ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ
3ο ΕΞΑΜΗΝΟ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΕΜΠ
ΔΙΔΑΣΚΟΝΤΕΣ: Ι. ΑΝΑΓΝΩΣΤΟΠΟΥΛΟΣ - Κ.Χ. ΓΙΑΝΝΑΚΟΓΛΟΥ
ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΠΕΡΙΟΔΟΣ: ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΣ 2010

Θέματα Εξετάσεων Φεβρουαρίου 2010:

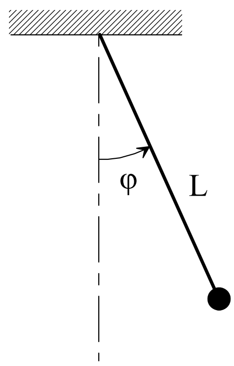
ΘΕΜΑ 1 (μονάδες 5)

Κατασκευάζεται καμπύλη Bezier από τα εξής 4 σημεία ελέγχου (με τη σειρά που δίνονται):

(1, 1), (4, 5), (6, 10/3), (12, 10),

Αποδείξτε εάν το σημείο (8, 6) ανήκει ή όχι στην προκύπτουσα καμπύλη Bezier. Αν χρειαστεί να λύσετε μη-γραμμική εξίσωση, χρησιμοποιήστε όποια μέθοδο αριθμητικής ανάλυσης θέλετε (με τρία βήματα).

ΘΕΜΑ 2 (μονάδες 3+2)



Ένα εκκρεμές έχει μήκος L και αφήνεται να ταλαντωθεί από μια αρχική γωνιακή θέση $\phi_0 = \pi / 6_0$, χωρίς αρχική ταχύτητα. Η εξίσωση που περιγράφει την κίνησή του είναι:

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} + \frac{g}{L} \cdot \sin\phi = 0$$

όπου g η επιτάχυνση της βαρύτητας, g =10 m/sec^2 και το μήκος L ισούται με 100.

α) Ζητείται να βρεθεί η γωνιακή θέση ϕ του εκκρεμούς τη χρονική στιγμή t = 6 sec, χρησιμοποιώντας όποια μέθοδο αριθμητικής ανάλυσης θέλετε με ακρίβεια τουλάχιστον δεύτερης τάξης και εκτελώντας 2 βήματα. Προσοχή στις μονάδες της γωνίας φ (ακτίνια).

β) Από τις δύο τιμές της φ για τα δύο βήματα του προηγούμενου ερωτήματος και δεχόμενοι ότι ισχύει η εξής προσεγγιστική έκφραση της συνάρτησης φ(t):

$$\phi(t) = A \cdot \cos(B \cdot t)$$

να υπολογίσετε την περίοδο της ταλάντωσης του εκκρεμούς (τώρα δεν ισχύει $\varphi(0)=\varphi_0$).

ΓΕΝΙΚΕΣ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ:

Στις εξετάσεις του μαθήματος επιτρέπεται να έχετε μαζί σας το βιβλίο του μαθήματος, χωρίς πρόσθετες ασκήσεις κλπ γραμμένες σε αυτό. Τα βιβλία ελέγχονται. Άλλα βοηθήματα ή σημειώσεις δεν επιτρέπονται.

Μην ξεχνάτε τον υπολογιστή τσέπης σας. Δεν επιτρέπεται η χρήση κινητού τηλεφώνου για την εκτέλεση πράξεων!

Και, προφανώς, μην παραλείπετε την εκτέλεση των πράξεων όπου ζητείται, απαντώντας περιγραφικά!

ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΥΛΙΚΟ ΠΟΥ ΤΙΘΕΤΑΙ ΣΤΗ ΔΙΑΘΕΣΗ ΤΩΝ ΣΠΟΥΔΑΣΤΩΝ ΑΠΟ ΤΟΥΣ ΔΙΔΑΣΚΟΝΤΕΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΚΑΛΥΤΕΡΗ ΠΡΟΕΤΟΙΜΑΣΙΑ ΤΟΥΣ ΓΙΑ ΤΙΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
-- ΕΙΝΑΙ ΥΛΙΚΟ ΓΙΑ ΜΕΛΕΤΗ ΚΑΙ ΔΕΝ ΣΥΜΠΕΡΙΛΑΜΒΑΝΕΤΑΙ ΣΤΑ ΕΠΙΤΡΕΠΟΜΕΝΑ ΒΟΗΘΗΜΑΤΑ ΤΗΝ ΩΡΑ ΤΗΣ ΕΞΕΤΑΣΗΣ --

