυτού με ολοκλήρωση κατά Gauss-Legendre, με τρία μόνο σημεία. Κατά τον υπολογισμό, θα χρειαστεί μάλλον να λύσετε μη-γραμμικές εξισώσεις. Προς τούτο χρησιμοποιήστε Newton-Raphson. Επειδή οι επιλύσεις των μη-γραμμικών εξισώσεων είναι παρόμοιες, μπορείτε να λύσετε τη μία από αυτές και να 'μαντέψετε' λογικά τις λύσεις των υπολοίπων, ώστε να βρείτε το ολοκλήρωμα.

ΘΕΜΑ 2 (μονάδες 3)

Να βρείτε τη λύση του παρακάτω συστήματος μη-γραμμικών εξισώσεων με τη μέθοδο Gauss-Seidel. Εκτελέστε 2 επαναλήψεις και παρατηρείστε–σχολιάστε τη δυνατότητα σύγκλισης.

$$x + 2x^2y - 26 = 0$$
$$y + 3xy - 21 = 0$$

ΘΕΜΑ 3 (μονάδες 2)

α) Να αναφέρετε τρόπους με τους οποίους μπορείτε να περιορίσετε το σφάλμα στρογγυλοποίησης και το σφάλμα αποκοπής κατά την εφαρμογή μεθόδου αριθμητικής παραγώγισης.

β) Να εκτιμήσετε το μέγιστο σχετικό σφάλμα υπολογισμού της ενέργειας H που ακτινοβολεί μια θερμή επιφάνεια A, με βάση τη σχέση Stefan-Boltzmann:

$$H = A\sigma e T^4$$

εάν η μέτρηση της απόλυτης θερμοκρασίας της επιφάνειας δίνει: $T = 1200 \pm 45$ K, ενώ τα A, σ, e είναι σταθερά.

ΓΕΝΙΚΕΣ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ:

Στις εξετάσεις του μαθήματος επιτρέπεται να έχετε μαζί σας το βιβλίο του μαθήματος, χωρίς πρόσθετες ασκήσεις κλπ γραμμένες σε αυτό. Τα βιβλία ελέγχονται. Άλλα βοηθήματα ή σημειώσεις δεν επιτρέπονται.

Μην ξεχνάτε τον υπολογιστή τσέπης σας. Δεν επιτρέπεται η χρήση κινητού τηλεφώνου για την εκτέλεση πράξεων!

Και, προφανώς, μην παραλείπετε την εκτέλεση των πράξεων όπου ζητείται, απαντώντας περιγραφικά!

Λύση Θέματος 1:

Η παραμετρική εξίσωση της καμπύλης Bezier, με 5 (άρα N=4) σημεία ελέγχου είναι η

$$x(t) = \sum_{i=0}^{N} C_i(t)\widehat{X}_i \qquad \text{και} \qquad y(t) = \sum_{i=0}^{N} C_i(t)\widehat{Y}_i$$

με $0 \le t \le 1$ και $\left(\widehat{X}_0, \widehat{Y}_0\right), ..., \left(\widehat{X}_3, \widehat{Y}_3\right)$ τα δοσμένα σημεία ελέγχου. Είναι

$$\begin{bmatrix} C_0(t) \\ C_1(t) \\ C_2(t) \\ C_3(t) \\ C_5(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ 0 & 4 & -12 & 12 & -4 \\ 0 & 0 & 6 & -12 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} t^0 \\ t^1 \\ t^2 \\ t^3 \\ t^5 \end{bmatrix}$$

άρα

$$\begin{aligned} x(t) &= \left(1 - 4t + 6t^2 - 4t^3 + t^4\right) \cdot 3 + \left(4t - 12t^2 + 12t^3 - 4t^4\right) \cdot 4 + \\ &\quad \left(6t^2 - 12t^3 + 6t^4\right) \cdot 6 + \left(4t^3 - 4t^4\right) \cdot 8 + \left(t^4\right) \cdot 10 = 3 + 4t + 6t^2 - 4t^3 + t^4 \\ y(t) &= \left(1 - 4t + 6t^2 - 4t^3 + t^4\right) \cdot 0 + \left(4t - 12t^2 + 12t^3 - 4t^4\right) \cdot 4 + \\ &\quad \left(6t^2 - 12t^3 + 6t^4\right) \cdot 7 + \left(4t^3 - 4t^4\right) \cdot 3 + \left(t^4\right) \cdot 0 = 16t - 6t^2 - 24t^3 + 14t^4 \end{aligned}$$

Για να υπολογισθεί το εμβαδόν I του χωρίου «κάτω» από την καμπύλη αυτή και μέχρι της ευθείας y=0, με ολοκλήρωση κατά Gauss-Legendre, με τρία μόνο σημεία, μετασχηματίζεται πρώτα το ολοκλήρωμα ώστε τα όριά του να είναι τα [-1,+1]. Είναι

$$I = \int_{3=a}^{10=b} y(x)dx = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} y(x')dx' = \mu I'$$

όπου $\mu = \dfrac{b-a}{2} = \dfrac{7}{2}$ και $\lambda = \dfrac{b+a}{2} = \dfrac{13}{2}$.