---

Λύση Θέματος 1:

Η παραμετρική εξίσωση της καμπύλης Bezier, με 4 (άρα N=3) σημεία ελέγχου είναι η

$$x(t) = \sum_{i=0}^{N} C_i(t)\widehat{X}_i \qquad \text{και} \qquad y(t) = \sum_{i=0}^{N} C_i(t)\widehat{Y}_i$$

με $0 \le t \le 1$ και $\left(\widehat{X}_0, \widehat{Y}_0\right), ..., \left(\widehat{X}_3, \widehat{Y}_3\right)$ τα δοσμένα σημεία ελέγχου. Είναι

$$\begin{bmatrix} C_0(t) \\ C_1(t) \\ C_2(t) \\ C_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} t^0 \\ t^1 \\ t^2 \\ t^3 \end{bmatrix}$$

άρα

$$x(t) = \left(1 - 3t + 3t^2 - t^3\right)\cdot 1 + \left(3t - 6t^2 + 3t^3\right)\cdot 4 + \left(3t^2 - 3t^3\right)\cdot 6 + \left(t^3\right)\cdot 12 = 1 + 9t - 3t^2 + 5t^3$$
$$y(t) = \left(1 - 3t + 3t^2 - t^3\right)\cdot 1 + \left(3t - 6t^2 + 3t^3\right)\cdot 5 + \left(3t^2 - 3t^3\right)\cdot \frac{10}{3} + \left(t^3\right)\cdot 10 = 1 + 12t - 17t^2 + 14t^3$$

Αν αυτή η καμπύλη αυτή περνά από το σημείο (8, 6), οι επόμενες δύο εξισώσεις

$$1 + 9t - 3t^2 + 5t^3 = 8$$
$$1 + 12t - 17t^2 + 14t^3 = 6$$

πρέπει να ικανοποιούνται για την ίδια τιμή του t. Λύνουμε την πρώτη ως προς t, με αλγόριθμο σταθερού σημείου, στη μορφή $t^{k+1} = \left[7 + 3\left(t^k\right)^2 - 5\left(t^k\right)^3\right]/9$ (k είναι ο μετρητής των επαναλήψεων), με αρχική τιμή το 0.5 και προκύπτουν διαδοχικά

$$0.5 \to 0.79166 \to 0.71104 \to 0.74658 \to ... \to 0.7366$$

Συνεπώς, η πρώτη εξίσωση ικανοποιείται για t=0.7366. Το σημείο (8,6) θα ανήκει στην καμπύλη Bezier αν η ίδια τιμή του t ικανοποιεί και τη δεύτερη εξίσωση. Με αντικατάσταση

$$1 + 12\cdot 0.7366 - 17\cdot 0.7366^2 + 14\cdot 0.7366^3 = 6$$

Η οποία όμως δεν ικανοποιείται, άρα το σημείο (8,6) δεν ανήκει στην καμπύλη Bezier.

Λύση Θέματος 2:

(α) Η σ.δ.ε. διατυπώνεται ως το παρακάτω σύστημα δύο σ.δ.ε.

$$\frac{d\phi}{dt} = y = f_1(t,\phi,y)$$
$$\frac{dy}{dt} = -\frac{g}{L}\sin\phi = -\frac{1}{10}\sin\phi = f_2(t,\phi,y)$$

αι λύνεται με αρχικές συνθήκες $\phi_0 = \pi/6$, $y_0 = 0$ με τη μέθοδο Runge-Kutta δεύτερης τάξης για συστήματα σ.δ.ε. Για να φτάσουμε στο $t = 6\sec$ με δύο βήματα, πρέπει $\Delta t = 3\sec$ ($t_0 = 0\sec$, $t_1 = 3\sec$, $t_2 = 6\sec$).

Πρώτο βήμα $t_0 \to t_1$: Είναι, κατά σειρά:

$$k_{1,1} = \Delta t \cdot f_1(t_0,\phi_0,y_0) = 3y_0 = 0 \qquad k_{2,1} = \Delta t \cdot f_2(t_0,\phi_0,y_0) = 3\left(-\frac{1}{10}\sin\phi_0\right) = \frac{-3}{20} = -0.15$$

$$\bar{\phi}_1 = \phi_0 + k_{1,1} = \frac{\pi}{6} + 0 = \frac{\pi}{6} \qquad \bar{y}_1 = y_0 + k_{2,1} = 0 - 0.15 = -0.15$$

$$k_{1,2} = \Delta t \cdot f_1(t_1,\bar{\phi}_1,\bar{y}_1) = 3\bar{y}_1 = -0.45 \qquad k_{2,2} = \Delta t \cdot f_2(t_1,\bar{\phi}_1,\bar{y}_1) = 3\left(-\frac{1}{10}\sin\bar{\phi}_1\right) = -0.15$$

$$\phi_1 = \phi_0 + \frac{k_{1,1}+k_{1,2}}{2} = \frac{\pi}{6} + \frac{0-0.45}{2} = 0.2986 \qquad y_1 = y_0 + \frac{k_{2,1}+k_{2,2}}{2} = 0 + \frac{-0.15-0.15}{2} = -0.15$$

Δεύτερο βήμα $t_1 \to t_2$: Με τις ίδιες σχέσεις, προκύπτουν κατά σειρά:

$$k_{1,1} = \Delta t \cdot f_1(t_1,\phi_1,y_1) = 3y_1 = -0.45 \qquad k_{2,1} = \Delta t \cdot f_2(t_1,\phi_1,y_1) = 3\left(-\frac{1}{10}\sin\phi_1\right) = -0.08825$$

$$\bar{\phi}_2 = \phi_1 + k_{1,1} = 0.2986 - 0.45 = -0.1514 \qquad \bar{y}_2 = y_1 + k_{2,1} = -0.15 - 0.08825 = -0.23825$$

$$k_{1,2} = \Delta t \cdot f_1(t_2,\bar{\phi}_2,\bar{y}_2) = 3\bar{y}_2 = -0.71475 \qquad k_{2,2} = \Delta t \cdot f_2(t_2,\bar{\phi}_2,\bar{y}_2) = 3\left(-\frac{1}{10}\sin\bar{\phi}_2\right) = -0.04525$$

$$\phi_2 = \phi_1 + \frac{k_{1,1}+k_{1,2}}{2} = 0.2986 + \frac{-0.45-0.71475}{2} = -0.2838$$
$$y_2 = y_1 + \frac{k_{2,1}+k_{2,2}}{2} = -0.15 + \frac{-0.08825-0.04525}{2} = -0.21675$$

Άρα, η γωνιακή θέση ϕ του εκκρεμούς τη χρονική στιγμή t = 6 sec είναι $\phi_2 = -0.2838\,rad$.

(β) Για $t_1 = 3\sec$ και $t_2 = 6\sec$, όπου $\phi_2 = 0.2986\,rad$ και $\phi_2 = -0.2838\,rad$, ισχύουν οι

$$A \cdot \cos(3B) = 0.2986$$
$$A \cdot \cos(6B) = -0.2838$$

Επειδή $B = 2\pi/T$, για να βρεθεί η περίοδος T χρειάζεται το B. Διαιρώντας κατά μέλη

$$\frac{\cos(6B)}{\cos(3B)} = -095043 \quad \Rightarrow \quad B = \frac{1}{6}\cos^{-1}\left[-0.95043 \cdot \cos(3B)\right]$$

Στη μορφή αυτή εφαρμόζεται ο αλγόριθμος σταθερού σημείου, με αρχική τιμή τη μονάδα και προκύπτουν διαδοχικά

$$1.0 \to 0.05757 \to 0.46378 \to 0.29021 \to \ldots \to 0.345835$$

Άρα $B = 0.345835\sec^{-1}$ και $T = \dfrac{2\pi}{B} = \dfrac{2\pi}{0.345835} = 18.16816\sec$.

<u>ΤΥΠΙΚΟ ΛΑΘΟΣ:</u>

Σπουδαστές που δεν κατάλαβαν ή δεν θυμήθηκαν ή δεν μπορούσαν να λειτουργήσουν τον υπολογιστή τσέπης τους με ΑΚΤΙΝΙΑ (rad)!!!!!!