Θα είναι

$$I' = \frac{5}{9}y(x' = -0.774596) + \frac{8}{9}y(x' = 0) + \frac{5}{9}y(x' = 0.774596)$$

Αλλά, αφού $x = \mu x' + \lambda = \dfrac{7}{2}x' + \dfrac{13}{2}$,

$$\begin{aligned} x' &= -0.774576 \Rightarrow x = 3.788 \\ x' &= -0.0 \qquad\;\; \Rightarrow x = 6.5 \\ x' &= 0.774576 \quad \Rightarrow x = 9.212 \end{aligned}$$

Συνεπώς, μπορούμε να γράψουμε ότι

$$I = 3.5\left[\frac{5}{9}y(x=3.788) + \frac{8}{9}y(x=6.5) + \frac{5}{9}y(x=9.212)\right]$$

Για τον υπολογισμό των τιμών του t που αντιστοιχούν στις τρεις παραπάνω τιμές του x, με βάση τα πολυώνυμα Bezier που βρέθηκαν στην αρχή, θα χρειαστεί να λυθούν οι εξής τρείς μη-γραμμικές εξισώσεις:

$$3 + 4t + 6t^2 - 4t^3 + t^4 = 3.788$$
$$3 + 4t + 6t^2 - 4t^3 + t^4 = 6.5$$
$$3 + 4t + 6t^2 - 4t^3 + t^4 = 9.212$$

Προς τούτο χρησιμοποιείται η μέθοδος Newton-Raphson. Έτσι, λ.χ. για την πρώτη από τις τρεις, είναι (με k το δείκτη των επαναλήψεων)

$$t^{k+1} = t^k - \left[\frac{3 + 4t + 6t^2 - 4t^3 + t^4 - 3.788}{4 + 12t - 12t^2 + 4t^3}\right]^k$$

Οι λύσεις, κατά σειρά, των τριών εξισώσεων είναι $t = 0.16179,\ t = 0.5577,\ t = 0.90148$.

Δεδομένου ότι

$$y(x=3.788) = y(t=0.16179) = 2.33953$$
$$y(x=6.5) = y(t=0.5577) = 4.2483$$
$$y(x=9.212) = y(t=0.90148) = 1.2112$$

Το ζητούμενο ολοκλήρωμα είναι

$$I = 3.5\left[\frac{5}{9}\cdot 2.33953 + \frac{8}{9}\cdot 4.2483 + \frac{5}{9}\cdot 1.2112\right] = 20.121$$

$$0.5 \rightarrow 0.79166 \rightarrow 0.71104 \rightarrow 0.74658 \rightarrow \ldots \rightarrow 0.7366$$

Λύση Θέματος 2:

Φέρνουμε το σύστημα στη μορφή

$$x = f(x,y)$$
$$y = g(x,y)$$

επιλέγοντας έναν από τους πολλούς δυνατούς τρόπους αναδιάταξης των εξισώσεων του, όπως λ.χ. ο παρακάτω (k είναι ο δείκτης των επαναλήψεων)

$$x^{k+1} = \sqrt{\frac{26 - x^k}{2y^k}}$$
$$y^{k+1} = \frac{21 - x^{k+1}}{3x^{k+1}}$$

Ξεκινάμε τις επαναλήψεις λ.χ. με $(x^0, y^0) = (1.,0.5)$. Παίρνουμε διαδοχικά:

x	y
5.000000000000000	1.366666666666667
2.771809306079387	2.361073119312561
2.217879645110758	2.801313245555101
2.060295201740550	2.944349388875688
2.016274815722225	2.984985060953743
2.004343909762854	2.995995323174142
2.001155104854184	2.998935403716534
2.000306821412716	2.999717243972639
2.000081473803321	2.999924918358172
2.000021632896556	2.999980064477769
2.000005743833308	2.999994706852278
….	

τείνοντας προς τη λύση x=2 και y=3. Τέλος, βρίσκουμε αναλυτικά το άθροισμα των απολύτων τιμών των μερικών παραγώγων της συνάρτησης f και της g και παρατηρούμε ότι δεν είναι μικρότερο της μονάδας για κάθε τιμή των x και y. Επομένως, δεν μπορούμε εκ των προτέρων να διαπιστώσουμε εάν το σχήμα θα συγκλίνει.

Λύση Θέματος 3:

α) Για το σφάλμα στρογγυλοποίησης, βλ. θεωρία κεφαλαίου 1 και για το σφάλμα αποκοπής κατά την εφαρμογή μεθόδου αριθμητικής παραγώγισης βλ. το σχετικό κεφάλαιο περί πεπερασμένων διαφορών.

β) Αφού τα *A*, *σ*, *e* είναι σταθερά, μόνη πηγή σφάλματος είναι το *T*. Είναι, ουσιαστικά, *H=H(T)*, δηλαδή συνάρτηση μιας μεταβλητής. Επομένως (βλ. βιβλίο), το σχετικό σφάλμα ε_{H} της ποσότητας *H* είναι

$$\varepsilon_{\mathrm{H}} = \frac{\mathrm{H}'(\mathrm{T}) \cdot \mathrm{T}}{\mathrm{H}(\mathrm{T})} \cdot \varepsilon_{\mathrm{T}}$$

όπου

$$\mathrm{H}'(\mathrm{T}) = \frac{dH}{dT} = 4A\sigma e T^3$$

Άρα $\varepsilon_{\mathrm{H}} = 4\varepsilon_{\mathrm{T}}$. Αφού το μέγιστο σχετικό σφάλμα της θερμοκρασίας είναι $\varepsilon_{\mathrm{T}} = \dfrac{|45|}{1200} = 0.035 \Rightarrow \varepsilon_H = 0.15$.